Kapitel 1

Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist die numerische Behandlung von mehrgliedrigen Abelschen Integralgleichungen und gewöhnlichen Differentialgleichungen nichtganzzahliger Ordnung.
Zahlreiche Problemstellungen der angewandten Mathematik führen auf gewöhnliche Differentialgleichungen, welche die zeitliche Änderung einer oder mehrerer Zustandsgrößen beschreiben. Viele interessante Phänomene kommen jedoch mit solchen Modellen nicht aus, z.B. dann, wenn etwa die zeitliche Änderung der Zustandsgrößen nicht nur von diesem Zeitpunkt, sondern auch von den zurückliegenden Zuständen abhängt. In solchen Fällen ist oft Modellierung mit nichtganzzahligen Ableitungen sinnvoll, da sie im Gegensatz zu ganzzahligen – die nur vom lokalen Verhalten einer Funktion abhängen – die ganze Vergangenheit der Funktion in einer gewichteten Form erfassen. Als Modellgleichungen studieren wir in dieser Arbeit die mehrgliedrigen Abelschen Integralgleichungen der Form

$$s\,u(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^x (x-t)^{\alpha_i - 1} u(t)\,dt = f(x), \quad 0 \le x \le X, \qquad s,\, a_i \in \mathbb{C}, \quad \alpha_i > 0, \tag{1.1}$$

die Abel-Volterra-Integralgleichung

$$u(x) + a(x) \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t)\,dt = f(x), \quad \alpha > 0,\ 0 \le x \le X, \tag{1.2}$$

die gebrochene Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i D^{\alpha_i} u(x) = g(x), \quad a_i \in \mathbb{C},\ \alpha_i \geq 0, \quad 0 \leq x \leq X, \tag{1.3}$$

wobei D^α der Riemann-Liouville-Differentialoperator ist, und die gebrochene Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i D_*^{\alpha_i} u(x) = g(x), \quad a_i \in \mathbb{C},\ \alpha_i \geq 0, \quad 0 \leq x \leq X, \tag{1.4}$$

wobei $D_*^{\alpha_i}$ der Caputo-Differentialoperator ist (genaue Definition in (3.46)).

Als Lösungsraum wird der Raum C_{-1} der Funktionen $f(x)$, die sich in der Form $f(x) = x^\rho f_1(x),\ \rho > -1$, darstellen lassen, wobei $f_1(x)$ eine stetige Funktion im Intervall $[0, \infty)$ ist, betrachtet.
Die Frage „Was könnte eine Ableitung nichtganzzahliger Ordnung sein?" wurde erstmals im Jahre 1695 gestellt, als L'Hôpital Leibniz nach einer Interpretation von $D^\alpha u$ (α rational) fragte.

Gebrochene Differentialgleichungen ergeben sich bei der Modellierung von Problemen aus dem Elektromagnetismus, der Elektrochemie, der Akustik [Cap89], der Materialwissenschaft, der Polarographie [Wie83, Mic91], der Rheologie [Fri91, HB94, GN91], der Strömungsmechanik [BT84, MRS], der Mikroelektronik [He87], der Stochastik [Non90].
Bei der Beschreibung viskoelastischen Materialverhaltens werden seit einigen Jahren gebrochene Ableitungen erfolgreich zur Dämpfungsbeschreibung eingesetzt, da Materialgesetze zur Beschreibung viskoelastischen Verhaltens in einem großen Frequenzbereich im Zeitbereich Differentialoperatoren mit hohen ganzzahligen Ableitungen, verknüpft mit vielen zu identifizierenden Parametern erfordern. Gebrochene Zeitableitungen in Materialgleichungen erschließen eine größere Funktionenvielfalt und so eine bessere Adaptivität an Meßergebnisse mit weniger Parametern [GKK90, KG96, Fen97, und die dort angegebene Literatur].
Alle diese Gleichungen lassen sich auf die Form der verallgemeinerten Abelschen Integralgleichung

$$s\, u(x) + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} K(x,t) u(t)\, dt = g(x) \tag{1.5}$$

zurückführen. Die Bedeutung der klassischen Abelschen Integralgleichung ((1.5) mit $K(x,t) = 1$) ergibt sich aus einer Vielzahl von Anwendungen, deren Modell sie ist. Eine umfangreiche Liste von ausführlich dargestellten Anwendungsbeispielen der letzten Gleichung findet man in [GV91].

Numerische Lösungsansätze für schwach-singuläre Volterrasche Integralgleichungen müssen reflektieren, daß die Lösung an der linken Intervallgrenze im allgemeinen nicht glatt ist. Für numerische Verfahren, die dieses singuläre Verhalten berücksichtigen, bietet die Literatur im wesentlichen drei Ansätze:

1. *Kollokationsverfahren mit Polynom-Splines*, wo die Singularität durch geeignete nicht-äquidistante Gitter erfaßt wird [BvdH86, Lin85, und die dort angegebene Literatur]

2. *Produktquadraturverfahren* , wo der beschränkte Anteil des Integranden durch einen Polynom-Spline interpoliert und die vollständig diskretisierte Form der Integralgleichung (1.2) durch analytische Auswertung der Integrale erreicht wird ([Lin85, Ors96])

3. Die von Ch. Lubich im Jahre 1983 entwickelten *gebrochenen Mehrschrittverfahren* [Lub83a, Lub85, Lub86, Lub87, Lub88, HLS88] verwenden lineare Mehrschrittverfahren, bei denen die Startgewichte die Singularität des Integranden berücksichtigen. Sie brauchen wesentlich schwächere Voraussetzungen, bezüglich Differenzierbarkeit und Stabilität als die Produktquadraturverfahren und Kollokationsverfahren.

Bei allen diesen Methoden werden immer gewisse Glattheitsbedingungen an g und K gestellt, Bedingungen die bei allen unseren Modellgleichungen im allgemeinen nicht erfüllt sind. Der Kern $K(x,t)$ ergibt sich z.B. bei (1.1) durch Zusammenlegung der einzelnen Integralterme und Ausklammerung der niedrigsten Potenz $(x-t)^{\alpha_k-1}$. Die anderen gebrochenen Potenzen $(x-t)^{\alpha_i-1}$, falls solche auftreten, bewirken, daß der Kern $K(x,t)$ nicht die von Lubich geforderten Glattheitsbedingungen erfüllt.

Angeregt durch die Arbeiten [Lub83a, Lub85, Lub86, Lub87, Lub88, HLS88] diskretisieren wir (1.1) in der Form

$$
\begin{aligned}
s\,u_n = f(x_n) &- \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{\Gamma(\alpha_i)}h^{\alpha_i}w_{n-j}(\alpha_i)\right)u_j \\
&- \sum_{j=0}^{\bar{s}}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{\Gamma(\alpha_i)}h^{\alpha_i}w_{nj}(\alpha_i)\right)u_j, \quad 0 < x_n \le X; \\
u_0 &:= u^0
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

mit geeignetem u^0, mit festem $\bar{s} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und von der Schrittweite h unabhängigen Faltungsgewichten $w_k(\alpha_i)$ $k > 0$, die aus einem Faltungsquadraturverfahren, das auf einem stabilen, konsistenten, linearen, impliziten Mehrschrittverfahren basiert, stammen, sowie geeigneten Startgewichten $w_{nj}(\alpha_i)$ $(n \ge 0,\ j = 0, \dots, \bar{s})$. Bei der Berechnung von Startgewichten $w_{nj}(\alpha_i)$ und der Wahl von u^0 wird dem asymptotischen Verhalten der analytischen Lösung im Nullpunkt Rechnung getragen. Z.B. im Falle $s \neq 0$ wählt man

$$
u^0 = \begin{cases} 0, & \text{falls } f(0) = \infty \\ f(0), & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Wenn das zugrundeliegende Mehrschrittverfahren von der Ordnung p ist, zeigen wir für die Konvergenz:

$$
\max_{0 \le n \le N(h)} |u(x_n) - u_n| = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}), \quad 0 \le \varepsilon < 1,\ \varepsilon \text{ passend,}
$$
$$
(h \downarrow 0,\ N(h) = [X/h]).
$$

Die Diskretisierung von (1.3) und (1.4) erfolgt ebenso nach einer Zurückführung auf die Integralgleichungsform (1.1). Bei der Transformation von (1.3) und (1.4) auf (1.1) entsteht die rechte Seite $f(x)$ der Gleichung (1.1) als gebrochenes Integral der Funktion $g(x)$ (welches ebenfalls durch ein Diskretisierungsverfahren zu approximieren ist, falls $g(x)$ eine Reihe ist) plus einige Zusatzterme.

Bei (1.1) , (1.3) und (1.4) sind die Koeffizienten a_i Konstanten. Als Beispiel einer schwach-singulären Integralgleichung mit nichtkonstanten Koeffizienten dient uns (1.2), für die wir ein Verfahren angeben, das für bestimmte Arten von Funktionen $a(x)$ und $f(x)$ anwendbar ist. Die Gleichung (1.2) kann als Sonderfall der Gleichung (1.5) aufgefaßt werden. Unter der Voraussetzung, daß $K(x,t)$ hinreichend glatt ist, wird sie in der Literatur behandelt [BvdH86, Lub85, Lub87]. Wir verzichten auf diese Glattheitsbedingungen.

Einige Autoren haben sich mit Methoden der direkten Behandlung der gebrochenen Differentialgleichung (1.3) beschäftigt. Allerdings nur im Falle $n = 2,\ \alpha_1 = 0$ [Bla96, Die97a]. [Pod] hat auch ein solches Verfahren für den Fall $n = 3,\ \alpha_1 = 0$ angegeben, allerdings ohne Beweis.

Wir geben jetzt eine Übersicht über unsere Arbeit.

Im Kapitel 2 geben wir als Beispiel für das Auftreten der Gleichung (1.1) mit $m = 1$, das Stereologie Modell für kugelförmige Partikel und seine Variante, das Tomatensalat-Problem.

Im Kapitel 3 stellen wir die analytische Theorie der behandelten Integral- und -Differentialgleichungen nichtganzzahliger Ordnung dar, in der Form, in der wir sie im Kapitel 4, dem Kern der Arbeit, benötigen und benutzen.

Kapitel 4 ist der Darstellung und Untersuchung der numerischen Verfahren gewidmet, die, wie schon angedeutet, die Methoden von Lubich [Lub85, Lub87] verallgemeinern auf Situationen in denen seine Glattheitsforderungen nicht erfüllt sind. Dabei legen wir auch Wert auf Entwicklung von Verfahren für gebrochene Differentialgleichungen mit Ableitungen in der Caputo-Form, die von Physikern und Ingenieuren [Cap89, GM97] immer mehr bevorzugt wird. Die Caputo-Form erlaubt Anfangsbedingungen in Gestalt von Werten der Funktion und Ableitungen ganzzahliger Ordnung anzugeben, während man in Arbeiten reiner Mathematiker [SKM93] Anfangsbedingungen in Form von Grenzwerten gebrochener Integrale findet.

Zur Illustration enthält Kapitel 5 einige Ergebnisse numerischer Fallstudien.