Kapitel 3

Analytische Grundlagen

3.1 Fractional Calculus

In diesem Abschnitt stellen wir die verschiedenen Verallgemeinerungen der Integration und der Differentiation vor. Aus der reichhaltigen Literatur zum Thema *Fractional Calculus und Anwendungen* verweisen wir auf [OS74], [Nis91], [MR93], [SKM93], [Kir94] sowie [SO89].

Wir beginnen mit der Definition des Funktionenraumes $C_\mu,\ \mu \in \mathbb{R}$.

Definition 3.1.1.
Eine Funktion $f(x)\,(x > 0)$ liegt im Raum C_μ $(\mu \in \mathbb{R})$, wenn eine Zahl $p > \mu$ existiert, derart daß $f(x)$ in der Form

$$f(x) = x^p f_1(x) \tag{3.1}$$

dargestellt werden kann, wobei $f_1(x)$ eine stetige Funktion im Intervall $[0, \infty)$ ist.

Offensichtlich ist C_μ ein Vektorraum und es gilt:

$$C_\mu \subset C_\nu \Leftrightarrow \mu \geq \nu \tag{3.2}$$

Definition 3.1.2 (Riemann-Liouville-Integraloperator).
Für $\alpha \geq 0$ und $x > 0$ heißt J^α, definiert durch

$$\begin{aligned} (J^\alpha u)(x) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} u(t)\, dt, \quad \alpha > 0 \\ (J^0 u)(x) &:= \mathrm{Id}\, u(x) = u(x), \end{aligned} \tag{3.3}$$

Riemann-Liouville-Integraloperator der Ordnung α.

Dabei ist $\Gamma(.)$ die Gamma-Funktion

$$\Gamma(a) := \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1}\, dt, \qquad a \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Eine Rekursionsformel für die Gamma-Funktion ist gegeben durch

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}^{\leq 0}, \tag{3.5}$$

wobei $\Gamma(1) = 1$ gilt. Insbesondere gilt für n als ganze positive Zahl

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Bemerkung 3.1.3. (i) Für $\alpha = 1$ ist $J^1 = J$ der gewöhnliche Integraloperator

$$Ju(x) = \int_0^x u(t)\, dt.$$

(ii) Für $\alpha = n \in \mathbb{N}$ beschreibt J^n die n-fache Integration der Funktion u

$$\begin{aligned} J^n u(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t)\, dt \\ &= \int_0^x \int_0^{t_{n-1}} \cdots \int_0^{t_1} u(t)\, dt\, dt_1 \cdots dt_{n-1}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

(iii) Der Wert $(J^\alpha u)(0)$ wird auch gelegentlich gebraucht. Darunter versteht man für $\alpha > 0$, $\lim_{x \to 0} (J^\alpha u)(x)$. Die Existenz dieses einseitigen Grenzwerts hängt vom Verhalten von u in der Nähe von 0 ab. Ist u dort beschränkt und integrabel, dann ist $\lim_{x \to 0} (J^\alpha u)(x) = 0$. Hingegen ergibt sich für die Funktion $u(x) = x^{\beta - 1}$, $\beta > 0$

$$\lim_{x \to 0} (J^\alpha u)(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha + \beta > 1, \\ \Gamma(\beta), & \text{falls } \alpha + \beta = 1, \\ \infty, & \text{falls } \alpha + \beta < 1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Bei der Behandlung von Riemann-Liouville-Integraloperatoren stößt man auf die Beta-Funktion

$$B(a,b) := \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1}\, dt, \qquad a > 0, \quad b > 0. \tag{3.9}$$

Sie ist eng mit der Gamma-Funktion $\Gamma(a)$ gemäß der Beziehung

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a > 0, \quad b > 0, \tag{3.10}$$

verbunden. Diese Eigenschaft und weitere der Beta- und Gamma-Funktion findet man beispielsweise in [Nis91],[AS72] oder im ersten Band von [EMOT55]. Die Substitution $\tau = s + t(x-s) \quad (-\infty < s < x < \infty)$ in (3.9) ergibt

$$\int_s^x (x-t)^{a-1}(t-s)^{b-1}\,dt = (x-s)^{a+b-1}B(a,b), \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{3.11}$$

Satz 3.1.4.
Der Riemann-Liouville-Integraloperator $J^\alpha, \alpha \geq 0$ ist eine lineare Abbildung von C_μ in $C_{\alpha+\mu}$, $\mu \geq -1$, umso mehr eine Abbildung von C_μ in sich:

$$J^\alpha \colon C_\mu \to C_{\alpha+\mu} \subset C_\mu$$

Beweis. Der Fall $\alpha = 0$ ist trivial.
Im Falle $\alpha > 0$ erhält man nach einer Variablensubstitution $t = x\tau$.

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{x^{p+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \tau^p (1-\tau)^{\alpha-1} y_1(x\tau)\,d\tau = x^{p+\alpha} y_2(x),$$

wobei $p > \mu$ und $y_1 \in C[0,\infty)$.
Das letzte Integral ist gleichmäßig konvergent bzgl. x in jedem abgeschlossen Intervall $[0,a],\ a > 0$;
Folglich gelten

$$y_2 \in C[0,\infty] \qquad \text{und} \qquad J^\alpha f \in C_{\alpha+\mu}.$$

□

Bemerkung 3.1.5. Der Operator $J^\alpha,\ \alpha > 0$ kann im Raum $C_\mu,\ \mu \geq -1$ als Faltung

$$(J^\alpha f)(x) = (h_\alpha * f)(x), \quad h_\alpha(x) := \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad f \in C_\alpha \tag{3.12}$$

dargestellt werden, wobei die Faltung zweier Funktionen f und g als das Integral

$$(g * f)(x) := \int_0^x g(x-t) f(t)\,dt \quad , \quad x > 0 \tag{3.13}$$

definiert wird.
Aus dieser Darstellung von $J^\alpha f$ als Faltung und aus der Kommutativität und der Assoziativität der Faltung ([Dim82], [Mik59],[Yos84]) folgt die Halbgruppeneigenschaft des Riemann-Liouville-Integraloperators:

$$\begin{gathered}(J^\beta J^\alpha f)(x) = (J^\alpha J^\beta f)(x) = (J^{\alpha+\beta} f)(x), \\ f \in C_\mu, \quad \mu \geq -1, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0.\end{gathered} \tag{3.14}$$

Es gilt nämlich:

$$(h_\alpha * h_\beta)(x) = \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\tau^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \, d\tau = \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta) = h_{\alpha+\beta}(x).$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}(J^\alpha J^\beta f)(x) &= (h_\alpha * J^\beta f)(x) \\ &= (h_\alpha * h_\beta * f)(x) \\ &= (h_{\alpha+\beta} * f)(x) \\ &= (J^{\alpha+\beta} f)(x).\end{aligned}$$

Insbesondere folgt aus (3.14):

$$(\underbrace{J^\alpha \ldots J^\alpha}_{n} f)(x) = (J^{n\alpha} f)(x), \quad f \in C_\mu, \quad \mu \geq -1, \quad \alpha \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Definition 3.1.6 (Riemann-Liouville-Differentialoperator).
Sei $\alpha \geq 0$ und $m := \lceil \alpha \rceil$ ($\lceil \alpha \rceil$ kleinste natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \alpha$). Dann heißt der Operator D^α, definiert durch

$$\begin{aligned}(D^\alpha u)(x) &:= (D^m J^{m-\alpha} u)(x), \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N} \\ (D^0 u)(x) &:= \operatorname{Id} u(x) = u(x),\end{aligned} \tag{3.16}$$

Riemann-Liouville-Differentialoperator der Ordnung α.

Für $m \in \mathbb{N}$ ist dann

$$D^m u(x) = \frac{d^m}{dx^m} u(x).$$

Ist $\alpha > 0$, so versteht man unter $(D^\alpha u)(0)$ wieder $\lim_{x \to 0} (D^\alpha u)(x)$, falls dieser Grenzwert existiert.

Vereinbarungen und Schreibweisen

Die Operatoren J^α und D^α wirken grundsätzlich auf Funktionen und nicht auf Funktionswerte, also $J^\alpha u(x) = (J^\alpha u)(x)$ und $D^\alpha u(x) = (D^\alpha u)(x)$. Wir legen den Gedanken zugrunde, daß die Operatoren stärker an die Funktion u gebunden sind als u an das Argument x. Deshalb kann man die zusätzlichen Klammern auch weglassen.

Satz 3.1.7.
Für $u \in C_{-1}$ gilt:

$$(D^\alpha J^\alpha u)(x) = u(x), \tag{3.17}$$

d.h. , daß D^α linksinvers zu J^α ist.

Beweis. Mit Hilfe von Definition 3.1.6 und der Halbgruppeneigenschaft (3.14) erhalten wir

$$\begin{aligned}(D^\alpha J^\alpha u)(x) &= (D^m J^{m-\alpha} J^\alpha u)(x)\\ &= (D^m J^m u)(x)\\ &= u(x),\end{aligned}$$

da $u \in C_{-1}$ und $m \in \mathbb{N}$. □

Der Riemann-Liouville-Differentialoperator D^α erfüllt weder die Halbgruppeneigenschaft, noch ist er rechtsinvers zu J^α. Man sieht das an folgendem Beispiel:

Beispiel 3.1.8. Wir betrachten die Potenzfunktion φ_λ,

$$\varphi_\lambda(x) := x^{\lambda-1},\ x > 0,\ \lambda > 0. \tag{3.18}$$

Mit Hilfe von (3.11) erhalten wir

$$\begin{aligned}(J^\alpha \varphi_\lambda)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\lambda-1}\, dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\lambda-1} B(\alpha,\lambda)\\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\alpha)} x^{\alpha+\lambda-1}.\end{aligned}$$

Somit gilt:

$$J^{\alpha}\varphi_{\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\alpha)}\varphi_{\lambda+\alpha}, \quad \alpha > 0,\ \lambda > 0. \tag{3.19}$$

Sei $m-1 < \alpha < m$. Wir wollen $D^{\alpha}\varphi_{\lambda}$ ermitteln.

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}\varphi_{\lambda} &= D^m J^{m-\alpha}\varphi_{\lambda} \\
&\underset{(3.19)}{=} D^m \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+m-\alpha)}\varphi_{\lambda+m-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+m-\alpha)}(\lambda+m-\alpha-1)(\lambda+m-\alpha-2)\cdots(\lambda-\alpha) \\
&\underset{(3.5)}{=} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\alpha)}\varphi_{\lambda-\alpha)}.
\end{aligned}$$

Ist aber $\alpha-\lambda \in \mathbb{N}_0$, so ist $|\Gamma(\lambda-\alpha)| = \infty$.
Somit gilt

$$D^{\alpha}\varphi_{\lambda} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\alpha)}\varphi_{\lambda-\alpha)}, & \text{für } \alpha-\lambda \notin \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{für } \alpha-\lambda \in \mathbb{N}_0, \end{cases}, \quad \alpha > 0,\ \lambda > 0. \tag{3.20}$$

Speziell findet man für α, $x > 0$ und nichtnatürliches $\lambda > 0$

$$D^{\alpha}\varphi_{\alpha}(x) \equiv 0, \quad D^{\alpha+\lambda}\varphi_{\alpha}(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(-\lambda)}\varphi_{-\lambda}(x) \tag{3.21}$$

und daraus

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}D^{\alpha}\varphi_{\alpha}(x) &\equiv 0 \neq \varphi_{\alpha}(x) = D^{\alpha}J^{\alpha}\varphi_{\alpha}(x) \\
D^{\lambda}D^{\alpha}\varphi_{\alpha}(x) &\equiv 0 \neq \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(-\lambda)}\varphi_{-\lambda}(x) = D^{\alpha+\lambda}\varphi_{\alpha}(x).
\end{aligned}$$

Die gebrochene Ableitung einer Konstanten verschwindet im allgemeinen nicht. Es gilt nämlich:

$$(D^{\alpha}1)(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}x^{-\alpha}, & \text{falls } \alpha \notin \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls } \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.22}$$

Analog kann, wie in (3.19) und (3.20), mit Hilfe von (3.11) gezeigt werden, daß für beliebige $a > 0,\ \alpha > 0,\ \lambda > 0$, für die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq x \leq a \\ (x-a)^{\lambda-1}, & \text{falls } x > a, \end{cases} \tag{3.23}$$

gilt:

$$(J^\alpha u)(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \le x \le a \\ \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\alpha)}(x-a)^{\lambda+\alpha-1}, & \text{falls } x > a \end{cases} \tag{3.24}$$

und

$$(J^\alpha u)(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \le x \le a \\ \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\alpha)}(x-a)^{\lambda-\alpha-1}, & \text{falls } x > a. \end{cases} \tag{3.25}$$

Zur Anschaulichkeit wenden wir die Operatoren J^α und D^α auf die charakteristische Funktion

$$\chi_{(a,b]}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \le x \le a,\ x > b \\ 1, & \text{falls } a < x \le b, \end{cases} \tag{3.26}$$

des Intervalls $(a,b]$ $(0 \le a < b < \infty)$ an. Wir erhalten

$$(J^\alpha \chi_{(a,b]})(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \le x \le a \\ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}(x-a)^\alpha, & \text{falls } a < x \le b \\ \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\{(x-a)^\alpha - (x-b)^\alpha\}, & \text{falls } x > b \end{cases} \tag{3.27}$$

und für $\alpha \in \mathbb{R}^{>0} \backslash \mathbb{N}$

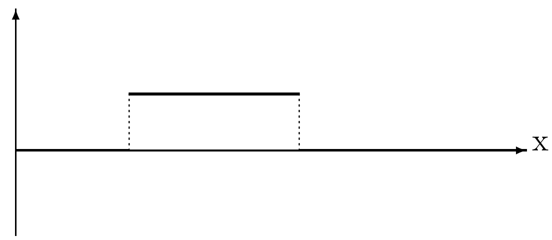
$$(D^\alpha \chi_{(a,b]})(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \le x \le a \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}, & \text{falls } a < x \le b \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\{(x-a)^{-\alpha} - (x-b)^{-\alpha}\}, & \text{falls } x > b. \end{cases} \tag{3.28}$$

Satz 3.1.9.
Sei $v \in C_{-1}$ und $u(x) = (J^{m\alpha}v)(x) \quad (m \in \mathbb{N})$.
Dann gilt

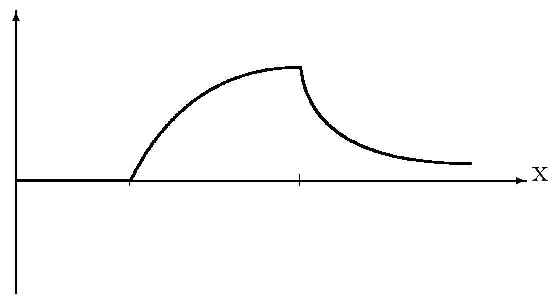
$$((D^\alpha)^m u)(x) = (\underbrace{D^\alpha \cdots D^\alpha}_{m-mal} u)(x) = (D^{m\alpha}u)(x) \tag{3.29}$$

und

$$(J^\alpha D^\alpha u)(x) = u(x). \tag{3.30}$$

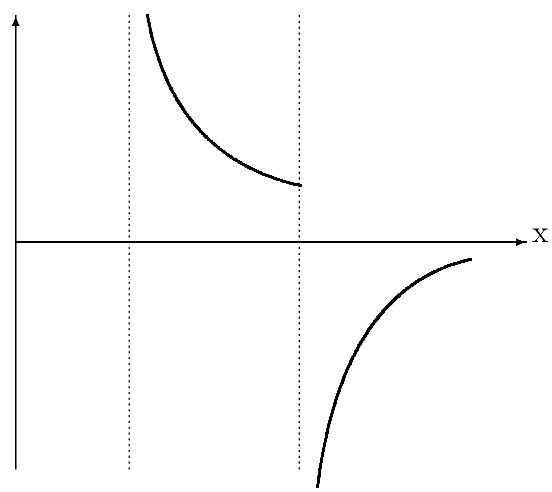


Graph von
$\chi_{(a,b]}(x)$



Graph von

$(J^\alpha \chi_{(a,b]})(x),$
$0 < \alpha < 1$



Graph von
$(D^\alpha \chi_{(a,b]})(x)$

Beweis. Aus (3.15) und Satz 3.1.7 folgt

$$
\begin{aligned}
(\underbrace{D^\alpha \cdots D^\alpha}_{m-mal} u)(x) &= (\underbrace{D^\alpha \cdots D^\alpha}_{m-mal} J^{m\alpha} v)(x) \\
&\underset{(3.15)}{=} (\underbrace{D^\alpha \cdots D^\alpha}_{m-mal} (\underbrace{J^\alpha \cdots J^\alpha}_{m-mal} v)(x) \\
&= v(x)
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

und

$$
(D^{m\alpha} u)(x) = (D^{m\alpha} J^{m\alpha} v)(x) = v(x). \tag{3.32}
$$

(3.29) folgt jetzt aus (3.31) und (3.32).
Es gilt also

$$
\begin{aligned}
(J^\alpha D^\alpha u)(x) &= (J^\alpha D^\alpha J^{m\alpha} v)(x) \\
&= (J^\alpha D^\alpha J^\alpha J^{(m-1)\alpha} v)(x) \\
&= (J^\alpha J^{(m-1)\alpha} v)(x) \\
&= (J^{m\alpha} v)(x), \\
&= u(x),
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

was die Aussage (3.30) beweist. □

Satz 3.1.10.
Sei $u(x)$ von der Form

$$
x^\lambda v(x) \tag{3.34}
$$

oder

$$
x^\lambda (\ln x) v(x), \tag{3.35}
$$

wobei $\lambda > -1$ ist, und

$$
v(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n
$$

einen positiven Konvergenzradius R hat. Dann gilt für alle $0 < x \leq R$:

(a)

$$\begin{cases} \alpha \geq 0 \quad und \quad 0 \leq \beta \leq \alpha & \Longrightarrow \quad D^\beta J^\alpha u(x) = J^{\alpha-\beta} u(x) \\ \alpha \geq 0 \quad und \quad \beta > \alpha & \Longrightarrow \quad D^\beta J^\alpha u(x) = D^{\alpha-\beta} u(x) \\ 0 \leq \alpha < \lambda + 1 \quad und \quad \beta \geq 0 & \Longrightarrow \quad D^\beta D^\alpha u(x) = D^{\alpha+\beta} u(x). \end{cases} \tag{3.36}$$

(b) Sei $m := \lceil \alpha \rceil$ und $a_k = 0$ für $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Dann gilt

$$\begin{cases} \beta \leq \alpha \quad und \quad \alpha \geq \lambda + 1 & \Longrightarrow \quad J^\beta D^\alpha u(x) = D^{\alpha-\beta} u(x) \\ \beta \geq \alpha \quad und \quad \alpha \geq \lambda + 1 & \Longrightarrow \quad J^\beta D^\alpha u(x) = J^{\beta-\alpha} u(x) \\ \beta \geq 0 \quad und \quad \alpha \geq \lambda + 1 & \Longrightarrow \quad D^\beta D^\alpha u(x) = D^{\beta+\alpha} u(x). \end{cases} \tag{3.37}$$

Beweis. ([MR93], pp.105–107) □

Satz 3.1.11.
Sei $u \in C_{-1}$ und $D^\alpha u \in C_{-1}$, $m-1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (J^\alpha D^\alpha u)(x) = u(x) &- \frac{x^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)} \lim_{x \to 0} (J^{m-\alpha} u)(x) \\ &- \sum_{j=0}^{m-2} \frac{x^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} \lim_{x \to 0} (D^{\alpha-j-1} u)(x) \end{aligned} \tag{3.38}$$

Beweis. Sei

$$v(x) := (J^\alpha D^\alpha u)(x). \tag{3.39}$$

Offenkundig ist $v \in C_{-1}$ und $D^\alpha v \in C_{-1}$.
Aus Satz 3.1.7 folgt

$$(D^\alpha v)(x) = (D^\alpha J^\alpha D^\alpha u)(x) = (D^\alpha u)(x).$$

Daher gilt

$$(D^\alpha (u - v))(x) = 0,$$

d.h.

$$u - v \in \ker D^\alpha.$$

Unmittelbar aus Definition 3.1.6 folgt

$$\ker D^\alpha = \left\{ w(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^{k+\alpha-m} \;:\; c_k \in \mathbb{C},\ (D^\alpha w)(x) \in C_{-1} \right\}. \tag{3.40}$$

Damit erhalten wir

$$u(x) - v(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^{k+\alpha-m}, \quad (c_k \in \mathbb{C}). \tag{3.41}$$

Weiterhin folgt aus (3.39) und Definition 3.1.6

$$\begin{aligned}(J^{m-\alpha}v)(x) &= (J^{m-\alpha} J^\alpha D^\alpha u)(x) \\ &= (J^{m-\alpha} J^\alpha D^m J^{m-\alpha} u)(x) \\ &= (J^m D^m J^{m-\alpha} u)(x) \\ &= (J^{m-\alpha}u)(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} \left\{ \lim_{x\to 0} (D^k J^{m-\alpha} u)(x) \right\} \\ &= (J^{m-\alpha}u)(x) - \lim_{x\to 0} (J^{m-\alpha}u)(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} \left\{ \lim_{x\to 0} (D^{\alpha-m+k} u)(x) \right\}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Andererseits ergibt (3.41):

$$\begin{aligned}(J^{m-\alpha}v)(x) &= (J^{m-\alpha}u)(x) - J^{m-\alpha}\left(\sum_{k=0}^{m-1} c_k x^{k+\alpha-m} \right) \\ &= (J^{m-\alpha}u)(x) - \left(\sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{\Gamma(k+\alpha-m+1)}{\Gamma(k+1)} x^k \right).\end{aligned} \tag{3.43}$$

Ein Vergleich von (3.42) und (3.43) ergibt

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-m+1)} \lim_{x\to 0} (J^{m-\alpha}u)(x) \\ c_k &= \frac{1}{\Gamma(k+\alpha-m+1)} \left\{ \lim_{x\to 0} (D^{\alpha-m+k}u)(x) \right\}, \quad (k = 1, \ldots, m-1). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Daher folgt aus (3.41)

$$(J^\alpha D^\alpha u)(x) = u(x) - \frac{x^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)} \lim_{x\to 0}(J^{m-\alpha}u)(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{x^{k+\alpha-m}}{\Gamma(k+\alpha-m+1)} \left\{ \lim_{x\to 0}(D^{\alpha-m+k}u)(x) \right\}. \tag{3.45}$$

Die Substitution $j = m-k-1$ in der Summe in (3.45) ergibt die Behauptung (3.38) von Satz 3.1.11. □

Definition 3.1.12.
Eine Funktion $u(x)$, $x > 0$ liegt im Raum C_μ^m, $m \in \mathbb{N}_0$ genau dann, wenn $u^{(m)} \in C_\mu$.

Wir setzen $\quad C_\mu^0 \equiv C_\mu$.
Offensichtlich ist C_μ^m, $m \in \mathbb{N}_0$ ein Vektorraum.
Unmittelbar aus Definition 3.1.12 folgt, wenn $u \in C_\mu^m$, mit $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \geq -1$:

(i) $u \in C^m(0,\infty) \cap C^{(m-1)}[0,\infty)$.

(ii) Es existiert eine Funktion $v \in C_\mu$ so, daß $u(x)$ sich in der Form

$$u(x) = (J^m v)(x) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{x^k}{k!}, \quad x \geq 0.$$

darstellen läßt.

Definition 3.1.13 (Caputo-Differentialoperator).
Sei $u \in C_{-1}^m$, $m \in \mathbb{N}$ und $m-1 < \alpha \leq m$.
Dann heißt für $x > 0$ der Operator D_*^α, definiert durch

$$(D_*^\alpha u)(x) := (J^{m-\alpha} D^m u)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} u^{(m)}(t)\, dt, \tag{3.46}$$

Caputo-Differentialoperator der Ordnung α.

Für $m \in \mathbb{N}$ ist dann

$$D_*^m u(x) = D^m u(x) = \frac{d^m}{dx^m} u(x).$$

Wir setzen $(D_*^0 u)(x) := \mathrm{Id}\, u(x) = u(x)$.
Dieser Operator heißt so, weil Caputo ihn in seiner Arbeit [Cap67] eingeführt hat. Ausführlich diskutiert wird dieser Begriff in [GM97].

Satz 3.1.14.
Sei $u \in C_{-1}^m, \quad m \in \mathbb{N}_0$. Dann ist der Caputo-Differentialoperator $D_*^\beta u, \quad 0 \leq \beta \leq m$ wohldefiniert und es gilt:

$$D_*^\beta u \in \begin{cases} C_{-1}, & \text{falls } m-1 < \beta \leq m, \\ C^{k-1}[0,\infty) \subset C_{-1}, & \text{falls } m-k-1 < \beta \leq m-k, \quad k = 1, \dots, m-1. \end{cases} \tag{3.47}$$

Satz 3.1.15.
Sei $u \in C_{-1}^m$, $m \in \mathbb{N}$ und $m-1 < \alpha \leq m$. Dann gilt:

(i)

$$(J^\alpha D_*^\alpha u)(x) = u(x) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0+)\frac{x^k}{k!}, \quad x \geq 0. \tag{3.48}$$

(ii)

$$(D_*^\alpha u)(x) = D^\alpha \left(u(x) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0+)\frac{x^k}{k!} \right), \quad x \geq 0. \tag{3.49}$$

(iii)

$$(D_*^\alpha u)(x) = (D^\alpha u)(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{u^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-\alpha)} x^{k-\alpha}, \quad x > 0. \tag{3.50}$$

Beweis. (3.48) folgt unmittelbar aus Definition 3.1.13 und aus der Halbgruppeneigenschaft (3.14). Es gilt nämlich für $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} (J^\alpha D_*^\alpha u)(x) &= (J^\alpha J^{m-\alpha} D^m u)(x) \\ &\underset{(3.14)}{=} (J^m D^m u)(x) \\ &= u(x) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0+)\frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Wenden wir den Operator D^α auf beiden Seiten von (3.48) an, so erhalten wir

$$(D^\alpha J^\alpha D_*^\alpha u)(x) = D^\alpha \left(u(x) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0+) \frac{x^k}{k!} \right).$$

Daher folgt aus (3.17), (3.49).
(3.50) folgt aus (3.49) und (3.20). □

3.1.1 Spezielle Funktionen

Die Anwendung von Riemann-Liouville gebrochenen Integralgraloperatoren auf exponentielle und trigonometrische Funktionen führt auf höhere transzendente Funktionen.
Diese Funktionen sind eng mit der unvollständigen Gamma-Funktion $\gamma^*(\alpha, x)$

$$\gamma^*(\alpha, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) x^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt, \quad \alpha > 0. \tag{3.51}$$

verbunden. Näheres über die Funktion γ^* findet man zum Beispiel in [MOT66, MR93].
Sei $f(x) = e^{ax}$, wobei a eine Konstante ist. Dann gilt nach Definition 3.1.2

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^{\alpha-1} e^{as}\, ds, \quad \alpha > 0. \tag{3.52}$$

Die Substitution $t = x - s$ in (3.52) ergibt:

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{e^{ax}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-at}\, dt = x^\alpha e^{ax} \gamma^*(\alpha, ax), \quad \alpha > 0. \tag{3.53}$$

In [MR93] wird die Funktion

$$\varepsilon_x(\alpha, a) := x^\alpha e^{ax} \gamma^*(\alpha, ax) \tag{3.54}$$

zum Lösen von Differentialgleichungen rationaler Ordnung eingeführt.
Eine Darstellung von $\varepsilon_x(\alpha, a)$ als unendliche Reihe ist gegeben durch

$$\varepsilon_x(\alpha, a) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{\Gamma(\alpha + k + 1)}. \tag{3.55}$$

Mit Hilfe von (3.20) und (3.55) folgt aus Definition 3.1.6

$$D^\beta e^{ax} = \varepsilon_x(-\beta, a), \quad \beta > 0. \tag{3.56}$$

Die Substitution von a durch ia ($i = \sqrt{-1}$) in (3.55) ergibt

$$\varepsilon_x(\alpha, ia) = x^\alpha \sum_{k \text{ gerade}}^{\infty} \frac{(-1)^{k/2}(ax)^k}{\Gamma(\alpha+k+1)} + i \sum_{k \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-1)/2}(ax)^k}{\Gamma(\alpha+k+1)}. \tag{3.57}$$

Sei

$$\varepsilon_x(\alpha, ia) := C_x(\alpha, a) + iS_x(\alpha, a).$$

Aus der Beziehung

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(\alpha, ia) &:= J^\alpha e^{iax} = J^\alpha(\cos ax + i \sin ax) \\ &= J^\alpha \cos ax + iJ^\alpha \sin ax \end{aligned} \tag{3.58}$$

und aus (3.57) folgt nach geeigneten Variablensubstitutionen

$$C_x(\alpha, a) := J^\alpha \cos ax = x^\alpha \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (ax)^{2l}}{\Gamma(\alpha+2l+1)} \tag{3.59}$$

und

$$S_x(\alpha, a) := J^\alpha \sin ax = x^\alpha \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (ax)^{2l+1}}{\Gamma(\alpha+2l+2)}. \tag{3.60}$$

Die höheren transzendenten Funktionen $\varepsilon_x(\alpha, a)$, $C_x(\alpha, a)$, $S_x(\alpha, a)$, sind auch mit den verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} &{}_p\mathrm{F}_q(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q; x) \\ &\qquad := \frac{\Gamma(b_1)\cdots\Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1)\cdots\Gamma(a_p)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1+k)\cdots\Gamma(a_p+k)}{\Gamma(b_1+k)\cdots\Gamma(b_q+k)} \frac{x^k}{k!} \end{aligned} \tag{3.61}$$

eng durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(\alpha, a) &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\, {}_1\mathrm{F}_1(1, \alpha+1; ax) \\ C_x(\alpha, a) &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\, {}_1\mathrm{F}_2\left(1, \frac{1}{2}(\alpha+1), \frac{1}{2}(\alpha+2); -\frac{1}{4}a^2x^2\right) \\ &\text{und} \\ S_x(\alpha, a) &= \frac{ax^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}\, {}_1\mathrm{F}_2\left(1, \frac{1}{2}(\alpha+2), \frac{1}{2}(\alpha+3); -\frac{1}{4}a^2x^2\right) \end{aligned} \tag{3.62}$$

verknüpft. Für Angabe der Konvergenzbereiche der Reihe (3.61) verweisen wir auf [MR93, Luk69].
Die Plots in Abbildung 3.1–3.6 wurden mit Hilfe von MATHEMATICA unter Verwendung der Darstellungsformeln (3.62) hergestellt.

Definition 3.1.16 (Mittag-Leffler-Funktionen).
Für $\alpha > 0$ *heißt* $E_\alpha\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit*

$$E_\alpha(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)} \tag{3.63}$$

Mittag-Leffler-Funktion der Ordnung α. *Für* $\alpha,\ \beta > 0$ *heißt* $E_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit*

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)} \tag{3.64}$$

verallgemeinerte Mittag-Leffler-Funktion.

Die Funktionen E_α und $E_{\alpha,\beta}$ sind in $\mathbb{C}$ wohldefiniert und holomorph. Deshalb dürfen die definierenden Potenzreihen stets gliedweise integriert und beliebig oft differenziert werden. Durch Einsetzen findet man:

$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z), \quad z \in \mathbb{C},\ \alpha > 0$$

$$E_1(z) = e^z,\ z \in \mathbb{C}$$

$$E_2(z^2) = \cosh z,\ z \in \mathbb{C} \text{ und } E_2(-z^2) = \cos z,\ z \in \mathbb{C}.$$

Die Funktionen E_α wurden von Mittag-Leffler 1903 in [Mit03] als Verallgemeinerung der Exponentialfunktion eingeführt.
Die verallgemeinerte Mittag-Leffler-Funktion $E_{\alpha,\beta}$ wurde in [Aga53, HA53] eingeführt. In [EMOT55, Chapter 18] und [Bie32] findet man einen Überblick. Die beiden Monographien enthalten auch eine Reihe von funktionentheoretischen Aussagen über die Mittag-Leffler-Funktionen.
Die Funktion $\varepsilon_x(\alpha, a)$ ist ein Sonderfall der Mittag-Leffler-Funktion $E_{\alpha,\beta}$. Es gilt nämlich:

$$\varepsilon_x(\alpha, a) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^k}{\Gamma(\alpha + k + 1)} = x^\alpha E_{1,\alpha+1}(ax) \tag{3.65}$$

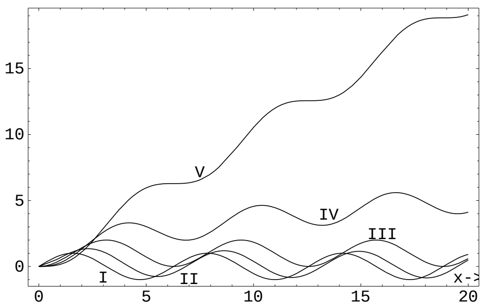


Abbildung 3.1: $J^{\alpha}\sin(x)$ für verschiedene Werte von α: I 0, II 0.5, III 1, IV 1.5, V 2.

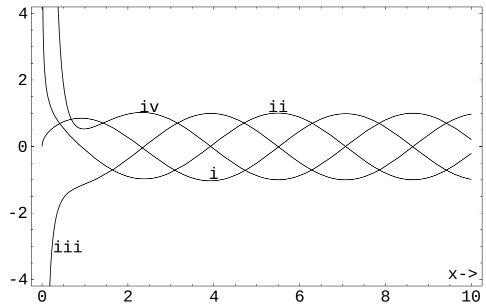


Abbildung 3.2: $D^{\alpha}\sin(x)$ für verschiedene Werte von α: i 0.5, ii 1.5, iii 2.5, iv 3.5 .

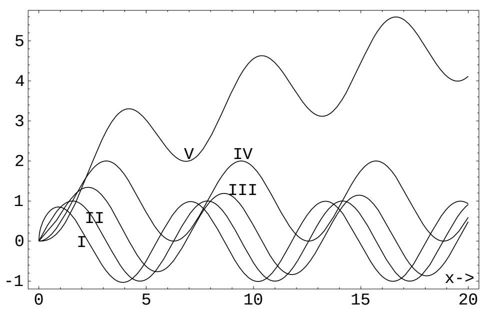


Abbildung 3.3: $J^{\alpha}\cos(x)$ für verschiedene Werte von α: I 0.5, II 1, III 1.5, IV 2, V 2.5.

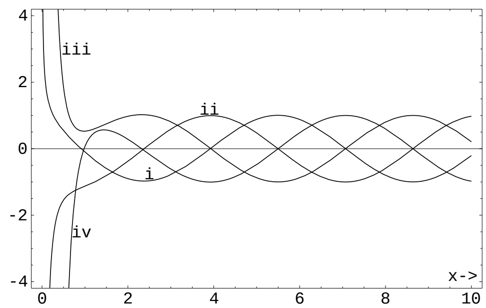


Abbildung 3.4: $D^{\alpha}\cos(x)$ für verschiedene Werte von α: i 0.5, ii 1.5, iii 2.5, iv 3.5 .

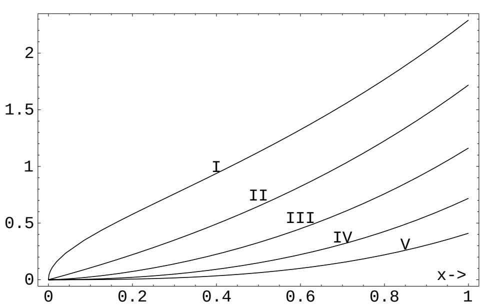


Abbildung 3.5: $J^{\alpha}\exp(x)$ für verschiedene Werte von α: I 0.5, II 1, III 1.5, IV 2, V 2.5.

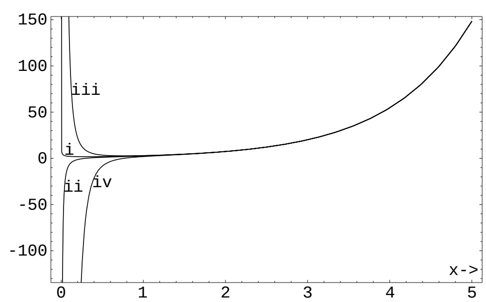


Abbildung 3.6: $D^{\alpha}\exp(x)$ für verschiedene Werte von α: i 0.5, ii 1.5, iii 2.5, iv 3.5 .

Viele Eigenschaften der verallgemeinerten Mittag-Leffler-Funktionen ergeben sich aus ihrer Integraldarstellung [EMOT55, Chapter 18]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha(0+)} \frac{e^{\zeta}\zeta^{\alpha-\beta}}{\zeta^{\alpha}-z}\,d\zeta, \quad \alpha\ \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3.66}$$

Der Integrationsweg $Ha(r)$ ist ein Hankel-Pfad (s. Abbildung 3.7). Er liegt in der längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen $\zeta-$Ebene und setzt sich zusammen aus

$$\begin{cases} L_1(r) & : \quad \text{dem Strahl } \zeta = \xi e^{-i\pi} \text{ mit } \infty > \xi \geq r, \\ \gamma(r) & : \quad \text{dem Kreisrand } \zeta = re^{i\theta\pi} \text{ mit } -1 \leq \theta \leq 1, \\ L_2(r) & : \quad \text{dem Strahl } \zeta = \xi e^{i\pi} \text{ mit } r \leq \xi < \infty. \end{cases} \tag{3.67}$$

Dabei ist r eine Konstante $r > |z|^{1/\alpha}$, und der Integrationsweg wird so durchlaufen, daß der Nullpunkt auf der linken Seite liegt. Für ζ^{α} und $\zeta^{\alpha-\beta}$ wird der Zweig genommen, der für positive ζ reelle Werte liefert.

Aus dieser Darstellung wird in [Pol48] die vollständige Monotonie von

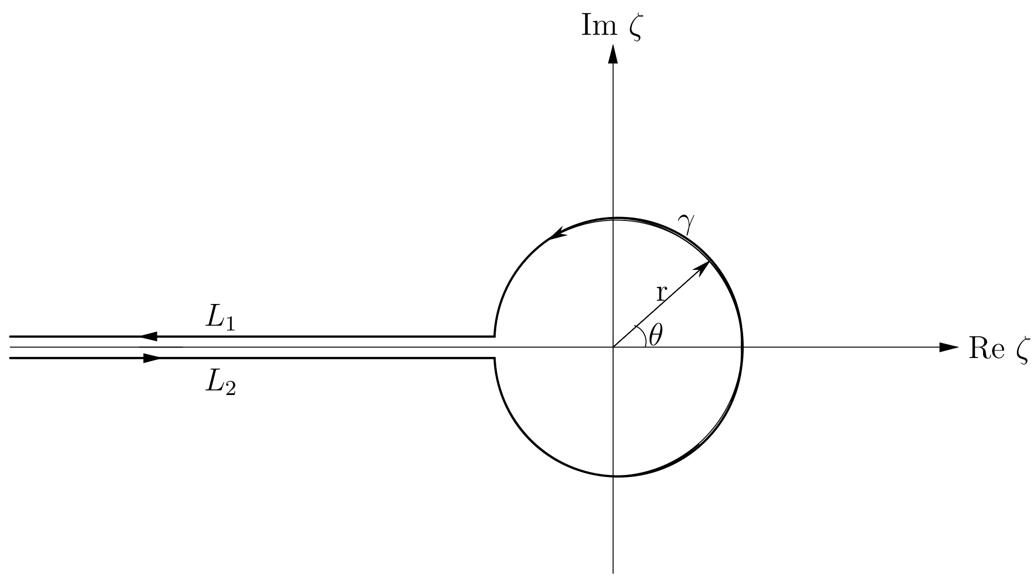


Abbildung 3.7:

$E_{\alpha}(-x)$, $0 < \alpha < 1,\ x \geq 0$ abgeleitet. In [Sch96] wird die vollständige Monotonie von $E_{\alpha,\beta}(-x)$, $0 < \alpha \leq 1,\ \beta \geq \alpha\ x \geq 0$ bewiesen. Eine Funktion $u(x)$

mit $x \geq 0$ oder $x > 0$ heißt *vollständig monoton*, falls $(-1)^n u^n(x) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Ein bekanntes Beispiel ist $E_1(-x) = e^{-x}$. Diese Funktion fällt vollständig monoton von 1 gegen 0, wenn x das Intervall $[0, \infty)$ durchläuft. Den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} E_\alpha(-x) = 0$ findet man auch für $0 < \alpha < 2$. Das zeigt die asymptotische Entwicklung von $E_{\alpha,\beta}$

Satz 3.1.17 (Asymptotische Entwicklung).

a) Sei $0 < \alpha < 2,\ \beta > 0,\ z \in \mathbb{C}$ *und* $\alpha\pi/2 < \rho < \min\{\pi, \alpha\pi\}$.
Dann gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$ *gleichmäßig in* $\arg z$ *:*

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(z) &= \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \exp\left(z^{1/\alpha}\right) - \sum_{k=1}^{N} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + \mathcal{O}\left(|z|^{-N-1}\right) \\
&\qquad \textit{mit } |z| \to \infty \ \textit{ und } \ 0 \leq |\arg z| \leq \rho, \\
E_{\alpha,\beta}(z) &= -\sum_{k=1}^{N} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + \mathcal{O}\left(|z|^{-N-1}\right) \\
&\qquad \textit{mit } |z| \to \infty \ \textit{ und } \ \rho \leq |\arg z| \leq \pi.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

b) Sei $\alpha \geq 2,\ \beta > 0,\ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$ *mit* $\alpha/(2n+1) < 2$ *und* $\alpha\pi/2 < \rho < \min\{(2n+1)\pi, \alpha\pi\}$.
Dann gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$ *gleichmäßig in* $\arg z$ *:*

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(z) = &\frac{1}{\alpha} \sum_{k \in \Upsilon(z)} \left(z e^{i2k\pi}\right)^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \exp\left(e^{i2k\pi/\alpha} z^{1/\alpha}\right) \\
&- \sum_{k=1}^{N} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\beta - \alpha k)} + \mathcal{O}\left(|z|^{-N-1}\right) \\
&\textit{mit } |z| \to \infty \ \textit{ und } \ \Upsilon(z) := \{k \in \mathbb{Z} :\ |\arg z + 2k\pi| \leq \rho\}.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Beweis. [Dzr66, Lemma 3.6, Kapitel III] □

3.2 Operatorenrechnung für den Riemann-Liouville-Integraloperator

Wir werden in diesem Abschnitt eine Operatorenrechnung für den Riemann-Liouville-Integraloperator $J^\alpha\,(\alpha > 0)$ darstellen, so wie sie in [GL97] entwickelt wurde.

Ähnlich wie in der Mikusinski-Operatorenrechnung gilt der Satz:

Satz 3.2.1.
$(C_\mu, *, +)$ *ist ein nullteilerfreier kommutativer Ring.*

Mit $*$ wird die Operation der Faltung bezeichnet (s. (3.13)).

Beweis. Offensichtlich ist $(C_\mu, *, +)$ ein kommutativer Ring.
Die Nullteilerfreiheit folgt aus dem Satz von Titchmarsch ([Mik59]). $\square$

Durch die Faktorisierung der Menge $C_\mu \times (C_\mu - \{0\})$ bzgl. der Äquivalenzrelation

$$(f, g) \sim (f_1, g_1) \Leftrightarrow (f * g_1)(x) = (g * f_1)(x).$$

kann der Raum C_μ zu einem Quotientenraum

$$M_\mu := C_\mu \times (C_\mu - \{0\})/_\sim$$

erweitert werden.
M_μ ist die Menge aller Äquivalenzklassen $\frac{f}{g}$,

$$\frac{f}{g} := \{(g_1, f_1) \in C_\mu \times (C_\mu - \{0\}) \mid (g, f) \sim (g_1, f_1)\}.$$

In der Operatorenrechnung wird das Symbol $\frac{f}{g}$ (wobei g nicht identisch Null ist) als Operator genannt. Es bezeichnet diejenige Funktion h (falls es eine solche gibt), mit der

$$f = g * h$$

ist.

Bemerkung 3.2.2. Bei Verwendung dieses Operatorenkalküls darf man die *Division von Operatoren* nicht mit der Division von Zahlen verwechseln. Aus Bequemlichkeitsgründen wird beidemale der Bruchstrich verwendet, und aus dem Kontext folgt, was gemeint ist.

Die Faktorisierung von $C_\mu \times (C_\mu - \{0\})$ und somit die Einführung von Operatoren $\frac{f}{g}$ werden nur von Nutzen sein , wenn für Operatoren gewisse Operationen definiert werden können, die es gestatten, in Rechnungen von ihnen Gebrauch zu machen.
Deshalb werden folgende Operationen in M_μ definiert:

$$\frac{f}{g} + \frac{f_1}{g_1} = \frac{f * g_1 + g * f_1}{g * g_1} \tag{3.70}$$

$$\frac{f}{g} \cdot \frac{f_1}{g_1} = \frac{f * f_1}{g * g_1}. \tag{3.71}$$

Aus Satz 3.2.1 folgt, daß $(M_\mu, \cdot, +)$ nullteilerfreier Ring ist.
Offenkundig kann der Ring C_μ durch die Abbildung

$$f \mapsto \frac{h_\alpha * f}{h_\alpha} \quad , \quad h_\alpha = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{3.72}$$

im Quotientenraum M_μ eingebettet werden.
Ebenso kann die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ durch die Abbildung

$$z \mapsto \frac{z h_\alpha}{h_\alpha}. \tag{3.73}$$

im Quotientenraum M_μ eingebettet werden.

Der Hauptgedanke bei der Anwendung der Operatorenrechnung zur Lösung von gebrochenen Integralgleichungen besteht darin, sie zu algebraischen Gleichungen im Quotientenraum M_μ zu reduzieren.

Definition 3.2.3.
Die algebraische Inverse des Riemann-Liouville-Integraloperators J^α ist das Element S von M_μ , so daß

$$S := \frac{I}{h_\alpha} \equiv \frac{h_\alpha}{h_\alpha * h_\alpha} \equiv \frac{h_\alpha}{h_{2\alpha}}, \tag{3.74}$$

wobei $I := \frac{h_\alpha}{h_\alpha}$ das neutrale Element von M_μ bzgl. der Multiplikation.

Die Gestalt des Riemann-Liouville-Integraloperators im Quotientenraum M_μ ist gegeben durch den Satz:

Satz 3.2.4.
Der Riemann-Liouville-Integraloperator J^α wird in M_μ in der Form

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{I}{S} \cdot f \tag{3.75}$$

dargestellt.

Beweis. Diese Darstellung folgt aus der Definition von S , aus der Einbettung von C_μ in M_μ und der Tatsache, daß die Faltung zweier Funktionen von C_μ der Multiplikation dieser Funktionen in M_μ entspricht. □

Der Übersichtlichkeit halber betrachten wir von nun an den Fall $\mu = -1$.
In Anwendungen ist es der interessanteste Fall.
Wir wissen bereits (s. Bemerkung 3.1.5), daß gilt:

$$(h_\alpha^n)(x) := (\underbrace{h_\alpha * \cdots * h_\alpha}_{n})(x) = h_{n\alpha}(x)$$

Wir erweitern diese Beziehung zu gebrochenen Potenzen von $h_\alpha(x)$:

$$h_\alpha^\lambda(x) := h_{\lambda\alpha}, \quad \mathfrak{Re}(\lambda) > 0. \tag{3.76}$$

Für alle $\lambda > 0$ gilt $h_\alpha^\lambda \in C_{-1}$.
Weiterhin gelten:

$$h_\alpha^\gamma * h_\alpha^\xi = h_{\gamma\alpha} * h_{\xi\alpha} = h_{(\gamma+\xi)\alpha} = h_\alpha^{\gamma+\xi}, \quad \mathfrak{Re}(\gamma) > 0,\ \mathfrak{Re}(\xi) > 0.$$

Wir definieren:

$$S^\lambda := \begin{cases} h_\alpha^{-\lambda} & \text{falls } \lambda < 0, \\ I & \text{falls } \lambda = 0, \\ \frac{I}{h_\alpha^\lambda} & \text{falls } \lambda > 0. \end{cases} \tag{3.77}$$

Mit Hilfe derselben Technik wie in der Operatorenrechnung von Mikusinski ([Mik59],[Yos84]) erhält man:

$$S^\mu \cdot S^\nu = S^{\mu+\nu}, \quad \mu,\, \nu \in \mathbb{C}$$

Aus Satz 3.2.4, (3.76) und (3.77) folgt, daß $J^{\alpha\mu}$, $\alpha > 0$, $\mu > 0$ in M_-1 in der Form

$$(J^{\alpha\mu} f)(x) = \frac{I}{S^\mu} \cdot f \tag{3.78}$$

dargestellt werden kann. Bei der Anwendung der hier dargestellten Operatorenrechnung zur Lösung von gebrochenen Integralgleichungen ist es wichtig, Lösungen dieser Gleichungen im Quotienraum M_{-1} mit Elementen des ursprünglichen Funktionenraumes C_{-1} darstellen zu können. Eine wichtige Klasse solcher Funktionen wird durch den folgenden Satz gegeben:

Satz 3.2.5.
Sei die Potenzreihe mit komplexer Variable
$z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ *und komplexen Koeffizienten konvergent im Punkt*
$z_0 = (z_{10}, \ldots, z_{m0}) \neq 0_m$, *i.e.*

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty} b_{i_1,\ldots,i_m} z_{i0}^{i_1} \times \cdots \times z_{m0}^{i_m} = A \in \mathbb{C}$$

Seien weiterhin $\beta > 0, \quad \mu_i > 0, \quad 1 \leq i \leq m.$
Dann ist die Potenzreihe

$$S^{-\beta} \sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty} b_{i_1,\ldots,i_m} (S^{-\mu_1})^{i_1} \times \cdots \times (S^{-\mu_m})^{i_m}$$
$$= \sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty} b_{i_1,\ldots,i_m} h_{(\beta+\mu_1 i_1+\cdots+\mu_m i_m)\alpha}(x), \quad (3.79)$$

wobei $h_\alpha(x)$ *wie in* (3.12) *definiert ist, ein Element des Rings* C_{-1}.

Beweis. Aus der Definition von $h_\alpha(x)$ folgt:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty} b_{i_1,\ldots,i_m} h_{(\beta+\mu_1 i_1+\cdots+\mu_m i_m)\alpha}(x) = x^{\beta\alpha-1} f_1(x),$$

wobei

$$f_1(x) := \sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty} \frac{b_{i_1,\ldots,i_m} (x^{\mu_1\alpha})^{i_1} \times \cdots \times (x^{\mu_m\alpha})^{i_m}}{\Gamma(\beta\alpha + \mu_1 i_1 + \cdots + \mu_m i_m \alpha)}.$$

Es muß gezeigt werden, daß $f_1(x)$ stetig im Intervall $[0, \infty)$ ist.
Aus der Ungleichung

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \geq 1, \quad s \geq 1, \quad t \geq 1$$

folgt, daß es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so daß die Ungleichung

$$\frac{1}{\Gamma(\beta\alpha + \mu_1 i_1 \alpha + \cdots + \mu_m i_m \alpha)} \leq \frac{C}{\Gamma(\beta\alpha/m + \mu_1 i_1 \alpha) \times \cdots \times \Gamma(\beta\alpha/m + \mu_m i_m \alpha)}, \quad i_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq m,$$

gilt.
Aus dem asymptotischen Verhalten der Gamma-Funktion für große Argumente (s. [SKM93]) folgt die Abschätzung

$$\frac{1}{\Gamma(\beta\alpha/m + \mu_j i_j \alpha)} \leq c_j \frac{A_j^{i_j} {i_j}^{a_j}}{{i_j}^{i_j \mu_j \alpha}},\ 1 \leq j \leq m,\ i_j = 0, 1, \ldots,$$

wobei $c_j,\ A_j,\ a_j$ geeignete Konstanten sind.
Da die Reihe

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty} b_{i_1,\ldots,i_m} z_{i0}^{i_1} \times \cdots \times z_{m0}^{i_m}, z_0 = (z_{10}, \ldots, z_{m0}) \neq 0_m$$

konvergent ist, gilt:

$$\sup_{i_1,\ldots,i_m \geq 0} |b_{i_1,\ldots,i_m} z_{i0}^{i_1} \times \cdots \times z_{m0}^{i_m}| = M_0 < \infty.$$

Somit gilt:

$$|b_{i_1,\ldots,i_m}| \leq \frac{M_0}{|z_{10}|^{i_1} \times \cdots \times |z_{m0}|^{i_m}},\ i_j = 0, 1, \ldots, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Daher gilt für $x = X\ (0 < X < \infty)$, die Abschätzung :

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty} \left| \frac{b_{i_1,\ldots,i_m} (X^{\mu_1 \alpha})^{i_1} \times \cdots \times (X^{\mu_m \alpha})^{i_m}}{\Gamma(\beta\alpha + \mu_1 i_1 + \cdots + \mu_m i_m \alpha)} \right| \leq C M_0 \prod_{j=1}^{m} \sum_{i_j=0}^{\infty} \frac{C_j (X^{\mu_j \alpha})^{i_j} A_j^{i_j} {i_j}^{a_j}}{|z_{j0}|^{i_j} {i_j}^{i_j \mu_j \alpha}} < \infty, \quad (3.80)$$

was nach dem Satz von Abel zeigt, daß $f_1(x)$ gleichmäßig konvergent in jedem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[0, X],\ 0 < X < \infty$ ist. Folglich gilt $f_1 \in C[0, \infty)$. □

Durch Anwenden von Satz 3.2.5 erhält man verschiedene Funktionen des Operators S in M_{-1}, die sich durch Funktionen von C_{-1} darstellen lassen. Insbesondere erhält man folgende Zusammenhänge:

3.2.1 Darstellung einiger Funktionen von M_{-1} in C_{-1}

Zusammenhang des Operators S mit der Mittag-Leffler Funktion $E_{\alpha,\beta}$

$$\begin{aligned}\frac{I}{S-\rho} &= S^{-1}\cdot\frac{I}{I-\rho S^{-1}}\\ &= S^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i S^{-i}\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\rho^i h_{(i+1)\alpha}(x)\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\rho^i x^{(i+1)\alpha-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha)}\\ &= x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\rho x^\alpha),\end{aligned}\tag{3.81}$$

wobei $E_{\alpha,\beta}(z)$ die verallgemeinerte Mittag-Leffler-Funktion ist.

Potenzen des Operators $\frac{I}{(S-\rho)^m}$

$$\begin{aligned}\frac{I}{(S-\rho)^m} &= S^{-m}\cdot\frac{I}{(I-\rho S^{-1})^m}\\ &= S^{-m}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(m)_i\rho^i}{i!}S^{-i}\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(m)_i\rho^i}{i!}h_{(m+i)\alpha}(x)\\ &= x^{\alpha m-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(m)_i(\rho x^\alpha)^i}{\Gamma(\alpha i+m\alpha)}\\ &= x^{\alpha m-1}E^m_{\alpha,m\alpha}(\rho x^\alpha), m\in\mathbb{N},\end{aligned}\tag{3.82}$$

wobei

$$E^m_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(m)_i z^i}{i!\Gamma(\alpha i + \beta)}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ |z| < \infty,\ (m)_i := \prod_{k=0}^{i-1}(m+k). \tag{3.83}$$

$(m)_i$ ist in der Literatur als Pochhammer Symbol bekannt.
$E^m_{\alpha,\beta}(z)$ kann als eine Art verallgemeinerte Mittag-Leffler-Funktion angesehen werden.
Es gilt insbesondere: $E^1_{\alpha,\beta}(z) \equiv E_{\alpha,\beta}(z)$.

Zurückführung des Operators $\frac{S^{-\beta}}{(S^\gamma-\rho)^m}$

Für $\beta > 0,\ \gamma > 0$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{S^{-\beta}}{(S^\gamma - \rho)^m} &= S^{-\beta-\gamma m} \cdot \frac{I}{(I - \rho S^{-\gamma})^m} \\
&= S^{-\beta-\gamma m} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(m)_i \rho^i}{i!} (S^{-\gamma})^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(m)_i \rho^i}{i!} h_{(\beta+\gamma m+\gamma i)\alpha}(x) \\
&= x^{\gamma\alpha m+\beta\alpha-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(m)_i (\rho x^{\gamma\alpha})^i}{i!\Gamma(\gamma\alpha i + \gamma\alpha m + \beta\alpha)} \\
&= x^{\gamma\alpha m+\beta\alpha-1} E^m_{\gamma\alpha,\gamma\alpha m+\beta\alpha}(\rho x^{\gamma\alpha}), \quad m \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Zurückführung des Opreators $\frac{S^{-\beta}}{I-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i S^{-\mu_i}}$

Für $\beta > 0, \alpha_i > 0, 1 \leq j \leq m$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{S^{-\beta}}{I-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i S^{-\mu_i}} &= S^{-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i S^{-\mu_i})^k \\
&= S^{-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k\\ l_1\geq 0,\ldots,l_m\geq 0}}(k;l_1,\ldots,l_m)\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i S^{-\mu_i})^{l_i} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k\\ l_1\geq 0,\ldots,l_m\geq 0}}(k;l_1,\ldots,l_m)\prod_{i=1}^{m}{\lambda_i}^{l_i}h_{\beta\alpha+\alpha\sum_{i=1}^{m}\mu_i l_i}(x) \\
&= x^{\beta\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k\\ l_1\geq 0,\ldots,l_m\geq 0}}(k;l_1,\ldots,l_m)\frac{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i x^{\mu_i\alpha})^{l_i}}{\Gamma(\beta\alpha+\alpha\sum_{i=1}^{m}\mu_i l_i)} \\
&= x^{\beta\alpha-1}E_{(\mu_1\alpha,\ldots,\mu_m\alpha),\beta\alpha}(\lambda_1 x^{\mu_1\alpha},\ldots,\lambda_m x^{\mu_m\alpha}),
\end{aligned} \tag{3.85}$$

mit einer mehrdimensionalen Mittag-Leffler-Funktion

$$E_{(a_1,\ldots,a_m),b}(z_1,\ldots,z_m) := \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k\\ l_1\geq 0,\ldots,l_m\geq 0}}(k;l_1,\ldots,l_m)\frac{\prod_{i=1}^{m}z_i^{l_i}}{\Gamma(b+\sum_{i=1}^{m}a_i l_i)}, \tag{3.86}$$

wobei die Koeffizienten

$$(k;l_1,\ldots,l_m) := \frac{k!}{l_1!\times\cdot\times l_m!}$$

definiert sind.

3.3 Analytische Lösung einer Klasse von Abelschen Integralgleichungen

Satz 3.3.1 ([GL97]).
Sei $\alpha > 0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ f \in C_{-1}$ *und*

$$P(S) := \sum_{i=0}^{p} b_i S^i, \quad Q(S) := \sum_{i=0}^{q} d_i S^i, \quad p < q,$$

derart definiert, daß gilt:

$$\frac{P(S)}{Q(S)} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_l} c_{lj} \frac{I}{(S - z_l)^j}, \quad \sum_{l=1}^{n} m_l = q. \tag{3.87}$$

Dann hat die Integralgleichung 2. *Art*

$$\begin{gathered} u(x) - \lambda \int_0^x K(x-t) u(t)\, dt = f(x), \quad x > 0, \\ K(x) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_l} c_{lj} x^{\alpha j - 1} E^j_{\alpha, j\alpha}(z_l x^\alpha), \end{gathered} \tag{3.88}$$

im Raum C_{-1} *eine eindeutige Lösung*

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x-t) f(t) dt, \tag{3.89}$$

wobei

$$R(x) = \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_l} d_{lj} x^{\alpha j - 1} E^j_{\alpha, \alpha j}(w_l x^\alpha), \tag{3.90}$$

die Konstanten w_l, $1 \le l \le k$ *und* d_{lj}, $1 \le l \le k$, $1 \le j \le n_l$ *werden derart bestimmt, daß gilt:*

$$\frac{P(z)}{Q(z) - \lambda P(z)} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_l} d_{lj} \frac{I}{(z - w_l)^j}, \quad \sum_{l=1}^{k} n_l = q. \tag{3.91}$$

Beweis. Mit Hilfe von (3.87),(3.82) und der Einbettung (3.72) wird (3.88) im Raum M_{-1} auf die Gleichung

$$u - \lambda \frac{P(S)}{Q(S)} \cdot u = f$$

zurückgeführt.
Deren eindeutige Lösung hat im Raum M_{-1} die Form

$$u = \frac{Q(S)}{Q(S) - \lambda P(S)} \cdot f = f + \lambda \frac{P(S)}{Q(S) - \lambda P(S)} \cdot f. \tag{3.92}$$

Da $f(x)$ zu C_{-1} gehört, kann mit Hilfe von (3.82) der Operator $\frac{P(S)}{Q(S)-\lambda P(S)} \cdot f$ als Element von C_{-1} dargestellt werden. Aus Satz 3.2.1 folgt, daß die Lösung (3.92) der Gleichung (3.88) darstellbar als Element des Rings C_{-1} ist . Diese Lösung ist gegeben durch (3.89). □

Bemerkung 3.3.2. Die Gleichung (3.88) ist ein Spezialfall der linearen Volterraschen Integralgleichung 2. Art vom Faltungstyp:

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)u(t)\,dt, \quad t > 0. \tag{3.93}$$

Die Theorie der linearen und nichtlinearen Volterraschen Integralgleichungen ist – auch für allgemeinere Kerne – weit entwickelt. Die Monographie [GLS90] von Grippenberg, Londen und Staffans faßt sie zusammen.

Wir wenden uns jetzt zwei Spezialfälle der Gleichung (3.88) zu.

Die Substitution $m = 1,\ m_1 = 1,\ c_{11} = 1,\ z_1 = 0$ in (3.88) führt zur klassischen Abelschen Integralgleichung 2. Art

$$u(x) - \lambda(J^\alpha u)(x) = f(x)$$

Mit Hilfe von (3.75) wird diese klassische Abelsche Integralgleichung 2. Art im Raum M_{-1} auf die algebraischen Gleichung

$$u - \lambda\frac{I}{S} \cdot u = f,$$

zurückgeführt; deren eindeutige Lösung im Raum M_{-1} ist durch

$$u = \frac{S}{S-\lambda} \cdot f = f + \lambda\frac{I}{S-\lambda} \cdot f. \tag{3.94}$$

gegeben.
Mit Hilfe von (3.81) und der Einbettung (3.72) erhalten wir die Gestalt der Lösung der klassischen Abelschen Integralgleichung 2. Art.

Korollar 3.3.3.
Sei $\alpha > 0, x > 0, \lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in C_{-1}$. Dann hat die klassische Abelsche Integralgleichung 2. *Art*

$$u(x) - \lambda(J^\alpha u)(x) = f(x) \tag{3.95}$$

im Ring C_{-1} genau eine Lösung

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(x-t)^\alpha) f(t)\, dt, \tag{3.96}$$

wobei $E_{\alpha,\beta}(z)$ die verallgemeinerte Mittag-Leffler-Funktion ist.

Bemerkung 3.3.4. Offenkundig kann die Lösung (3.96) der klassischen Abelschen Integralgleichung 2. Art (3.95) auf die bekannte Form [SKM93, GV91, BvdH86]

$$u(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x E_\alpha(\lambda(x-t)^\alpha) f(t)\, dt \tag{3.97}$$

zurückgeführt werden.
Im Fall $f(x) \equiv c_0$ erhält man die Lösungsformel

$$u(x) = E_\alpha(-\lambda x^\alpha) c_0 \tag{3.98}$$

In [GV91] beweist das Theorem 7.2.1 die Existenz, Eindeutigkeit und Glattheit der Lösung (3.97) der klassischen Abelschen Integralgleichung (3.95), allerdings im Raum $C[0,T]$, $T > 0$, mittels Picard-Iteration. Man kann auch die Lösungsformel direkt aus der Reihenentwicklung von E_α verifizieren.
Die Lösungsformel (3.97) taucht wohl erstmals bei Hille und Tamarkin in [Tam30] und [HT30] auf. Sie verallgemeinert das Prinzip von Duhamel, wie man es aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen kennt; wenn $f \in C[0,T]$, dann ist die Anfangswertaufgabe

$$u'(x) - \lambda u(x) = f'(x), 0 \le x \le T, u(0) = f(0), \tag{3.99}$$

äquivalent zu (3.95) mit $\alpha = 1$ und hat die Lösung

$$u(x) = f(0) \exp(\lambda x) + \int_0^x \exp(\lambda(x-t)) f'(t)\, dt. \tag{3.100}$$

Diese Gleichung kann nach einer partiellen Integration geschrieben werden als

$$u(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x E_1(\lambda(x-t)) f(t)\, dt. \tag{3.101}$$

Die Substitution $m = 1,\ m_l = n,\ \lambda c_{1j} = \lambda_j$ in (3.88) führt zur Abelschen Integralgleichung

$$u(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (J^{j\alpha} u)(x) = f(x). \tag{3.102}$$

Um diese Gleichung zu lösen, können wir dieselbe Methode wie für die klassische Abelsche Integralgleichung (3.95) verwenden.
Aus (3.78) folgt, daß die Integralgleichung (3.102) im Raum M_{-1} auf die algebraische Gleichung der Form

$$u - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{I}{S^j} \cdot u = f$$

zurückgeführt werden kann. Diese algebraische Gleichung hat eine eindeutige Lösung im Raum M_{-1}, nämlich

$$\begin{aligned} u &= \frac{S^n}{S^n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i S^{n-i} - \lambda_n} \\ &= f + \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i S^{n-i} + \lambda_n}{S^n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i S^{n-i} - \lambda_n} \cdot f. \end{aligned} \tag{3.103}$$

Korollar 3.3.5.
Sei $\alpha > 0$, $\lambda_j \in \mathbb{C}\,(1 \leq j \leq n)$, $f \in C_{-1}$ *. Seien weiterhin die Konstanten* d_{jk} *und* w_j *derart gewählt, daß gilt:*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i S^{n-i} + \lambda_n}{S^n - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i S^{n-i} - \lambda_n} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_l} d_{lj} \frac{I}{(S - w_l)^j}, \quad m_1 + \cdots + m_p = n.$$

Dann hat die Abelsche Integralgleichung 2. *Art* (3.102) *im Ring* C_{-1}, *eine eindeutige Lösung der Form*

$$u(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t) f(t)\, dt, \quad R(x) = \sum_{l=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_j} d_{lj} x^{\alpha j - 1} E^{j}_{\alpha,\alpha j}(w_l x^{\alpha}), \tag{3.104}$$

wobei die Funktion $E^{j}_{\alpha,\alpha j}(w_l x^{\alpha})$ *wie in* (3.83) *definiert ist.*

Bemerkung 3.3.6. In ([MR93] $(VI-2)$ wurde der Spezialfall $\alpha = \frac{1}{q}, q \in \mathbb{N}$ von (3.102) behandelt. Allerdings mit schärferen Bedingungen, da mit der Laplace Transformation.
Mit

$$R(x) := x^m - \lambda_1 x^{m-1} - \cdots - \lambda_m, \quad K(x) := \mathcal{L}^{-1}\{R^{-1}(s^{\frac{1}{q}})\} \quad \text{und } M = \lceil m\alpha \rceil$$

wird dort unter den Voraussetzungen,

(a) daß $f(x)$ und $D^M f(x)$ stückweise stetig in $(0,\infty)$, integrierbar in jedem endlichen Teilintervall von $[0,\infty)$ und von exponentieller Ordnung sind,

(b) daß $D^p f(x)$ stückweise stetig auf $[0,\infty)$ für $p = 0, 1, \ldots, M-1$ ist,

gezeigt, daß die eindeutige Lösung von (3.102) mit rationalem $\alpha = \frac{1}{q}, q \in \mathbb{N}$ lautet:

$$u(x) = \int_0^x K(x-t)[D^{m\alpha} f(t)]\,dt + \sum_{j=0}^{M-2} [D^{m\alpha-1-j} f(0)][D^j K(t)], \quad \text{falls} \quad M > m\alpha, \tag{3.105}$$

und

$$u(x) = \int_0^x K(x-t)[D^{M} f(t)]\,dt + \sum_{j=0}^{M-1} [D^{M-1-j} f(0)][D^j K(t)], \quad \text{falls} \quad M = m\alpha. \tag{3.106}$$

Wir erhalten nun eine geschlossene Darstellung der Lösung der verallgemeinerten Abelschen Integralgleichung 2. Art.

Satz 3.3.7 ([GL97]).
Sei $\alpha > 0,\ \mu_i > 0,\ \lambda_i \in \mathbb{C},\ 1 \le i \le m,\ f \in C_{-1}$. Dann hat die verallgemeinerte Abelsche Integralgleichung

$$u(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{\mu_i \alpha} u(x) = f(x) \tag{3.107}$$

im Raum C_{-1} eine eindeutige Lösung der Form

$$u(x) = f(x) + \int_0^x Q(x-t) f(t)\, dt, \tag{3.108}$$

wobei

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x^{\alpha\mu_i - 1} E_{(\alpha\mu_1,\ldots,\alpha\mu_m),\alpha\mu_j}(\lambda_1 x^{\alpha\mu_1}, \ldots, \lambda_m x^{\alpha\mu_m}) \tag{3.109}$$

und die Funktion

$$E_{(\alpha\mu_1,\ldots,\alpha\mu_m),\alpha\mu_j}(\lambda_1 x^{\alpha\mu_1}, \ldots, \lambda_m x^{\alpha\mu_m})$$

die verallgemeinerte Mittag-Leffler-Funktion (3.86) *ist.*

Beweis. Aus (3.78) und der Einbettung (3.72) folgt, daß die Gleichung (3.107) im Raum M_{-1} auf die algebraische Gleichung

$$u - \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{S^{\mu_i}} \cdot u = f$$

zurückgeführt werden kann. Deren eindeutige Lösung im Raum M_{-1} ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u &= \frac{S^{\mu}}{S^{\mu} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i S^{\mu-\mu_i}} \cdot f \\ &= f + \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S^{-\mu_i}}{I - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i S^{-\mu_i}} \cdot f, \quad \mu = \sum_{j=1}^{m} \mu_j. \end{aligned} \tag{3.110}$$

Mit Hilfe von (3.85) und der Einbettung (3.72) des Rings C_{-1} in den Raum M_{-1} erhält man die Lösung der Gleichung (3.107) im Ring C_{-1} in der Form (3.108). □

Korollar 3.3.8.
Seien

$$\alpha > 0,\ \mu_i > 0,\ \lambda_i \in \mathbb{C},\ 1 \le i \le m \quad \textit{und} \quad \beta_l > 0,\ b_l \in \mathbb{C},\ 1 \le l \le L.$$

Dann ist die eindeutige Lösung im Raum C_{-1} der Abelschen Integralgleichung

$$u(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{\mu_i \alpha} u(x) = \sum_{l=1}^{L} b_l x^{\beta_l - 1} \tag{3.111}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x) = \sum_{l=1}^{L} b_l x^{\beta_l-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k \\ l_1,\ldots,l_m \geq 0}} (k; l_1, \ldots, l_m) \sum_{l=1}^{L} b_l \Gamma(\beta_l) \\ \left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\left(\prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{l_i+\delta_{ij}}\right)}{\Gamma\left(\alpha \sum_{i=1}^{m} (l_i+\delta_{ij})\mu_i + \beta_l\right)} x^{\alpha \sum_{i=1}^{m} (l_i+\delta_{ij})\mu_i + \beta_l - 1} \right]. \end{aligned} \tag{3.112}$$

3.3.1 Analytische Lösung der Abel-Volterra-Integralgleichung

Wir wollen in diesem Abschnitt einige Aussagen über Existenz, Eindeutigkeit und asymptotisches Verhalten im Nullpunkt der Lösung von (1.2) formulieren. Die Ideen dazu haben wir von [KS95, KS96] übernommen.

Satz 3.3.9.
Sei $\alpha > 0,\ \beta > -\min\{1, \alpha\},\ \lambda \in \mathbb{C},\ \gamma_k > -1,\ q_k \in \mathbb{C} \quad (k = 0, 1, \ldots, m)$. Dann ist die eindeutige Lösung der Aufgabe

$$u(x) + \lambda x^{\beta} J^{\alpha} u(x) = \sum_{k=0}^{m} q_k x^{\gamma_k} \qquad (0 < x < X \leq \infty) \tag{3.113}$$

gegeben durch

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m} q_k x^{\gamma_k} E_{\alpha,\beta,\gamma_k}(-\lambda x^{\alpha+\beta}), \tag{3.114}$$

wobei

$$E_{\alpha,\beta,\gamma}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad c_0 = 1, \quad c_n := \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(i(\alpha+\beta)+\gamma+1\right)}{\Gamma\left(i(\alpha+\beta)+\gamma+\alpha+1\right)}. \tag{3.115}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $E_{\alpha,\beta,\sigma}$ holomorph in ganz $\mathbb{C}$, eine Eigenschaft, die erlaubt ihre Potenzreihe gliedweise zu integrieren.
Aus

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+b)} = z^{a-b}\left[1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right] \quad (|z|\to\infty,\ |\arg(z+a)|<\pi)$$

folgt

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\Gamma\left(n(\alpha+\beta)+\gamma+1\right)}{\Gamma\left(n(\alpha+\beta)+\gamma+\alpha+1\right)} \sim (\alpha+\beta)^{-\alpha}n^{-\alpha} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Also ist nach dem Quotientenkriterium von D'Alembert $E_{\alpha,\beta,\sigma}$ konvergent und somit holomorph in ganz $\mathbb{C}$.
Eine Substitution von (3.114) in (3.113) ergibt:

$$\begin{aligned}
\lambda x^\beta J^\alpha u(x) &= \frac{\lambda x^\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^m q_k t^{\gamma_k} E_{\alpha,\beta,\gamma_k}(-\lambda t^{\alpha+\beta})\,dt \\
&= \frac{\lambda x^\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \\
&\quad \times \sum_{k=0}^m q_k \sum_{n=0}^\infty \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(i(\alpha+\beta)+\gamma_k+1\right)}{\Gamma\left(i(\alpha+\beta)+\gamma_k+\alpha+1\right)}(-\lambda)^n t^{\gamma_k+n(\alpha+\beta)}\,dt
\end{aligned}$$

Nach einer Vertauschung der Reihenfolge der Integration und Summation und nach einer Berechnung des inneren Integrals mit Hilfe von (3.11) erhalten wir:

$$\lambda x^\beta J^\alpha u(x) = -\sum_{k=0}^m q_k x^{\gamma_k}\sum_{n=0}^\infty \prod_{i=0}^{n} \frac{\Gamma\left(i(\alpha+\beta)+\gamma_k+1\right)}{\Gamma\left(i(\alpha+\beta)+\gamma_k+\alpha+1\right)}(-\lambda x^{\alpha+\beta})^{n+1}$$

Die Substitution $l = n+1$ ergibt

$$\lambda x^\beta J^\alpha u(x) = -\sum_{k=0}^m q_k x^{\gamma_k}\sum_{l=1}^\infty \prod_{i=0}^{l-1} \frac{\Gamma\left(i(\alpha+\beta)+\gamma_k+1\right)}{\Gamma\left(i(\alpha+\beta)+\gamma_k+\alpha+1\right)}(-\lambda x^{\alpha+\beta})^{l}.$$

Mit der Vereinbarung $\prod_{i=0}^{-1} := 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda x^\beta J^\alpha u(x) = &\sum_{k=0}^m q_k x^{\gamma_k} \\
&- \sum_{k=0}^m q_k x^{\gamma_k} \sum_{l=0}^\infty \left(\prod_{i=0}^{l-1} \frac{\Gamma\left(i(\alpha+\beta)+\gamma_k+1\right)}{\Gamma\left(i(\alpha+\beta)+\gamma_k+\alpha+1\right)} \right) (-\lambda x^{\alpha+\beta})^l \\
&= \sum_{k=0}^m q_k x^{\gamma_k} - \sum_{k=0}^m q_k x^{\gamma_k} E_{\alpha,\beta,\gamma_k}(-\lambda x^{\alpha+\beta}) \\
&= \sum_{k=0}^m q_k x^{\gamma_k} - u(x).
\end{aligned}$$

$\square$

$E_{\alpha,\beta,\gamma}$ ist eine Art verallgemeinerte Mittag-Leffler-Funktion.
Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,0,\gamma}(x) &= 1 + \sum_{n=1}^\infty \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(i\alpha+\gamma+1\right)}{\Gamma\left(i(\alpha+1)+\gamma+1\right)} \right) x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n\alpha+\gamma+1)} x^n \\
&= \Gamma(\gamma+1) E_{\alpha,\gamma+1}(x).
\end{aligned}$$

Im Falle $\alpha = l \in \mathbb{N}$ ist $E_{l,\beta,\gamma}(x)$ eine hypergeometrische Funktion

$$E_{l,\beta,\gamma}(x) = {}_1\mathrm{F}_l \left(1; \frac{\gamma+1}{l+\beta}, \dots, \frac{\gamma+l}{l+\beta}; \frac{x}{(l+\beta)^l} \right), \quad l \in \mathbb{N},\ \beta,\ \gamma > -1. \tag{3.116}$$

Definition 3.3.10.
Eine Folge $\{\varphi_n(x)\},\ n = 0, 1, 2, \dots,\ x \in (a, b)\ (a < b \le \infty)$ wird asymptotische Folge $(x \to a,\ x \in (a, b)\ )$, wenn für jedes n gilt:

$$\varphi_{n+1}(x) = \mathrm{o}(\varphi_n(x)), \quad (x \to a,\ x \in (a, b)\ ). \tag{3.117}$$

Definition 3.3.11.
Sei $\{\varphi_n(x)\},\ n = 0, 1, 2, \ldots$ *eine asymptotische Folge* $(x \to a,\ x \in (a, b)\ )$. *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} g_n\varphi_n(x)$ *heißt asymptotische Entwicklung der Funktion* $g(x)$, *wenn für jedes* $N \geq 0$ *gilt:*

$$g(x) - \sum_{n=0}^{N} g_n\varphi_n(x) = o(\varphi_N(x)), \quad (x \to a,\ x \in (a, b)\ ). \tag{3.118}$$

<u>**Schreibweise:**</u> $g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n\varphi_n(x) \quad (x \to a,\ x \in (a, b)\ )$.

Lemma 3.3.12.
Sei $\{\mu_n\}$ *eine monoton wachsende Folge,* $\mu_n > -1$ *und* $\lim_{n\to\infty} \mu_n = +\infty$. *Genüge* $g(x)$

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^{\mu_n}, \quad x \to 0, \tag{3.119}$$

dann hat der Riemann-Liouville-Integraloperator $(J^\alpha g)(x)$ *die asymptotische Entwicklung*

$$(J^\alpha g)(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n\Gamma(\mu_n + 1)}{\Gamma(\alpha + \mu_n + 1)} x^{\mu_n+\alpha}, \quad x \to 0. \tag{3.120}$$

Beweis. [SKM93, Theorem 16.1] □

Wir wollen jetzt das asymptotische Verhalten in der Nähe von Null der Lösung der linearen Abel-Volterra-Integralgleichung

$$u(x) = a(x)(J^\alpha u)(x) + f(x) \quad (0 < x < \infty,\ 0 < \alpha < 1) \tag{3.121}$$

untersuchen, wenn die Funktionen $a(x)$ und $f(x)$ folgende asymptotische Verhalten haben:

$$a(x) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(\alpha k + 1)} x^{\alpha k} \tag{3.122}$$

und

$$f(x) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\psi_k}{\Gamma(\alpha k + 1)} x^{\alpha k}. \tag{3.123}$$

Satz 3.3.13.
Seien $f(x)$ und $a(x)$ zwei Funktionen in C_{-1} mit den asymptotischen Entwicklungen (3.123) *bzw.* (3.122) *für $x \to 0+$, wobei*

$$a_{-1} \neq \frac{\Gamma(\alpha k+\alpha+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha k+1)} \quad (k=-1,0,1,2,\dots). \tag{3.124}$$

Dann hat die eindeutige Lösung $u(x)$ von (3.121) *eine asymptotische Entwicklung der Form*

$$u(x) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{q_k}{\Gamma(\alpha k+1)} x^{\alpha k}, \quad x \to 0+, \tag{3.125}$$

wobei die q_k rekurrent aus

$$\begin{aligned} q_k = & \left[1 - \frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k+\alpha+1)} \frac{a_{-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\right]^{-1} \\ & \times \left[\sum_{i=-1}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha k+1) a_{k-1-i}}{\Gamma\left(\alpha(k-1-i)+1\right)\Gamma\left(\alpha(i+1)+1\right)} q_i + \psi_k\right] \\ & (k=-1,0,1,2,\dots) \end{aligned} \tag{3.126}$$

ermittelt werden.

Beweis. Mit Hilfe von Lemma 3.3.12 erhalten wir

$$(J^\alpha u)(x) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{q_k}{\Gamma\left(\alpha(k+1)+1\right)} x^{\alpha(k+1)}, \quad x \to 0+. \tag{3.127}$$

Aus (3.122) und (3.127) folgt die asymptotische Entwicklung

$$a(x)(J^\alpha u)(x) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\sum_{i=-1}^{k} \frac{a_{k-1-i} q_i}{\Gamma\left(\alpha(k-1-i)+1\right)\Gamma\left(\alpha(i+1)+1\right)} \right) x^{\alpha k}, \quad x \to 0+. \tag{3.128}$$

Die Substitution von (3.123), (3.125) und (3.128) in (3.121) ergibt die asymptotische Entwicklung ($x \to 0+$)

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{q_k}{\Gamma(\alpha k+1)} x^{\alpha k}$$
$$\sim \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\sum_{i=-1}^{k} \frac{\Gamma(\alpha k+1) a_{k-1-i} q_i}{\Gamma\left(\alpha(k-1-i)+1\right) \Gamma\left(\alpha(i+1)+1\right)} \right) \frac{x^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)} + \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\psi_k}{\Gamma(\alpha k+1)} x^{\alpha k}. \tag{3.129}$$

Ein Vergleich von beiden Seiten von (3.129) ergibt

$$q_k = \sum_{i=-1}^{k} \frac{\Gamma(\alpha k+1) a_{k-1-i}}{\Gamma\left(\alpha(k-1-i)+1\right) \Gamma\left(\alpha(i+1)+1\right)} q_i + \psi_k \quad (k=-1,0,1,2,\dots). \tag{3.130}$$

Dies ist aber äquivalent zu

$$\left(1 - \frac{\Gamma(\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha k+\alpha+1)} \frac{a_{-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\right) q_k$$
$$= \sum_{i=-1}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha k+1) a_{k-1-i}}{\Gamma\left(\alpha(k-1-i)+1\right) \Gamma\left(\alpha(i+1)+1\right)} q_i + \psi_k \quad (k=-1,0,1,2,\dots), \tag{3.131}$$

wobei gesetzt wird: $\sum_{k=-1}^{-2} := 0$. Somit werden die q_k aus (3.126) rekurrent ermittelt, wenn (3.124) gilt. □

Korollar 3.3.14.
Seien $f(x)$ und $a(x)$ zwei Funktionen in C_{-1} mit den asymptotischen Entwicklungen (3.123) *bzw.* (3.122) *mit $a_{-1} = 0$ für $x \to 0+$. Dann hat die eindeutige Lösung $u(x)$ von* (3.121) *eine asymptotische Entwicklung* (3.125), *wobei die q_k $(k=-1,0,1,2,\dots)$ rekurrent aus*

$$q_k = \sum_{i=-1}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha k+1) a_{k-1-i}}{\Gamma\left(\alpha(k-1-i)+1\right) \Gamma\left(\alpha(i+1)+1\right)} q_i + \psi_k \tag{3.132}$$

ermittelt werden.

Beweis. Da $a_{-1} = 0$, ist die Bedingung (3.124) erfüllt.
(3.132) folgt unmittelbar aus (3.131). □

Bemerkung 3.3.15. Existiere ein $j \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ so, daß

$$a_{-1} = \frac{\Gamma(\alpha j + \alpha + 1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha j + 1)} \tag{3.133}$$

und ist das lineare System

$$\begin{cases} q_k - \sum_{i=-1}^{k} \frac{\Gamma(\alpha k+1) a_{k-1-i}}{\Gamma(\alpha(k-1-i)+1)\Gamma(\alpha(i+1)+1)} q_i = \psi_k \\ \quad (k \neq j,\ k = -1, 0, 1, 2, \dots) \\ \sum_{i=-1}^{j-1} \frac{\Gamma(\alpha j+1) a_{j-1-i}}{\Gamma(\alpha(j-1-i)+1)\gamma(\alpha(i+1)+1)} q_i + \psi_j = 0 \end{cases} \tag{3.134}$$

lösbar, dann folgt aus (3.131), daß die Lösung $u(x)$ von (3.121) eine asymptotische Entwicklung der Form

$$u(x) \sim \frac{c}{\Gamma(\alpha j + 1)} x^{\alpha j} + \sum_{\substack{k=-1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{q_k}{\Gamma(\alpha k + 1)} x^{\alpha k}, \quad x \to 0+ \tag{3.135}$$

hat, wobei c eine beliebige Konstante ist. Ist das System (3.134) unlösbar, so hat die Lösung von (3.121), sofern überhaupt eine Lösung existiert, keine asymptotische Entwicklung der Form (3.125). Die Frage nach der dann bestehenden Asymptotik und den resultierenden Schwierigkeiten lassen wir, als Anregung zu weiterer Forschung, offen.

Satz 3.3.16.
Seien $f(x)$ und $a(x)$ zwei Funktionen in C_{-1} mit den asymptotischen Entwicklungen (3.123) *mit $\psi_{-1} = 0$ bzw.* (3.122) *für $x \to 0+$, wobei wie in Satz 3.3.13* (3.124) *erfüllt ist. Dann hat die eindeutige Lösung $u(x)$ von* (3.121) *eine asymptotische Entwicklung der Form*

$$u(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q_k}{\Gamma(\alpha k + 1)} x^{\alpha k}, \quad x \to 0+, \tag{3.136}$$

wobei die q_k rekurrent aus

$$\begin{aligned} q_k = {} & \left[1 - \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \frac{a_{-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\right]^{-1} \\ & \times \left[\sum_{i=-1}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha k + 1) a_{k-1-i}}{\Gamma\left(\alpha(k-1-i)+1\right)\Gamma\left(\alpha(i+1)+1\right)} q_i + \psi_k\right] \\ & (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \tag{3.137}$$

ermittelt werden.

Beweis. Wegen $\psi_{-1} = 0$, ergibt (3.131):

$$
\begin{aligned}
&(1 - a_{-1})q_{-1} = 0, \\
&\left(1 - \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \frac{a_{-1}}{\Gamma(1 - \alpha)}\right) q_k = \\
&\sum_{i=-1}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha k + 1) a_{k-1-i}}{\Gamma\left(\alpha(k-1-i)+1\right)\Gamma\left(\alpha(i+1)+1\right)} q_i + \psi_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}
\tag{3.138}
$$

Da aber (3.124) erfüllt ist, gilt $a_{-1} \neq 1$.
Somit folgt aus (3.138) $q_{-1} = 0$. □

3.4 Analytische Lösung der Riemann-Liouville-Differentialgleichung

Wir wenden uns in diesem Abschnitt der Riemann-Liouville-Differentialgleichung

$$
D^{\mu} u(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i D^{\mu_i} u(x) = f(x) \tag{3.139}
$$

zu.

Satz 3.4.1.
Seien

$$
\lambda_i \in \mathbb{C}\ (i = 1, \dots, m), \quad \eta := \lceil \mu \rceil, \quad f \in C_{-1} \tag{3.140}
$$

und

$$
\mu > \mu_i \geq 0, \quad \eta_i := \lceil \mu_i \rceil \quad \textit{für alle} \quad i \in \{1, \dots, m\}, \tag{3.141}
$$

wobei $\lceil \mu_i \rceil$ die kleinste Zahl $\eta_i \in \mathbb{N}_0$ mit $\eta_i \geq \mu_i$ ist.
Dann ist für gegebene $b_q \in \mathbb{C}$ $(q = 0, \dots, \eta-1)$ und $c_{iq} \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \dots, m;\ q =$

$0, \dots \eta - 1)$ *die eindeutige Lösung in* C_{-1} *der Anfangswertaufgabe*

$$
\begin{aligned}
(D^{\mu}u)(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (D^{\mu_i}u)(x) = f(x), \qquad \lim_{x\to 0}(J^{\eta-\mu}u)(x) = b_{\eta-1},\\
\lim_{x\to 0}(D^{\mu-q-1}u)(x) = b_q,\ (q = 0, \dots, \eta - 2),\\
\lim_{x\to 0}(J^{\eta_i-\mu_i}u)(x) = c_{i(\eta_i-1)}, \quad \lim_{x\to 0}(D^{\mu_i-q-1}u)(x) = c_{iq},\\
(i = 1, \dots, m;\ q = 0, \dots, \eta_i - 2),
\end{aligned}
\tag{3.142}
$$

gegeben durch

$$
u(x) = g(x) + \int_0^x Q(x-t)g(t)\,dt, \tag{3.143}
$$

wobei

$$
Q(x) := \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x^{\mu-\mu_j-1} E_{(\mu-\mu_1,\dots,\mu-\mu_m),\mu-\mu_j}(\lambda_1 x^{\mu-\mu_1}, \dots, \lambda_m x^{\mu-\mu_m}) \tag{3.144}
$$

und

$$
g(x) := (J^{\mu}f)(x) + \sum_{q=0}^{\eta-1} \frac{b_q}{\Gamma(\mu-q)} x^{\mu-q-1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{q=0}^{\eta_i-1} \frac{c_{iq}}{\Gamma(\mu-q)} x^{\mu-q-1} \right). \tag{3.145}
$$

Beweis. Wir führen die Gleichung (3.148) auf die Form (3.107) zurück. Daher wenden wir den Operator J^{μ} auf beiden Seiten von (3.139) an und erhalten

$$
J^{\mu}D^{\mu}u(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{\mu} D^{\mu_i} u(x) = J^{\mu} f(x).
$$

Dies ist aber wegen der Halbgruppeneigenschaft (3.14) des Riemann-Liouville-Integraloperators J^{μ} äquivalent zu

$$
J^{\mu}D^{\mu}u(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{\mu-\mu_i} J^{\mu_i} D^{\mu_i} u(x) = J^{\mu} f(x).
$$

Aus (3.38) und (3.148) folgt

$$u(x) - \sum_{q=0}^{\eta-1} \frac{b_q}{\Gamma(\mu-q)} x^{\mu-q-1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{\mu-\mu_i} \left[u(x) - \sum_{q=0}^{\eta_i-1} \frac{c_{iq}}{\Gamma(\mu_i-q)} x^{\mu_i-q-1} \right] = J^\mu f(x).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} u(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{\mu-\mu_i} u(x) = J^\mu f(x) + \sum_{q=0}^{\eta-1} \frac{b_q}{\Gamma(\mu-q)} x^{\mu-q-1} \\ - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{q=0}^{\eta_i-1} \frac{c_{iq}}{\Gamma(\mu-q)} x^{\mu-q-1} \right) \end{aligned} \tag{3.146}$$

und aus Satz 3.3.7 die Behauptung. □

Wir wollen jetzt eine explizitere Darstellung von $Q(x)$ angeben.

Aus (3.86) folgt

$$\begin{aligned} E_{(a_1,\dots,a_m)a_j}(z_1,\dots,z_m) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_m=k \\ l_1\geq 0,\dots,l_m\geq 0}} (k; l_1,\dots,l_m) \frac{\prod_{s=1}^m z_s^{l_s}}{\Gamma(a_j + \sum_{s=1}^m a_s l_s)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l_1=0}^{k} \sum_{l_2=0}^{k-l_1} \sum_{l_3=0}^{k-l_1-l_2} \cdots \sum_{l_{m-1}=0}^{k-\sum_{s=1}^{m-2} l_s} \frac{k!}{l_1!\cdots l_{m-1}!(k-\sum_{s=1}^{m-1} l_s)!} \\ &\quad \times \frac{z_m^{(k-\sum_{s=1}^{m-1} l_s)} \prod_{s=1}^{m-1} z_s^{l_s}}{\Gamma(a_j + a_m(k-\sum_{s=1}^{m-1} l_s) + \sum_{s=1}^{m-1} a_s l_s)}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} &E_{(\mu-\mu_1,\dots,\mu-\mu_m),\mu-\mu_j}(\lambda_1 x^{\mu-\mu_1},\dots,\lambda_m x^{\mu-\mu_m}) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_m=k \\ l_1\geq 0,\dots,l_m\geq 0}} (k; l_1,\dots,l_m) \frac{\prod_{s=1}^m \lambda_s^{l_s}}{\Gamma\left(\sum_{s=1}^m (\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj})\right)} x^{\sum_{s=1}^m (\mu-\mu_s) l_s} \end{aligned} \tag{3.147}$$

mit dem KRONECKER-Symbol

$$\delta_{sj} = \begin{cases} 1 & \text{für } s = j, \\ 0 & \text{für } s \neq j. \end{cases}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} Q(x) &:= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x^{\mu-\mu_j-1} E_{(\mu-\mu_1,\dots,\mu-\mu_m),\mu-\mu_j}(\lambda_1 x^{\mu-\mu_1}, \dots, \lambda_m x^{\mu-\mu_m}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_m=k \\ l_1\geq 0,\dots,l_m\geq 0}} (k; l_1, \dots, l_m) \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{m} \frac{\prod_{s=1}^{m} \lambda_s^{l_s+\delta_{sj}}}{\Gamma\left(\sum_{s=1}^{m} (\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj})\right)} x^{\sum_{s=1}^{m}(\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj})-1}. \end{aligned}$$

Korollar 3.4.2.
Seien die Voraussetzungen von Satz 3.4.1 gegeben.
Dann ist für gegebene $b_q \in \mathbb{C}$ $(q = 0, \dots, \eta-1)$ *und* $c_{iq} \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \dots, m;\ q = 0, \dots \eta - 1)$ *die eindeutige Lösung in* C_{-1} *der Anfangswertaufgabe*

$$\begin{aligned} (D^{\mu}u)(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (D^{\mu_i}u)(x) = f(x), \qquad \lim_{x\to 0} (J^{\eta-\mu}u)(x) = b_{\eta-1}, \\ \lim_{x\to 0} (D^{\mu-q-1}u)(x) = b_q,\ (q = 0, \dots, \eta-2), \\ \lim_{x\to 0} (J^{\eta_i-\mu_i}u)(x) = c_{i(\eta_i-1)}, \quad \lim_{x\to 0} (D^{\mu_i-q-1}u)(x) = c_{iq}, \\ (i = 1, \dots, m;\ q = 0, \dots, \eta_i - 2), \end{aligned} \tag{3.148}$$

gegeben durch

$$
\begin{aligned}
u(x) = (J^\mu f)(x) &+ \sum_{q=0}^{\eta-1} \frac{b_q}{\Gamma(\mu-q)} x^{\mu-q-1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{q=0}^{\eta_i-1} \frac{c_{iq}}{\Gamma(\mu-q)} x^{\mu-q-1} \right) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k \\ l_1\geq 0,\ldots,l_m\geq 0}} (k; l_1, \ldots, l_m) \\
&\times \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{s=1}^{m} \lambda_s^{l_s+\delta_{sj}} \right) J^{\sum_{s=1}^{m}(\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj})+\mu} f(x) \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k \\ l_1\geq 0,\ldots,l_m\geq 0}} (k; l_1, \ldots, l_m) \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{s=1}^{m} \lambda_s^{l_s+\delta_{sj}} \right) \\
&\times \sum_{q=0}^{\eta-1} \frac{x^{\sum_{s=1}^{m}(\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj})+\mu-q-1}}{\Gamma\left(\sum_{s=1}^{m}(\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj})+\mu-q-1\right)} b_q \\
&- \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k \\ l_1\geq 0,\ldots,l_m\geq 0}} (k; l_1, \ldots, l_m) \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \prod_{s=1}^{m} \lambda_s^{l_s+\delta_{sj}+\delta_{si}} \\
&\times \sum_{q=0}^{\eta_i-1} \frac{x^{\sum_{s=1}^{m}(\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj}+\delta_{si})+\mu-q-1}}{\Gamma\left(\sum_{s=1}^{m}(\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj}+\delta_{si})+\mu-q)\right)} c_i q.
\end{aligned}
\tag{3.149}
$$

Wir betrachten den Spezialfall von (3.139), wenn $\mu = m\alpha$ und $\mu_i = (i-1)\alpha,\ \alpha > 0$.

Korollar 3.4.3.
Seien

$$1 < m \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{C}\ (i = 1, \ldots, m), \quad \eta := \lceil \mu \rceil, \quad f \in C_{-1} \tag{3.150}$$

und

$$\eta_i := \lceil (i-1)\alpha \rceil \quad \textit{für alle} \quad i \in \{1, \ldots, m\} \tag{3.151}$$

Seien weiterhin die Konstanten d_{lj} und w_l derart gewählt, daß gilt:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S^{i-1}}{S^m - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i S^{i-1}} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_l} \frac{d_{lj}}{(S-w_l)^j}, \quad n_1 + \cdots + n_p = m.$$

Dann ist für gegebene $b_q \in \mathbb{C}$ $(q = 0, \dots, \eta-1)$ *und* $c_{iq} \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \dots, m;\ q = 0, \dots \eta - 1)$ *die eindeutige Lösung in* C_{-1} *der Anfangswertaufgabe*

$$
\begin{aligned}
(D^{m\alpha}u)(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (D^{(i-1)\alpha}u)(x) = f(x), \qquad & \lim_{x\to 0}(J^{\eta-m\alpha}u)(x) = b_{\eta-1}, \\
& \lim_{x\to 0}(D^{m\alpha-q-1}u)(x) = b_q,\ (q = 0, \dots, \eta-2), \\
\lim_{x\to 0}(J^{\eta_i-(i-1)\alpha}u)(x) = c_{i(\eta_i-1)}, \quad & \lim_{x\to 0}(D^{(i-1)\alpha-q-1}u)(x) = c_{iq}, \\
& (i = 1, \dots, m;\ q = 0, \dots, \eta_i - 2),
\end{aligned}
\tag{3.152}
$$

gegeben durch

$$
u(x) = g(x) + \int_0^x R(x-t)g(t)\,dt, \tag{3.153}
$$

wobei

$$
R(x) = \sum_{l=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_l} d_{lj} x^{\alpha j-1} E^{j}_{\alpha,\alpha j}(w_l x^{\alpha}) \tag{3.154}
$$

und

$$
\begin{aligned}
g(x) := (J^{m\alpha}f)(x) &+ \sum_{q=0}^{\eta-1} \frac{b_q}{\Gamma(m\alpha-q)} x^{m\alpha-q-1} \\
&- \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{q=0}^{\eta_i-1} \frac{c_{iq}}{\Gamma(m\alpha-q)} x^{m\alpha-q-1} \right),
\end{aligned}
\tag{3.155}
$$

dabei ist die Funktion $E^{j}_{\alpha,\alpha j}(w_l x^{\alpha})$ *wie in* (3.83) *definiert.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus (3.146) mit $\mu = m\alpha,\ \mu_i = (i-1)\alpha$ und Korollar 3.3.5. □

Wir befassen uns jetzt mit dem Spezialfall

$$
D^{\mu}u(t) = -\rho^{\mu}u(t) + q(t), \qquad t > 0, \quad m := \lceil \mu \rceil, \tag{3.156}
$$

der in der Literatur , falls $0 < \mu \leq 1$ als Verallgemeinerung in der Zeitableitung der Relaxationsgleichung

$$Du(t) = -\rho u(t) + q(t), \qquad t \geq 0, \quad \rho > 0, \tag{3.157}$$

und falls $1 < \mu \leq 2$ als Verallgemeinerung in der Zeitableitung der Oszillationsgleichung

$$D^2 u(t) = -\rho^2 u(t) + q(t), \qquad t \geq 0, \quad \rho > 0, \tag{3.158}$$

vorgeschlagen wird.

Nigmatullin diskutiert in [Nig84] den Spezialfall

$$D^\mu u(t) = -\rho^\mu u(t), \qquad t > 0, \quad \rho > 0, \quad 0 < \mu \leq 2. \tag{3.159}$$

Im engen Zusammenhang mit den Gleichungen (3.156) und (3.159) stehen die Mittag-Leffler-Funktionen E_α und die verallgemeinerte Mittag-Leffler-Funktionen $E_{\alpha,\beta}$. Die Lösungen dieser Gleichungen sind durch das folgende Korollar gegeben:

Korollar 3.4.4.
Seien

$$\mu > 0,\ c_k \in \mathbb{C}\ (k = 0, \ldots, m-1),\ m := \lceil \mu \rceil,\ \rho \in \mathbb{C}, \quad f \in C_{-1}$$

und

$$w(t) := t^{\mu-1} E_{\mu,\mu}(-(\rho t)^\mu).$$

Dann löst

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k w^{(k)}(t) + J^\mu u(t) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \rho^{\mu i} J^{\mu(i+1)} f(t) \tag{3.160}$$

eindeutig die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} D^\mu u(t) + \rho^\mu u(t) = f(t), \quad lim_{t\to 0}(J^{m-\mu}u)(t) = c_{m-1}, \\ lim_{t\to 0}(D^{\mu-k-1}u)(t) = c_k,\ (k = 0, \ldots, m-2). \end{aligned} \tag{3.161}$$

Falls $f(t) \equiv 0$ gilt das asymptotische Verhalten[1]*:*

$$u(t) \sim c_{m-1} t^{\mu-m}/\Gamma(\mu) \quad \mathit{für} \quad t \to 0. \tag{3.162}$$

[1] $g(t) \sim h(t)$ für $t \to 0$ bedeutet $\lim_{t\to 0} g(t)/h(t) \to 1$

Beweis. Wir wenden den Operator J^μ auf beiden Seiten der Gleichung (3.156) an, um sie auf die Form (3.95) zurückzuführen und erhalten:

$$J^\mu D^\mu u(t) = -\rho^\mu J^\mu u(t) + J^\mu f(t)$$

Aus (3.38) und den Anfangsbedingungen in (3.161) folgt:

$$u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{\mu-k-1}}{\Gamma(\mu-k)} c_k = -\rho^\mu J^\mu u(t) + J^\mu f(t).$$

Die eindeutige Lösung dieser Gleichung lautet aber nach (3.96):

$$\begin{aligned} u(t) = & \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{\mu-k-1}}{\Gamma(\mu-k)} c_k \\ & - \rho^\mu \sum_{k=0}^{m-1} \frac{c_k}{\Gamma(\mu-k)} \int_0^t (t-\tau)^{\mu-1} E_{\mu,\mu}\left(-\rho^\mu (t-\tau)^\mu\right) \tau^{\mu-k-1}\, d\tau \\ & + J^\mu u(t) - \rho^\mu \int_0^t (t-\tau)^{\mu-1} E_{\mu,\mu}\left(-\rho^\mu (t-\tau)^\mu\right) J^\mu f(t)\, d\tau. \end{aligned}$$

Da aber die Mittag-Leffler-Funktion $E_{\alpha,\beta}$ in $\mathbb{C}$ wohldefiniert und holomorph ist, darf die definierende Potenzreihe stets gliedweise integriert und beliebig oft differenziert werden. Daher erhalten wir durch Einsetzen der Potenzreihe $E_{\mu,\mu}$:

$$\begin{aligned} u(t) = & \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{\mu-k-1}}{\Gamma(\mu-k)} c_k \\ & - \rho^\mu \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \rho^{j\mu}}{\Gamma(\mu-k)\Gamma(\mu j+\mu)} c_k \int_0^t (t-\tau)^{\mu(j+1)-1} \tau^{\mu-k-1}\, d\tau \\ & + J^\mu u(t) - \rho^\mu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \rho^{\mu j}}{\Gamma(\mu j+\mu)} \int_0^t (t-\tau)^{\mu(j+1)-1} J^\mu f(t)\, d\tau. \end{aligned}$$

Aus der Halbgruppeneigenschaft (3.14) des Riemann-Liouville-Integraloperators

J^μ und aus (3.11) folgt:

$$\begin{aligned}
u(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^{\mu-k-1}}{\Gamma(\mu-k)} c_k + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} \rho^{(j+1)\mu}}{\Gamma(\mu(j+1)+\mu-k)} t^{\mu(j+1)+\mu-k-1} \\
&\quad + J^\mu u(t) + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \rho^{\mu(j+1)} J^{\mu(j+2)} f(t) \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} c_k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \rho^{i\mu}}{\Gamma(\mu(i+1)-k)} t^{\mu(i+1)-k-1} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \rho^{\mu i} J^{\mu(i+1)} f(t).
\end{aligned}$$

Aus der Definition von $w(t)$ folgt:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k w^{(k)}(t) + J^\mu u(t) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \rho^{\mu i} J^{\mu(i+1)} f(t).$$

$\square$

Wie die asymptotischen Entwicklungen zeigen, führt der Ansatz, wie bei der Gleichung (3.156) beschrieben, in der Regel auf Lösungen, die im Nullpunkt unbeschränkt sind. Zudem ist es physikalisch sinnvoller, an der Stelle $t = 0$ Werte von u und gegebenenfalls von $u', \ldots, u^{m-1}$ vorzugeben. Folgt man den Ausführungen in [GR95],[GM97], [Mai96] und baut die Anfangsbedingungen direkt in die Gleichungen ein, so bekommt man die modifizierte Aufgabe

$$\begin{aligned}
&D^\mu\left(u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(0^+)\right) = -\rho^\mu u(t) + f(t), \\
&f \in C_{-1}, \qquad t > 0, \quad \rho > 0, \quad m-1 < \mu \leq m.
\end{aligned} \tag{3.163}$$

Wenn $f(t) \equiv 0$, so heißt die Gleichung (3.163) *gebrochene Relaxationsgleichung*, falls $0 < \mu < 1$ und *gebrochene Oszillationsgleichung*, falls $1 < \mu < 2$.

Die Gleichung (3.163) ist äquivalent zu der Integralgleichung

$$u(t) + \rho^\mu J^\mu u(t) = J^\mu f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(0^+), \qquad (3.164)$$
$$f \in C_{-1} \qquad t > 0, \quad \rho > 0, \quad m-1 < \mu \le m.$$

Diese Form wird in der Literatur ([GN91],[GN93],[SW89]) direkt aus

$$u(t) + \rho J^m u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(0^+) + J^m f(t)$$

durch Verallgemeinerung des Integralterms abgeleitet. Ausgedrückt in Mittag-Leffler-Funktionen sehen die Lösungen so aus:

Satz 3.4.5.
Sei $w(t) := E_\mu(-(\rho t)^\mu)$

(a) Für $0 < \mu < 1$ *und für gegebenes* c_0 *ist*

$$u(t) := c_0 w(t) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \rho^{\mu i} J^{\mu(i+1)} f(t), \qquad (3.165)$$

eindeutige Lösung von

$$D^\mu\Big(u(t) - u(0)\Big) = -\rho^\mu u(t) + f(t), \quad u(0) = c_0,\ f \in C_{-\mu}. \qquad (3.166)$$

Ist $f \in C[0,\infty)$*, so erfüllt* u'

$$u'(t) \sim -c_0 \rho^\mu t^{\mu-1}/\Gamma(\mu), \quad \textit{für} \quad t \to 0.$$

(b) Für $m-1 < \mu \le m, \quad m \in \mathbb{N} - \{0\}$ *und für gegebene*

$$c_k \quad (k = 0, \dots, m-1)$$

ist

$$u(t) := \sum_{k=0}^{m-1} c_k J^k w(t) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \rho^{\mu i} J^{\mu(i+1)} f(t), \qquad (3.167)$$

eindeutige Lösung von

$$D^{\mu}\left(u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(0^+)\right) = -\rho^{\mu} u(t) + f(t),$$
$$f \in C_{-1}, \quad u^{(k)}(0^+) = c_k \quad (k = 0, \dots, m-1). \tag{3.168}$$

$u^{(m)}$ *erfüllt*

$$u^{(m)}(0) \sim -c_0 \rho^{\mu} t^{\mu-m} / \Gamma(\mu - m + 1) \quad \textit{für}\ t \to 0.$$

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis des vorherigen Korollars 3.4.4. Man führt die Gleichungen auf die Form (3.95) zurück und benutzt die Eigenschaften der Mittag-Leffler-Funktionen. □

In [GR95], [GM97] und [Mai96] wird im Fall $0 < \mu \leq 2$ das Verhalten dieser Lösungen eingehend untersucht. Entscheidend dabei sind die Mittag-Leffler-Funktionen $E_{\mu}(-t^{\mu})$, die die gebrochene Relaxationsgleichung

$$u(t) + J^{\mu} u(t) = 1, \quad u(0) = 1, \quad 0 < \mu \leq 1 \tag{3.169}$$

und die gebrochene Oszillationsgleichung

$$u(t) + J^{\mu} u(t) = 1, \quad u(0) = 1, u'(0) = 0, \quad 1 < \mu \leq 2 \tag{3.170}$$

lösen. Für $0 < \mu < 2$ gilt:

$$E_{\mu}(-t^{\mu}) \sim \begin{cases} 1 - t^{\mu}\Gamma(1+\mu), & \text{wenn}\ t \to 0 \\ t^{-\mu}\Gamma(1-\mu), & \text{wenn}\ t \to \infty. \end{cases}$$

$E_{\mu}(-t^{\mu})$ hat für $1 < \mu < 2$ in $t \geq 0$ eine ungerade Anzahl von Nullstellen und bleibt für hinreichend große t negativ, während $E_{\mu}(-t^{\mu})$ für $0 < \mu \leq 1$ in $t \geq 0$ streng monoton abklingt. Für $1 < \mu < 2$ wächst die Zahl der Nulldurchgänge mit μ, bis es im Grenzfall $\mu = 2$ für $E_2(-t^2) = \cos t$ unendlich viele sind.

Im Vergleich zur Lösung e^{-t} der "klassischen" Relaxationsgleichung (mit $\mu = 1$ in (3.169)) fällt die Lösung $E_{\mu}(-t^{\mu})$ der gebrochenen Relaxationsgleichung (mit $0 < \mu < 1$ in (3.170)) in der Nähe von 0 viel schneller (die Ableitung strebt gegen $-\infty$ anstelle -1), für große t viel langsamer (algebraisch statt exponentiell).

Im Vergleich zur Lösung $\cos t$ der "klassischen" Oszillationsgleichung (mit $\mu = 2$ in (3.170)) hat die Lösung $E_\mu(-t^\mu)$ der gebrochenen Oszillationsgleichung (mit $1 < \mu < 2$ in (3.170)) nur eine endliche Anzahl lokaler Extreme und konvergiert für $t \to \infty$ asymptotisch algebraisch gegen 0. Demnach weisen gebrochene Oszillationsprozesse Merkmale der Relaxation und der Oszillation auf.

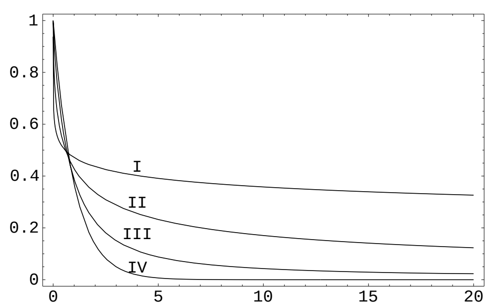


Abbildung 3.8: Die Mittag-Leffler-Funktion $E_\alpha(-x^\alpha)$ für verschiedene Werte von $\alpha \in (0, 1]$: I 0.2, II 0.5, III 0.8, IV 1.

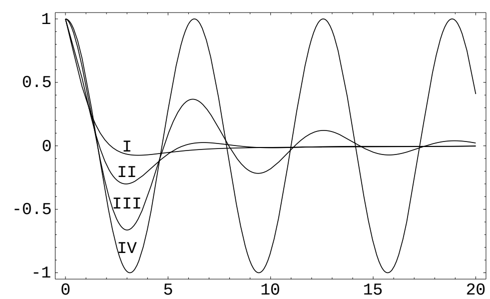


Abbildung 3.9: Die Mittag-Leffler-Funktion $E_\alpha(-x^\alpha)$ für verschiedene Werte von $\alpha \in (1, 2]$: I 1.2, II 1.5, III 1.8, IV 2 .

In der Literatur werden die Lösungen der gebrochenen Relaxations-Oszillationsgleichung oft anders angegeben. Die Mittag-Leffler-Funktionen ergeben sich aus der Technik der Operatorenrechnung oder der Laplacetransformation. Benutzt man jedoch wie in [GN91] die Mellintransformation, so führt das auf H-Funktionen von Fox. Durch entsprechendes Einsetzen der Indizes kommt man wieder auf die Mittag-Leffler-Funktionen.

3.5 Analytische Lösung der Caputo-Differentialgleichung

Wir wollen in diesem Abschnitt eine Existenz-und-Eindeutigkeitsaussage für (1.4) formulieren.
Wir untersuchen erstmal die Gleichung

$$\begin{gathered} D_*^\beta u(x) + aD_*^\alpha u(x) + bu(x) = f(x), \\ \beta > \alpha, \quad m_\alpha - 1 < \alpha \le m_\alpha, \quad m_\beta - 1 < \beta \le m_\beta. \end{gathered} \tag{3.171}$$

Nach Satz 3.5.5 ist die Lösung gegeben durch

$$u(x) = g(x) + \int_0^x Q(x-t)g(t)\,dt, \tag{3.172}$$

wobei

$$\begin{aligned} g(x) = J^\beta f(x) &+ \sum_{k=0}^{m_\beta-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &+ a\sum_{k=0}^{m_\alpha-1} \frac{u^{(k)}(0)}{\Gamma(\beta-\alpha+k+1)}x^{\beta-\alpha+k} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Q(x) = &-ax^{\beta-\alpha-1}E_{(\beta-\alpha,\beta)\beta-\alpha}(-ax^{\beta-\alpha}, -bx^\beta) \\ &- bx^{\beta-1}E_{(\beta-\alpha,\beta)\beta}(-ax^{\beta-\alpha}, -bx^\beta). \end{aligned}$$

Nach (3.86) ist

$$\begin{aligned} E_{(\mu_1,\mu_2)\mu_2}(z_1,z_2) &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} \frac{z_1^i z_2^j}{\Gamma(\mu_2+\mu_1 i+\mu_2 j)} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!j!} \frac{z_1^{k-j} z_2^j}{\Gamma(\mu_2+\mu_1(k-j)+\mu_2 j)} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{z_1^{k-j} z_2^j}{\Gamma(\mu_2(j+1)+\mu_1(k-j))} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E_{(\mu_1,\mu_2)\mu_1}(z_1,z_2) &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} \frac{z_1^i z_2^j}{\Gamma(\mu_1+\mu_1 i+\mu_2 j)} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!j!} \frac{z_1^{k-j} z_2^j}{\Gamma(\mu_1+\mu_1(k-j)+\mu_2 j)} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{z_1^{k-j} z_2^j}{\Gamma(\mu_2 j+\mu_1(k-j+1))}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
Q(x) = &-ax^{\beta-\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^k a^{k-j}b^j}{\Gamma(\alpha j+(\beta-\alpha)(k+1))}x^{(\beta-\alpha)(k-j)+\beta j}\\
&-bx^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^k a^{k-j}b^j}{\Gamma(\alpha j+(\beta-\alpha)k+\beta)}x^{(\beta-\alpha)(k-j)+\beta j}\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^{k+1} a^{k-j+1}b^j}{\Gamma(\alpha j+(\beta-\alpha)(k+1))}x^{(\beta-\alpha)(k+1)+\alpha j-1}\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^{k+1} a^{k-j}b^{j+1}}{\Gamma(\alpha j+(\beta-\alpha)k+\beta)}x^{(\beta-\alpha)k+\alpha j+\beta-1}\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{k-l}\frac{(-1)^{k+1} a^{l+1}b^{k-l}}{\Gamma(\beta(k+1)-\alpha(l+1))}x^{\beta(k+1)-\alpha(l+1)-1} \qquad \underline{\text{Subst:}}\ l=k-j\\
+&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{k-l}\frac{(-1)^{k+1} a^{j}b^{k-l+1}}{\Gamma(\beta(k+1)-\alpha l)}x^{\beta(k+1)-\alpha l-1}\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k}{j-1}\frac{(-1)^{k+1} a^{j}b^{k-j+1}}{\Gamma(\beta(k+1)-\alpha j)}x^{\beta(k+1)-\alpha j-1} \qquad \underline{\text{Subst:}}\ j=l+1\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\frac{(-1)^{k+1} a^{j}b^{k-l+1}}{\Gamma(\beta(k+1)-\alpha l)}x^{\beta(k+1)-\alpha l-1}\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1} a^{k+1}}{\Gamma(\beta(k+1)-\alpha(k+1))}x^{\beta(k+1)-\alpha(k+1)-1}\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1} b^{k+1}}{\Gamma(\beta(k+1))}x^{\beta(k+1)-1}\\
&+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\left[\binom{k}{j-1}+\binom{k}{j}\right]\frac{(-1)^{k+1} a^{j}b^{k-j+1}}{\Gamma(\beta(k+1)-\alpha j)}x^{\beta(k+1)-\alpha j-1}\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}\frac{(-1)^{k+1} a^{j}b^{k-j+1}}{\Gamma(\beta(k+1)-\alpha j)}x^{\beta(k+1)-\alpha j-1}\\
=&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^{k} a^{j}b^{k-j}}{\Gamma(\beta k-\alpha j)}x^{\beta k-\alpha j-1}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_0^x Q(x-t)t^\lambda\, dt = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{(-1)^k a^j b^{k-j}\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\beta k-\alpha j+\lambda+1)}x^{\beta k-\alpha j+\lambda}$$

und

$$\int_0^x Q(x-t)J^{m_\beta}f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^k a^j b^{k-j} J^{\beta(k+1)-\alpha j}f(x).$$

Der Einsatz in (3.172) ergibt

Korollar 3.5.1.
Die eindeutige Lösung der gebrochenen Differentialgleichung (3.171) *mit gegebenen Anfangswerten* $u^{(i)}(0)=c_i$ $(i=0,\ldots,m_\beta-1)$ *lautet*

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^k a^j b^{k-j} J^{\beta(k+1)-\alpha j}f(x)\\ &+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{m_\beta-1}\binom{k}{j}\frac{(-1)^k a^j b^{k-j}}{\Gamma(\beta k-\alpha j+i+1)}x^{\beta k-\alpha j+i}c_i\\ &+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{m_\alpha-1}\binom{k}{j}\frac{(-1)^k a^{j+1} b^{k-j}}{\Gamma(\beta(k+1)-\alpha(j+1)+i+1)}x^{\beta(k+1)-\alpha(j+1)+i}c_i. \end{aligned} \tag{3.173}$$

Korollar 3.5.2.
Die eindeutige Lösung der gebrochenen Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}u(x)+aD_*^\alpha u(x)+u(x)=f(x),\quad u(0^+)=c_0,\quad 0<\alpha<1 \tag{3.174}$$

lautet

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^k a^j J^{k+1-\alpha j}f(x)\\ &+c_0\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^k\binom{k}{j}a^j\frac{x^{k+1-\alpha j}}{\Gamma(k+2-\alpha j)}\right]. \end{aligned} \tag{3.175}$$

Korollar 3.5.3.
Die eindeutige Lösung der gebrochenen Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + aD_*^{\alpha}u(x) + u(x) = f(x), \quad u(0^+) = c_0, \quad u'(0) = c_1 \quad 1 < \alpha < 2 \tag{3.176}$$

lautet

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^k a^j J^{2(k+1)-\alpha j} f(x) \\ &+ c_0\left[1 - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^k\binom{k}{j}a^j\frac{x^{2(k+1)-\alpha j}}{\Gamma(2k+3-\alpha j)}\right] \\ &+ c_1\left[x - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^k\binom{k}{j}a^j\frac{x^{2k-\alpha j+3}}{\Gamma(2k-\alpha j+4)}\right]. \end{aligned} \tag{3.177}$$

Wir untersuchen jetzt die Gleichung

$$\begin{aligned} &D_*^{\alpha}u(x) + bD_*^{\beta}u(x) + cD_*^{\gamma}u(x) + du(x) = f(x), \qquad \alpha > \beta > \gamma, \\ &m_\alpha - 1 < \alpha \le m_\alpha, \quad m_\beta - 1 < \beta \le m_\beta, \quad m_\gamma - 1 < \gamma \le m_\gamma. \end{aligned}$$

Nach Satz 3.5.5 ist die Lösung gegeben durch

$$u(x) = g(x) + \int_0^x Q(x-t)g(t)\,dt,$$

wobei

$$\begin{aligned} g(x) &= J^{\alpha}f(x) + \sum_{j=0}^{m_\alpha-1}\frac{u^{(j)}(0)}{j!}x^j + b\sum_{j=0}^{m_\beta-1}\frac{u^{(j)}(0)}{\Gamma(\alpha-\beta+j+1)}x^{\alpha-\beta+j} \\ &+ c\sum_{j=0}^{m_\gamma-1}\frac{u^{(j)}(0)}{\Gamma(\alpha-\gamma+j+1)}x^{\alpha-\gamma+j} \end{aligned} \tag{3.178}$$

und

$$\begin{aligned} Q(x) &= -bx^{\alpha-\beta-1}E_{(\alpha-\beta,\alpha-\gamma,\alpha)\alpha-\beta}(-bx^{\alpha-\beta}, -cx^{\alpha-\gamma}, -dx^{\alpha}) \\ &- cx^{\alpha-\gamma-1}E_{(\alpha-\beta,\alpha-\gamma,\alpha)\alpha-\gamma}(-bx^{\alpha-\beta}, -cx^{\alpha-\gamma}, -dx^{\alpha}) \\ &- dx^{\alpha-1}E_{(\alpha-\beta,\alpha-\gamma,\alpha)\alpha}(-bx^{\alpha-\beta}, -cx^{\alpha-\gamma}, -dx^{\alpha}). \end{aligned}$$

Wir wollen die Gestalt von $Q(x)$ vereinfachen. Nach (3.86) ist

$$\begin{aligned} E_{(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\mu_1}(z_1,z_2,z_3) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l_1+l_2+l_3=k}\frac{k!}{l_1!l_2!l_3!}\frac{z_1^{l_1}z_2^{l_2}z_3^{l_3}}{\Gamma(\mu_1(1+l_1)+\mu_2 l_2+\mu_3 l_3)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{k}\sum_{l_2=0}^{k-l_1}\frac{k!}{l_1!l_2!(k-l_1-l_2)!} \\ &\quad\times\frac{z_1^{l_1}z_2^{l_2}z_3^{k-l_1-l_2}}{\Gamma(\mu_1(1+l_1)+\mu_2 l_2+\mu_3(k-l_1-l_2))}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\mu_2}(z_1,z_2,z_3) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{k}\sum_{l_2=0}^{k-l_1}\frac{k!}{l_1!l_2!(k-l_1-l_2)!} \\ &\quad\times\frac{z_1^{l_1}z_2^{l_2}z_3^{k-l_1-l_2}}{\Gamma(\mu_1 l_1+\mu_2(l_2+1)+\mu_3(k-l_1-l_2))} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E_{(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\mu_3}(z_1,z_2,z_3) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l_1=0}^{k}\sum_{l_2=0}^{k-l_1}\frac{k!}{l_1!l_2!(k-l_1-l_2)!} \\ &\quad\times\frac{z_1^{l_1}z_2^{l_2}z_3^{k-l_1-l_2}}{\Gamma(\mu_1 l_1+\mu_2 l_2+\mu_3(k-l_1-l_2+1))}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} Q(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\frac{k!}{i!j!(k-i-j)!}(-1)^{k+1}b^{i+1}c^j d^{k-i-j}\frac{x^{\alpha(k+1)-\beta(i+1)-\gamma j-1}}{\Gamma(\alpha(k+1)-\beta(i+1)-\gamma j)} \\ &\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\frac{k!}{i!j!(k-i-j)!}(-1)^{k+1}b^i c^{j+1} d^{k-i-j}\frac{x^{\alpha(k+1)-\beta i-\gamma(j+1)-1}}{\Gamma(\alpha(k+1)-\beta i-\gamma(j+1))} \\ &\quad+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\frac{k!}{i!j!(k-i-j)!}(-1)^{k+1}b^i c^j d^{k-i-j+1}\frac{x^{\alpha(k+1)-\beta i-\gamma j-1}}{\Gamma(\alpha(k+1)-\beta i-\gamma j)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-i}\frac{k!}{i!j!(k-i-j)!}(-1)^{k}b^i c^j d^{k-i-j}\frac{x^{\alpha k-\beta i-\gamma j-1}}{\Gamma(\alpha k-\beta i-\gamma j)}. \end{aligned}$$

Korollar 3.5.4.
Die eindeutige Lösung der gebrochenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} D_*^{\alpha} u(x) + b D_*^{\beta} u(x) + c D_*^{\gamma} u(x) + d u(x) = f(x), \qquad \alpha > \beta > \gamma, \\ m_\alpha - 1 < \alpha \le m_\alpha, \quad m_\beta - 1 < \beta \le m_\beta, \quad m_\gamma - 1 < \gamma \le m_\gamma, \end{aligned} \tag{3.179}$$

mit gegebenen Anfangswerten $u^{(j)}(0) = u_j$ $(j = 0, \dots, m_\alpha - 1)$ *lautet*

$$\begin{aligned} u(x) = {} & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \frac{k!}{i!j!(k-i-j)!} (-1)^k b^i c^j d^{k-i-j} J^{\alpha(k+1)-\beta i-\gamma j} f(x) \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{l=0}^{m_\alpha-1} \frac{k!}{i!j!(k-i-j)!} (-1)^k b^i c^j d^{k-i-j} \\ & \times \frac{x^{\alpha k-\beta i-\gamma j+l}}{\Gamma(\alpha k-\beta i-\gamma j+l+1)} u_l \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{l=0}^{m_\beta-1} \frac{k!}{i!j!(k-i-j)!} (-1)^k b^{i+1} c^j d^{k-i-j} \\ & \frac{x^{\alpha(k+1)-\beta(i+1)-\gamma j+l}}{\Gamma(\alpha(k+1)-\beta(i+1)-\gamma j+l+1)} u_l \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{l=0}^{m_\gamma-1} \frac{k!}{i!j!(k-i-j)!} (-1)^k b^i c^{j+1} d^{k-i-j} \\ & \times \frac{x^{\alpha(k+1)-\beta i-\gamma(j+1)+l}}{\Gamma(\alpha(k+1)-\beta i-\gamma(j+1)+l+1)} u_l. \end{aligned} \tag{3.180}$$

Wir betrachten jetzt die allgemeine Gleichung

$$D_*^{\mu} u(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, D_*^{\mu_i} u(x) = f(x). \tag{3.181}$$

Satz 3.5.5.
Seien

$$\lambda_i \in \mathbb{C} \ (i = 1, \dots, m), \quad \nu := \lceil \mu \rceil, \quad \sigma := min\{\mu, 1\}, \quad f \in C_{-\sigma} \tag{3.182}$$

und

$$\mu > \mu_i \geq 0, \quad \nu_i := \lceil \mu_i \rceil \quad \textit{für alle} \quad i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{3.183}$$

Dann ist für gegebene $c_q \in \mathbb{C}$ $\quad (q = 0, \ldots, \nu - 1)$ die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} D_*^{\mu} u(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, D_*^{\mu_i} u(x) &= f(x), \\ u^{(q)}(0^+) = c_q, \quad q \in \{0, \ldots, \nu - 1\} \end{aligned} \tag{3.184}$$

gegeben durch

$$u(x) = g(x) + \int_0^x Q(x-t) g(t) \, dt,$$

wobei

$$Q(x) := -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x^{\mu-\mu_j-1} E_{(\mu-\mu_1,\ldots,\mu-\mu_m),\mu-\mu_j}(-\lambda_1 x^{\mu-\mu_1}, \ldots, -\lambda_m x^{\mu-\mu_m})$$

und

$$g(x) := J^{\mu} f(x) + \sum_{q=0}^{\nu-1} \frac{x^q}{q!} c_q + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{q=0}^{\nu_i - 1} \frac{x^{\mu-\mu_i+q}}{\Gamma(\mu-\mu_i+q+1)} c_q \right). \tag{3.185}$$

Beweis. Der Beweis verläuft ähnlich wie der von Satz 3.4.5. Wir wenden den Operator J^{μ} auf beiden Seiten von (3.181) an und erhalten

$$J^{\mu} D_*^{\mu} u(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{\mu} D_*^{\mu_i} u(x) = J^{\mu} f(x).$$

Dies ist aber wegen der Halbgruppeneigenschaft (3.14) des Riemann-Liouville-Integraloperators äquivalent zu

$$J^{\mu} D_*^{\mu} u(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{\mu-\mu_i} J^{\nu_i} D^{\nu_i} u(x) = J^{\mu} f(x).$$

Aus (3.48) folgt

$$u(x) - \sum_{q=0}^{\nu-1} \frac{x^q}{q!} c_q + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{\mu-\mu_i} \left(u(x) - \sum_{q=0}^{\nu_i-1} \frac{x^q}{q!} c_q \right) = J^{\mu} f(x)$$

und aus (3.20)

$$u(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{\mu-\mu_i} u(x) = J^{\mu} f(x) + \sum_{q=0}^{\nu-1} \frac{x^q}{q!} c_q + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{q=0}^{\nu_i - 1} \frac{x^{\mu-\mu_i+q}}{\Gamma(\mu-\mu_i+q+1)} c_q \right). \tag{3.186}$$

Aus Satz 3.3.7 folgt die gesuchte Lösung. □

Aus (3.147) erhalten wir die explizitere Darstellung von $Q(x)$:

$$\begin{aligned} Q(x) &:= -\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x^{\mu-\mu_j-1} E_{(\mu-\mu_1,\dots,\mu-\mu_m),\mu-\mu_j}(-\lambda_1 x^{\mu-\mu_1},\dots,-\lambda_m x^{\mu-\mu_m}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_m=k \\ l_1\geq 0,\dots,l_m\geq 0}} (k; l_1,\dots,l_m)(-1)^{k+1} \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{m} \frac{\prod_{s=1}^{m} \lambda_s^{l_s+\delta_{sj}}}{\Gamma\left(\sum_{s=1}^{m} (\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj})\right)} x^{\sum_{s=1}^{m}(\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj})-1}. \end{aligned}$$

Korollar 3.5.6.
Seien die Voraussetzungen von Satz 3.5.5 gegeben.
Dann ist für gegebene $c_j \in \mathbb{C}$ $(j = 0,\dots,\nu-1)$ die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} D_*^{\mu} u(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, D_*^{\mu_i} u(x) &= f(x), \\ u^{(j)}(0^+) = c_j, \quad j &\in \{0,\dots,\nu-1\} \end{aligned}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned}
u(x) = {} & J^{\mu} f(x) + \sum_{q=0}^{\nu-1} \frac{x^q}{q!} c_q + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{q=0}^{\nu_i - 1} \frac{x^{\mu-\mu_i+q}}{\Gamma(\mu-\mu_i+q+1)} c_q \right) \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_m=k \\ l_1\geq 0,\dots,l_m\geq 0}} (k; l_1, \dots, l_m)(-1)^{k+1} \\
& \times \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{s=1}^{m} \lambda_s^{l_s+\delta_{sj}} \right) J^{\sum_{s=1}^{m}(\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj})+\mu} f(x) \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_m=k \\ l_1\geq 0,\dots,l_m\geq 0}} (k; l_1, \dots, l_m)(-1)^{k+1} \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{s=1}^{m} \lambda_s^{l_s+\delta_{sj}} \right) \qquad (3.187) \\
& \times \sum_{q=0}^{\nu-1} \frac{x^{\sum_{s=1}^{m}(\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj})+q}}{\Gamma\left(\sum_{s=1}^{m}(\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj})+q+1\right)} c_q \\
& + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_m=k \\ l_1\geq 0,\dots,l_m\geq 0}} (k; l_1, \dots, l_m)(-1)^{k+1} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \prod_{s=1}^{m} \lambda_s^{l_s+\delta_{sj}+\delta_{si}} \\
& \times \sum_{q=0}^{\nu_i-1} \frac{x^{\sum_{s=1}^{m}(\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj}+\delta_{si})+q}}{\Gamma\left(\sum_{s=1}^{m}(\mu-\mu_s)(l_s+\delta_{sj}+\delta_{si})+q+1\right)} c_q .
\end{aligned}$$

Wir betrachten den Spezialfall von (3.181), wenn $\mu = m\alpha$ und $\mu_i = (i-1)\alpha$ $(i = 1, \dots, m)$.

Korollar 3.5.7.
Seien

$$\lambda_i \in \mathbb{C}\ (i = 1, \dots, m), \quad \nu := \lceil m\alpha \rceil, \quad \sigma := min\{m\alpha, 1\}, \quad f \in C_{-\sigma} \qquad (3.188)$$

und

$$\nu_i := \lceil (i-1)\alpha \rceil \quad \textit{für alle} \quad i \in \{1, \dots, m\}. \qquad (3.189)$$

Seien weiterhin die Konstanten d_{lj} und w_l derart gewählt, daß gilt:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i S^{i-1}}{S^m + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i S^{i-1}} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_l} \frac{d_{lj}}{(S-w_l)^j}, \quad n_1 + \dots + n_p = m.$$

Dann ist für gegebene $c_q \in \mathbb{C}$ $(q = 0, \ldots, \nu - 1)$ *im Raum* C_{-1} *die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe*

$$\begin{aligned} (D_*^{m\alpha}u)(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (D_*^{(i-1)\alpha}u)(x) &= f(x), \\ u^{(q)}(0^+) = c_q, \quad q &\in \{0, \ldots, \nu - 1\} \end{aligned} \tag{3.190}$$

gegeben durch

$$u(x) = g(x) - \int_0^x R(x-t)g(t)\,dt, \tag{3.191}$$

wobei

$$R(x) = \sum_{l=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_l} d_{lj} x^{\alpha j - 1} E^j_{\alpha,\alpha j}(w_l x^\alpha) \tag{3.192}$$

und

$$g(x) := J^\mu f(x) + \sum_{q=0}^{\nu-1} \frac{x^q}{q!} c_q + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(\sum_{q=0}^{\nu_i - 1} \frac{x^{(m-i+1)\alpha+q}}{\Gamma((m-i+1)\alpha + q + 1)} c_q \right). \tag{3.193}$$

dabei ist die Funktion $E^j_{\alpha,\alpha j}(w_l x^\alpha)$ *wie in* (3.83) *definiert.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus (3.186) mit $\mu = m\alpha$, $\mu_i = (i-1)\alpha$ und Korollar 3.3.5. □