Lattice Quantum Field Theories with Quantum Symmetry

Dissertation
eingereicht am Fachbereich für theoretische Physik
der Freien Universität Berlin

von Frank Haußer

Mai 1998

Erstgutachter: Professor Dr. Robert Schrader
Zweitgutachter: Professor Dr. Yu. Anton Alekseev

Tag der Disputation: 9.Juli 1998

Abstract. In this thesis we construct and investigate quantum group spin chains and lattice current algebras at roots of unity. The main problem in constructing these models stems from the fact that the semisimple quotients of quantum groups at roots of unity are no longer coassiciative and have to be described by *weak quasi–quantum groups*. To solve this problem we introduce a new mathematical construction of what we call a *diagonal crossed product*. This may be shortly described as follows. A two-sided coaction $\delta : \mathcal{M} \to \mathcal{G} \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{G}$ of a Hopf algebra $(\mathcal{G}, \Delta, \epsilon, S)$ on an associative algebra $\mathcal{M}$ is an algebra map of the form $\delta = (\lambda \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}}) \circ \rho = (\mathrm{id}_{\mathcal{M}} \otimes \rho) \circ \lambda$, where (λ, ρ) is a commuting pair of left and right $\mathcal{G}$-coactions on $\mathcal{M}$, respectively. Denoting the associated commuting right and left actions of the dual Hopf algebra $\hat{\mathcal{G}}$ on $\mathcal{M}$ by $\triangleleft$ and $\triangleright$, respectively, we define the *diagonal crossed product* $\mathcal{M} \bowtie \hat{\mathcal{G}}$ to be the algebra generated by $\mathcal{M}$ and $\hat{\mathcal{G}}$ with relations given by

$$\varphi\, m = (\varphi_{(1)} \triangleright m \triangleleft \hat{S}^{-1}(\varphi_{(3)}))\, \varphi_{(2)}, \;\; m \in \mathcal{M},\; \varphi \in \hat{\mathcal{G}}\ .$$

We give a natural generalization of this construction to the case where $\mathcal{G}$ is a quasi–Hopf algebra in the sense of Drinfeld and, more generally, also in the sense of Mack and Schomerus (i.e., where the coproduct Δ is non-unital). In these cases our diagonal crossed product will still be an associative algebra structure on $\mathcal{M} \otimes \hat{\mathcal{G}}$ (or - if Δ is non unital - on a certain subspace thereof) extending $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M} \otimes \hat{\mathbf{1}}$, even though the analogue of an ordinary crossed product $\mathcal{M} \rtimes \hat{\mathcal{G}}$ in general is not well defined as an associative algebra.

In the case $\mathcal{M} = \mathcal{G}$ and $\lambda = \rho = \Delta$ we obtain an explicit definition of the quantum double $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ for (weak) quasi–Hopf algebras $\mathcal{G}$. We prove that $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ is itself a (weak) quasi-triangular quasi–Hopf algebra and we give explicit formulas for the coproduct, the antipode and the R-matrix. Moreover we show that any diagonal crossed product $\mathcal{M} \bowtie \hat{\mathcal{G}}$ naturally admits a two-sided $\mathcal{D}(\mathcal{G})$-coaction.

We then apply our formalism to construct quantum spin chains and lattice current algebras based on a weak quasi–Hopf algebra as iterated diagonal crossed products. This contains the important cases of truncated quantum groups at roots of unity. Both lattice models admit the quantum double $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ as a localized cosymmetry, generalizing results of Nill and Szlachányi [NS97]. We investigate the representation theory of these models. In particular we show that irreducible representations of lattice current algebras (based on a semisimple weak quasi Hopf algebra $\mathcal{G}$) are in one-to-one correspondence with the irreducible representations of the quantum double $\mathcal{D}(\mathcal{G})$, generalizing the results of Alekseev et al. [AFFS98].

ZUSAMMENFASSUNG. In dieser Arbeit konstruieren wir Quantengruppen–Spinmodelle und Gitterstromalgebren an den Einheitswurzeln. Die Hauptschwierigkeit bei dieser Konstruktion rührt von der Tatsache her, daß die halbeinfachen Quotienten von Quantengruppen an den Einheitswurzeln nicht mehr koassoziativ sind. Sie besitzen die Struktur einer schwachen Quasi–Quantengruppe. Wir führen deswegen eine neue mathematische Konstruktion - das sogenannte *diagonale verschränkte Produkt* - ein. Dieses läßt sich kurz wie folgt beschreiben: Eine zweiseitige Kowirkung $\delta : \mathcal{M} \to \mathcal{G} \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{G}$ einer Quantengruppe $(\mathcal{G}, \Delta, \epsilon, S)$ auf einer associativen Algebra $\mathcal{M}$ ist ein Algebramorphismus der Form $\delta = (\lambda \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{M}}) \circ \rho = (\mathrm{id}_{\mathcal{M}} \otimes \rho) \circ \lambda$, wobei (λ, ρ) ein kommutierendes Paar einer Links- bzw. einer Rechts–$\mathcal{G}$-Kowirkung auf $\mathcal{M}$ bezeichnet. Mit Hilfe der entsprechenden kommutierenden Rechts- bzw. Linkswirkung $\triangleleft$ und $\triangleright$ der dualen Hopfalgebra $\hat{\mathcal{G}}$ auf $\mathcal{M}$ definieren wir das *diagonale verschränkte Produkt* $\mathcal{M} \bowtie \hat{\mathcal{G}}$ als die von $\mathcal{M}$ und $\hat{\mathcal{G}}$ erzeugte Algebra mit den Relationen

$$\varphi\, m = (\varphi_{(1)} \triangleright m \triangleleft \hat{S}^{-1}(\varphi_{(3)}))\, \varphi_{(2)}, \;\; m \in \mathcal{M},\; \varphi \in \hat{\mathcal{G}}\;.$$

Diese Konstruktion läßt sich auf natürliche Weise auf Quasi–Hopfalgebren $\mathcal{G}$ im Sinne von Drinfeld oder noch allgemeiner im Sinne von Mack and Schomerus (i.e. mit nicht unitalem Koprodukt Δ) verallgemeinern. In diesen Fällen ergibt unser diagonales verschränktes Produkt immer noch eine assoziative Algebrastruktur auf $\mathcal{M} \otimes \hat{\mathcal{G}}$ (oder - wenn Δ nicht unital ist - auf einem bestimmten Unterraum) als eine Fortsetzung von $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M} \otimes \hat{\mathbf{1}}$, obwohl eine entsprechende Verallgemeinerung des gewöhnlichen verschränkten Produkts $\mathcal{M} \rtimes \hat{\mathcal{G}}$ im allgemeinen zu keiner wohldefinierten assoziativen Algebra führt.

Der Fall $\mathcal{M} = \mathcal{G}$ and $\lambda = \rho = \Delta$ führt zu einer Definition des Quantendoppels $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ einer (schwachen) Quasi–Hopfalgebra $\mathcal{G}$. Wir zeigen, daß $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ selbst eine schwache quasitrianguläre Quasi–Hopfalgebra ist. Wir geben explizite Formeln für das Koprodukt, für die Antipode und für die R–Matrix an. Außerdem zeigen wir, daß jedes diagonale verschränkte Produkt $\mathcal{M} \bowtie \hat{\mathcal{G}}$ auf natürliche Weise eine zweiseitige $\mathcal{D}(\mathcal{G})$-Kowirkung besitzt.

Dann benutzen wir unseren Formalismus zur Konstruktion von Quantenspinketten und Gitterstromalgebren als iterierte diagonale verschränkte Produkte und erreichen so unser Ziel der Konstruktion dieser Modelle an den Einheitswurzeln. Auf beiden Gittermodellen wirkt das Quantendoppel als lokalisierte Kosymmetrie, was die Ergebnisse von Nill und Szlachányi [NS97] verallgemeinert. Zum Schluß untersuchen wir die Darstellungstheorie der konstruierten Quantenketten. Insbesondere zeigen wir, daß die irreduziblen Darstellungen einer Gitterstromalgebra eineindeutig den irreduziblen Darstellungen des Quantendoppels $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ der zugrundegelegten schwachen Quasi–Hopfalgebra $\mathcal{G}$ zugeordnet werden können, was die Ergebnisse von Alekseev et al. [AFFS98] verallgemeinert.

Contents