

CHARAKTERISIERUNG EINES GEBIETS DURCH
SPEKTRALDATEN EINES DIRICHLETPROBLEMS
ZUR STOKESGLEICHUNG

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Viktor Tsiporin
aus
St. Petersburg, Russland

Göttingen 2003

D7

Referent: Prof. Dr. Rainer Kress

Korreferent: PD Dr. Roland Potthast

Tag der mündlichen Prüfung: 20.01.2004

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Direktes Problem	7
2.1	Grundlagen zur Stokes Gleichung	7
2.1.1	Die Fundamentallösung und der Greensche Satz	7
2.1.2	Die hydrodynamischen Potentiale	8
2.2	Äusseres Dirichlet Problem bei C^1 -Randdaten	14
2.3	Äusseres Dirichlet Problem bei L^2 -Randdaten	19
2.4	Numerische Behandlung des ÄDP im \mathbb{R}^2	23
2.4.1	Das Nyström-Verfahren	23
2.4.2	Numerische Beispiele	26
3	Inverses Problem	29
3.1	Der dreidimensionale Fall	30
3.1.1	Faktorisierung des Meßoperators	30
3.1.2	Charakterisierung des Gebiets	34
3.2	Der zweidimensionale Fall	37
3.2.1	Faktorisierung des Meßoperators	37
3.2.2	Charakterisierung des Gebiets	41
4	Numerische Umsetzung	46
4.1	Rekonstruktion durch Reihenwertvergleich	47
4.2	Das exponentielle Abklingen der Eigenwerte	50
	Literaturverzeichnis	53

Kapitel 1

Einführung

Probleme zu lösen, die eine Beschreibung der Reaktion von physikalischen Systemen auf eine Wirkung von Aussen erfordern, war lange Zeit die vorrangige Aufgabe der mathematischen Physik. Der Umfang des auf diesem Gebiet angesammelten Wissens war zu Beginn der 1970er Jahre ausreichend, damit die Wissenschaft mit der Untersuchung einer neuen Klasse von Problemen anfangen konnte: Aus der Kenntnis der Reaktion eines Systems auf dessen Parameter zu schliessen. Die Fragestellungen dieser Art nennt man *inverse* Probleme, wodurch hervorgehoben wird, daß deren Formulierungen die Kenntnis der Lösung des entsprechenden *direkten*, i.d.R. einfacheren bzw. bereits untersuchten Problems voraussetzt.

Ein solches inverses Problem wird auch in der vorliegenden Arbeit behandelt: Das mit dem äußeren Dirichlet Problem zur Stokes-Gleichung (dem *direkten Problem*) verbundene inverse Streuproblem erfordert die Rekonstruktion der Form eines unbekanntes Objekts aus den Messungen des Ansprechverhaltens der Geschwindigkeitsfelder bei auf einer das Objekt umliegenden Kurve gesetzten Quellen und Meßstellen. Dieses Problem fällt in die Klasse der *inversen Streuprobleme*.

Die Stokes-Gleichung für das Geschwindigkeit-Druck-Paar (u, p)

$$\begin{cases} -\Delta u + \text{grad } p = 0 \\ \text{div } u = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

gibt eine adäquate Beschreibung von Strömungen inkompressibler Newtonscher Flüssigkeiten bei sehr niedrigen Reynoldszahlen, die wegen der typisch äußerst kleinen Geschwindigkeiten allgemein Kriechströmungen genannt werden. Sie bildet das Hauptmodell zur Beschreibung der Bewegung von Mikroorganismen (s.g. *microswimmers*), der geophysikalischen Strömungen oder aber auch der Sedimentation von Partikeln. Zu der linearen Stokes-Gleichung 1.1 führt, aus mathematischer Sicht, die Vernachlässigung des konvektiven Terms in den allgemeinen Navier-Stokes-Gleichungen

und die Annahme, daß die Flüssigkeitsdichte bei einem stationären Fluß verschwindet (s. z. B. [POZ]).

Das direkte Problem ist in der Literatur recht gut untersucht. Wie bei vielen Randwertaufgaben der mathematischen Physik bilden die Integralgleichungsmethoden auch hierbei ein bedeutendes Hilfsmittel. Eine *state-of-the-art*-Behandlung der mit 1.1 verbundenen Randwertprobleme mit der Randintegralgleichungsmethode findet man in [Power/Wrobel].

Unser Zugang zu dem inversen Problem basiert auf der Faktorisierungsmethode, die 1998 von A. Kirsch als Modifikation der *linear sampling Methode* vorgeschlagen wurde, um unterschiedliche Typen von inversen Streuproblemen bei der Helmholtz Gleichung zu behandeln (siehe z.B. [Kirsch1]). Während die meisten klassischen Algorithmen zur Gebietsrekonstruktion entweder einen iterativen Charakter haben (die Methoden Newtonschen oder Landweberschen Typs) und wiederholtes Lösen der direkten Probleme erfordern, oder den sogenannten Problemdekompositionszugang benutzen (*dual-space-method*, die Technik von Kirsch-Kreß, die Punktquellenmethode), gehört die Faktorisierungsmethode zu einer relativ neuen Klasse von bildgebenden Singularitätsmethoden, deren Ziel die punktweise Rekonstruktion des zu visualisierenden Streuobjekts ist. Für weitere Methoden dieser Klasse sei hier stellvertretend auf die Publikationen [Ikehata'98], [Potthast'01], [Luke/Potthast] verwiesen.

Bezogen auf den dreidimensionalen Fall des von uns behandelten inversen Problems läßt sich die Faktorisierungsmethode wie folgt beschreiben:

Für ein beschränktes Gebiet D in \mathbb{R}^3 mit zusammenhängendem C^3 -Rand ∂D und ein D enthaltendes C^2 -glattes beschränktes Gebiet B sind die Lösungen $u(x)$ der äußeren Dirichlet Probleme zu 1.1 mit den Randdaten

$$u_i = -\Psi_3^{(r,c)}(\cdot - z) \cdot e_i \quad \text{auf } \partial D$$

für alle $x, z \in \partial B$ bekannt, wobei mit $e_i, i = 1, \dots, 3$ die Einheitsvektoren in \mathbb{R}^3 bezeichnet sind und $\Psi_3^{(r,c)}$ die Fundamentallösung der Stokesgleichung ist (s. Kapitel 2). Faßt man diese Lösungen zu einer *Antwortmatrix* $w(x, y)$ zusammen, so zeigt die Untersuchung des *Meßoperators* $F_3 : (L^2(\partial B))^3 \rightarrow (L^2(\partial B))^3$, definiert als

$$(F_3 g)(x) := - \int_{\partial B} w(x, y) g(y) ds(y) \quad x \in \partial B,$$

daß er kompakt, selbstadjungiert und positiv semi-definit ist und somit eine eindeutig definierte Quadratwurzel $F_3^{\frac{1}{2}}$ besitzt. Ordnet man jedem Punkt $z \in B$ die Funktion $f_z(x) := \Psi^{(r,c)}(x - z)a$, $x \in \partial B$ mit einem $a = \text{const} \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$ zu, so läßt sich beweisen, daß z dann und nur dann in D liegt, wenn die Gleichung

$$F_3^{\frac{1}{2}} g = f_z \tag{1.2}$$

eine Lösung in $(L^2(\partial B))^3$ besitzt. Die Entscheidung, ob die Lösung von 1.2 in $(L^2(\partial B))^3$ liegt, ist der Konvergenzuntersuchung für ihre Fourier-Reihe (der Entscheidungsreihe) nach der hergeleiteten Basis gleichzusetzen.

Der Hauptvorteil der Methode von Kirsch gegenüber den iterativen Techniken besteht im Allgemeinen darin, daß keine *a priori* Information über die Form des Objekts und die Zahl seiner Komponenten benötigt wird, und nicht einmal die Kenntnis des Typs der Randbedingung erforderlich ist. Dabei zeichnet sich die Faktorisierungsmethode durch eine hohe numerische Effizienz aus: die Behandlung eines nichtlinearen Problems wird anhand der Eigenschaften eines linearen Operators vorgenommen, wobei kein numerischer Linearisierungsvorgang stattfindet.

Nicht erstaunlich ist also, daß die Anwendbarkeit dieser Methode und ihrer Varianten bei verschiedenen physikalischen Gegebenheiten derzeit aktiv überprüft wird, vor allem im Bereich der inversen Streuprobleme. Uns sind bereits folgende Resultate in diesem Bezug bekannt:

- für die skalare zweidimensionale Helmholtzgleichung bei Fernfelddaten im ganzen Raum ([Kirsch3]) und im geschichteten Medium ([Coyle]), bei Nahfelddaten für Freiraum und Halbraum ([Kirsch3], [CCM]) sowie für unbeschränkte periodische Streuobjekte ([Arens/Kirsch]);
- für einige Vektorfeldformulierungen [CHM],[HMO] (elektromagnetische Wellen, Maxwellgleichungen), [Kress3] (harmonische Vektorfelder);
- bei der Laplace-Gleichung für das inverse Dirichlet Problem in \mathbb{R}^3 ([Hähner1]) und in \mathbb{R}^2 ([Kress1], [Kress2]), für das inverse Neumann Problem in \mathbb{R}^2 ([KK]) sowie für das impedanztomographische Problem ([Brühl], [BRH]).
- Eine Erweiterung der Faktorisierungsmethode auf inverse Streuprobleme für elastische Wellen wurde von Alves und Kress ([AK]) sowie von Arens ([Arens]) durchgeführt.

In diese (bestimmt nicht vollständige) Liste fügt sich auch die vorliegende Arbeit. Wir geben eine theoretische Begründung der Anwendbarkeit der Faktorisierungsmethode auf den Fall der Stokes Gleichung und illustrieren sie anhand numerischer Beispiele. Die Motivation zu dieser Untersuchung beinhaltet zwei Aspekte: 1° Das direkte Problem ist vektoriell, 2° die Faktorisierungsmethode wurde bisher auf kein inverses Streuproblem der Hydrodynamik angewendet.

Im Kapitel 2 sind, vor allem aus vorhandener Literatur zusammengestellt, Ergebnisse der klassischen Lösbarkeitstheorie für die mit der Stokesgleichung 1.1 verbundenen Randwertprobleme vorgestellt, soweit diese für die Behandlung unseres inversen Problems relevant sind. Zusätzlich werden zwei neue Aussagen bewiesen.

Zunächst wird ein Überblick über den potentialtheoretischen Zugang zur Behandlung des Äusseren Dirichlet Problems (ÄDP) gegeben, wobei als erstes die grundlegenden Fragen von Existenz und Eindeutigkeit klassischer Lösungen beantwortet werden. Im Hinblick auf das inverse Problem ist uns vor allem der zum Existenznachweis benutzte Apparat von Interesse. Als nächstes überzeugen wir uns, daß dieser auch bei quadratsummierbaren Randdaten verwendbar bleibt. Dabei beweisen wir ein Resultat über die Eindeutigkeit der Lösung des Äusseren Dirichlet Problems bei L^2 -Randdaten und untersuchen die Sprungbeziehungen für die Stokes-Potentiale bei Dichten in L^2 .

Am Ende des Kapitels wird das numerisches Lösungsverfahren (das Nyström Verfahren) für das ÄDP beschrieben, das uns die synthetischen Ausgangsdaten für das inverse Problem liefert. Durch mehrere Beispiele demonstrieren wir die Effizienz dieses Verfahrens beim numerischen Lösen des Vorwärtsstreuproblems.

Das Kapitel 3 ist der theoretischen Begründung der Faktorisierungsmethode für das inverse Problem gewidmet. Nach der mathematischen Formulierung des Problems wird als erstes der dreidimensionale Fall untersucht. Dies erfolgt in zwei Schritten:

1° Für den Meßoperator wird eine faktorisierte Form $F_3 = GSG^*$ mit einem Hilfsoperator G und den direkten Werten des Einfachschichtpotentials S hergeleitet, aus welcher seine Abbildungseigenschaften durch Untersuchung der Faktoren ersichtlich werden. Auf diesem Wege wird u.a. die positive Definitheit von F_3 gezeigt und sein Nullraum beschrieben.

2° Anhand der festgestellten Eigenschaften des Meßoperators und seiner Eigenfunktionen wird eine vollständige orthonormale Basis des Raumes

$$L^2_{\perp\nu}(\partial B) := \{\varphi \in (L^2(\partial B))^3 : \langle \varphi, \nu|_{\partial B} \rangle_{L^2(\partial B)} = 0\}$$

konstruiert (hier steht $\nu|_{\partial B}$ für die äußere Einheitsnormale zu ∂B).

Mit dieser Basis beweisen wir die Hauptaussage des Abschnitts 3.1 – ein Kriterium für die Zugehörigkeit eines Punktes zum gesuchten Objekt im Sinne der Lösbarkeit der Gleichung 1.2 in $L^2_{\perp\nu}(\partial B)$.

Der etwas kompliziertere zweidimensionale Fall ist im Abschnitt 3.2 behandelt. Wegen des logarithmischen Verhaltens der Grundlösung im Unendlichen muß der Einfachschichtpotentialansatz zur Darstellung beschränkter Lösungen des Vorwärtsproblems modifiziert werden (vgl. Bemerkung 3.1). Die zur Untersuchung des zweidimensionalen Meßoperators (s. Teilabschnitt 3.2.1) notwendige Faktorisierung verändert sich entsprechend. Nach deren Herleitung konnten wir zeigen, daß auch der zweidimensionale Meßoperator kompakt, selbstadjungiert und positiv semi-definit mit dreidimensionalem Nullraum ist.

Nach dem Nachweis der Lösbarkeit des beschränkten äußeren Dirichlet Problems mit Hilfe des abgeänderten Einfachschichtpotentialansatzes ist im Teilabschnitt 3.2.2 das dem dreidimensionalen Fall analoge Entscheidungskriterium bewiesen.

Im Kapitel 4 ist die numerische Umsetzung des inversen Verfahrens beschrieben. Der sich aus der Theorie ergebende Algorithmus wird mit zwei verschiedenen Ansätzen implementiert. Der Vorstellung der numerisch erzielten Ergebnisse bei der eher intuitiven Rekonstruktion durch Reihenwertvergleich folgen Beispiele, welche das erwartete exponentielle Abklingen der Eigenwerte des Meßoperators zur Konvergenzuntersuchung der Entscheidungsreihe benutzen.

Kapitel 2

Direktes Problem

2.1 Grundlagen zur Stokes Gleichung

2.1.1 Die Fundamentallösung und der Greensche Satz

Der Fundamentaltensor $\Psi = (\Psi_{jk})_{j,k=1,\dots,m+1}$ des Stokes-Systems 1.1 im \mathbb{R}^m , $m \geq 2$, das sogenannte Stokeslet¹, lautet

$$\Psi_{jk} = \frac{1}{2\omega_m} \left\{ \frac{x_j x_k}{|x|^m} + \delta_{jk} \left\{ \begin{array}{l} \ln \frac{1}{|x|} \quad (m=2) \\ \frac{|x|^{2-m}}{m-2} \quad (m \geq 3) \end{array} \right\} \right\}, \quad j, k = 1, \dots, m \quad (2.1)$$

$$\Psi_{m+1,k} = \Psi_{k,m+1} = \frac{x_k}{\omega_m |x|^m}, \quad k = 1, \dots, m, \quad \Psi_{m+1,m+1} = \delta(x)$$

mit der Diracschen Distribution δ und der Oberfläche \mathbb{R}^m $\omega_m = 2\pi^{\frac{m}{2}}/\Gamma(\frac{m}{2})$ der $(m-1)$ -dimensionalen Sphäre im \mathbb{R}^m . Für die Herleitung des Fundamentaltensors s. z.B. [Lad].

Mit $\Psi^{(r,c)}$ wird in dieser Arbeit die führende Hauptmatrix (die Geschwindigkeitskomponente) von Ψ bezeichnet. Das Symbol r bedeutet hier „ohne letzte Zeile“, c - „ohne letzte Spalte“. Desweiteren verwenden wir folgende Notationen: für ein Funktionenpaar (u, p) , u - vektorwertig, p - skalar, seien

$$\mathcal{S} : \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} \rightarrow \mathcal{S}_p^u := \begin{pmatrix} -\Delta u + \nabla p \\ \nabla \cdot u \end{pmatrix}$$

der formelle Stokes-Operator,

¹Physikalisch entspricht das Stokeslet dem von einer Punktquelle erzeugtem Fluss.

$$Du := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$$

der Deformationstensor und

$$T : \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} \rightarrow T_p^u := -pI_m + 2Du \quad (2.2)$$

der dem Fluss (u, p) entsprechende Spannungstensor.

Mit diesen Bezeichnungen lässt sich das hydrodynamische Analogon des ersten Green-schen Satzes wie folgt formulieren:

Satz 2.1

Für ausreichend glatte, divergenzfreie Vektorfelder u, v und skalare Funktionen p, q in einem beschränkten Gebiet $D \in \mathbb{R}^m$ mit $\partial D \in C^1$ gilt (s. [Lad])

$$\int_D (\mathcal{S}_p^u) \cdot \begin{pmatrix} v \\ q \end{pmatrix} dy = - \int_{\partial D} (T_p^u \nu) \cdot v ds(y) + 2 \int_D Du : Dv dy. \quad (2.3)$$

Dabei steht ν für die äussere (bzgl. D) Einheitsnormale zu ∂D und die Operation „:“ für zwei $n \times n$ -Matrizen $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ ist erklärt als

$$A : B = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} B_{ij}.$$

Ist (u, p) ein Stokes-Fluss, d.h. es gilt $\mathcal{S}_p^u = 0$ in D , so folgt aus (2.3) sofort die nützliche Beziehung

$$\int_{\partial D} (T_p^u \nu) \cdot u ds(y) = 2 \int_D Du : Du dy, \quad (2.4)$$

welche das Energieerhaltungsgesetz zum Ausdruck bringt: die rechte Seite dieser Gleichung entspricht dem Verlust der mechanischen Energie im Kontrollvolumen D und die linke Seite beschreibt die Arbeit der Oberflächenkraft auf D (s. [POZ]).

2.1.2 Die hydrodynamischen Potentiale

Die Singularitäten in der Grundlösung der Stokes-Gleichung und in den von ihr durch Anwenden des Spannungsooperators ableitbaren Tensoren sind dieselben, wie bei den entsprechenden Ausdrücken der klassischen Potentialtheorie der Laplace Gleichung; viele Aussagen über die Regularitätseigenschaften der hydrodynamischen Potentiale lassen sich dementsprechend ähnlich dem klassischen Fall der Laplace-Gleichung machen. Die Beweise zu den in diesem Abschnitt ohne Beweis formulierten Sätze kann man z. B. in [Lad] nachschlagen.

Eine kleine Bemerkung zu den in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen: anstelle der etwas umständlichen Raumbezeichnungen $(L^2(D))^3$, $(C(D))^2$ u.ä. wird einfach $L^2(D)$, $C(D)$ usw. geschrieben, solange die gemeinte Bedeutung aus dem Kontext eindeutig hervorgeht.

Sei ∂D Rand eines beschränkten zusammenhängenden Gebiets D . Das *Einfachschichtpotential* (ESP) einer Dichte $\varphi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$, gegeben für $x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial D$ durch das Integral

$$(\mathbf{S}_m \varphi)(x) := \int_{\partial D} \Psi^{(c)}(x-y) \varphi(y) ds(y),$$

entspricht einem Fluß, der durch auf der Fläche ∂D gemäß φ verteilte Punktkräfte erzeugt wird. Es löst die Stokes-Gleichung für alle Punkte in $\mathbb{R}^m \setminus \partial D$.

Zwar wird der Kern des Einfachschichtpotentials singulär für Punkte der Fläche ∂D , aber die entsprechenden Integrale existieren als uneigentliche, wobei gilt:

Satz 2.2

Ist ∂D eine Lyapunov-Fläche und die Dichte φ stetig, so ist das Geschwindigkeitsfeld des Einfachschichtpotentials, gegeben durch

$$(\mathbf{S}_m \varphi)(x) := \int_{\partial D} \Psi^{(r,c)}(x-y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

im ganzen \mathbb{R}^m stetig.

Unter dem *Doppelschichtpotential* (DSP) einer Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ bzw. $L^2(\partial D)$ versteht man das $m+1$ -dimensionale Vektorfeld

$$(\mathbf{K}_m \varphi)(x) := \int_{\partial D} k_m(x,y) \varphi(y) ds(y) \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial D,$$

mit dem $(m+1) \times m$ Kern

$$k_m(x,y) = \left((T_x \Psi_l(x-y))_{ij} \nu_j(y) \right)_{li},$$

welcher für $i, l = 1, \dots, m, m \geq 2$ durch

$$k_{m;li}(x,y) = -\frac{m}{\omega_m} \frac{z_l z_i z \cdot \nu(y)}{|z|^{m+2}}, \quad (2.5)$$

$$k_{m;m+1,i}(x,y) = -\frac{2}{\omega_m} \left(\frac{z_i z \cdot \nu(y)}{|z|^{m+2}} - \frac{\nu_i(y)}{|z|^m} \right) \quad (2.6)$$

mit $z := x - y$ explizit gegeben ist.

Auch das Doppelschichtpotential löst die Stokes-Gleichung in $\mathbb{R}^m \setminus \partial D$.

Das Vektorfeld $K_m\varphi$, gegeben durch

$$(K_m\varphi)(x) := \int_{\partial D} k_m^{(r)}(x, y)\varphi(y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial D, \quad (2.7)$$

entspricht der Geschwindigkeitskomponente des DSP.

Desweiteren ist die normale Spannung $-T(\mathbf{S}_m\varphi)\nu$ des Einfachschichtpotentials von Interesse. Ist für die Fläche ∂D die Konstruktion von Parallellflächen möglich, so ist diese bei stetigen Dichten φ in einer Umgebung U von ∂D durch

$$\begin{aligned} (K'_m\varphi)(x) &= - \int_{\partial D} T_x(\Psi^{(c)}(x-y)\varphi(y))\nu(\tilde{x})ds(y) \\ &=: \int_{\partial D} H(x, y)\varphi(y)ds(y), \quad x \notin \partial D \end{aligned} \quad (2.8)$$

gegeben, wobei mit \tilde{x} die eindeutig bestimmte Projektion von $x \in U \setminus \partial D$ auf ∂D bezeichnet ist.

Die Integrale 2.7 und 2.8 existieren auch für $x \in \partial D$ (s. [Lad]); für die dadurch definierte Direktwerte von $K_m\varphi$ und $K'_m\varphi$ auf ∂D verwenden wir die Bezeichnungen $(K\varphi)_{(\partial D)}$ und $(K'\varphi)_{(\partial D)}$. Da für die Matrix H in 2.8 die Beziehung

$$H(x, y) = (k_m^{(r)}(x, y))^T = k_m^{(r)}(y, x), \quad x, y \in \partial D$$

gilt (vgl. [Varnhorn], S. 18), sind die Randintegraloperatoren $K_{(\partial D)}$ und $K'_{(\partial D)}$ bezüglich des Dualsystems

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\partial D} \varphi \cdot \psi ds$$

zueinander adjungiert.

Für die Vektorfelder $(K_m\varphi)$ und $(K'_m\varphi)$ gelten dem potentialtheoretischen Fall ähnliche Sprungrelationen:

Satz 2.3

Ist ∂D eine Lyapunov-Fläche, so sind die Vektorfelder K_m und K'_m bei Dichten $\varphi \in C(\partial D)$ stetig in D und in $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$, wobei für ihre Grenzwerte an ∂D gilt

$$(K\varphi)_{\pm} = \mp \frac{1}{2}\varphi + (K\varphi)_{(\partial D)} \quad (2.9)$$

und

$$(K'\varphi)_{\pm} = \pm \frac{1}{2}\varphi + (K'\varphi)_{(\partial D)}. \quad (2.10)$$

Anmerkung

Ist das Paar (u, p) das Einfachschichtpotential einer stetigen Belegung φ , so kann man die Sprungbeziehung 2.10 in der Form

$$(T_p^u \nu)_\pm = \mp \frac{1}{2} \varphi + (T_p^u \nu)_{(\partial D)} \quad (2.11)$$

schreiben.

Klar von den Potentialen selbst sind die folgenden Randintegraloperatoren zu unterscheiden, die wir hier für das Weitere einführen:

$$(S\varphi)_{(\partial D)}(x) = \int_{\partial D} \Psi^{(r,c)}(x-y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (2.12)$$

$$(K\varphi)_{(\partial D)}(x) = \int_{\partial D} k_m^{(r)}(x,y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (2.13)$$

$$(K'\varphi)_{(\partial D)}(x) = - \int_{\partial D} T_x(\Psi^{(c)}(x-y) \varphi(y)) \nu(x) ds(y), \quad x \in \partial D. \quad (2.14)$$

Um im weiteren die Lösbarkeitstheorie für das Äussere Dirichlet Problem bei L^2 -Randdaten zu entwickeln, brauchen wir die Erweiterung der Aussagen der Sätze 2.2 und 2.3 für quadratsummierbare Dichten. Aussagen dieser Art wurden für die Potentiale bei der Helmholtz-Gleichung von H. Kersten ([Kersten]) gezeigt. Die Idee seines Beweises kann ohne weiteres auf die Stokes-Potentiale übertragen werden; da dies in der Literatur noch nicht explizit gemacht worden ist, erscheint es uns ratsam, hier einen Beweis zu geben.

Lemma 2.4

Ist ∂D C^2 -glatt und $\varphi \in L^2(\partial D)$, so gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \int_{\partial D} |(S\varphi)(x \pm s\nu(x)) - (S\varphi)_{(\partial D)}(x)|^2 ds(x) \rightarrow 0 \quad (2.15)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \int_{\partial D} |(K\varphi)(x \pm s\nu(x)) - (K\varphi)_{(\partial D)}(x) \pm \frac{1}{2} \varphi(x)|^2 ds(x) \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \int_{\partial D} |(K'\varphi)(x \pm s\nu(x)) - (K'\varphi)_{(\partial D)}(x) \mp \frac{1}{2} \varphi(x)|^2 ds(x) \rightarrow 0 \quad (2.17)$$

Beweis: Für $s > 0$ betrachte man Systeme S_s, K_s, K'_s von aus $L^2(\partial D)$ nach $C(\partial D)$ wirkenden Operatoren, gegeben durch

$$\begin{aligned} (S_s \varphi)(x) &:= (S\varphi)(x + s\nu(x)), \\ (K_s \varphi)(x) &:= (K\varphi)(x + s\nu(x)), \\ (K'_s \varphi)(x) &:= (K'\varphi)(x + s\nu(x)). \end{aligned}$$

Als Operatoren mit stetigen, bei $s = 0$ ggf. schwach singulären Kernen sind S_s, K_s und K'_s für alle $s \geq 0$ stetig bezüglich der L^2 -Norm, eingeschränkt auf $C(\partial D)$ auch

bezüglich der Maximumnorm.

Führt man nun für $s > 0$ die Operatoren

$$\begin{aligned} S_{s,0} &:= S_{\pm s} - S_0, \\ K_{s,0} &:= K_{\pm s} - K_0 \pm \frac{1}{2}I, \\ K'_{s,0} &:= K'_{\pm s} - K'_0 \mp \frac{1}{2}I \end{aligned}$$

ein, so können die Aussagen der Sätze 2.2 und 2.3 folgendermaßen zusammengefasst werden: für $\varphi \in C(\partial D)$ gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \|S_{s,0}\varphi\|_\infty = \lim_{s \rightarrow 0_+} \|K_{s,0}\varphi\|_\infty = \lim_{s \rightarrow 0_+} \|K'_{s,0}\varphi\|_\infty = 0. \quad (2.18)$$

Das gleiche gilt auch für die L^2 -adjungierten Operatoren $S_{s,0}^*$, $K_{s,0}^*$, $K'_{s,0}^*$: da diese sich durch das formale Vertauschen der Argumente der jeweiligen Integralkerne ergeben, erfolgt die Herleitung der Beziehungen

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \|S_{s,0}^*\varphi\|_\infty = \lim_{s \rightarrow 0_+} \|K_{s,0}^*\varphi\|_\infty = \lim_{s \rightarrow 0_+} \|K'_{s,0}^*\varphi\|_\infty = 0 \quad (2.19)$$

bei $\varphi \in C(\partial D)$ analog zu 2.18.

Sei $(T_s)_{0 < s \leq s_0}$ irgend eines der Operatorensysteme S_s, K_s, K'_s . In der schwächeren L^2 -Norm gilt also für $\varphi \in C(\partial D)$

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \|T_s\varphi\|_{L^2(\partial D)} = \lim_{s \rightarrow 0_+} \|T_s^*\varphi\|_{L^2(\partial D)} = 0, \quad (2.20)$$

und es bietet sich an, den Satz von Banach-Steinhaus anzuwenden, um 2.20 auch für $\varphi \in L^2(\partial D)$ zu folgern. Dafür muß die gleichmäßige Beschränktheit der Operatoren $(T_s)_{0 < s \leq s_0}$ in $L^2(\partial D)$ gezeigt werden.

Aus 2.18 und 2.19 folgt, daß für jedes $\varphi \in C(\partial D)$ eine Konstante c_φ mit $\|T_s\varphi\|_\infty < c_\varphi$ und $\|T_s^*\varphi\|_\infty < c_\varphi$ für alle s existiert. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, angewandt im Banachraum $(C(\partial D), \|\cdot\|_\infty)$, sichert nun die Existenz einer Konstanten C mit $\|T_s|C(\partial D)\|_\infty \leq C$ und $\|T_s^*|C(\partial D)\|_\infty \leq C$ für alle s .

Für die selbstadjungierten und in $(C(\partial D), \|\cdot\|_\infty)$ stetigen Operatoren $T_s^*T_s$ liefert nun der Satz von Lax

$$\|T_s^*T_s\|_{L^2(\partial D)} \leq \|T_s^*T_s|C(\partial D)\|_\infty,$$

woraus mit der Identität $\|T_s\|_{L^2(\partial D)}^2 = \|T_s^*\|_{L^2(\partial D)}^2 = \|T_s^*T_s\|_{L^2(\partial D)}$ und der obigen Konstanten C folgt

$$\|T_s\|_{L^2(\partial D)} = \|T_s^*\|_{L^2(\partial D)} \leq C, \quad \forall s \in (0, s_0)$$

und die Aussage des Lemmas folgt mit Anwendung des Satzes von Banach-Steinhaus.

□

2.2 Äusseres Dirichlet Problem bei C^1 -Randdaten

Sei $D \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$ ein beschränktes zusammenhängendes Gebiet mit geschlossenem C^2 -Rand ∂D . Wir betrachten zunächst das äussere Dirichlet Problem für das Stokessche System in dessen klassischer Formulierung. Diese besteht in der Aufgabe, ein Lösungspaar (u, p) mit

$$u \in (C^2(D^+) \cap C^1(\overline{D^+}))^2, p \in C^1(D^+) \cap C(\overline{D^+}) \quad (2.21)$$

zu

$$\begin{cases} -\Delta u + \text{grad } p = 0 \\ \text{div } u = 0 \end{cases} \quad \text{in } D^+, \quad (2.22)$$

zu finden, wobei u , eingeschränkt auf den Rand des Gebiets, mit einem vorgegebenen Vektorfeld $f \in C^1(\partial D)$ übereinstimmt und im Unendlichen folgendes Verhalten aufweist:

$$\nabla^k u(x) = O(|x|^{2-m-k}), \quad k = 0, 1, \quad (2.23)$$

$$p(x) = O(|x|^{1-m}). \quad (2.24)$$

Mit D^+ wird hier, wie üblich, das unbeschränkte Gebiet $D^+ := \mathbb{R}^m \setminus \overline{D}$ bezeichnet.

Der Nachweis der Eindeutigkeit für dieses Problem stellt wegen der Anwendbarkeit der Greenschen Formel keine Schwierigkeit dar; es gilt (siehe [Varnhorn], Lemma 1.1):

Satz 2.5

Das ÄDP 2.21-2.24 hat für beliebige Randdaten $f \in C^1(\partial D)$ höchstens eine Lösung. Ist ein $a_\infty \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben, kann die Bedingung 2.23 im Fall $m = 2, k = 0$ zu

$$u(x) - a_\infty \ln |x| = O(1)$$

ohne Beeinträchtigung der Eindeutigkeit abgeschwächt werden.

Das innere Dirichlet Problem, dessen Formulierung auf natürliche Weise aus der obigen Definition durch das Ersetzen von D^+ mit D und die Wegnahme der Asymptotikanforderung hervorgeht, steht nicht im Mittelpunkt unserer Untersuchungen; für technische Zwecke brauchen wir jedoch seine Eindeutigkeit. Zugleich zeigt die folgende Aussage einen anderen Weg zum Eindeutigkeitsbeweis sowie eine leichte Abschwächung der Regularitätsanforderungen des Satzes 2.5.

Satz 2.6

Das innere Dirichlet Problem für Randdaten $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ mit

$$\int_{\partial D} f \cdot \nu \, ds = 0$$

und das äussere Dirichlet Problem für Randdaten $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ sind in $H^1(D)$ bzw. $W^1(D^+) := \{u : \frac{u(x)}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}} \in L^2(D^+), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(D^+), i = 1, \dots, m\}$ eindeutig lösbar.

Beweis: Wir skizzieren hier den in [Dautray/Lions] gegebenen Beweis. Nach [Lad] existiert zu den Randdaten f eine Erweiterungsabbildung $Rf \in H^1(D)$ beziehungsweise $Rf \in W^1(D^+)$ mit

$$Rf|_{\partial D} = f \quad \text{und}$$

$$\operatorname{div}(Rf) = 0 \quad \text{in } D \text{ bzw. } D^+.$$

Mit der Bezeichnung $H_0^1(D)$ für den Abschluß von $C_0^\infty(D)$ in $H^1(D)$ sowie $W_0^1(D^+)$ für den Abschluß von $C_0^\infty(D^+)$ in $W^1(D^+)$ kann man nun das innere und das äussere Dirichlet Problem in folgende Variationsformulierungen für die Unbekannte $v := u - Rf$, $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ überführen:

$$\int_D \text{ bzw. } \int_{D^+} Dv : Dw \, dx = - \int_D \text{ bzw. } \int_{D^+} D(Rf) : Dw \, dx, \quad (2.25)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (2.26)$$

$$v \in H_0^1(D) \quad \text{bzw.} \quad v \in W_0^1(D^+)$$

für alle $w \in H_0^1(D)$ bzw. $w \in W_0^1(D)$ mit $\operatorname{div} w = 0$.

Diese Probleme lassen sich mit dem Satz von Lax-Milgram behandeln. Die Koerzitivität der Bilinearform der linken Seite in 2.25 für das innere Problem folgt aus der Ungleichung von Poincaré, die für die linke Seite beim äusseren Problem aus einer geeigneten Darstellung der Norm in $W_0^1(D^+)$ (s. [Dautray/Lions]). \square

Die Existenz von Lösungen zum Problem 2.21-2.24 kann auf verschiedenen Wegen gezeigt werden. Zum Einen besteht die Möglichkeit, den Einfachschichtpotentialansatz anzuwenden, der zur Lösung einer Integralgleichung erster Art mit dem kompakten Operator $S_{\partial D}$ führt, was mit klaren numerischen Nachteilen verbunden ist. Sucht man im zweidimensionalen Fall die beschränkte Lösung des ÄDP, muß der Einfachschichtpotentialansatz wegen des logarithmischen Verhaltens der Grundlösung im Unendlichen zusätzlich modifiziert werden (vgl. [Kress1], S. 118f).

Der Wunsch, zur konstruktiver Lösung der Dirichlet Probleme zum Stokesschen System Integralgleichungen zweiter Art zu erhalten, führt zum Gebrauch des Doppelschichtpotentials im Ansatz. Da dieses allein nicht ausreicht, um beliebige Stokes-Flüsse darzustellen (wie der folgende Satz es zeigt), wurden in der Literatur einige Abänderungen des Doppelschichtpotentialansatzes vorgeschlagen. Wir benutzen sie sowohl für die numerische Behandlung des Vorwärtsproblems, als auch für die Theorie des inversen Problems.

Satz 2.7

Die Nullräume der Operatoren $\frac{1}{2}I + K$ und $\frac{1}{2}I + K'$ sind eindimensional und sind gegeben durch

$$N\left(\frac{1}{2}I + K\right) = \text{span}\{\psi_0\}, \quad N\left(\frac{1}{2}I + K'\right) = \text{span}\{\nu\} \quad (2.27)$$

mit einem ψ_0 , für das gilt

$$\int_{\partial D} \psi_0 \cdot \nu \, ds \neq 0. \quad (2.28)$$

Die Nullräume der Operatoren $\frac{1}{2}I - K$ und $\frac{1}{2}I - K'$ haben Dimension 6 im räumlichen und 3 im zweidimensionalen Fall.

Beweis: Siehe z.B. [Power/Wrobel]. Von Odqvist (1938) wurde gezeigt, daß die homogene Integralgleichung $\frac{1}{2}\varphi - K'\varphi = 0$ im \mathbb{R}^m genau sechs ($m = 3$) bzw. drei ($m = 2$) linear unabhängige Lösungen besitzt, nämlich die Vektoren der Starrkörperbewegungen im \mathbb{R}^m . Diese sind im Zweidimensionalen durch $\varphi_i = e_i, i = 1, 2$ (die Einheitsvektoren) und $\varphi_3 = (x_2, -x_1)$ gegeben (wir nehmen o.B.d.A. an, daß der Koordinatenanfang im Gebiet D liegt). \square

Der Idee, das Spektrum von $K_{\partial D}$ durch zusätzliche Terme zu stören, um diese Singularität seiner Resolvente zu beseitigen, ist die Methode des gemischten Doppel- und Einfachschichtpotentialansatzes entsprungen. Sie wurde eingeführt für den Fall $m = 2$ in ([Hsiao/Kress]), wo man das folgende Ergebnis findet:

Satz 2.8

Für jedes $a_\infty \in \mathbb{R}^2$ und $f \in C(\partial D)$ ist die Integralgleichung

$$f + \frac{4\pi}{|\partial D|} S_2 a_\infty = \left(-\frac{1}{2}I + K_{(\partial D)} - \eta S_{(\partial D)}(I - M) - \alpha |\partial D| M\right) \varphi, \quad (2.29)$$

mit dem Oberflächenmittelwert M

$$M\varphi := \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} \varphi(y) \, ds, \quad (2.30)$$

und einem Parameterpaar $\eta > 0, \alpha \neq 0$ eindeutig lösbar.

Ist $\varphi \in C(\partial D)$ Lösung von 2.29, so ist die Lösung des äußeren Stokes Problems durch

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} (x) &= -\frac{4\pi}{|\partial D|} (\mathbf{S}_2 a_\infty)(x) + (\mathbf{K}_2 \varphi)(x) \\ &\quad - \eta (\mathbf{S}_2 (I - M_2) \varphi)(x) - \alpha \int_{\partial D} \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} ds \end{aligned} \quad (2.31)$$

gegeben. Durch geeignete Wahl der Parameter α, η läßt sich die Konditionszahl entsprechender Integraloperatoren minimieren.

Anmerkung 2.1

Auf diesem Ansatz basiert die von uns verwendete numerische Methode zur Behandlung des äusseren Dirichlet Problems. Man beachte die Modifikation des Einfachschichtpotentials, die im Ansatz verwendet ist: wegen des erwähnten logarithmischen Verhaltens der Grundlösung im Unendlichen ist sie notwendig, um den Fall $a_\infty = 0$ nicht auszuschliessen. \square

Die Erweiterung der Methode der gemischten Potentiale auf den dreidimensionalen Fall findet man in [Hebeker]:

Satz 2.9

Der Operator $-\frac{1}{2}I + K_{(\partial D)} - S_{(\partial D)} : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ ist injektiv.

Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} (x) = (\mathbf{K}_3\varphi)(x) - (\mathbf{S}_3\varphi)(x), \quad (2.32)$$

liefert die Lösung des Problems 2.21-2.24, falls die Funktion φ die Randintegralgleichung

$$f = \left(-\frac{1}{2}I + K_{(\partial D)} - S_{(\partial D)}\right)\varphi. \quad (2.33)$$

erfüllt.

In einem nachfolgendem Abschnitt geben wir eine kurze Beschreibung des Nyström-Verfahrens zur numerischen Behandlung der Integralgleichung 2.29. Dabei werden wir sehen, daß die Voraussetzung eines C^2 -glatten Randes auch für die Numerik wesentlich ist: die Approximation der hier vorkommenden Integrale erfordert wegen der Singularität im Kern des Einfachschichtpotentials eine Taylorentwicklung des Integranden in einer Umgebung des singulären Punktes, wobei Terme zweiter Ordnung vorkommen.

Vor allem, um dieses zu umgehen, haben Power and Miranda ([Power/Miranda]) gezeigt, daß man die Lücke im Wertebereich des Doppelschichtpotentials schliessen kann, indem das Einfachschichtpotential in 2.32 durch eine Konstante und ein Paar sich im Gebiet befindenden Singularitäten, nämlich durch eine Kombination eines Stokelets gegebener Stärke und eines Stokelets mit Druck gleich Null und einer unbekannter Stärke, ersetzt werden kann².

Diese Methode, in der Literatur als *the completed double layer boundary integral method* bekannt, wurde in ([Power]) auf den zweidimensionalen Fall übertragen. Für unsere Anwendungen, nämlich für die theoretische Behandlung des inversen Problems im Zweidimensionalen, ist die damit verbundene Lösungsdarstellung insofern

²Das Stokeletsche Rotlet konstanter Stärke w ist definiert als die singuläre Lösung der inhomogenen Stokes-Gleichung mit $\nabla x w \delta(x)$ in der rechten Seite.

interessant, daß sie das im Unendlichen im Allgemeinen nicht abklingende Einfachschichtpotential nicht beinhaltet.

Entsprechend der Formulierung in [Power] sucht man das Geschwindigkeitsfeld in der Form

$$u(x) = \Psi^{(r,c)}(x)a_\infty + (K_2\varphi)(x) + \frac{1}{2\pi|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \int_{\partial D} \varphi(y) \cdot \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} ds(y) - \frac{|\partial D|}{2\pi} M\varphi \quad (2.34)$$

mit gewisser Dichtefunktion $\varphi \in C(\partial D)$.

Das zweidimensionale Rotlet der Stärke w hat die Gestalt

$$(R_i\varphi)(x) = \frac{\epsilon_{ijk}w_j(\varphi)\mathbf{x}_k}{|x|^2} \quad i = 1, 2; \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (2.35)$$

wobei \mathbf{x} als dreidimensionaler Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$ definiert ist und ϵ_{ijk} den alternierenden Einheitstensor bezeichnet. Der Term

$$(L\varphi)(x) := \frac{1}{2\pi|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \int_{\partial D} \varphi(y) \cdot \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} ds(y)$$

im Ansatz stellt also ein Rotlet mit

$$w_1 = w_2 = 0, \quad w_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(x) \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} ds(x)$$

dar; man merke, daß $(x_2, -x_1)$ eine der Festkörperbewegungen der zweidimensionalen Flüssigkeit darstellt. Der Term $M\varphi$ ist in seinen Komponenten linear von den beiden anderen Festkörperbewegungen $(1, 0)$ und $(0, 1)$ abhängig. Dadurch läßt sich die Lücke im Wertebereich des Doppelschichtpotentialoperators kompensieren. Es gilt ([Power])

Satz 2.10

Die dem Ansatz 2.34 entsprechende Randintegralgleichung

$$f - \Psi^{(r,c)}a_\infty = -\frac{1}{2}\varphi + K_2\varphi + L\varphi - \frac{|\partial D|}{2\pi}M\varphi \quad (2.36)$$

ist in $C(\partial D)$ eindeutig lösbar. Ist das Vektorfeld φ Lösung dieser Gleichung, so liefert der Ansatz 2.34 die eindeutige Lösung des ÄDP 2.21-2.24.

2.3 Äusseres Dirichlet Problem bei L^2 -Randdaten

In diesem Abschnitt wollen wir die für die Behandlung des inversen Problems notwendigen Resultate der Lösungstheorie auf den Fall quadratsummierbarer Randdaten erweitern. Vor allem soll die Eindeutigkeit des ÄDP auch bei schwächerer Randregularität von u nachgewiesen werden.

Unsere Vorgehensweise beim Eindeutigkeitsnachweis ist von [Hähner2] inspiriert; die Grundidee der Verwendung von Parallelfleichen zur Feststellung der Eindeutigkeit eines Randwertproblems bei L^2 -Randdaten stammt von Calderón (vgl. [Calderón]).

Satz 2.11

Sei $u \in C^2(D^+)$ die Geschwindigkeitskomponente einer Lösung der Stokes-Gleichung in D^+ , die die homogene Randbedingung

$$\int_{\partial D} u(x + h\nu(x))g(x)ds(x) \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \quad (2.37)$$

für alle $g \in L^2(\partial D)$ erfüllt und sich im Unendlichen gemäß 2.23 verhält. Ist D C^3 -regulär, so gilt: $u = 0$ in D^+ .

Beweis:

Für hinreichend kleine h seien Parallelfleichen

$$\partial D_h := \{z \in \mathbb{R}^3 : z = x + h\nu(x), x \in \partial D\}$$

definiert. Über diese ist Folgendes bekannt:

Ist für $x \in \partial D$ $\hat{H}(x)$ die mittlere Krümmung und $\hat{K}(x)$ die Gaußsche Krümmung der Fläche ∂D bei x , so ist das infinitesimale Flächenelement von ∂D_h um $z = x + h\nu(x)$ mit dem Flächenelement von ∂D im Punkt x durch die Relation

$$ds(z) = (1 - 2\hat{H}(x)h + \hat{K}(x)h^2)ds(x)$$

verbunden. Da uns hier nur äussere Parallelfleichen interessieren, sei $h > 0$ im Weiteren immer vorausgesetzt.

Für jedes $h > 0$ betrachte man das Dirichlet Problem im Gebiet D_h^+ mit den Randdaten $u|_{\partial D_h}$. Die Eindeutigkeit und die Existenz jeweiliger Lösungen v_h sind durch die Sätze 2.5 und 2.9 gesichert, somit gilt einerseits $u|_{D_h^+} \equiv v_h$ und andererseits die Darstellbarkeit von v_h als Potential (vgl. 2.32)

$$v_h(x) := (K_{\partial D_h} \tilde{\varphi}_h)(x) - \eta(S_{\partial D_h} \tilde{\varphi}_h)(x), \quad (2.38)$$

einer Belegung $\tilde{\varphi}_h \in C^{1,\alpha}(\partial D_h)$, welche als die eindeutige Lösung der Integralgleichung

$$-\frac{1}{2}\tilde{\varphi}_h(\tilde{x}) + (K_{\partial D_h} \tilde{\varphi}_h)(\tilde{x}) - \eta(S_{\partial D_h} \tilde{\varphi}_h)(\tilde{x}) = u(\tilde{x}), \tilde{x} \in \partial D_h \quad (2.39)$$

ermittelbar ist.

Führt man nun den Homöomorphismus $\alpha_h : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D_h)$ mit

$$(\alpha_h f)(x + h\nu(x)) := f(x), \quad x \in \partial D$$

ein, so erhält man äquivalent zu 2.39 die Gleichung

$$\left(-\frac{1}{2}I + K_h - \eta S_h\right)\varphi_h = \alpha_h^{-1}(u|_{\partial D_h}) \quad (2.40)$$

mit $\varphi_h := \alpha^{-1}\tilde{\varphi}_h$, wobei die Operatoren K_h und S_h für $\varphi \in C(\partial D), x \in \partial D$ durch

$$(K_h \varphi)_i(x) := -\frac{3}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{z_k z_i z \cdot \nu(y)}{|z|^{m+2}} \varphi(y) (1 - 2\hat{H}(y)h + \hat{K}(y)h^2) ds(y) \quad i, k = 1, 2, 3$$

mit $z := x - y + h(\nu(x) - \nu(y))$ und

$$(S_h \varphi)(x) := \int_{\partial D} \Psi^{(r,c)}(x + h\nu(x), y + h\nu(y)) \varphi(y) (1 - 2\hat{H}(y)h + \hat{K}(y)h^2) ds(y)$$

gegeben sind.

Nun überzeugen wir uns, daß die Lösungen der Integralgleichung 2.40 bei $h \rightarrow 0$ schwach gegen Null konvergieren.

Die Kerne $k(x, y, h)$ und $s(x, y, h)$ der Operatoren K_h und S_h sind in x und y stetig für $x \neq y$ und schwach singular. Darüber hinaus folgt direkt aus dem Mittelwertsatz, daß für $|x - y| > \delta$ bei jedem festen δ die Elemente der Funktionalmatrizen $k(x, y, h)$ und $s(x, y, h)$ gleichmäßig gegen die entsprechenden Elemente von $k(x, y, 0)$ bzw. $s(x, y, 0)$ konvergieren. Somit sind die Bedingungen des Hilfsatzes A1 in [Hähner2] erfüllt und es gilt:

$$\|K_h - \eta S_h - (K - \eta S)\|_{L^2(\partial D)} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Für hinreichend kleine h liefert nun die Neumannsche Reihe

$$\|(-\frac{1}{2}I + K_h - \eta S_h)^{-1} - (-\frac{1}{2}I + K - \eta S)^{-1}\|_{L^2(\partial D)} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Die Voraussetzung 2.37 garantiert die schwache Konvergenz von $(\alpha^{-1}u|_{\partial D_h})$ gegen 0 im L^2 -Sinne, somit gibt es für alle $h \in (0, h_0)$, h_0 ausreichend klein, eine Konstante C mit $\|(\alpha^{-1}u|_{\partial D_h})\|_{L^2(\partial D)} < C$. Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varphi_h &= (-\frac{1}{2}I + K_h - \eta S_h)^{-1}(\alpha^{-1}u|_{\partial D_h}) \\ &= \{(-\frac{1}{2}I + K_h - \eta S_h)^{-1} - (-\frac{1}{2}I + K - \eta S)^{-1}\}(\alpha^{-1}u|_{\partial D_h}) \\ &\quad + (-\frac{1}{2}I + K - \eta S)^{-1}(\alpha^{-1}u|_{\partial D_h}). \end{aligned}$$

Da für die Summanden dieser Gleichung

$$\begin{aligned} & \|\{(-\frac{1}{2}I + K_h - \eta S_h)^{-1} - (-\frac{1}{2}I + K - \eta S)^{-1}\}(\alpha^{-1}u|_{\partial D_h})\| \\ & \leq C\|\{(-\frac{1}{2}I + K_h - \eta S_h)^{-1} - (-\frac{1}{2}I + K - \eta S)^{-1}\}\|_{L^2(\partial D)} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

und

$$(-\frac{1}{2}I + K - \eta S)^{-1}(\alpha^{-1}u|_{\partial D_h}) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, h > 0.$$

gilt, erhält man $\varphi_h \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ und demzufolge $\tilde{\varphi}_h \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$.

Für einen beliebigen Punkt $x \in D^+$ konvergieren folglich die Werte der Ansatzfunktion v_h mit $h \rightarrow 0$ gegen 0, d.h. es gilt $u(x) = 0$ für alle $x \in D^+$. \square

Anmerkung 2.2

Die Voraussetzung eines C^3 -glatten Randes ist im obigen Satz wesentlich. Dadurch wird gesichert, daß die Parallellflächen mindestens C^2 -glatt sind, was die glättende Eigenschaft des Operators $K_{\partial D_h}$ sichert und somit die Gültigkeit der klassischen Lösungstheorie garantiert. Auch der Nachweis der Kompaktheit des Operators $K_{\partial D_h}$ als Abbildung von $C^{1,\alpha}(\partial D_h)$ nach $C^{1,\alpha}(\partial D_h)$, welcher die Abschwächung der C^3 -Voraussetzung wohl ermöglichen würde (vgl. [Hähner2], S. 24), kann sich nicht auf die Direktwertdarstellungen des Gradientes des Doppelschichtpotentials (vgl. Satz 2.23 in [Colton/Kress]) stützen: weder existieren sie in der Literatur, noch ist uns deren Herleitung gelungen. \square

Für die *Existenz* von Lösungen bei L^2 -Randdaten und für die Gültigkeit der im letzten Abschnitt beschriebenen Ansätze sorgt das folgende Lemma.

Lemma 2.12

Die Operatoren

$$-\frac{1}{2}I_3 + K_{3,(\partial D)} - S_{3,(\partial D)} : (L^2)^3(\partial D) \rightarrow (L^2)^3(\partial D)$$

und

$$-\frac{1}{2}I_2 + K_{2,(\partial D)} + L - \frac{|\partial D|}{2\pi}M : (L^2)^2(\partial D) \rightarrow (L^2)^2(\partial D)$$

sind injektiv und beschränkt invertierbar.

Beweis: Man betrachte den dreidimensionalen Fall. Da die Operatoren $K_{3,(\partial D)} - S_{3,(\partial D)}$ und $K_{2,(\partial D)} + L - \alpha$ in L^2 kompakt sind, reicht es, aus $(-\frac{1}{2}I_3 + K_{3,(\partial D)} - S_{3,(\partial D)})\varphi = 0$ bzw. $(-\frac{1}{2}I_2 + K_{2,(\partial D)} + L - \alpha\varphi)$ mit $\varphi \in (L^2)^3$ bzw. $\varphi \in (L^2)^2$ auf $\varphi = 0$ zu schließen.

Mit dem bezüglich des Dualsystems $\langle L^2(\partial D), C(\partial D) \rangle$ mit $\langle f, g \rangle = \int_{\partial D} fg \, ds$ zu $-\frac{1}{2}I_3 + K_{3,(\partial D)} - S_{3,(\partial D)}$ adjungierten Operator $-\frac{1}{2}I_3 + K'_{3,(\partial D)} - S_{3,(\partial D)}$ liefert die Fredholmtheorie und schliesslich die eindeutige Lösbarkeit der Integralgleichung 2.33) (Satz 2.9):

$$\begin{aligned} \dim N\left(\left(-\frac{1}{2}I_3 + K_{3,(\partial D)} - S_{3,(\partial D)}\right)\Big|_{L_2(\partial D)}\right) &= \dim N\left(\left(-\frac{1}{2}I_3 + K'_{3,(\partial D)} - S_{3,(\partial D)}\right)\Big|_{C(\partial D)}\right) \\ &= \dim N\left(\left(-\frac{1}{2}I_3 + K_{3,(\partial D)} - S_{3,(\partial D)}\right)\Big|_{C(\partial D)}\right) = 0. \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise behandelt man den zweidimensionalen Fall. Die im Beweis von diesem Lemma verwendete Idee, zwei verschiedene Dualsysteme zu benutzen, geht auf Hähler ([Hähler2]) zurück. Der direkte Beweis der Aussage des Satzes ist auch möglich (vgl. [Varnhorn]).

□

2.4 Numerische Behandlung des ÄDP im \mathbb{R}^2

Zur numerischen Prüfung der Rekonstruktionsgüte des inversen Algorithmus benötigen wir synthetische Daten. Um diese zu gewinnen, müssen wir das äußere Dirichlet Problem approximativ lösen können.

Wir geben hier der Vollständigkeit halber eine kurze Beschreibung des von uns zur Lösung der Integralgleichung 2.29 verwendeten Nyström Verfahrens, wobei auf eine detailliertere Darstellung in [Evans] verwiesen wird. Eine allgemeine Beschreibung des Nyström Verfahrens für Integralgleichungen bei stetigen bzw. schwach singulären Integralkernen sowie weiterführende Literaturangaben findet man in [Kress1]. Da unser Zugang zum inversen Problem nicht auf wiederholtem Rechnen der direkten Probleme basiert, wird hier auch auf die Untersuchung der Konvergenz des Vorwärtzlösers verzichtet; diese kann aber auf üblichem Weg geführt werden (vgl. [Kress1], Kapitel 12).

2.4.1 Das Nyström-Verfahren

Für den Gebietsrand ∂D sei die Existenz einer 2π -periodischen zweimal stetig differenzierbaren regulären ($z'(t) \neq 0, \forall t \in [0, 2\pi]$) Parametrisierung

$$\partial D = \{z(t), 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

angenommen. Das unmittelbare Einsetzen der Parametrisierung in die Kerne des Einfach- und Doppelschichtpotentials liefert

$$A(t, \tau) := 2\Psi^{(r,c)}(z(t) - z(\tau)) = \frac{|z'(\tau)|}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r(t, \tau)} \cdot I + \frac{(z(t) - z(\tau))(z(t) - z(\tau))^T}{r(t, \tau)^2} \right)$$

und

$$\begin{aligned} B(t, \tau) &:= 2k_2^{(r)}(z(t), z(\tau)) \\ &= \frac{2}{\pi} \left((z(t) - z(\tau)) \cdot (z_2'(\tau), -z_1'(\tau)) \cdot \frac{(z(t) - z(\tau))(z(t) - z(\tau))^T}{r(t, \tau)^4} \right) \end{aligned}$$

mit $r(t, \tau) := |z(t) - z(\tau)|$ für alle $t \neq \tau$.

Während die Singularität in B bei $t = \tau$ hebbar ist, erfordert die Integration der logarithmischen Singularität im Kern A etwas Sorgfalt.

Wir stellen den singulären Term in der Form

$$\ln \frac{1}{r(t, \tau)} = \ln \frac{2|\sin \frac{t-\tau}{2}|}{r(t, \tau)} - \frac{1}{2} \ln(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2})$$

dar, wobei der Term $\ln \frac{2|\sin \frac{t-\tau}{2}|}{r(t, \tau)}$ keine Singularität aufweist.

Insgesamt erhalten wir für den Kern des Einfachschichtpotentials

$$A(t, \tau) = -\frac{|z'(\tau)|}{4\pi} \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) \cdot I + \tilde{A}(t, \tau)$$

mit $\tilde{A}(t, \tau) := \frac{|z'(\tau)|}{2\pi} \left(\ln \frac{2|\sin \frac{t-\tau}{2}|}{r(t, \tau)} \cdot I + \frac{(z(t) - z(\tau))(z(t) - z(\tau))^T}{r(t, \tau)^2} \right).$

Für $\tau \rightarrow t$ erhält man für A und B

$$\tilde{A}(t, t) = \frac{|z'(t)|}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{|z'(t)|} \cdot I + \frac{z'(t) \cdot z'(t)^T}{|z'(t)|^2} \right)$$

und $B(t, t) = \frac{1}{\pi} (z_2'(t) z_1''(t) - z_1'(t) z_2''(t)) \cdot \frac{z'(t) \cdot z'(t)^T}{|z'(t)|^4}.$

Setzt man jetzt

$$g(t) := -2 \left(f(z(t)) + \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} |z'(s)| ds} \int_0^{2\pi} A(t, \tau) a_\infty d\tau \right),$$

so nimmt die Integralgleichung 2.29 nach der Parametrisierung die folgende Gestalt an:

$$g(t) = \psi(t) + \int_0^{2\pi} \left\{ B(t, \tau) + \eta \left(A(t, \tau) - \frac{|z'(\tau)|}{\int_0^{2\pi} |z'(s)| ds} \int_0^{2\pi} A(t, s) ds \right) + \frac{\eta\alpha}{2\pi} |z'(\tau)| I \right\} \cdot \psi(\tau) d\tau. \quad (2.41)$$

Zur numerischen Approximation der hier vorkommenden Integrale wählen wir auf $[0, 2\pi)$ äquidistante Stützstellen $t_j := \frac{\pi j}{m}$, $j = 0, \dots, 2m-1$ und benutzen die Quadraturformeln

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) f(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2m-1} R_j^{(m)}(t) f(t_j) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

mit den Gewichten

$$R_j^{(m)}(t) := -\frac{2\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k} \cos k(t - t_j) - \frac{\pi}{m^2} \cos m(t - t_j) \quad \text{für } j = 0, \dots, 2m-1$$

und die zusammengesetzte Trapezregel

$$\int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau \approx \frac{\pi}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} f(t_j).$$

Die Nyström Approximation zu 2.41 lautet

$$\begin{aligned} \psi^{(m)}(t) + \sum_{j=0}^{2m-1} \left\{ \frac{\pi}{m} \left[(t, t_j) + \eta \left(\tilde{A}(t, t_j) - \frac{|z'(t_j)|}{D^{(m)}} \sum_{k=0}^{2m-1} \left(\frac{\pi}{m} \tilde{A}(t, t_k) - R_k^{(m)}(t) \frac{|z'(t_k)|}{4\pi} \cdot I \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\eta\alpha}{2\pi} |z'(t_j)| \cdot I \right] - \eta R_j^{(m)}(t) \frac{|z'(t_j)|}{4\pi} \cdot I \right\} \psi^{(m)}(t_j) = g(t), \end{aligned}$$

wobei

$$D^{(m)} := \frac{\pi}{m} \sum_{k=0}^{2m-1} |z'(t_k)|$$

gesetzt ist.

Die vollständige Diskretisierung bezüglich t an den $2m$ Stützstellen führt nun mit $\psi_i^{(m)} := \psi^{(m)}(t_i)$ für $i = 0, \dots, 2m-1$ zum folgenden linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \psi_i^{(m)} + \sum_{j=0}^{2m-1} \left\{ \frac{\pi}{m} \left[B(t_i, t_j) + \eta \left(\tilde{A}(t_i, t_j) - \frac{|z'(t_j)|}{D^{(m)}} \sum_{k=0}^{2m-1} \left(\frac{\pi}{m} \tilde{A}(t_i, t_k) - R_{|i-k|}^{(m)} \frac{|z'(t_k)|}{4\pi} \cdot I \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\eta\alpha}{2\pi} |z'(t_j)| \cdot I \right] - \eta R_{|i-j|}^{(m)} \frac{|z'(t_j)|}{4\pi} \cdot I \right\} \psi_j^{(m)} = g(t_i) \end{aligned}$$

mit

$$R_j^{(m)} := R_j^{(m)}(0) = -\frac{2\pi}{m} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \cos \frac{kj\pi}{m} - \frac{(-1)^j \pi}{m^2} \quad \text{für } j = 0, \dots, 2m-1.$$

Dieses lineare Gleichungssystem besteht aus $4m$ Gleichungen mit $4m$ Unbekannten, da ψ und g zweidimensionale Vektorfelder darstellen. Setzen wir nun $\psi_{1i}^{(m)} := \psi_1^{(m)}(t_i)$ und $\psi_{2i}^{(m)} := \psi_2^{(m)}(t_i)$, so ergeben sich zwei Systeme

$$\begin{aligned} \psi_{1i}^{(m)} + \sum_{j=0}^{2m-1} \left\{ \frac{\pi}{m} \left[B_{11}(t_i, t_j) + \eta \left(\tilde{A}_{11}(t_i, t_j) - \frac{|z'(t_j)|}{D^{(m)}} \sum_{k=0}^{2m-1} \left(\frac{\pi}{m} \tilde{A}_{11}(t_i, t_k) - R_{|i-k|}^{(m)} \frac{|z'(t_k)|}{4\pi} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\eta\alpha}{2\pi} |z'(t_j)| \right] - \eta R_{|i-j|}^{(m)} \frac{|z'(t_j)|}{4\pi} \right\} \psi_{1j}^{(m)} \\ + \frac{\pi}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} \left\{ B_{12}(t_i, t_j) + \eta \left(\tilde{A}_{12}(t_i, t_j) - \frac{\pi |z'(t_j)|}{m D^{(m)}} \sum_{k=0}^{2m-1} \tilde{A}_{12}(t_i, t_k) \right) \right\} \psi_{2j}^{(m)} \\ = g_1(t_i) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\psi_{2i}^{(m)} &+ \frac{\pi}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} \left\{ B_{21}(t_i, t_j) + \eta \left(\tilde{A}_{21}(t_i, t_j) - \frac{\pi |z'(t_j)|}{m D^{(m)}} \sum_{k=0}^{2m-1} \tilde{A}_{21}(t_i, t_k) \right) \right\} \psi_{1j}^{(m)} \\
&+ \sum_{j=0}^{2m-1} \left\{ \frac{\pi}{m} \left[B_{22}(t_i, t_j) + \eta \left(\tilde{A}_{22}(t_i, t_j) - \frac{|z'(t_j)|}{D^{(m)}} \sum_{k=0}^{2m-1} \left(\frac{\pi}{m} \tilde{A}_{22}(t_i, t_k) - R_{|i-k|}^{(m)} \frac{|z'(t_k)|}{4\pi} \right) \right) \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{\eta \alpha}{2\pi} |z'(t_j)| \right] - \eta R_{|i-j|}^{(m)} \frac{|z'(t_j)|}{4\pi} \right\} \psi_{2j}^{(m)} \\
&= g_2(t_i)
\end{aligned}$$

für $i = 0, \dots, 2m - 1$.

Nach Lösung dieser linearen Gleichungssysteme kennen wir also für $\psi_1^{(m)}$ und $\psi_2^{(m)}$ jeweils $2m$ Werte.

Um $u^{(m)}$ zu berechnen, parametrisieren wir 2.31 und diskretisieren wieder an den $2m$ Punkten $t_j := \frac{\pi j}{m}$, $j = 0, \dots, 2m - 1$.

Damit ergibt sich die Näherung an u folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
u^{(m)}(x) &= \\
&- \frac{\pi}{m D^{(m)}} \sum_{j=0}^{2m-1} |z'(t_j)| \left(\ln \frac{1}{|x - z(t_j)|} \cdot I + \frac{(x - z(t_j))(x - z(t_j))^T}{|x - z(t_j)|^2} \right) a_\infty \\
&- \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} \left((z_2'(t_j)(x_1 - z_1(t_j)) - z_1'(t_j)(x_2 - z_2(t_j))) \frac{(x - z(t_j))(x - z(t_j))^T}{|x - z(t_j)|^4} \right) \psi_j^{(m)} \\
&- \frac{\eta}{4m} \sum_{j=0}^{2m-1} |z'(t_j)| \left(\ln \frac{1}{|x - z(t_j)|} \cdot I + \frac{(x - z(t_j))(x - z(t_j))^T}{|x - z(t_j)|^2} \right) \psi_j^{(m)} \\
&+ \frac{\eta \pi}{4m^2 D^{(m)}} \sum_{j=0}^{2m-1} \left\{ |z'(t_j)| \left(\ln \frac{1}{|x - z(t_j)|} \cdot I + \frac{(x - z(t_j))(x - z(t_j))^T}{|x - z(t_j)|^2} \right) \sum_{k=0}^{2m-1} |z'(t_k)| \psi_k^{(m)} \right\} \\
&- \frac{\eta \alpha}{4m} \sum_{j=0}^{2m-1} |z'(t_j)| \psi_j
\end{aligned}$$

für alle $x \in D^+$.

2.4.2 Numerische Beispiele

Einige numerischen Beispiele sollen nun die Qualität des im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Verfahrens illustrieren.

Beispiel 2.1

Als Gebiet für den ersten Test wurde die Ellipse \mathbf{E} mit dem Rand

$$\partial\mathbf{E} = \{x(t) = (2 \cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]\}$$

gewählt. Als Randbedingung auf $\partial\mathbf{E}$ geben wir die Werte des im Punkt $(0.3, 0)$ (also innerhalb der Ellipse) platzierten Stokeslets der Stärke $(1, 2)$ vor.

Das Verfahren wurde in den Punkten $x_1 = (-5, 10)$ und $x_2 = (5 * 10^8, 5 * 10^8)$ bei $\alpha = 1$, $\eta = 2$ getestet, wobei folgende Ergebnisse erzielt wurden:

n	$AF_n[u_1(x_1)]$	$AF_n[u_2(x_1)]$	$AF_n[u_1(x_2)]$	$AF_n[u_2(x_2)]$
4	8.5349870379e-03	1.6893113158e-02	3.4851970802e-03	8.4889935558e-03
8	1.8792408390e-04	3.6889977810e-04	1.6636721972e-04	4.0431221250e-04
16	2.0070175299e-08	3.6349095733e-08	2.0559205893e-08	4.5513132818e-08
32	1.3322676296e-15	1.3322676296e-15	1.0658141036e-14	2.1316282073e-14
64	2.2204460493e-15	2.2204460493e-15	3.5527136788e-15	1.4210854715e-14

Tabelle 2.1: Ergebnisse zu Beispiel 2.1

Mit $AF_n[u_i(x_j)]$, $i, j = 1, 2$ ist hier der absolute Fehler in der i -ten Komponente der Lösung im Punkt x_j bezeichnet; n steht für die Zahl der für das Verfahren gewählten Stützpunkte.

Dieses Beispiel demonstriert eine mindestens exponentielle, schnell eingreifende Konvergenz der numerischen Methode. Im Falle analytischer rechter Seiten des zu lösenden Integralgleichungssystems und bei einer analytischen Parametrisierung des Gebietsrandes ist zu erwarten, daß auch die Lösung der Gleichung analytisch ist. Da die Konvergenzstärke des Nyströmverfahrens von der Güte der Quadraturformeln direkt abhängig ist (und bei der trigonometrischen Interpolation analytischer periodischer Funktionen verschwindet der Fehler exponentiell, S.[Kress1], Satz 11.7), muß man mit einem exponentiellen Abklingen des Fehlers des numerischen Ergebnisses rechnen.

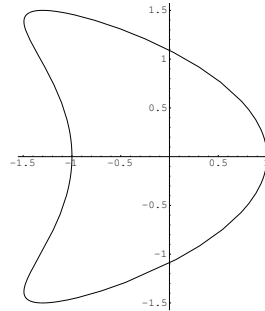
Die Änderung der Kopplungsparameter bei der Ellipse verändert die Konvergenzgeschwindigkeit kaum:

n	$AF_n[u_1(x_1)]$	$AF_n[u_2(x_1)]$	$AF_n[u_2(x_1)]$	$AF_n[u_1(x_2)]$
4	1.1473597236e-02	3.2888513862e-01	1.8265892017e-06	3.0560895681e-06
8	1.2719126993e-04	1.2613809834e-03	1.0316357079e-04	1.2373954937e-03
16	2.0070032303e-08	3.6346330834e-08	2.0559205893e-08	4.5513083080e-08
32	3.9968028887e-15	2.0872192863e-14	1.0658141036e-14	4.2632564146e-14
64	0.0000000000e+00	1.8207657604e-14	0.0000000000e+00	2.1316282073e-14

Tabelle 2.2: Beispiel 2.1 mit $\eta = \alpha = 0.001$

Beispiel 2.2

Nun lösen wir das ÄDP auf dem Gebiet \mathbf{D} der Gestalt

Abbildung 2.1: Das Gebiet \mathbf{D}

mit dem Rand

$$\partial\mathbf{D} = x(t) = (\cos t + 0.65 \cos(2t) - 0.65, 1.5 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Die sonstigen Parameter wurden aus dem ersten Beispiel übernommen.

Aus den nachstehenden Tabellen wird wieder das exponentielle Konvergenzverhalten des Nyströmverfahrens ersichtlich; im Vergleich zur Ellipse klingt der Approximationsfehler bei wachsendem n jedoch langsamer ab. Deutlicher zeigt sich auch die Abhängigkeit der Ergebnisqualität von der Wahl der Kopplungsparameter.

n	$AF_n[u_1(x_1)]$	$AF_n[u_2(x_1)]$	$AF_n[u_1(x_2)]$	$AF_n[u_2(x_2)]$
4	3.3320525646e-02	6.0632272294e-02	3.0991555853e-02	7.4792271141e-02
8	2.7166147022e-03	9.9733810727e-03	1.8922424503e-03	8.6767506788e-03
16	1.6778921381e-06	6.7832735215e-05	5.3497321062e-07	5.5733044682e-05
32	6.0930815948e-10	7.6532824522e-10	4.5701042950e-10	5.6071769450e-10
64	0.0000000000e+00	1.3322676296e-15	1.0658141036e-14	1.4210854715e-14

Tabelle 2.3: Ergebnisse zu Beispiel 2.2 bei $\eta = 2, \alpha = 1$

n	$AF_n[u_1(x_1)]$	$AF_n[u_2(x_1)]$	$AF_n[u_1(x_2)]$	$AF_n[u_2(x_2)]$
4	1.4608389637e-01	1.8621094486e-03	4.5398407487e-06	6.5748373146e-07
8	2.3403585925e-01	1.6834774459e-01	1.4571635301e-05	2.2723967857e-04
16	9.4359681154e-03	5.9161722190e-03	2.3278338759e-06	9.6597003075e-04
32	4.2732144045e-07	1.3979335600e-07	3.4730192056e-09	3.7509266804e-07
64	1.2878587086e-14	2.6645352591e-15	3.9079850467e-14	1.4210854715e-14

Tabelle 2.4: Ergebnisse zu Beispiel 2.2 bei $\eta = \alpha = 0.001$

Kapitel 3

Inverses Problem

Seien D und B beschränkte C^3 -glatte Gebiete ohne Löcher in \mathbb{R}^m mit $m = 2, 3$; das Gebiet D sei samt Rand in B vollständig enthalten mit $\partial D \cap \partial B = \emptyset$.

Unter dem *inversen Problem* verstehen wir die Aufgabe der Rekonstruktion des Gebiets D aus der Kenntnis von Lösungen $u_i(x, z)$, $i = 1, \dots, m$ der äußeren Dirichlet Probleme zu der Stokes-Gleichung mit den Randbedingungen

$$u_i = -\Psi_m^{(r,c)}(\cdot - z) \cdot e_i \quad \text{auf } \partial D \quad (3.1)$$

für alle $x, z \in \partial B$, wobei mit e_i , $i = 1, \dots, m$ die Einheitsvektoren in \mathbb{R}^m bezeichnet sind.

Im zweidimensionalen Fall gehen wir davon aus, daß die Lösungen im Unendlichen beschränkt und deren asymptotischen Werte $u_{i,\infty}(z)$ bekannt sind.

Die Linearität der Stokes-Gleichung erlaubt es, die Ausgangsinformation für das inverse Problem auf folgende Weise zusammenzufassen :

Für alle $x \in \partial B$ ist die durch $z \in \partial B$ parametrisierte Familie von Funktionalmatrizen $w(x, z)$ bekannt mit der Eigenschaft: Die Funktionen $w(x, z) \cdot a$ sind Geschwindigkeitskomponenten von beschränkten Lösungen des ÄDP zu den Randdaten $-\Psi_m^{(r,c)}(\cdot, z) \cdot a$, $a \in \mathbb{R}^m$.

Im zweidimensionalen Fall sind auch die Werte der Lösungen im Unendlichen, also die Matrix $w_\infty(z)$, bekannt.

Eine zentrale Rolle in diesem Kapitel spielt der Operator $F_m : L^2(\partial B) \rightarrow L^2(\partial B)$, gegeben für $m = 3$ durch

$$(F_3 g)(x) := - \int_{\partial B} w(x, y) g(y) ds(y) \quad x \in \partial B \quad (3.2)$$

und für $m = 2$ durch

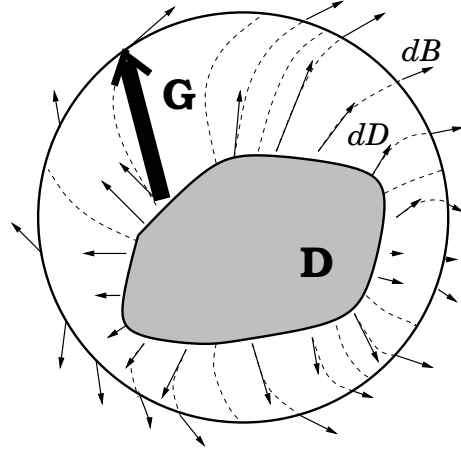
$$(F_2g)(x) := - \int_{\partial B} [w(x, y) - w_\infty(y)]g(y)ds(y), \quad x \in \partial B. \quad (3.3)$$

Unsere Aufgabe ist zu zeigen, wie die Kenntnis der Eigenwerte und der Eigenvektoren des „Meßoperators“ F_m eine Charakterisierung des Gebietes D ermöglicht.

3.1 Der dreidimensionale Fall

3.1.1 Faktorisierung des Meßoperators

Wir untersuchen als erstes den Operator $G : f \rightarrow u|_{\partial B}$, welcher die auf ∂D gegebenen Randdaten f in die ∂B -Spur der Lösung u des ÄDP mit diesen Randdaten abbildet. Die eindeutige Lösbarkeit des ÄDP bei L^2 -Randdaten und die Darstellung 2.32 der Lösung ermöglichen uns den Beweis folgender Aussage:



Satz 3.1

Der Operator $G : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial B)$ ist kompakt und injektiv und sein adjungierter Operator $G^* : L^2(\partial B) \rightarrow L^2(\partial D)$ ebenfalls.

Beweis:

Für den Operator G ergibt sich aus 2.32 und 2.33 die Darstellung

$$G = U \left(-\frac{1}{2}I + K_{(\partial D)} - S_{(\partial D)} \right)^{-1} \quad (3.4)$$

mit dem Operator

$$(U\varphi)(x) := \int_{\partial D} (k_3^{(r)}(x, y) - \Psi^{(r,c)}(x, y))\varphi(y)ds(y), \quad x \in \partial B.$$

Der Kern des Integraloperators U ist stetig, nach Lemma 2.12 ist die Injektivität und die Beschränktheit des Operators $(-\frac{1}{2}I + K_{(\partial D)} - S_{(\partial D)})^{-1} : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial D)$ bereits bekannt. Daher ist G kompakt.

Wir zeigen jetzt, daß aus $U\varphi = 0$ mit einem $\varphi \in L^2(\partial D)$ stets $\varphi = 0$ folgt. Dazu definiere man für $x \in D^+$ die Funktion $u(x) := (K\varphi - S\varphi)(x)$. Gemäß der Voraussetzung gilt $u|_{\partial B} = U\varphi = 0$. Nun sorgt die Eindeutigkeit des ÄDP im gesamten

Analytizitätbereich von u , d.h. in D^+ , für $u = 0$. Die L^2 -Sprungbeziehungen liefern $-\frac{1}{2}\varphi + K_{(\partial D)}\varphi - S_{(\partial D)}\varphi = 0$ auf ∂D und die Injektivität von $(-\frac{1}{2}I + K_{(\partial D)} - S_{(\partial D)})$ besagt $\varphi \equiv 0$.

Der Operator $G^* : L^2(\partial B) \rightarrow L^2(\partial D)$ ist als

$$G^* = \left(-\frac{1}{2}I + K'_{(\partial D)} - S_{(\partial D)}\right)^{-1}U^* \quad (3.5)$$

mit

$$U^*\varphi = [(\tilde{K}' - \tilde{S})\varphi]|_{\partial D}$$

darstellbar, wobei mit \tilde{S} und \tilde{K}' das Einfachschichtpotential einer auf ∂B definierten Dichte sowie seine Normalspannung bezeichnet sind.

Da der Operator $P := (-\frac{1}{2}I + \tilde{K}'_{(\partial B)} - \tilde{S}_{(\partial B)})^{-1}$ injektiv ist (wegen 2.12 mit ∂B statt ∂D und der Fredholmtheorie), folgt die Injektivität von G^* aus der von U^* ; diese ist unschwer zu sehen: Die Gleichung $[(\tilde{K}' - \tilde{S})\varphi]|_{\partial D} = 0$ impliziert, wegen der eindeutigen Lösbarkeit des inneren sowie des äußeren Dirichletproblems zu den homogenen Daten auf ∂D , daß $(\tilde{K}' - \tilde{S})\varphi = 0$ überall in B gilt. Die Sprungbeziehungen für \tilde{S} und \tilde{K}' sowie wiederum die Injektivität von P liefern nun die Injektivität von U^* . \square

Der Zusammenhang zwischen den Operatoren F_3 und G wird aus der folgenden faktorisierten Form von F_3 ersichtlich:

Satz 3.2

Für den Operator F_3 gilt die Darstellung

$$F_3 = GSG^*. \quad (3.6)$$

Beweis:

Mit der Definition von G und der Randbedingung 3.1 folgt für alle $y \in \partial B$

$$-w(\cdot, y)|_{\partial B} = G\Psi^{(r,c)}(\cdot - y)|_{\partial D}, \quad \forall y \in \partial B.$$

Man multipliziere dies mit einem $g \in L^2(\partial B)$ und integriere über ∂B . Aus der Eindeutigkeit des ÄDP und der Stetigkeit von G folgert man

$$F_3g = G \int_{\partial B} \Psi^{(r,c)}(x - y)g(y) ds(y), \quad x \in \partial B. \quad (3.7)$$

Mit dem Hilfsoperator $A : L^2(\partial B) \rightarrow L^2(\partial D)$:

$$(Ag)(x) := \int_{\partial B} \Psi^{(r,c)}(x - y)g(y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

schreiben wir 3.7 als

$$F_3 = GA.$$

Andererseits kann der Adjungierte von A , $A^* : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial B)$:

$$(A^*\varphi)(x) := \int_{\partial D} \Psi^{(r,c)}(x-y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial B$$

nach der Definition von A, G und S als $A^* = GS$ dargestellt werden. Es gilt folglich $A = SG^*$. Dies, kombiniert mit 3.8, ergibt die gewünschte Faktorisierung 3.6. \square

Die Faktorisierung 3.6 besagt mehr über die Eigenschaften des Operators F_3 als seine Integralform; der Operator $S_{(\partial D)}$ enthält alleine schon, und expliziter als F_3 , die Information über die Fläche ∂D , denn das Äußere Dirichlet Problem mit der Randbedingung 3.1 ist auch mittels Einfachschichtpotentialansatz lösbar (vgl. das nachstehende Lemma). Für das Weitere fassen wir die Eigenschaften des Operators $S_{(\partial D)}$ zusammen.

Lemma 3.3

Der kompakte und selbstadjungierte Randintegraloperator $S_{(\partial D)} : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial D)$ ist positiv semi-definit. Sein Nullraum ist gegeben durch

$$N(S_{(\partial D)}) = \text{span}\{\nu_{\partial D}\}.$$

Als Operator von $H_{\perp\nu}^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ nach $H_{\perp\nu}^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ ist $S_{(\partial D)}$ bijektiv.

Beweis:

Mit einem $\varphi \in C(\partial D)$ bilde man das vollständige Einfachschichtpotential $(u, p) = (u_\varphi, p_\varphi) := \mathbf{S}_3\varphi$. Die Greensche Formel 2.3, angewandt auf (u, p) , ergibt

$$\int_{\partial D} T_p^{u-\nu} \cdot u_- ds = 2 \int_D Du : Du dy$$

in D und

$$\int_{\partial D} T_p^{u+\nu} \cdot u_+ ds = -2 \int_{D^+} Du : Du dy$$

in D^+ . Mit der Stetigkeit von u (Satz 2.2) und der Sprungbeziehung 2.11 folgt also

$$\int_{\partial D} \varphi S\varphi ds = 2 \int_{\mathbb{R}^3} |Du|^2 dy \geq 0. \quad (3.8)$$

Somit ist die Einschränkung von S auf $C(\partial D)$ positiv semi-definit. Da aber der Raum $C(\partial D)$ in $L^2(\partial D)$ dicht ist und der Operator S stetig, ist S auch in $L^2(\partial D)$ positiv semi-definit.

Im Falle $(\varphi, S\varphi) = 0$ tritt in 3.8 mit einem $\varphi \in L^2(\partial D)$ die Gleichheit ein und die Deformationsmatrix Du_φ verschwindet, was zusammen mit dem Abklingverhalten (2.23) des Einfachschichtpotentials das Verschwinden von u zunächst in D^+ , dann nach Stetigkeit von u in $\overline{D^+}$ und schließlich wegen der Eindeutigkeit des inneren Dirichlet-Problems (s. Satz 2.6) auch in D sichert. Also ist $u = 0$ in \mathbb{R}^3 .

Die Stokes-Gleichung besagt jetzt $\text{grad } p = 0$ in \mathbb{R}^3 . In D gilt also $p = \text{const}$ und in D^+ , wegen 2.24, $p = 0$.

Aus den Sprungbeziehungen 2.11 in ihrer L^2 -Form schließen wir auf $\varphi = c\nu_{\partial D}$ mit einer Konstante c .

Den Beweis der letzten Aussage des Satzes findet man z.B. in [Dautray/Lions]; der Beweis der Stetigkeit des Operators $S^{-1} : H_{\perp\nu}^{\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H_{\perp\nu}^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ erfolgt mit Hilfe der Anwendung des Satzes vom Lax-Milgram auf die variationelle Form der Gleichung $S\varphi = f$.

□

Satz 3.4

Der Operator F_3 ist kompakt und positiv semi-definit. Sein Nullraum ist gegeben durch

$$N(F_3) = \text{span}\{\nu_{\partial B}\}.$$

Beweis:

Aus 3.6 sieht man, daß F_3 kompakt und selbstadjungiert ist.

Der Operator G ist nach Satz 3.1 injektiv und $S_{\partial D}$ ist nach Lemma 3.3 positiv semi-definit. Damit folgt aus

$$(F_3g, g) = (SG^*g, G^*g), \tag{3.9}$$

daß F_3 positiv-semidefinit ist mit

$$N(F_3) = N(SG^*) = N(A).$$

Da der Operator A eine Einschränkung des Einfachschichtpotentialoperators ist, folgt

$$N(A) = \text{span}\{\nu_{\partial B}\}$$

nach dem Lemma 3.3.

□

3.1.2 Charakterisierung des Gebiets

Die in dem Satz 3.4 festgestellten Eigenschaften des Operators F_3 erlauben die Anwendung des Satzes über das Spektrum selbstadjungierter kompakter Operatoren auf F_3 . Somit erhalten wir, daß die orthonormierten Eigenfunktionen

$$g_j \in L^2(\partial B), \quad j \in \mathbb{N} \quad (3.10)$$

des Operators F_3 eine vollständige orthonormale Basis in

$$L^2_{\perp\nu}(\partial B) := \{\varphi \in L^2(\partial B) : \langle \varphi, \nu|_{\partial B} \rangle_{L^2(\partial B)} = 0\} \quad (3.11)$$

darstellen, wobei die entsprechenden Eigenwerte eine Folge von positiven reellen Zahlen

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > 0.$$

bilden.

Da der Operator $S : L^2_{\perp\nu}(\partial D) \rightarrow L^2_{\perp\nu}(\partial D)$ kompakt und positiv definit ist, besitzt er eine ebenfalls kompakte und in $L^2_{\perp\nu}(\partial D)$ positiv definite Wurzel $S^{\frac{1}{2}}$; diese ist eindeutig definiert.

Mit dieser Definition seien die Funktionen

$$\varphi_n := \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} S^{\frac{1}{2}} G^* g_n, \quad n = 1, \dots \quad (3.12)$$

deklariert.

Lemma 3.5

Die Funktionen φ_n , $n = 1, \dots$ bilden eine vollständige orthonormale Basis von $L^2_{\perp\nu}(\partial D)$.

Beweis:

Die Orthogonalität des Systems φ_n , $n = 1, \dots$ folgt aus der Orthogonalität von g_n :

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} (S^{\frac{1}{2}} G^* g_i, S^{\frac{1}{2}} G^* g_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle F g_i, g_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Für ein $\varphi \in L^2_{\perp\nu\partial D}$ mit $(\varphi, \varphi_n) = 0$ für alle $n = 1, \dots$ gilt

$$0 = (\varphi, \varphi_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} (\varphi, S^{\frac{1}{2}} G^* g_i) = (G S^{\frac{1}{2}} \varphi, g_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Die Vollständigkeit von g_n erfordert also, daß die homogene Gleichung $G S^{\frac{1}{2}} \varphi = 0$ erfüllt ist; wegen der Injektivität von $G S^{\frac{1}{2}}$ auf $L^2_{\perp\nu}$ folgt $\varphi = 0$ und die Vollständigkeit von φ_n , $n = 1, \dots$ ist bewiesen. \square

Diese Basis erlaubt uns, mit Hilfe der Eigenfunktionen von F_3 den Wertebereich des Operators $G S^{\frac{1}{2}}$ zu beschreiben:

Lemma 3.6

Eine Funktion $f \in L^2_{\perp\nu}(\partial B)$ liegt in $GS^{\frac{1}{2}}(L^2_{\perp\nu}(\partial D))$ dann und nur dann, wenn die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|(f, g_i)|^2}{\lambda_i} \quad (3.13)$$

konvergiert.

Beweis: Der folgende Beweis ist formal identisch mit dem des Lemmas 5 in [Hähler1] mit $L^2_{\perp\nu}$ hier statt L^2 dort.

Man schreibe ein $f = GS^{\frac{1}{2}}\varphi$ mit $\varphi \in L^2_{\perp\nu}(\partial D)$, $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i$ als

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i GS^{\frac{1}{2}}\varphi_i.$$

Mit der Definition 3.12 von φ_i und der Faktorisierung 3.6 des Operators F_3 erhält man

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{\sqrt{\lambda_i}} F_3 g_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \sqrt{\lambda_i} g_i$$

und somit gilt $\alpha_i = \frac{(f, g_i)}{\sqrt{\lambda_i}}$. Die Konvergenz der Reihe 3.13 ergibt sich aus der Parsevalschen Gleichung.

Umgekehrt, sei die Konvergenz von 3.13 vorausgesetzt. Für die Funktion

$$\varphi := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(f, g_i)}{\sqrt{\lambda_i}} \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \sqrt{\lambda_i} g_i \in L^2_{\perp\nu}(\partial D)$$

erhalten wir mit 3.12 die Beziehung $GS^{\frac{1}{2}}\varphi = f$.

□

Zu jedem Punkt $z \in B$ definiere man nun eine Funktion $f_z(x) := \Psi^{(r,c)}(x - z)a$, $x \in \partial B$ mit einem $a = \text{const} \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$.

Diese Funktionen ermöglichen uns, für jeweiliges $z \in B$ anhand von Spektraldaten von F_3 die Entscheidung zu treffen, ob z in D liegt oder nicht; dies zeigt der nächste Satz.

Satz 3.7

Für $z \in B$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

1) $z \in D$

$$2) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|(f_z, g_j)|^2}{\lambda_j} < \infty \quad (3.14)$$

Beweis:

Sei zunächst $z \in D$. Die Funktion $\Psi^{(r,c)}(\cdot - z)a$ ist analytisch in D^+ und verschwindet im Unendlichen. Darüber hinaus gilt $\int_{\partial D} \nu(x) \cdot \Psi^{(r,c)}(x - z)a \, ds(x) = 0$, denn für eine ausreichend große Kugel $B_R \supset B$ mit Zentrum in z folgt mit dem Gaußschen Satz, mit der Divergenzfreiheit von $\Psi^{(r,c)}(\cdot - z)a$ in $B_R \setminus B$ und der Definition von $\Psi^{(r,c)}$

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \nu(x) \cdot \Psi^{(r,c)}(x - z)a \, ds(x) &= \int_{\partial B_R} \nu(x) \cdot \Psi^{(r,c)}(x - z)a \, ds(x) \\ &= c_1 \int_{\partial B_R} \nu(x) \cdot \frac{1}{R}a \, ds(x) + c_2 \int_{\partial B_R} \nu(x) \cdot \frac{1}{R^3}x \cdot x \cdot a \, ds(x) \\ &= c_3 \int_{\partial B_R} \nu(x) \cdot a \, ds(x) = c_3 \int_{B_R} \operatorname{div} a = 0 \end{aligned}$$

mit gewissen Konstanten c_1, c_2, c_3 . Die Funktion f_z liegt somit in $H_{\perp\nu}^{\frac{1}{2}}(\partial D)$.

Wegen der eindeutigen Lösbarkeit des ÄDP mit den Randdaten

$$\Psi^{(r,c)}(\cdot - z)a|_{\partial D} \in H_{\perp\nu}^{\frac{1}{2}}(\partial D)$$

gilt $f = G(\Psi^{(r,c)}(\cdot - z)a|_{\partial D})$.

Nach Lemma 3.3 existiert genau eine Funktion $\varphi \in H_{\perp\nu}^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ mit

$$\Psi^{(r,c)}(\cdot - z)a|_{\partial D} = S\varphi = S^{\frac{1}{2}}(S^{\frac{1}{2}}\varphi) \in S^{\frac{1}{2}}(L_{\perp\nu}^2(\partial D)).$$

Also ist

$$f_z = G\Psi^{(r,c)}(\cdot - z)|_{\partial D} = GS^{\frac{1}{2}}(S^{\frac{1}{2}}\varphi)$$

und die Reihe 3.14 konvergiert nach Lemma 3.6 .

Sei jetzt $z \in \partial D$. Die Funktion $\Psi^{(r,c)}(\cdot - z)a$ ist die einzige, die in D^+ analytisch ist, im Unendlichen verschwindet und auf ∂B mit f_z zusammenfällt. Wegen der Singularität von $\Psi^{(r,c)}a$ im Punkt z gilt aber $\Psi^{(r,c)}|_{\partial D} \notin L^2(\partial D)$, somit

$$\Psi^{(r,c)}|_{\partial D} \notin S^{\frac{1}{2}}(L^2(\partial D)) \subset L^2(\partial D).$$

Demzufolge gilt $f_z \notin GS^{\frac{1}{2}}(L^2(\partial D))$ und die Reihe 3.14 divergiert.

Auf analoge Weise stellt man auch im Falle $z \in D^+ \cap B$ fest, daß 3.14 nicht konvergieren kann. \square

3.2 Der zweidimensionale Fall

Die im letzten Abschnitt beschriebene Vorgehensweise zur Behandlung des inversen Problems soll auf den zweidimensionalen Fall übertragen werden. Da die Lösungen des ÄDP in \mathbb{R}^2 im Unendlichen i. A. nicht abklingen, ist die Greensche Formel für unbeschränkte Gebiete nicht immer anwendbar. Dadurch kann insbesondere der Beweis der positiven Definitheit des Einfachschichtpotentialoperators nicht für alle Dichten wie im räumlichen Fall (vgl. Lemma 3.3) geführt werden.

Bei dem analogen inversen Problem zu der Laplace Gleichung, wo ein ähnliches Problem auftritt, wurde diese Schwierigkeit in [Kress2] elegant umgangen; wir zeigen, daß die dort vorgeschlagenen Modifikationen auch im hydrodynamischen Fall eine Gebietscharakterisierung ermöglichen. Die Idee dieser Modifikationen basiert auf der Tatsache, daß für das Einfachschichtpotential einer Dichte ψ mit $\int_{\partial D} \psi(x) ds(x) = 0$ gilt

$$\begin{aligned} S\psi(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left(\ln \frac{1}{|x-y|} \psi(y) + \frac{(x-y) \cdot \psi(y)}{|x-y|^2} (x-y) \right) ds(y) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \ln \left| \frac{x}{x-y} \right| \psi(y) ds(y) + o(1) = o(1), \quad |x| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.15)$$

und somit ist die Greensche Formel im unbeschränkten Gebiet D^+ auf $S\psi$ anwendbar.

3.2.1 Faktorisierung des Meßoperators

Wie im dreidimensionalen Fall sei der Operator $G_2 : f \rightarrow u|_{\partial B}$ als Abbildung der L^2 -Randdaten auf die ∂B -Einschränkung der Lösung des zweidimensionalen ÄDP eingeführt.

Aus 2.34 und 2.36 gewinnt man für G_2 die Darstellung

$$G_2 = U_2 \left(-\frac{1}{2}I + K_{(\partial D)} + L - \frac{|\partial D|}{2\pi} M \right)^{-1} \quad (3.16)$$

mit dem Operator

$$(U_2\varphi)(x) := \left(K_2 + L - \frac{|\partial D|}{2\pi} M \right) \Big|_{\partial B}.$$

Zusätzlich betrachten wir die folgende Modifizierung des Operators G_2 : der Operator $\tilde{G}_2 : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial B)$ sei gegeben durch

$$\tilde{G}_2 f = G_2 f - u_\infty,$$

d.h. von der auf ∂B gemessenen Lösung wird deren Wert im Unendlichen abgezogen.

Aus dem Ausdruck 3.16 für G_2 leiten wir für \tilde{G}_2 die folgende Darstellung ab:

$$\tilde{G}_2 = \tilde{U}_2 \left(-\frac{1}{2}I + K_{(\partial D)} + L - \frac{|\partial D|}{2\pi}M \right)^{-1}$$

mit

$$(\tilde{U}_2\varphi)(x) := (K_2 + L)|_{\partial B}.$$

Für den adjungierten Operator $\tilde{G}_2^* : L^2(\partial B) \rightarrow L^2(\partial D)$ gilt entsprechend

$$\tilde{G}_2^* = \left(-\frac{1}{2}I + K'_{(\partial D)} + L^* - \frac{|\partial D|}{2\pi}M \right)^{-1} \tilde{U}_2^*.$$

Dabei hat der zu \tilde{U} adjungierter Operator \tilde{U}_2^* die Gestalt $\tilde{U}_2^* = \tilde{K}' + L_{\partial B}^*$, wobei \tilde{K}' für den Operator K' mit ∂D ersetzt durch ∂B steht und $L_{\partial B}^* : L^2(\partial B) \rightarrow L^2(\partial D)$ gegeben ist durch

$$(L_{\partial B}^*\varphi)(x) := \frac{1}{2\pi} (x_2, -x_1)^T \int_{\partial B} \varphi(y) \cdot \frac{(y_2, -y_1)^T}{|y|^2} ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Satz 3.8

Der lineare Operator $G_2 : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial B)$ ist beschränkt und injektiv.

Der Nullraum des Operators \tilde{G}_2 ist gegeben durch

$$N(\tilde{G}_2) = \text{span}\{e_1, e_2\}. \quad (3.17)$$

Beweis:

Den Beweis der ersten Aussage führen wir analog zum dreidimensionalen Fall (vgl. Satz 3.1). Unter Berücksichtigung der Injektivität des Operators

$$\left(-\frac{1}{2}I + K_{(\partial D)} + L - \frac{|\partial D|}{2\pi}M \right)^{-1}$$

erhält man aus der Darstellung 3.16 von G_2 , daß $N(G_2) = N(U_2)$ gilt.

Nun erfülle ein Vektorfeld $\varphi \in L^2(\partial D)$ die Gleichung $U_2\varphi = 0$. Für die Funktion

$$u(x) := \left(K + L - \frac{|\partial D|}{2\pi}M \right)\varphi, \quad x \in D^+$$

gilt nach Voraussetzung $u|_{\partial B} = U_2\varphi = 0$ und damit wegen der Eindeutigkeit des ÄDP auch $u = 0$ in D^+ . Die Anwendung der L^2 -Sprungbeziehung für das Doppelschichtpotential führt jetzt zu

$$\left(-\frac{1}{2}I + K_{(\partial D)} + L - \frac{|\partial D|}{2\pi}M \right)\varphi = 0,$$

was nur für $\varphi = 0$ möglich ist.

Gilt $\tilde{G}_2 f = G_2 f - u_\infty = 0$ für ein $f \in L^2(\partial D)$, so erhält man nach der Eindeutigkeit des ÄDP und der Linearität von G_2 die Gleichung $G_2(f - u_\infty) = 0$, woraus mit der Injektivität von G_2 die Beziehung $f = u_\infty = \text{const}$ folgt. Damit ist die zweite Aussage des Satzes bewiesen. \square

Satz 3.9

Der Operator $F_2 : L^2(\partial B) \rightarrow L^2(\partial B)$ besitzt die Darstellung

$$F_2 = \tilde{G} S_0 \tilde{G}^* \quad (3.18)$$

mit

$$S_0 := (I - M)S(I - M) + M \quad (3.19)$$

und ist kompakt. Darüber hinaus ist F_2 positiv semi-definit. Als Abbildung von $H^{-\frac{1}{2}}(\partial B)$ hat F_2 den Nullraum

$$N(F_2) = \text{span}\{\nu_{\partial B}, \psi_1, \psi_2\}$$

mit den durch $\psi_j = S_{\partial B}^{-1} e_j$, $j = 1, 2$ gegebenen Vektorfeldern $\psi_1, \psi_2 \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial B)$.

Beweis: Für alle $y \in \partial B$ gilt

$$-w(\cdot, y)|_{\partial B} + w_\infty(y) = \tilde{G}\Psi^{(r,c)}(\cdot - y)|_{\partial D}.$$

Dieses, multipliziert mit einem $g \in L^2(\partial B)$ und integriert über ∂B , liefert wegen der guten Gestelltheit des Äußeren Dirichlet Problems und der Beschränktheit des linearen Operators \tilde{G}

$$F_2 = \tilde{G}A = \tilde{G}(I - M)A, \quad (3.20)$$

denn es gilt $\tilde{G}M = 0$. Hierbei ist der Hilfsoperator $A : L^2(\partial B) \rightarrow L^2(\partial D)$ gegeben durch

$$(Ag)(x) := \int_{\partial B} \Psi^{(r,c)}(x - y)g(y) ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Wegen $M(I - M)\varphi = 0$ verschwindet das Einfachschichtpotential mit der Dichte $(I - M)\varphi$ im Unendlichen, es folgt also (mit Berücksichtigung von 3.17)

$$A^*(I - M) = \tilde{G}_2 S(I - M) = \tilde{G}_2 [(I - M)S(I - M) + M]$$

und damit

$$(I - M)A = S_0 \tilde{G}_2^*.$$

Jetzt überzeugen wir uns, daß der Operator S_0 in (3.19) positiv definit ist. Definiert man für $\varphi \in C(\partial D)$ das Einfachschichtpotential (v, p) der Dichte $(I - M)\varphi$, so gilt

$$\begin{aligned} (S_0\varphi, \varphi) &= \int_{\partial D} ((I - M)\varphi \cdot S(I - M)\varphi + \varphi \cdot M\varphi) ds \\ &= \int_{\partial D} v \cdot ((T_p^v \nu)_- - (T_p^v \nu)_+) ds + |\partial D| |M\varphi|^2 \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^2} Dv : Dv dx + |\partial D| |M\varphi|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Mit dem üblichen Dichtheitsargument folgt $(S_0\varphi, \varphi) \geq 0$ für alle $\varphi \in L^2(\partial D)$. Dabei bedeutet $(S_0\varphi, \varphi) = 0$, daß die ersten Ableitungen von v im ganzen Raum verschwinden und es gilt $M\varphi = 0$, woher wegen der Sprungbeziehungen $\varphi = 0$ folgt; also ist S_0 injektiv.

Aus

$$(F_2g, g) = (S_0\tilde{G}^*g, \tilde{G}^*g) \quad (3.21)$$

folgt jetzt, daß F_2 positiv semi-definit ist.

Mit einem $g \in N(F_2)$, für das wegen 3.20 und 3.17 $Ag = \text{const}$ auf ∂D gilt, definiere man das Einfachschichtpotential u .

Da $u|_{\partial D} = \text{const} = c_1e_1 + c_2e_2$ gilt, folgt $u = \text{const}$ in D und wegen der Analytizität auch in \bar{B} . Somit erhalten wir $S_{\partial B}g = \text{const}$. Wählt man ein $b \in \mathbb{R}$, so daß die Funktion $\tilde{g} = g - c\nu|_{\partial B}$ in $L^2_\nu(\partial B)$ liegt, besagt das Lemma 3.3, daß die Integralgleichung $S\tilde{g} = \text{const}$ in $H^{-\frac{1}{2}}(\partial B)$ eindeutig lösbar ist. Für die Dichte g gilt also $g = S^{-1}\text{const} + b\nu|_{\partial B} = S^{-1}(c_1e_1) + S^{-1}(c_2e_2) + b\nu|_{\partial B}$, d.h.

$$N(F_2) \in \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \nu|_{\partial B}\}$$

mit $\psi_i := S^{-1}(e_i)$, $i = 1, 2$.

Die Inklusion $\text{span}\{\psi_1, \psi_2, \nu|_{\partial B}\} \subset N(F_2)$ folgt aus 3.20. □

Satz 3.10

Es gilt $N(\tilde{G}_2^*) = N(F_2)$.

Beweis:

Aus der Faktorisierung 3.18 des Operators F folgt $N(\tilde{G}_2^*) \subset N(F_2)$. Die umgekehrte Inklusion ergibt sich aus 3.21 unter Berücksichtigung der im Beweis des obigen Satzes gezeigten Injektivität von S_0 . □

3.2.2 Charakterisierung des Gebiets

Aus der Kompaktheit und der positiven Semidefinitheit des Operators F_2 folgt, daß seine orthonormierten Eigenfunktionen

$$g_j \in L^2(\partial B), \quad j \in \mathbb{N} \quad (3.22)$$

eine vollständige orthonormale Basis im Raum

$$L^2_{\diamond}(\partial B) := \{\varphi \in L^2(\partial B) : (\varphi, \nu_{\partial B})_{L^2(\partial B)} = (\varphi, \psi_1)_{L^2(\partial B)} = (\varphi, \psi_2)_{L^2(\partial B)} = 0\}$$

darstellen, wobei die entsprechenden Eigenwerte eine Folge von positiven reellen Zahlen

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > 0.$$

bilden.

Mit der gleichen Argumentation wie im Lemma 3.5 folgert man für die Funktionen

$$\varphi_n := \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} S_0^{\frac{1}{2}} \tilde{G}^* g_n, \quad n = 1, \dots, \quad (3.23)$$

daß sie eine vollständige orthonormale Basis von $L^2_{\diamond}(\partial D)$ darstellen.

Für den Wertebereich des Operators $\tilde{G} S_0^{\frac{1}{2}}$ gilt ferner:

Lemma 3.11

Eine Funktion $f \in L^2_{\diamond}(\partial B)$ liegt in $\tilde{G} S_0^{\frac{1}{2}}(L^2_{\diamond}(\partial D))$ dann und nur dann, wenn die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|(f, g_i)|^2}{\lambda_i} \quad (3.24)$$

konvergiert.

Beweis: Man folge den einzelnen Schritten des Beweises von Lemma 3.6. □

Jedem Punkt $z \in B$ sei nun das Vektorfeld

$$f_z(x) := (\text{grad}(\Psi^{(r,c)}(x-z)e_1))e_2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{z\} \quad (3.25)$$

zugeordnet. Diese Felder sind divergenzfrei und genügen der Kompatibilitätsbedingung

$$(f_z, \nu)_{L^2(\partial B)} = 0.$$

Darüber hinaus verschwinden sie im Unendlichen und sind dadurch zulässige Stokes-Geschwindigkeitsfelder im Äusseren jeder Umgebung des jeweiligen Punktes z . Betrachtet man den Operator \tilde{G}_{Γ} , definiert wie \tilde{G} aus dem vorhergehenden Abschnitt

mit ∂D ersetzt durch irgendeine geschlossene Kurve $\Gamma \subset B$, die z in ihrem Inneren enthält, so stellt man $f_z(x)|_{\partial B} \in \widetilde{G}(L^2(\Gamma))$ fest. Daher erhält man aus

$$\overline{\widetilde{G}_\Gamma(L^2(\Gamma))} = [N(\widetilde{G}_\Gamma^*)]^\perp = L_\diamond^2(\partial B),$$

daß gilt $f_z(x)|_{\partial B} \in L_\diamond^2(\partial B)$, d.h. $f_z(x)|_{\partial B}$ sind mit Fourier-Reihen nach den Eigenfunktionen von F_2 darstellbar.

Um eine dem Satz 3.7 entsprechende Charakterisierung des unbekanntes Gebiets D anhand von Spektraldaten von F_2 herzuleiten, brauchen wir nur noch die folgende Aussage über den Operator S_0 .

Satz 3.12

Der Operator $S_0 : C^{0,\alpha}(\partial D) \rightarrow C^{1,\alpha}(\partial D)$ ist bijektiv und seine Inverse ist beschränkt.

Beweis: Die Differenz zwischen dem injektiven Operator S_0 und dem Operator

$$\widetilde{S}_0 := S(I - M) + M \tag{3.26}$$

ist kompakt, somit folgt die Aussage des Satzes aus der Riesz-Theorie, wenn wir zeigen, daß $\widetilde{S}_0 : C^{0,\alpha}(\partial D) \rightarrow C^{1,\alpha}(\partial D)$ bijektiv mit beschränkter Inverser ist. Dies beweisen wir analog zum Satz 7.30 in [Kress1].

Löst eine Funktion $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ die Gleichung

$$\widetilde{S}_0 \psi = f \tag{3.27}$$

mit $f \in C^{1,\alpha}(\partial D)$, so löst sie offensichtlich auch die Gleichung

$$\frac{d}{ds} \widetilde{S}_0 \psi + M \widetilde{S}_0 \psi = \frac{df}{ds} + Mf. \tag{3.28}$$

Diese beiden Gleichungen sind sogar äquivalent, denn man kann sich leicht überzeugen, daß der Differentiationsoperator $\frac{d}{ds} + M : C^{1,\alpha}(\partial D) \rightarrow C^{0,\alpha}(\partial D)$ injektiv ist, indem man die Gleichung $\frac{df}{ds} + Mf = 0$ integriert.

Mit den bekannten Sprungbeziehungen der ersten Ableitungen des logarithmischen Einfachschichtpotentials (s. [Kress1], Theorem 7.28) läßt sich die Differentiation unter dem Integral in $\frac{d}{ds} \widetilde{S}_0 \psi$ durchführen. Auf diesem Wege erhält man äquivalent zu 3.28 die Gleichung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{K} & 0 \\ 0 & \mathcal{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \mathcal{M} \psi - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} S_{\log} M & 0 \\ 0 & S_{\log} M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + M \widetilde{S}_0 \psi = \\ = \frac{df}{ds} + Mf. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Dabei bezeichnet \mathcal{K} den Operator

$$(\mathcal{K}\varphi)(z) := \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{\mathbf{k}(z, \zeta)}{\zeta - z} \varphi(\zeta) ds(\zeta), \quad z \in \partial D$$

mit dem Kern

$$\mathbf{k}(z, \zeta) = (\zeta - z) \frac{\partial}{\partial s(z)} \ln \frac{1}{|\zeta - z|},$$

der Operator \mathcal{M} besitzt die Gestalt

$$(\mathcal{M}\psi)(z) =$$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \int_{\partial D} ds(\zeta) \frac{(\zeta_1 - z_1)^2}{|\zeta - z|^2} (I - M) \cdot & \int_{\partial D} ds(\zeta) \frac{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}{|\zeta - z|^2} (I - M) \cdot \\ \int_{\partial D} ds(\zeta) \frac{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}{|\zeta - z|^2} (I - M) \cdot & \int_{\partial D} ds(\zeta) \frac{(\zeta_2 - z_2)^2}{|\zeta - z|^2} (I - M) \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

und S_{log} steht für den logarithmischen Einfachschichtpotentialoperator

$$(S_{log}\varphi)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(\zeta) \ln \frac{1}{|\zeta - z|} ds(\zeta), \quad z \in \partial D.$$

Die Operatoren \mathcal{M} , $\frac{d}{ds} S_{log} M$, $M\tilde{S}_0$ sind als Abbildungen $C^{0,\alpha}(\partial D) \rightarrow C^{0,\alpha}(\partial D)$ kompakt: $\frac{d}{ds} S_{log} M$ und $M\tilde{S}_0$ sind beschränkt und haben endlichdimensionale Wertebereiche, während \mathcal{M} eine Superposition eines beschränkten und eines kompakten Operators darstellt.

Ferner gilt $\mathbf{k} \in C^{0,1,1}(\partial D \times \partial D)$ (s. [Kress1], S.119), also stellt der linken Seite der Gleichung 3.29 entsprechender Operator eine kompakt gestörte Superposition eines Cauchy-Integraloperators und der zweidimensionalen Identitätsmatrix dar. Somit ist die Noethersche Theorie (s. [Kress1], Abschnitt 7.4) für die singulären Integraloperatoren erster Art mit Cauchy-Kern auf die Gleichung 3.29 anwendbar. Da der Index einer Operatorgleichung erster Art gleich Null ist, muß nur noch die Injektivität des Operators \tilde{S}_0 gezeigt werden, damit auf seine Bijektivität und beschränkte Invertierbarkeit geschlossen werden kann.

Sei ψ eine Lösung der homogenen Form der Gleichung 3.29 und damit eine Lösung von $\tilde{S}_0\psi = 0$. Ein mit dieser Dichte gebildetes Einfachschichtpotential

$$u(x) = \int_{\partial D} \Psi^{(r,c)}(x - y)(I - M)\psi(y) ds(y) + M\psi, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (3.30)$$

löst entsprechend das innere sowie das äußere Dirichlet-Probleme bei Null-Randdaten, woher wegen der eindeutigen Lösbarkeit der beiden Probleme $u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ folgt. Aus $u(\infty) = 0$ folgt $M\psi = 0$, und die Sprungbeziehungen für das Einfachschichtpotential liefern $\psi = 0$ auf ∂D . \square

Anmerkung 3.1

Im letzten Satz haben wir unter anderem gezeigt, daß man die beschränkte Lösung des äußeren Dirichlet Problems mit dem modifizierten Einfachschichtpotentialansatz der Gestalt 3.30 finden kann. Nach unserer Kenntnis wurde auf diese Tatsache in der Literatur bisher nicht explizit hingewiesen. \square

Jetzt sind wir in der Lage, die Hauptaussage dieses Abschnitts zu beweisen.

Satz 3.13

Für $z \in B$ sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

- 1) $z \in D$
- 2)
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|(f_z, g_j)|^2}{\lambda_j} < \infty \quad (3.31)$$

Beweis: Liegt z in D , so ist die Funktion f_z die Lösung des äußeren Dirichlet Problems zu den Randdaten $f_z|_{\partial D}$. Da sie im Unendlichen verschwindet, gilt

$$G_2 f_z|_{\partial D} = \widetilde{G}_2 f_z|_{\partial D} = f_z|_{\partial B}.$$

Der Satz 3.12 garantiert die Existenz einer Funktion $\varphi \in C(\partial D)$ mit $S_0\varphi = f_z|_{\partial D}$, und wir folgern

$$f_z|_{\partial B} = \widetilde{G}_2 f_z|_{\partial D} = \widetilde{G}_2 S_0^{\frac{1}{2}} S_0^{\frac{1}{2}} \varphi$$

mit dem für den kompakten und positiv-definiten S_0 wohldefinierten Wurzeloperator $S_0^{\frac{1}{2}} : L^2(\partial D) \rightarrow L^2(\partial D)$. Nach Lemma 3.11 folgt die Konvergenz der Reihe 3.31.

Umgekehrt: Konvergiert die Reihe 3.31, so ist durch

$$\varphi := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} (f_z, g_i) \varphi_i$$

ein $L_{\diamond}(\partial D)$ -Vektorfeld gegeben. Aus (3.23) und 3.25 folgt, daß für φ die Beziehung $\widetilde{G}_2 S_0^{\frac{1}{2}} \varphi = f_z|_{\partial B}$ gilt. Nach Satz 3.8 erhalten wir wegen der Eindeutigkeit des ÄDP für B^+ und der Analytizität seiner Lösung, daß die Funktion f_z bis auf eine additive Konstante die Lösung des ÄDP in D^+ bei den Randdaten $S_0^{\frac{1}{2}} \varphi$ darstellt. Sie ist also

in D^+ nicht singulär, folglich liegt z in \overline{D} . Den Fall $z \in \partial D$ schließt man aber mit dem gleichen Argument wie im Satz 3.7 aus: wegen der Singularität von f_z im Punkt z gilt $f_z|_{\partial D} \notin L^2(\partial D)$, somit insbesondere $f_z|_{\partial D} \notin S_0^{\frac{1}{2}}(L^2(\partial D))$. Demzufolge erhält man $f_z \notin \tilde{G}S_0^{\frac{1}{2}}(L^2(\partial D))$, was nach Lemma 3.11 im Widerspruch mit der Konvergenz der Reihe 3.31 steht.

□

Kapitel 4

Numerische Umsetzung

In diesem Abschnitt soll die praktische Anwendbarkeit der im letzten Kapitel entwickelten Theorie anhand numerischer Beispiele belegt werden.

Nach Satz 3.13 bietet sich für die approximative Lösung des inversen Problems sofort folgender Algorithmus an:

- (1) Löse das Eigenwertproblem für F_2 anhand der Meßdaten.
- (2) Untersuche die Konvergenz der Reihe 3.31 für alle Punkte eines ausreichend feinen Gitters in B
- (3) Nehme alle Punkte, in welchen die Konvergenz vorliegt, in das Bildergebnis auf.

Für unsere Beispiele verwendete Meßdaten haben die folgende Struktur: zu M äquidistanten, auf ganz ∂B verteilten Punkten z_i , $i = 1, \dots, M$ lösen wir, wie im 3. Kapitel beschrieben, die ÄDP mit den Randdaten $-\Psi_2^{(r,c)}(\cdot, z_j) \cdot e_k$ $k = 1, 2$. Von den erhaltenen Lösungen $u^{(k)}(\cdot, z_i)$ wird deren Wert im Punkt $(10^{14}, 10^{14})$ abgezogen. Die Komponenten von $\tilde{u}_{ji}^{(k)} := u^{(k)}(z_j, z_i) - u^{(k)}((10^{14}, 10^{14})^T, z_i)$ werden zusammengefasst zur $2M \times 2M$ -Matrix

$$W = \begin{pmatrix} \tilde{u}_{11,1}^{(1)} & \dots & \tilde{u}_{1M,1}^{(1)} & \tilde{u}_{11,2}^{(1)} & \dots & \tilde{u}_{1M,2}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{u}_{M1,1}^{(1)} & \dots & \tilde{u}_{MM,1}^{(1)} & \tilde{u}_{M1,2}^{(1)} & \dots & \tilde{u}_{MM,2}^{(1)} \\ \tilde{u}_{M1,1}^{(2)} & \dots & \tilde{u}_{1M,1}^{(2)} & \tilde{u}_{M1,2}^{(2)} & \dots & \tilde{u}_{1M,2}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{u}_{MM,1}^{(2)} & \dots & \tilde{u}_{MM,1}^{(2)} & \tilde{u}_{MM,2}^{(2)} & \dots & \tilde{u}_{MM,2}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Diese diskreten Meßdaten erlauben natürlich nur eine approximative Berechnung

von den Spektraldaten von F_2 . Ist $z(t)$ eine reguläre Parametrisierung von ∂B , so ersetzen wir die Aufgabe der Ermittlung der Paare (g_n, λ_n) , $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} (F_2 g_n)(z(t)) &= - \int_0^{2\pi} [w(z(t), z(\tau)) - w_\infty(z(\tau))] g_n(z(\tau)) |z'(\tau)| d\tau \\ &= \lambda_n g_n(z(t)), \quad t \in (0, 2\pi] \end{aligned}$$

durch das Lösen der Eigenwertaufgabe

$$- \frac{2\pi}{M} \sum_{j=1}^M [w(z_i, z_j) - w_\infty(z_j)] \tilde{g}_n(z_j) |z'(t_j)| = \tilde{\lambda}_n \tilde{g}_n(z_i), \quad i, n = 1, \dots, M. \quad (4.2)$$

Durch die Umformung von 4.2 zu

$$\begin{aligned} - \frac{2\pi}{M} \sum_{j=1}^M [w(z_i, z_j) - w_\infty(z_j)] \sqrt{|z'(t_i)| |z'(t_j)|} \tilde{g}_n(z_j) \sqrt{|z'(t_j)|} \\ = \tilde{\lambda}_n \tilde{g}_n(z_i) \sqrt{|z'(t_i)|}, \quad i, n = 1, \dots, M \end{aligned}$$

erhält man das einfach zu lösende (z. B. mit dem QR-Verfahren mit Shifts) Eigenwertproblem zur symmetrischen Matrix mit den Einträgen

$$\widetilde{W}_{ij} := \frac{2\pi}{M} W_{ij} \sqrt{|z'(t_i)| |z'(t_j)|}, \quad i, j = 1, \dots, 2M$$

(man berücksichtige $t_{M+i} = t_i$ und $|z'(t_i)| > 0$, $i=1, \dots, M$).

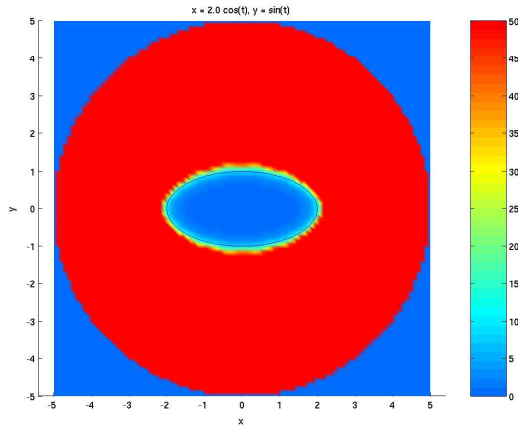
Die Konvergenz der Eigenwerte α_n der Matrix $(\widetilde{W})_{i,j=1, \dots, 2M}$ gegen die Eigenwerte des Operators F_2 bei $M \rightarrow \infty$ ist durch die Theorie der kollektiv kompakten Operatoren gesichert (s. [ANS], S. 65-66).

4.1 Rekonstruktion durch Reihenwertvergleich

Der zweite Algorithmusschritt erfordert es, numerisch zu entscheiden, ob die Reihe 3.31 konvergiert. Dafür stehen uns die endlichen Summen

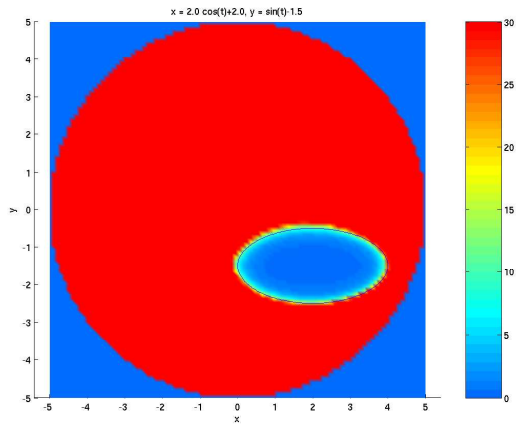
$$R_N(\zeta) := \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \left| \frac{2\pi}{M} \sum_{j=1}^M f_\zeta(z(t_j)) \cdot \tilde{g}_n(z(t_j)) |z'(t_j)| \right|^2, \quad N = 1, \dots, M$$

zur Verfügung, welche sich nach der Anwendung der Trapezregel für die Auswertung des Skalarprodukts in 3.31 ergeben. Die Stetigkeitserwägungen legen es nahe, die Entscheidung über die Konvergenz von 3.31 für jeden Punkt $\zeta \in B$ aus dem Vergleich des Wertes der Summe $R_N(\zeta)$ mit deren Werten in allen anderen Punkten



Rekonstruktion einer Ellipse. 64 Meßstellen, $N = 40$. Um die Visualisierung zu ermöglichen, mußten wir eine globale obere Schranke für die Werte der Reihe setzen: hier wurden alle Werte über 50 auf 50 gesetzt.

Abbildung 4.1: Ellipse, $N = 40$



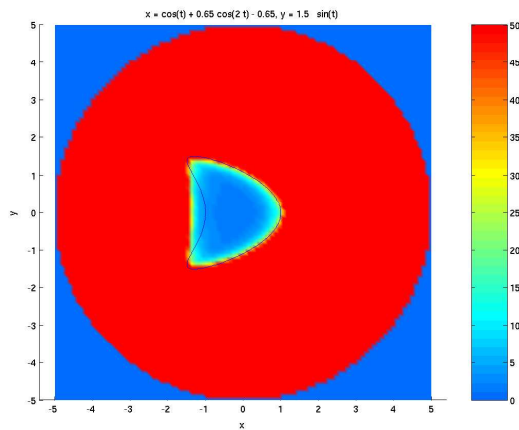
Eine dezentrierte Ellipse. 64 Meßstellen, $N = 50$.

Abbildung 4.2: Dezentrierte Ellipse, $N = 50$

zu ziehen: diese sollen innerhalb des zu rekonstruierenden Gebiets vergleichsweise „klein“, außerhalb des Gebiets vergleichsweise „groß“ sein. Nach der intuitiven Wahl einer oberen Wertschranke $S > 0$ können dann die Gitterpunkte z_i mit $R_N(\zeta_i) < S$ dem gesuchten Gebiet zugeordnet werden.

Alternativ können diese Verhältnisse durch die Farbkodierung der Werte der endlichen Reihe in den Auswertungspunkten visualisiert werden. Offensichtlich bedeuten weder die relativ kleinen Werte des endlichen Reihenabschnitts automatisch die Konvergenz der Reihe, noch die großen Werte ihre Divergenz. Brauchbare Ergebnisse lassen sich trotzdem erzielen, wie die Abbildungen 4.1-4.3 zeigen. Als Meßkurve für alle numerischen Tests in diesem Kapitel wurde der Kreis mit Radius 5 genommen.

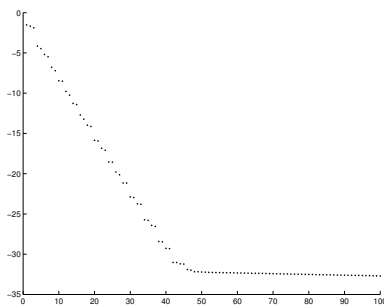
Die Zahl $N = 40$ wurde im nächsten Beispiel aus folgendem Grund genommen: sind ∂D und ∂B analytisch, so fallen die Eigenwerte des Integraloperators F_2 mindestens



Die Rekonstruktion der konkaven Seite des durch die dünne Linie angedeuteten Objektes („Luftdrachens“) ist nicht optimal. $N = 40$. 200 Meßstellen.

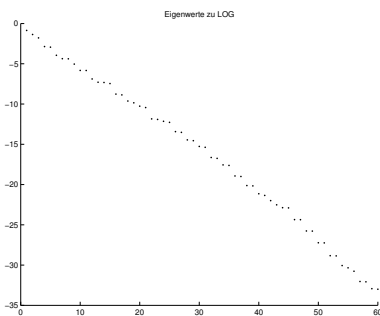
Abbildung 4.3: Luftdrachen, $N=40$

exponentiell ab, da sein Kern analytisch ist (s. Satz 15.20 in [Kress1]). Für das letzte Beispiel wurde folgende Approximation der Eigenwerte von F_2 erhalten (hier zum Logarithmus genommen):



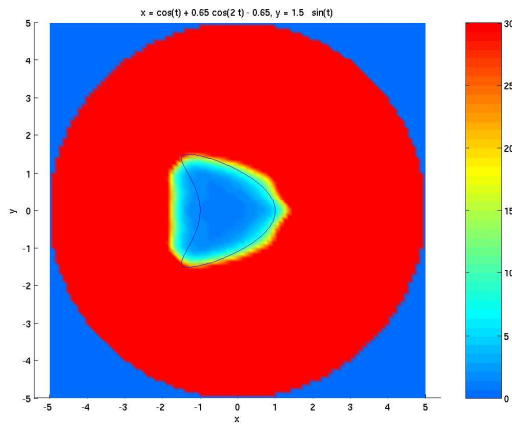
Man sieht, daß sich nur die ersten 40 Eigenwerte gemäß des erwarteten exponentiellen Abklingens verhalten; die restlichen Werte sind unzuverlässig, wohl wegen des Rundungsfehlers.

Abbildung 4.4: Luftdrachen, Eigenwerte



Die Eigenwerte für die dezentrierte Ellipse (s. Abb. 4.1) fallen weniger schnell ab als beim Drachen. Wir können daher mehr Eigenwerte für die Rekonstruktion heranziehen.

Abbildung 4.5: Dezentrierte Ellipse, Eigenwerte



Nimmt man weniger Eigenwerte für die Summenbildung, wird die Rekonstruktion gröber: der Unterschied zwischen den „großen“ und den „kleinen“ Werten bildet sich nicht ausreichend deutlich aus (für dieses Bild wurde $N = 20$ gewählt).

Im letzten Beispiel zeigt sich ein leichter Nachteil der benutzten Methode: man kann a priori nicht wissen, *wie* klein die Reihenwerte sein müssen, um die Reihe als konvergent anzunehmen. Dies erschwert z. B. eine automatisierte Bilderkennung.

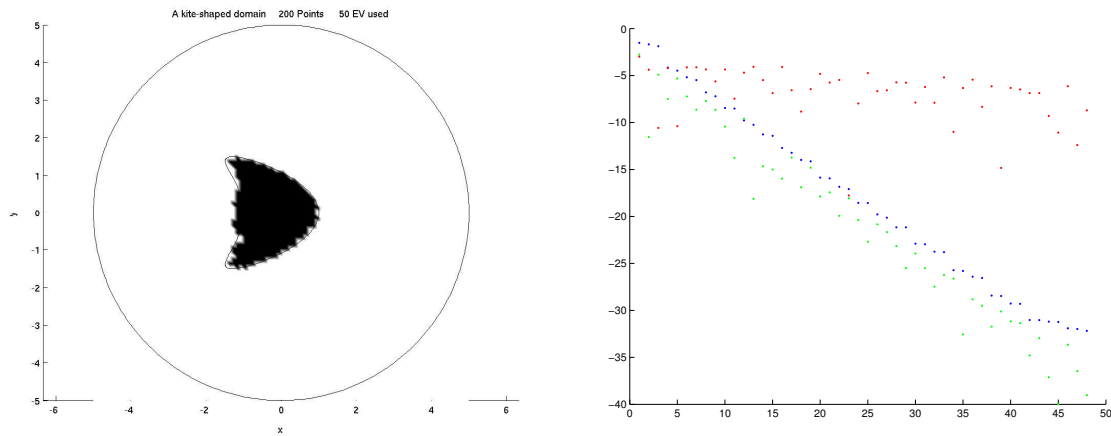
4.2 Das exponentielle Abklingen der Eigenwerte

Jetzt wollen wir anhand von Beispielen einen anderen Zugang zur numerischen Entscheidung über die Konvergenz der Reihe 3.31 demonstrieren. Dabei benutzen wir [BRH] zufolge das erwähnte exponentielle Abklingen der Eigenwerte, indem wir die Abklingraten der Zähler und der Nenner der Reihe vergleichen. Ist diese Rate für den Zähler größer, als beim Nenner, liegt offenbar eine konvergente Reihe vor.

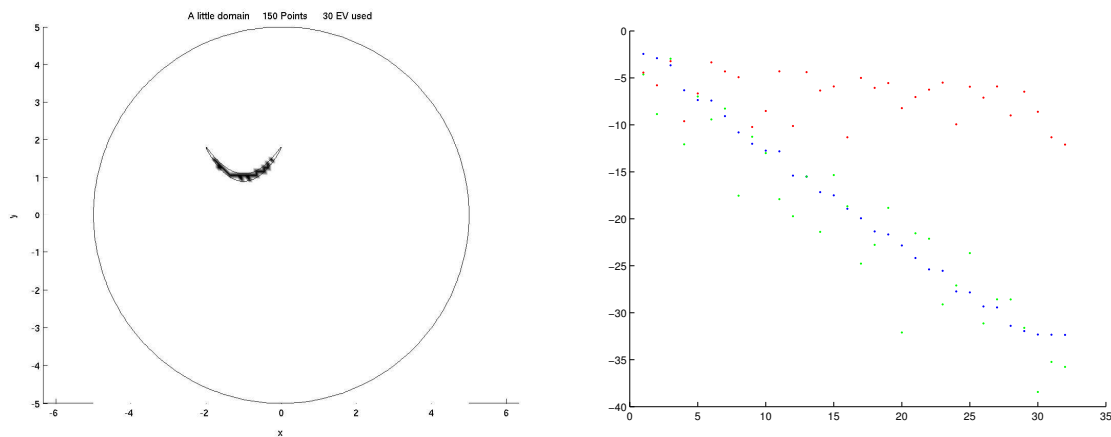
Dieser Vergleich läßt sich durchführen, indem man die Steigungen der Regressionsgeraden zu den logarithmierten Eigenwerten bzw. Fourierkoeffizienten betrachtet. Diese Vorgehensweise öffnet eine Möglichkeit, die zu erwartende Qualität der Rekonstruktion statistisch zu charakterisieren: anhand der quantitativ bekannten Empfindlichkeit der linearen Regression gegenüber Datenstörungen soll es möglich sein, die Zugehörigkeit der Punkte zum unbekanntem Objekt als *Hypothese* zu überprüfen. Auf jedem Fall hängt der Grad der schlechten Gestelltheit des inversen Problems direkt mit dem exponentiellen Abklingverhalten der Eigenwerte des Operator F_2 zusammen; das Verwenden der linearen Regression verleiht dem Verfahren gewisse Stabilität.

Das aus den Abbildungen 4.4 und 4.5 ersichtliche Verhalten der Eigenwerte läßt vermuten, daß ihr Auftreten paarweise bei allen zur Ellipse homeomorphen Geometrien des gesuchten Objekts zu erwarten ist. Vor allem im Falle der mit einem zufälligen Fehler gestörten Meßdaten kann man diese Tatsache zu einer weiteren Stabilisierung des Verfahrens gut nutzen, indem man die Werte durch die arithmetische Mittelung paarweise zusammenfasst und erst für diese Daten die Ausgleichsgerade konstruiert.

Für alle Beispiele dieses Abschnitts wurde auf dem äußeren Quadrat des Kreises mit Radius 5 (die Meßkurve) ein quadratisches 100×100 -Gitter gelegt. Die Auswertung der Reihe erfolgt in dessen Knoten.



Die linke Abbildung zeigt, welche Qualität der Rekonstruktion auf beschriebenen Wege möglich ist; auch die konkave Seite des Objektes ist korrekt erkennbar. Die Abbildung rechts veranschaulicht das Verhalten der Eigenwerte (blau markiert) und der Zähler der Reihe 3.31 in den Punkten $(0.5, 0.5)$ (grün) und $(3, 3)$ (rot). Das folgende Beispiel illustriert die hohe graphische Auflösung des Algorithmus:



Die rechte Abbildung zeigt das Verhalten der Eigenwerte (blau markiert) und der Zähler der Reihe 3.31 in den Punkten $(-1, 1.2)$ (grün) und $(3, 3)$ (rot).

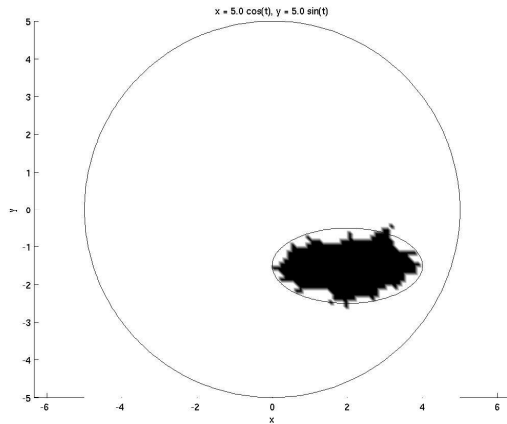


Abbildung 4.6: Ellipse, 20 Eigenwerte, gestörte Daten

Rekonstruktion einer dezentrierten Ellipse aus gestörten Daten für 64 Meßpunkte. Die Werte der Matrix 4.1 sind um einen standardverteilten Fehler von maximal 0.1% variiert worden. Natürlich sind bei gestörten Daten weder die Symmetrie der Matrix 4.1 noch ihre positive Definitheit zu erwarten; für dieses Beispiel konnten wir nur die ersten 20 Eigenwerte benutzen, denn die weiteren waren nicht reell.

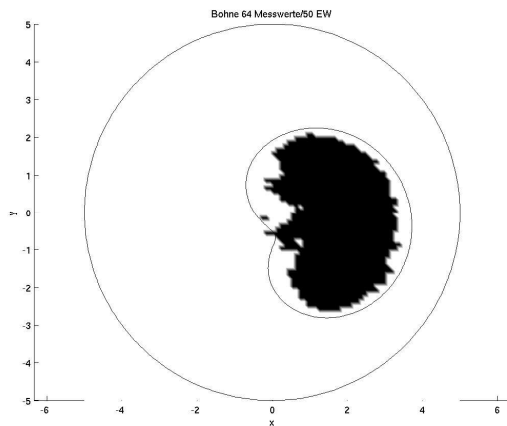


Abbildung 4.7: Ein asymmetrisches Gebiet

Dieses abschliessende Beispiel macht deutlich, daß die Qualität der Rekonstruktion lokal von der Geometrie des Objektes abhängt. Das Bild links zeigt das Ergebnis der Rekonstruktion von einem asymmetrischen Gebiet (64 Meßpunkte, 50 Eigenwerte) aus ungestörten Daten, die Bilder unten - zwei Rekonstruktionsversuche aus gestörten Daten (24 Eigenwerte, Störung wie im obigen Beispiel).

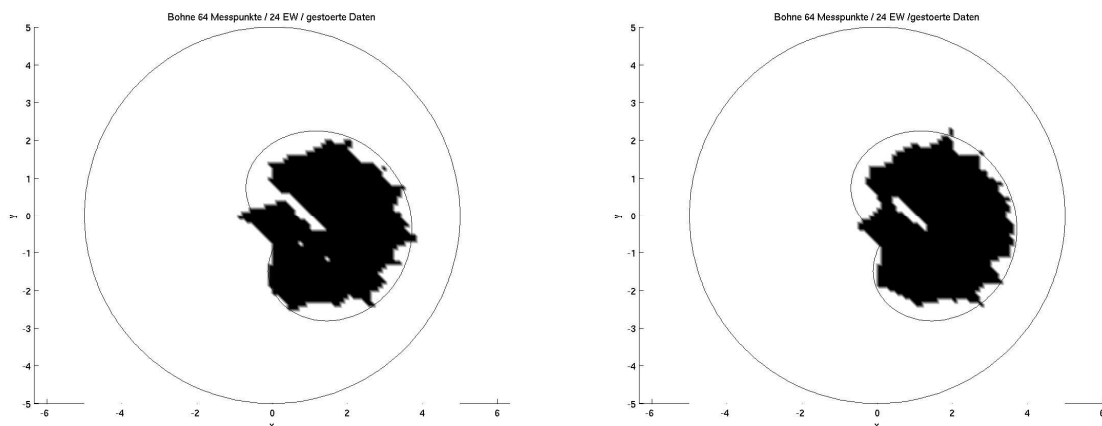


Abbildung 4.8: Ein asymmetrisches Gebiet: Datenstörung

Literaturverzeichnis

- [AK] C.J.S. Alves, R. Kress: On the far field operator in elastic obstacle scattering. IMA J. Appl. Math. 67, 1-21 (2002)
- [ANS] Philip M. Anselone: Collectively Compact Operator Approximation Theory and Applications to Integral Equations. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971
- [Arens] T. Arens: Linear sampling methods for 2D inverse elastic wave scattering. Inverse Problems 17 1445-1464 (2001)
- [Arens/Kirsch] T. Arens, A. Kirsch: The factorization method in inverse scattering from periodic structures. Inverse Problems 19, Number 5, October 2003
- [Brühl] M. Brühl: Explicit characterisation of inclusions in electrical impedance tomography. SIAM J. Math. Anal. 32, 1327-1342, 2001
- [BRH] M. Brühl, M. Hanke: Numerical implementation of two noniterative methods for locating inclusions by impedance tomography. Inverse Problems 16 (2000) 1029-1042
- [Calderón] A. P. Calderón: The Multipole Expansion of Radiation Fields. J. Rat. Mech. Anal. 3, 1954, 523-537
- [CCM] D. Colton, J. Coyle, P. Monk: Recent Developments in Inverse Acoustic Scattering Theory. SIAM Review, 42(3): 369-414, 2000
- [CHM] D. Colton, H. Haddar, P. Monk: The Linear Sampling Method for Solving the Electromagnetic Inverse Scattering Problem. SIAM Journal on Scientific Computing, 24(3): 719-731, 2002
- [Colton/Kress] D. Colton, R.Kress: Integral Equation Methods in Scattering Theory. Wiley, New York, 1983
- [Coyle] J. Coyle: Locating the support of objects contained in a two-layered background medium in two dimensions. Inverse Problems, 16(2):275-292, April 2000.

- [Dautray/Lions] R. Dautry, J.-L. Lions: *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol.4. Springer-Verlag, 1990
- [Evans] Evans, J. R.: *Randintegralgleichungen bei der Stokes-Gleichung und ihre numerische Behandlung*. NAM, Göttingen, Diplomarbeit, 1997
- [Fabes] Fabes, C. Kenig and G. Verchota: *The Dirichlet problem for the Stokes System on Lipschitz Domains*, *Duke Math. J.* 5 (1988) 769-793.
- [Ikehata'98] M. Ikehata: *Reconstruction of an Obstacle from the Scattering Amplitude at Fixed Frequency*. *Inverse Problems* 14, 949-954, 1998
- [Hähner1] Hähner, P.: *An inverse problem in electrostatics*. *Inverse Problems* 14, 1489-1512 (1998)
- [Hähner2] Hähner, P.: *Eindeutigkeits- und Regularitätssätze für Randwertprobleme bei der skalaren und vektoriellen Helmholtz-Gleichung*. NAM, Göttingen, Dissertation 1990
- [Hebeker] F.K. Hebeker: *Efficient Boundary Element Methods for Three-dimensional Exterior Viscous Flow*. *Num. Meth. Part. Diff. Equations* 2, 273-297 (1986)
- [HMO] H. Haddar, P. Monk: *The linear sampling method for solving the electromagnetic inverse medium problem*. *Inverse Problems*, 18(3): 891-906, Juni 2002
- [Hsiao/Kress] G.C. Hsiao, R. Kress: *On an integral Equation for the Two-dimensional Exterior Stokes Problem*. *Appl. Num. Math.* 1, 77-93 (1985)
- [Kersten] Kersten, H.: *Grenz- und Sprungrelationen für Potentiale mit quadratsummierbarer Dichte*. *Resultate d. Math.* 3, 17-24 (1980)
- [Kirsch1] A. Kirsch: *Characterization of the shape of the scattering obstacle by the spectral data of the far field operator*. *Inverse Problems* 14 (1998)
- [Kirsch3] A. Kirsch: *The MUSIC-Algorithm and the Factorization Method in Inverse Scattering Theory for Inhomogeneous Media*. *Inverse Problems* 18 (2002), 1025-1040.
- [Lad] O. A. Ladyzhenskaya: *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Second english version. Gordon and Breach 1969
- [Kress1] R. Kress: *Linear Integral Equations*, 2nd ed. Springer-Verlag New-York, 1999
- [Kress2] R. Kress: *Inverse Boundary Value Problems in Potential Theory*. *Cubo Matematica Educacional* Vol 3. Nr. 2, July 2001

-
- [Kress3] R. Kress: A Sampling Method for an Inverse Boundary Value Problem for Harmonic Vector Fields. MSRI Preprint No. 2001-029, 2001
- [KK] R. Kress, L. Kühn: Linear sampling methods for inverse boundary problems in potential theory. *Appl. Numer. Math.* 43, 161-173 (2002)
- [Luke/Potthast] R. Luke, R. Potthast: The no response test - a sampling method for inverse scattering problems. *SIAM Journal of Applied Math*, zu erscheinen.
- [Mitrea/Taylor] M. Mitrea, M. Taylor: Navier-Stokes Equations on Lipschitz Domains in Riemannian Manifolds. *Math. Annalen* 321 (2001), 955-987.
- [Potthast'01] R. Potthast: Point sources and multipoles in inverse scattering theory. Chapman & Hall (2001)
- [Power/Miranda] H. Power and G. Miranda: 2nd kind integral equation formulation of Stokes flow past a particle of arbitrary shape. *SIAM J. App. Math.*, 47:689-698, 1987.
- [Power] H. Power: The completed double layer boundary integral equation method for two-dimensional Stokes flow. *IMA J. Appl. Math.* 51 pp. 123-145 (1993)
- [Power/Wrobel] H. Power, L. C. Wrobel: *Boundary Integral Methods in Fluid Mechanics*. Computational Mechanics Publications Southampton Boston, 1995
- [POZ] C. Pozrikidis: *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*. Cambridge University Press 1992
- [Varnhorn] W. Varnhorn: *The Stokes Equations*. Akademie Verlag 1994

Curriculum vitae

Persönliche Daten:

Name: Viktor Tsiporin
Geburtsdatum: 9.5.1974
Geburtsort: Sankt-Petersburg, Russische Föderation
Familienstand: ledig
Staatsangehörigkeit: deutsch
Eltern: Sophie Tsiporin, geb. Farberoff, Chemikerin
Felix Tsiporin, Mathematiker

Schulbildung:

1/1981 - 6/1989 Allgemeinbildende Schule Nr. 301, St.-Petersburg, Russland
9/1989 - 6/1991 Spezialgymnasium Nr. 30, St.-Petersburg, Russland
6/1991 Abitur

Studium:

9/1991 - 6/1995 Studium der Mathematik an der Staatlichen Universität St.-Petersburg.
3/1996 - 2/2000 Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Georg-August-Universität Göttingen
1999 Diplomarbeit: "Über ein Transmissionsproblem bei zeit-harmonischen elektromagnetischen Wellen in einem orthotropen Medium"
02/2000 Diplom in Mathematik
seit 3/2000 Mitglied im Graduiertenkolleg "Strömungsinstabilitäten und Turbulenz"