Kapitel 4

Das numerische Verfahren

4.1 Gebrochene Faltungsquadraturen

Wie schon in der Einleitung angedeutet, wurden die gebrochenen Faltungsquadraturverfahren von Ch. Lubich [Lub83a, Lub85, Lub86, Lub87, Lub88, HLS88] entwickelt und basieren auf den linearen Mehrschrittverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine andere, auf der Theorie der Peano-Kerne beruhrende Methode zur Bestimmung des Fehlers numerischer Faltungsquadraturen wird von K. Diethelm in [Die97b] dargestellt. Für unsere Zwecke sind aber die Methode von Lubich und seine Notation zweckmäßiger. Zur Approximation des Integrals $\int_0^x (x-s)^{\alpha-1} s^\beta \, ds, \ \beta > 0$ wählt man eine Schrittweite $h > 0$ und das äquidistante Gitter

$$G_h(X) := \{x_n = nh | n = 0, 1, \dots, N(h) \qquad mit \qquad N(h) = [X/h]\}.$$

Definition 4.1.1.
Sei eine Abbildung $u \colon [0, X] \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Eine Approximation an das gebrochene Integral der Ordnung $\alpha > 0$

$$(J^\alpha u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-s)^\alpha u(s) \, ds, \qquad x \in [0, X]$$

in der Form

$$(J_h^\alpha u)(x_n) = h^\alpha \sum_{i=0}^{n} w_{n-i}(\alpha) u(x_i) + h^\alpha \sum_{i=0}^{s} w_{ni}(\alpha) u(x_i), \qquad x_n \in G_h(X) \tag{4.1}$$

mit festem $s \in \mathbb{N}_0$ und von der Schrittweite h unabhängigen Faltungsgewichten $w_n(\alpha)$ $(n \geq 0)$ sowie Startgewichten $w_{ni}(\alpha)$ $(n \geq 0,\ i = 0, \ldots, s)$ heißt gebrochene Faltungsquadratur (fractional convolution quadrature). Der Ausdruck

$$(\Omega_h^\alpha u)(x_n) := h^\alpha \sum_{i=0}^{n} w_{n-i}(\alpha) u(x_i), \quad x_n \in G_h(X) \tag{4.2}$$

heißt Faltungsteil und der Ausdruck

$$E_h^\alpha := \Omega_h^\alpha - J^\alpha, \tag{4.3}$$

Faltungsquadraturfehler.
Der Faltungsteil wird durch

$$(\Omega_h^\alpha u)(x) := h^\alpha \sum_{0 \leq ih \leq x} w_i(\alpha) u(x - ih),\ x \in [0, X] \tag{4.4}$$

auf $x \notin G_h(X)$ fortgesetzt.

Diese Definitionen gehen auf Lubich [Lub86] zurück.
Quadraturformeln zur Approximation gebrochener Integrale werden so konstruiert, daß man sie noch auf die Testfunktionen

$$\varphi_\beta(x) := x^{\beta-1},\ \beta > 0 \tag{4.5}$$

anwenden kann. Deshalb wird vereinbart: Wenn die zu integrierende Funktion u an der Stelle $x = 0$ divergiert oder nicht definiert ist, dieser Wert aber in die Formel eingeht, setzt man

$$u(0) = 0.$$

Bezeichnung: Sei eine Folge $d = (d_n)_0^\infty$. Mit $d(z)$ wird die von den Koeffizienten d_i erzeugte Potenzreihe

$$d(z) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^i$$

bezeichnet.

Stabilität, Konsistenz und Konvergenz einer Faltungsquadratur sind Eigenschaften ihres Faltungsteils.

Definition 4.1.2.
Der Faltungsteil Ω_h^α *einer Faltungsquadratur* (4.4) *heißt*

a) *stabil, falls für die Faltungsgewichte gilt:*

$$w_n(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}) \qquad \textit{für} \quad n \to \infty; \tag{4.6}$$

b) *konsistent von der Ordnung* $p \in \mathbb{N}$*, falls für die von den Faltungsgewichten erzeugte Potenzreihe*

$$w(z;\alpha) := \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha) z^n$$

gilt:

$$h^\alpha w(e^{-h};\alpha) = 1 + \mathcal{O}(h^\alpha) \qquad \textit{für} \quad h \to 0; \tag{4.7}$$

c) *konvergent von der Ordnung* $p \in \mathbb{N}$*, falls gilt:*

$$(E_h^\alpha x^{\beta-1})(1) = \mathcal{O}(h^\beta) + \mathcal{O}(h^p), \quad h \to 0, \textit{ für alle } \beta > 0. \tag{4.8}$$

In der Definition der Konvergenzordnung ist die Normierung auf die Stelle $x = 1$ durch die Beziehung

$$(E_h^\alpha t^{\beta-1})(x) = x^{\alpha+\beta-1}(E_{h/x}^\alpha t^{\beta-1})(1), \qquad x > 0 \tag{4.9}$$

gerechtfertigt.

Lemma 4.1.3.
Sei $\alpha > 0$ *und seien die Funktion* u *stetig sowie die Funktion* v *lokal integrabel im Intervall* $[0,\infty)$*. Dann gilt:*

$$E_h^\alpha(u * v) = (E_h^\alpha u) * v. \tag{4.10}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\left(\Omega_h^\alpha(u*v)\right)(x_n) &= h^\alpha \sum_{j=0}^{n} w_j (u*v)(x_n - x_j) \\
&= h^\alpha \sum_{j=0}^{n} w_j \int_0^{x_n-x_j} u(s)v(x_n-x_j-s)\,ds \\
&= h^\alpha \sum_{j=0}^{n-1} w_j \int_0^{x_n-x_j} u(s)v(x_n-x_j-s)\,ds \quad \text{da} \quad \lim_{x\to 0}(u*v)(x)=0.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
\left(\Omega_h^\alpha u * v\right)(x_n) &= \int_0^{x_n} (\Omega_h^\alpha u)(t) v(x_n - t)\,dt \\
&= h^\alpha \int_0^{x_n} \sum_{0\le x_j \le t} w_j u(t-x_j) v(x_n-t)\,dt \\
&= h^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sum_{0\le x_j\le t} w_j u(t-x_j)v(x_n-t)\,dt \\
&= h^\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} w_j \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(t-x_j)v(x_n-t)\,dt \\
&= h^\alpha \sum_{j=0}^{n-1} w_j \sum_{k=j}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(t-x_j)v(x_n-t)\,dt \\
&= h^\alpha \sum_{j=0}^{n-1} w_j \int_{x_j}^{x_n} u(t-x_j)v(x_n-t)\,dt \\
&= h^\alpha \sum_{j=0}^{n-1} w_j \int_0^{x_n-x_j} u(s)v(x_n-x_j-s)\,ds \\
&= \left(\Omega_h^\alpha(u*v)\right)(x_n) \qquad \text{wegen (4.11)}.
\end{aligned}$$

Aus der Darstellung (3.12) des Riemann-Liouville-Integrationsoperators als Faltung und aus der Assoziativität der Faltung folgt

$$J^\alpha(u*v) = h_\alpha * (u*v) = (h_\alpha * u) * v = (J^\alpha u) * v$$

und daraus

$$\begin{aligned} E_h^\alpha(u * v) &= \Omega_h^\alpha(u * v) - J^\alpha(u * v) \\ &= (\Omega_h^\alpha u) * v - (J^\alpha u) * v \\ &= (E_h^\alpha u) * v. \end{aligned}$$

□

Satz 4.1.4.
Sei $\alpha > 0$.
Ist $(E_h^\alpha x^{i-1}) = \mathcal{O}(h^i) + \mathcal{O}(h^p)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$, dann ist der Faltungsteil Ω_h^α konsistent von der Ordnung p.
Insbesondere folgt aus der Konvergenz von der Ordnung p die Konsistenz von der Ordnung p.

Beweis. Es sei $u_x(t) := e^{t-x}$ eine auf dem Intervall $[0, x]$ definierte Funktion und

$$e_h(x) := \left(E_h^\alpha u_x(t)\right)(x).$$

Wir wollen zeigen, daß $h^\alpha w(e^{-h}; \alpha) = 1 + \mathcal{O}(h^p)$ gilt. Daher zeigen wir zuerst, daß $\lim_{x\to\infty} e_h(x) = h^\alpha w(e^{-h}) - 1$ und anschließend $\lim_{x\to\infty} e_h(x) = \mathcal{O}(h^p)$ gilt.

$$\begin{aligned} e_h(x) = (E_h^\alpha e^{t-x})(x) &= h^\alpha \sum_{0\le jh\le x} w_j e^{-jh} - (J^\alpha e^{t-x})(x) \\ &= h^\alpha \sum_{0\le jh\le x} w_j e^{-jh} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x s^{\alpha-1} e^{-s}\, ds. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} e_h(x) &= h^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} w_j e^{-jh} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s}\, ds \\ &= h^\alpha w(e^{-h}) - 1. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Wir zeigen jetzt, daß $\lim_{x\to\infty} e_h(x) = \mathcal{O}(h^p) gilt$. Aus $u_x^m(t) = u_x(t)$ und aus der Beziehung

$$v(t) = J^m D^m v(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{v^{(i)}(0)}{i!} t^i, \qquad m \in \mathbb{N}$$

folgt

$$\begin{aligned} e^{t-x} &= \left(J^p e^{\tau-x}\right)(t) + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{t^i}{i!} e^{-x} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} (\tau^{p-1} * e^{\tau-x})(t) + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{t^i}{i!} e^{-x} \end{aligned}$$

und somit

$$e_h(x) = (E_h^\alpha e^{t-x})(x) = e_h^1 + e_h^2,$$

wobei

$$e_h^1(x) := \frac{1}{(p-1)!} E_h^\alpha (t^{p-1} * e^{t-x})(x) \quad \text{und} \quad e_h^2(x) := e^{-x} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} (E_h^\alpha t^i)(x)$$

definiert sind.

Aus (4.10) folgt:

$$\begin{aligned} e_h^1(x) &= \frac{1}{(p-1)!} E_h^\alpha (t^{p-1} * e^{t-x})(x) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \left((E_h^\alpha t^{p-1}) * e^{t-x}\right)(x) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \int_0^x e^{-s} (E_h^\alpha t^{p-1})(s)\, ds. \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\lim_{x\to\infty} e_h^1(x) = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^\infty e^{-s} (E_h^\alpha t^{p-1})(s)\, ds.$$

Aus (4.9) und aus den Voraussetzungen folgt:

$$(E_h^\alpha t^{p-1})(s) = s^{\alpha+p-1} (E_{h/s}^\alpha t^{p-1})(1) = \mathcal{O}(s^{\alpha-1} h^p).$$

Somit gilt:

$$e_h^1(\infty) = \mathcal{O}(h^p), \qquad h \to 0. \tag{4.13}$$

Da nach (4.9) $(E_h^\alpha t^i)(x)$ nur polynomial wächst, wenn x gegen ∞ tendiert, gilt:

$$e_h^2(\infty) = 0,$$

und daraus folgt:

$$e_h(\infty) = e_h^1(\infty) = \mathcal{O}(h^p).$$

Aus dieser letzten Gleichung und (4.12) erhalten wir die Konsistenz der Ordnung p

$$h^\alpha w(e^{-h};\alpha) = 1 + \mathcal{O}(h^p).$$

$\square$

Wir werden zeigen, daß Stabilität und Konsistenz äquivalent zur Konvergenz sind, wenn man annimmt, daß die Faltungsgewichte aus der Potenzreihenentwicklung

$$w(z;\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(\alpha) z^i$$

einer Funktion

$$w(z;\alpha) := (r_1(z))^\alpha \, r_2(z) \tag{4.14}$$

mit rationalen Funktionen r_1 und r_2 hervorgehen.

Wir wollen jetzt eine Charakterisierung der Konsistenz angeben . Die Potenzreihe (4.14) kann auf die Form

$$w(z;\alpha) = (1-z)^{-\nu} \tilde{w}(z;\alpha)$$

zurückgeführt werden, wobei ν so gewählt wird, daß $\tilde{w}(z;\alpha)$ in 1 holomorph ist und $\tilde{w}(1;\alpha) \neq 0$.
Unmittelbar aus der Konsistenz folgt $\nu = \alpha$ und $\tilde{w}(1;\alpha) = 1$.
Die Reihenentwicklung von $w(z;\alpha)$ in 1 ergibt:

$$w(z;\alpha) = (1-z)^{-\alpha} \sum_{i=0}^{N-1} c_i(\alpha)(1-z)^i + (1-z)^N r(z;\alpha), \tag{4.15}$$

wobei $r(z;\alpha) := (1-z)^{-\alpha} \tilde{r}(z;\alpha)$ gilt und $\tilde{r}(z;\alpha)$ eine holomorphe Funktion in 1 ist.
Eine Charakterisierung der Konsistenz durch die Koeffizienten $c_j(\alpha)$ wird gegeben durch:

Lemma 4.1.5.
Seien die $\gamma_i(\alpha)$ so, daß gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i(\alpha)(1-z)^i = (-\ln z/(1-z))^{-\alpha} .$$

Dann ist der Faltungsteil Ω_h^α, mit den von der Potenzreihe (4.15) *erzeugten Faltungsgewichten, konsistent von der Ordnung p genau dann, wenn die Koeffizienten $c_i(\alpha)$ der Beziehung*

$$c_i(\alpha) = \gamma_i(\alpha) \qquad \textit{für} \quad i = 0, 1, \cdots, p-1$$

genügen.

Beweis.

$$h^\alpha w(e^{-h}; \alpha) = \left(\frac{h}{1-e^{-h}} \right)^\alpha \tilde{w}(e^{-h}; \alpha).$$

Dieser Ausdruck ist genau dann $1 + \mathcal{O}(h^p)$, wenn gilt:

$$\tilde{w}(e^{-h}; \alpha) = \left(\frac{h}{1-e^{-h}} \right)^{-\alpha} + \mathcal{O}(h^p).$$

Dies ist aber äquivalent zu:

$$\tilde{w}(z; \alpha) = \left(\frac{-\ln z}{1-z} \right)^{-\alpha} + \mathcal{O}\left((1-z)^p\right).$$

□

Die Stabilität des Faltungsteils Ω_h^α hängt wesentlich von $r(z;\alpha)$ in (4.15) ab.

Lemma 4.1.6.
Der Faltungsteil Ω_h^α mit den von der Potenzreihe (4.15) *erzeugten Faltungsgewichten ist genau dann stabil, wenn die Koeffizienten $r_n(\alpha)$ von $r(z;\alpha)$ der Beziehung*

$$r_n(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}) \tag{4.16}$$

genügen.

Beweis. Wir machen hier Gebrauch vom asymptotischen Verhalten des Quotienten zweier Gamma-Funktionen

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} = n^{a-b} \sum_{j=0}^{N} \frac{d_j}{n^j} + n^{a-b}\mathcal{O}(n^{-N-1}), \qquad n \to \infty,$$

$$d_0 = 1, \quad d_j = (-1)^j \frac{\Gamma(b-a+j)}{\Gamma(b-a)j!} B_j^{a-b+1}(a),$$

wobei

$$B_j^a(x) := \frac{d^j}{dt^j} \left[\left(\frac{t}{e^t - 1} \right)^a e^{xt} \right]_{t=0}$$

verallgemeinerte Bernoulli-Polynome sind. (Vgl. [Luk69], [Gel67]).
Daraus und aus der Beziehung

$$(-1)^n \binom{-\alpha}{n} = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)n!}$$

folgt

$$(-1)^n \binom{-\alpha}{n} = \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left[1 + d_1 n^{-1} + d_2 n^{-2} + \cdots + d_{N-1} n^{-N+1} + \mathcal{O}(n^{-N})\right],$$
$$n \to \infty \quad d_j = (-1)^j \frac{\Gamma(1-\alpha+j)}{\Gamma(1-\alpha)j!} B_j^\alpha(\alpha), \quad j = 1, \ldots, N-1. \tag{4.17}$$

Sei $r_n(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1})$. Wir wollen zeigen, daß die Stabilität daraus folgt, d.h. $w_n(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1})$.
Aus (4.15) erhalten wir die folgende Gestalt der Faltungsgewichte:

$$w_n(\alpha) = \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^n \binom{-\alpha+j}{n} c_j + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-\alpha+N}{k} r_{n-k}.$$

Aus dieser Gestalt, aus der Annahme und aus (4.17) folgt $w_n(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1})$.

Sei nun $w_n(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1})$. Dann hat $w(z;\alpha)$ keine Nullstellen im Innern des Einheitskreises und kann in der Form

$$w(z;\alpha) = y(z;\alpha) \left((z-1)^{-\alpha} - \prod_{i=0}^{m} (z-z_i)^{-\alpha_i} \right) \tag{4.18}$$

dargestellt werden, wobei

$$|z_i| = 1 \quad y(z_i;\alpha) \neq 0, \quad \alpha_i > 0, \quad z_i \neq z_j,\ i,j = 1,\ldots,m$$

und $y(z;\alpha)$ holomorph in $|z| \leq 1$.
Eine Partialbruchzerlegung von $w(z;\alpha)$ (s. [Kat68]) ergibt:

$$w(z;\alpha) = (z-1)^{-\alpha}y(z;\alpha) + \sum_{i=0}^{m}(z-z_i)^{-\alpha_i}p_i(z-z_i;\alpha) + q(z;\alpha),$$

wobei $p_i(0;\alpha) \neq 0$, $(i = 1,\ldots,m)$ und $q(z;\alpha)$ analytisch im Innern des Einheitskreises und genügend differenzierbar auf dem Einheitskreis $|z| \leq 1$.
Aus (4.17) folgt:

$$w_n(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}) \quad \text{genau dann wenn} \quad \alpha_i \leq \alpha\ (i = 1,\ldots,m). \tag{4.19}$$

Ebenso kann $r(z;\alpha)$ in der Form

$$r(z;\alpha) = (z-1)^{-\alpha}\tilde{y}(z;\alpha) + \sum_{i=0}^{m}(z-z_i)^{-\alpha_i}\tilde{p}_i(z-z_i;\alpha) + \tilde{q}(z;\alpha),$$

dargestellt werden, wobei $\tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{q}$ dieselbe Eigenschaften wie y, p, q haben.
Daher gilt auch $r_n(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1})$. □

Satz 4.1.7.
Unter der Voraussetzung (4.14) *ist der Faltungsteil* Ω_h^α *einer Faltungsquadratur* (4.1) *stabil von der Ordnung* p*, wenn er konvergent von der Ordnung* p *ist.*

Beweis. Sei Ω_h^α konvergent, d.h. $(E_h^\alpha x^{\beta-1})(1) = \mathcal{O}(h^\beta) + \mathcal{O}(h^p)$, $\beta > 0$.
Nach Satz 4.1.4 folgt aus der Konvergenz des Faltungsteils die Konsistenz.
Daher ist $w(z;\alpha)$ in der Form (4.15) darstellbar.
Wir wollen zeigen, daß Ω_h^α stabil ist und zeigen deshalb , daß $r_n(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1})$ in (4.15) gilt, da nach Lemma 4.1.5 diese Beziehung zur Stabilität äquivalent ist.
Der Einsatz $N = 1$ in (4.15) ergibt:

$$w(z;\alpha) = (1-z)^{-\alpha} + (1-z)r(z;\alpha).$$

Daher gilt:

$$\frac{w(z;\alpha)}{1-z} = (1-z)^{-\alpha-1} + r(z;\alpha).$$

Somit ist $(-1)^n\binom{-\alpha-1}{n} + r_n(\alpha)$ der n-Koeffizient von $\frac{w(z;\alpha)}{1-z}$.
Andernseits gilt:

$$\begin{aligned}\frac{w(z;\alpha)}{1-z} &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i(\alpha)z^i\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} w_{i-k}(\alpha)z^i\end{aligned}$$

Dadurch ehalten wir:

$$\sum_{k=0}^{n} w_{n-k}(\alpha) = (-1)^n\binom{-\alpha-1}{n} + r_n(\alpha).$$

Wir betrachten jetzt den Faltungsquadraturfehler

$$\begin{aligned}(E_h^\alpha 1)(1) &= h^\alpha \sum_{k=0}^{n} w_{n-k}(\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (nh=1)\\ &= h^\alpha\left[(-1)^n\binom{-\alpha-1}{n}\right] + h^\alpha r_n(\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned}$$

Aus (4.17) folgt:

$$\begin{aligned}(E_h^\alpha 1)(1) &= h^\alpha\left[\frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \mathcal{O}(n^{\alpha-1})\right] + h^\alpha r_n(\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\\ &= \mathcal{O}(h) + h^\alpha r_n(\alpha).\end{aligned}$$

Daher ist

$$(E_h^\alpha 1)(1) = \mathcal{O}(h) \quad \text{genau dann, wenn} \quad r_n(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}).$$

□

Wir geben jetzt das asymptotische Verhalten des Faltungsquadraturfehlers an.

Satz 4.1.8.
Sei $\alpha, \beta > 0$. Sei weiterhin der Faltungsteil Ω_h^α mit den von der Potenzreihe (4.15) erzeugten Faltungsgewichten stabil. Dann gilt:

$$(E_h^\alpha t^{\beta-1})(1) = \sum_{i=0}^{N-1} e_i(\alpha,\beta,c_0,\dots,c_i)h^i + \mathcal{O}(h^N) + \mathcal{O}(h^\beta). \tag{4.20}$$

Beweis. Wir werden im Beweis Gebrauch von der Eigenschaft der Faltung zweier Folgen $u_n = \mathcal{O}(n^\mu)$ und $v_n = \mathcal{O}(n^\nu)$ mit $\nu < \min\{-1, \mu - 1\}$ machen:

$$\sum_{i=0}^{n} u_{n-i} v_i = \mathcal{O}(n^\mu). \tag{4.21}$$

Diese Eigenschaft erhält man aus

$$\left| \sum_{i=0}^{n} u_{n-i} v_i \right| \leq |u_n v_0| + |u_0 v_n| + K n^\mu \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^\mu i^\nu$$

und

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\mu \leq \begin{cases} 1 & \text{wenn } \mu \geq 0 \ , \\ (i+1)^{-\mu} & \text{wenn } \mu < 0 \ , \end{cases} \qquad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Sei nun $\beta > 0$. Nach der Definition des Faltungsquadraturfehlers gilt:

$$\left(E_h^\alpha t^{\beta-1}\right)(1) = h^{\alpha+\beta-1} \sum_{i=1}^{n} w_{n-i}(\alpha) i^{\beta-1} - (J^\alpha t^{\beta-1})(1) \qquad (hn = 1).$$

Wir untersuchen jetzt den Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} w_{n-i}(\alpha) i^{\beta-1}$ und definieren deshalb die Potenzreihe

$$b(z;\beta) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-1} z^n.$$

Aus (4.17) folgt

$$n^{\beta-1} = \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k \binom{-\beta+k}{n} + \mathcal{O}(n^{\beta-1-N}).$$

Somit gilt:

$$b(z;\beta) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k (1-z)^{-\beta+N-1} + s(z;\beta), \tag{4.22}$$

wobei die Koeffizienten $s_n(\beta)$ von $s(z;\beta)$ die Eigenschaft

$$s_n(\beta) = \mathcal{O}(n^{\beta-1-N}) \tag{4.23}$$

besitzen.
Sei nun

$$y(z;\alpha,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(\alpha,\beta) z^k := w(z;\alpha)\, b(z;\beta).$$

Dann ist $y_n(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} w_{n-i}(\alpha) i^{\beta-1}$.
Aus (4.15) und (4.22) erhalten wir:

$$\begin{aligned} y(z;\alpha,\beta) = {} & \left(\sum_{i=0}^{N-1} c_i(\alpha)(1-z)^{i-\alpha} + (1-z)^N r(z;\alpha) \right) \\ & \times \left(\sum_{k=0}^{N-1} b_k (1-z)^{-\beta+N-1} + s(z;\beta) \right) \\ = {} & \sum_{i=0}^{2N-2} \left(\sum_{k=0}^{i} b_{i-k} c_j \right) (1-z)^{-(\alpha+\beta)+i} + w(z;\alpha) s(z;\alpha) \\ & + [b(z;\beta) - s(z;\alpha)]\, (1-z)^N r(z;\alpha). \end{aligned}$$

Sei N so gewählt, daß $\beta - 1 - N < \min\{-1, \alpha - 2\}$ gilt.

$$\begin{aligned} w(z;\alpha)s(z;\alpha) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} w_i(\alpha) \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} s_j(\alpha) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} w_{i-j}(\alpha) s_j(\alpha) \right) z^i. \end{aligned}$$

Aus (4.21) folgt

$$\sum_{j=0}^{n} w_{i-j}(\alpha) s_j(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}).$$

$$\begin{aligned} & [b(z;\beta) - s(z;\alpha)]\, (1-z)^N r(z;\alpha) \\ & \qquad = \left[b_0 (1-z)^{-\beta+N} + \cdots + b_{N-1} (1-z)^{-\beta+2N-1} \right] r(z;\alpha). \end{aligned}$$

Aus der Stabilität folgt $r_n(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1})$ und aus (4.17), (4.21), (4.23), daß sich die Koeffizienten von

$$[b(z;\beta) - s(z;\alpha)]\, (1-z)^N r(z;\alpha)$$

wie $\mathcal{O}(n^{\alpha-1})$ verhalten.
Daher folgt aus (4.17):

$$\begin{aligned} y_n(\alpha,\beta) = \tilde{e}_0(\alpha,\beta,c_0)n^{\alpha+\beta-1} + e_1(\alpha,\beta,c_0,c_1)n^{(\alpha+\beta-1)-1} + \cdots \\ + e_N(\alpha,\beta,c_0,\ldots,c_N)n^{(\alpha+\beta-1)-N} + \mathcal{O}(n^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

Aus

$$\left(E_h^\alpha t^{\beta-1}\right)(1) = h^{\alpha+\beta-1} y_n(\alpha,\beta) - \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad (hn = 1)$$

folgt (4.20). □

Lemma 4.1.9.
Sei $\alpha > 0$ und $(E_h^\alpha t^{p-1})(1) = \mathcal{O}(h^p)$. Dann gilt:

$$(E_h^\alpha t^{\beta-1})(1) = \mathcal{O}(h^p) \qquad \textit{für alle} \quad \beta > p.$$

Beweis. Sei $\beta = p + \mu$ mit $\mu > 0$. Dann ist $t^{\beta-1}$ als Faltung

$$t^{\beta-1} = \frac{\Gamma(p+\mu)}{\Gamma(p)\Gamma(\mu)} t^{\beta-1} * t^{\mu-1}$$

darstellbar. (4.9) und die Annahme ergeben

$$\begin{aligned} (E_h^\alpha t^{p-1})(x) &= x^{\alpha+p-1}(E_{h/x}^\alpha t^{p-1})(1) \qquad \text{(wegen (4.9))} \\ &= x^{\alpha+p-1}\mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{x}\right)^p\right) \qquad \text{(wegen der Annahme)} \\ &= \mathcal{O}\left(x^{\alpha-1}h^p\right). \end{aligned}$$

Aus (4.10) folgt aber

$$E_h^\alpha(t^{\beta-1} * t^{\mu-1})(1) = (E_h^\alpha t^{\beta-1} * t^{\mu-1})(1) = \mathcal{O}(h^p).$$

Daher gilt

$$(E_h^\alpha t^{\beta-1})(1) = \mathcal{O}(h^p).$$

□

Satz 4.1.10.
Unter der Voraussetzung, daß der Faltungsteil Ω_h^α $(\alpha > 0)$ *stabil von der Ordnung* p *ist, existieren von der Potenzreihe* $w(z;\alpha)$ *unabhängige Zahlen* $\zeta_0(\alpha), \zeta_1(\alpha), \zeta_2(\alpha), \ldots$ *so, daß für die folgende Äquivalenz gilt:*

$$(E_h^\alpha t^{q-1})(1) = \mathcal{O}(h^q) \qquad \textit{für} \quad q = 1, 2, \ldots, p \tag{4.24}$$

genau dann, wenn die Koeffizienten $c_i(\alpha)$ *in* (4.15)

$$c_i(\alpha) = \zeta_i(\alpha) \qquad \textit{für} \quad i = 0, 1, \ldots, p-1 \tag{4.25}$$

genügen.

Beweis. Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach p durchgeführt. Trivialerweise ist die Behauptung für $p = 0$ richtig. Sei nun die Behauptung bis zur Ordnung p bewiesen. Wir zeigen jetzt, daß sie bis zur Ordnung $p + 1$ richtig ist. Dafür ist aber nach Induktionsvoraussetzung hinreichend zu zeigen, daß $c_p(\alpha)$ eindeutig gewählt werden kann, damit

$$(E_h^\alpha t^p)(1) = \mathcal{O}(h^{p+1})$$

gilt.
Nach Lemma 4.1.9 folgt aus (4.24)

$$(E_h^\alpha t^p)(1) = \mathcal{O}(h^p). \tag{4.26}$$

Aus der für jede natürliche Zahl n gültigen Darstellung

$$n^p = \sum_{i=1}^{p+1} a_i \binom{n+i-1}{n} = \sum_{i=1}^{p+1} a_i (-1)^n \binom{-i}{n},$$

(mit geeigneten Koeffizienten a_i) erhalten wir

$$\begin{aligned}(\Omega_h^\alpha t^p)(1) &= h^\alpha \sum_{j=0}^{n} w_j(\alpha)(n-j)^p h^p \qquad (nh = 1)\\ &= h^{p+\alpha} \sum_{i=1}^{p+1} a_i \sum_{j=0}^{n} w_j(\alpha)(-1)^{n-j} \binom{-i}{n-j}.\end{aligned}$$

$\sum_{j=0}^{n} w_j(\alpha)(-1)^{n-j}\binom{-i}{n-j}$ ist aber der n-te Koeffizient der Reihe

$$\begin{aligned}\frac{w(z;\alpha)}{(1-z)^i} &= \zeta_0(1-z)^{-\alpha-i} + \cdots + \zeta_{p-1}(1-z)^{-\alpha+p-1-i} \\ &\quad + c_p(\alpha)(1-z)^{-\alpha+p-i} + (1-z)^{p+1-i} r(z;\alpha).\end{aligned}$$

(4.17),(4.16) und (4.26) ergeben

$$(E_h^\alpha t^p)(1) = \frac{c_p(\alpha) - \zeta_p(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Daher gilt (4.24) mit $q = p+1$, genau dann wenn $c_p(\alpha) = \zeta_p(\alpha)$. □

Satz 4.1.11.
Unter der Voraussetzung (4.14) *ist der Faltungsteil* Ω_h^α $(\alpha > 0)$ *einer Faltungsquadratur* (4.1) *konvergent von der Ordnung* p, *wenn er stabil und konsistent von der Ordnung* p *ist.*

Beweis. Da nach Satz 4.1.4 aus (4.24) die Konsistenz von der Ordnung p folgt, sind die Zahlen $\zeta_i(\alpha)$ in Satz 4.1.10 mit den Zahlen $\gamma_i(\alpha)$ in Lemma 4.1.5 identisch.
Aus Satz 4.1.8 und Lemma 4.1.9 folgt für $\beta > p$

$$e_k\left(\alpha, \beta, \gamma_0(\alpha), \ldots, \gamma_k(\alpha)\right) = 0 \qquad k = 0, \ldots, p-1.$$

Andererseits folgt nach Lemma 4.1.5 aus der Konsistenz von der Ordnung p

$$c_i(\alpha) = \gamma_i(\alpha) \quad \text{für } i = 0, \ldots, p-1.$$

□

Die Herleitung der Faltungsgewichte aus den linearen Mehrschrittverfahren ist durch den Sonderfall $\alpha = 1$ motiviert. Wird ein lineares m–Schrittverfahren (ρ, σ) mit den charakteristischen Polynomen

$$\rho(z) := \sum_{i=0}^{m} a_i z^{m-i}, \quad \sigma(z) := \sum_{i=0}^{m} b_i z^{m-i} \quad (m \geq 1;\ a_0\, b_0 \neq 0),$$

auf das Problem $u'(x) = v(x),\ v(0) = 0$ angewandt, berechnet sich die numerische Approximation $\tilde{u}_n$ an $u(x_n)$ bei gegebenen Startwerten $\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_{m-1}$ aus

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \tilde{u}_{n-i} = h \sum_{i=0}^{m} b_i v(x_{n-i}).$$

Diese $\tilde{u}_n$ erfüllen eine Faltungsquadraturformel ([BvdH86] Kapitel 6.1.2, [Lub83a])

$$\tilde{u}_n = (J_h^1 v)(x_n) = h \sum_{j=0}^{n} w_{n-j} v(x_j) + h \sum_{j=0}^{s} w_{nj} u(x_j),$$

deren Faltungsgewichte w_n Koeffizienten der formalen Potenzreihe

$$w(z) := \frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$$

sind.

Der folgende Satz ist ein Hilfsmittel um Faltungsquadraturen zu konstruieren.

Satz 4.1.12.
Sei $\alpha > 0$. Das implizite lineare Mehrschrittverfahren (ρ, σ) sei stabil und konsistent von der Ordnung p und alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\sigma(z)$ seien betragmäßig höchstens gleich Eins. Ist

$$w(z) := \frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n \tag{4.27}$$

und werden die Faltungsgewichte $w_n(\alpha)$ $(n \geq 0)$ aus der formalen Potenzreihe

$$w(z;\alpha) := \left(\frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})}\right)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha) z^n \tag{4.28}$$

erzeugt, dann ist der dazugehörige Faltungsteil Ω_h^α stabil, konsistent und konvergent von der Ordnung p.

Beweis. Laut Voraussetzungen ist das lineare Mehrschrittverfahren konsistent von der Ordnung p, d.h.

$$hw(e^{-h}) = 1 + \mathcal{O}(h^p).$$

Das Potenzieren von der Ordnung α dieser Gleichung ergibt

$$h^\alpha w(e^{-h};\alpha) = 1 + \mathcal{O}(h^p),$$

die Konsistenz von der Ordnung p des Faltungsteils Ω_h^α .

Wir wollen jetzt die Stabilität beweisen.
Nach den Voraussetzungen über (ρ, σ) kann $w(z)$ in der Form

$$w(z) = \frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})} = \prod_{k=0}^{l} (1 - \tilde{z}_k z)^{-1} v(z),$$

dargestellt werden, wobei $v(z)$ holomorph ist und keine Nullstelle $\bar{z}$ mit $|\bar{z}| < 1$ hat, $\tilde{z}_k$ sind die Nullstellen von $\rho(z)$ mit $|\tilde{z}_k| = 1$. Daher gilt

$$w(z; \alpha) = (w(z))^{\alpha} = \prod_{k=0}^{l} (1 - \tilde{z}_k z)^{-\alpha} v^{\alpha}(z),$$

wobei $v^{\alpha}(z)$ holomorph im Einheitskreis ist. Daher folgt nach (4.18) und (4.19)

$$w_n(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}),$$

die Stabilität des Faltungsteils Ω_h^{α} .
Die konvergenz von der Ordnung p folgt jetzt aus Satz 4.1.11. $\square$

Jede Faltungsquadratur J_h^{α}, deren Faltungsteil aus einem linearen Mehrschrittverfahren (ρ, σ) stammt, erfüllt die Bedingung (4.14).

Definition 4.1.13.
Eine Approximation an das gebrochene Integral $J^{\alpha} (\alpha > 0)$ mit einer Faltungsquadratur J_h^{α}, deren Faltungsteil aus einem linearen Mehrschrittverfahren (ρ, σ) stammt, heißt gebrochenes lineares Mehrschrittverfahren

Berechnung der Faltungsgewichte $w_n(\alpha)$

Satz 4.1.14 (J. C. P. Miller Formel).
Sei $Q(z) := \sum_{j=1}^{\infty} q_j z^j$. Dann gilt im Ring der formalen Potenzreihen:

$$(1 + Q(z))^{\beta} := \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\beta) z^j,$$

wobei

$$
\begin{aligned}
c_0(\beta) &= 1, \\
c_n(\beta) &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} [\beta(n-j) - j]\; c_j(\beta)\, q_{n-j} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} [(\beta+1)j - n]\; c_{n-j}(\beta)\, q_j, \quad n = 1, 2, \ldots .
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

Die Berechnung von N Koeffizienten $c_1(\beta), \ldots, c_N(\beta)$ kann in N^2 Multiplikationen und $N-1$ Divisionen durchgeführt werden.

Beweis. ([Hen74], pp. 41-42) □

Satz 4.1.15.
Sei (ρ, σ) ein konvergentes lineares Mehrschrittverfahren der Ordnung $p \geq 1$ mit

$$
\rho(z) := \sum_{i=0}^{m} a_i z^{m-i}, \quad \sigma(z) := \sum_{i=0}^{m} b_i z^{m-i} \quad (m \geq 1;\; a_0\, b_0 \neq 0),
$$

und sei

$$
\sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha) z^n := \left(\frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})} \right)^{\alpha}.
$$

Dann gilt

$$
w_n(\alpha) = \frac{1}{n} \left(\frac{b_0}{a_0} \right)^{\alpha} \sum_{j=1}^{n} [(\alpha+1)j - n]\; w_{n-j}(\alpha)\, q_j, \tag{4.30}
$$

wobei

$$
q_j = \begin{cases} \frac{b_j}{b_0} - \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{j} a_j\, q_{j-i}, & \textit{falls } 1 \leq j \leq m, \\ -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{j} a_j\, q_{j-i}, & \textit{falls } m < j. \end{cases} \tag{4.31}
$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})} &= \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i z^{i-m}}{\sum_{i=0}^{m} a_i z^{i-m}} \\ &= \frac{b_0}{a_0}(1+\frac{b_1}{b_0}z^1+\cdots+\frac{b_m}{b_0}z^m)/(1+\frac{a_1}{a_0}z^1+\cdots+\frac{a_m}{a_0}z^m) \\ &= \frac{b_0}{a_0}\left(1+\sum_{j=1}^{\infty} q_j z^j\right),\end{aligned}$$

wobei

$$q_j = \begin{cases} \frac{b_j}{b_0} - \frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{j} a_j q_{j-i}, & \text{falls } 1 \le j \le m, \\ -\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{j} a_j q_{j-i}, & \text{falls } m < j. \end{cases}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha) z^n :&= \left(\frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})}\right)^{\alpha} \\ &= \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^{\alpha}\left(1+\sum_{j=1}^{\infty} q_j z^j\right)^{\alpha}.\end{aligned}$$

Unmittelbar aus Satz 4.1.14 folgt die Behauptung

$$w_n(\alpha) = \frac{1}{n}\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^{\alpha}\sum_{j=1}^{n}\left[(\alpha+1)j-n\right]\, w_{n-j}\, q_j.$$

□

Bemerkung 4.1.16. Mit Hilfe der Fast-Fourier-Transform-(FFT)-Techniken kann die Berechnung der Koeffizienten $c_1(\beta),\dots,c_N(\beta)$ für $N=2^l,\ l\in\mathbb{N}$ in weniger als $\phi(N) := 51N\,\mathrm{Log}_2(4N)$ Multiplikationen durchgeführt werden. (s.[Hen79], pp. 520-521) Daher ist die FFT-Methode effizienter als die J. C. P. Miller Formel, wenn $N=2^l,\ l>9,\ l\in\mathbb{N}$.

Die wichtigste Klasse von impliziten linearen Mehrschrittverfahren (ρ,σ), die stabil und konsistent von der Ordnung p sind und für die alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\sigma(z)$ im Inneren des Einheitkreises liegen,

ist die Klasse der p-stufigen Rückwärts-Differenzenmethoden (backward difference formulas) (BDF).
Sie sind definiert durch

$$w(z) := \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j} (1-z)^j \right)^{-1}, \quad 1 \leq p \leq 6 \tag{4.32}$$

(siehe z.B. [Hen62],[Gea71]).
Die entsprechenden gebrochenen p-stufigen Rückwärts-Differenzenmethoden $(BDFp)^\alpha$ sind durch Tabelle 4.1 gegeben.

Liegen die Faltungsgewichte $w_n(\alpha)$ fest, kommt man durch die Wahl der Startgewichte $w_{ni}(\alpha)$ zu den verschiedenen Varianten der Verfahren. Bei der Wahl dieser Startgewichte wird das Verhalten der zu integrierenden Funktion im Ursprung berücksichtigt.

p	$w(z;\alpha)$
1	$(1-z)^{-\alpha}$
2	$(\frac{3}{2} - 2z + \frac{1}{2}z^2)^{-\alpha}$
3	$(\frac{11}{6} - 3z + \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3)^{-\alpha}$
4	$(\frac{25}{12} - 4z + 3z^2 - \frac{4}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4)^{-\alpha}$
5	$(\frac{137}{60} - 5z + 5z^2 - \frac{10}{3}z^3 + \frac{5}{4}z^4 - \frac{1}{5}z^5)^{-\alpha}$
6	$(\frac{147}{60} - 6z + \frac{15}{2}z^2 - \frac{20}{3}z^3 + \frac{15}{4}z^4 - \frac{6}{5}z^5 + \frac{1}{6}z^6)^{-\alpha}$

Tabelle 4.1: Formale Potenzreihen $w(z;\alpha)$ für $(BDFp)^\alpha,\ 1 \leq p \leq 6$.

Die folgenden Sätze 4.1.17 und 4.1.18 zusammen verallgemeinern Theorem 2.4. in [Lub86] und Theorem 6.1.4. in [BvdH86].

Satz 4.1.17.
Sei (ρ, σ) ein stabiles, konsistentes, lineares, implizites Mehrschrittverfahren der Ordnung $p \geq 1$ mit allen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\sigma(z)$ betragmäßig höchstens gleich Eins und sei

$$w(z;\alpha) := \left(\frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})} \right)^{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Sei weiterhin

$$u(x) := \sum_{j=1}^{L} x^{\beta_j} v_j(x), \quad 0 \le \beta_j \le p-1, \quad v_j \in C^p([0,X]),\ j = 1, \dots, L \tag{4.33}$$

und

$$B_j := \{\gamma = \mu + \beta_j \mid \mu \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \gamma \le p-1\}, \quad s_j := \operatorname{card} B_j - 1, \\ B := \bigcup_{j=1}^{L} B_j, \quad s := \operatorname{card} B - 1 \tag{4.34}$$

und die Startgewichte $w_{ni}(\alpha)$ seien durch das lineare System

$$\sum_{i=0}^{s} w_{ni}(\alpha) i^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} n^{\gamma+\alpha} - \sum_{i=0}^{n} w_{n-i}(\alpha) i^\gamma, \quad \gamma \in B. \tag{4.35}$$

gegeben. Dann gilt:

(i) $w_{ni}(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}),\ i = 0, \dots, s;$

(ii) $J_h^\alpha u(x) - J^\alpha u(x) = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}),\ 0 \le \varepsilon < 1,$ *ε passend (s. (4.36)) gleichmäßig für jedes fixierte $x_n = nh =: x \in [0, X]$.*

Beweis. (i) Unmittelbar aus Satz 4.1.12 folgt die Konvergenz von der Ordnung p des Faltungsteils Ω_h^α der Faltungsquadratur J_h^α, d.h.

$$(E_h^\alpha x^{\beta-1})(1) = \mathcal{O}(h^\beta) + \mathcal{O}(h^p), \quad \forall \beta > 0.$$

Aus (4.35) folgt

$$\begin{aligned}
(E_h^\alpha x^\gamma)(1) &= h^\alpha \sum_{i=0}^{n} w_{n-i}(\alpha)(ih)^\gamma - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^\gamma \, dt \\
&= h^{\alpha+\gamma} \sum_{i=0}^{n} w_{n-i}(\alpha) i^\gamma - \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \\
&\overset{nh=1}{=} h^{\alpha+\gamma} \left[\sum_{i=0}^{n} w_{n-i}(\alpha) i^\gamma - \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} n^{\alpha+\gamma} \right] \\
&= h^{\alpha+\gamma} \sum_{i=0}^{s} w_{ni}(\alpha) i^\gamma \qquad (nh = 1).
\end{aligned}$$

Also ergibt sich für $\gamma \in B$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{s} w_{ni}(\alpha) i^{\gamma} &= (E_h^{\alpha} x^{\gamma})(1)/h^{\alpha+\gamma} \qquad (nh=1) \\
&= \left(\mathcal{O}(h^{\gamma+1}) + \mathcal{O}(h^{p})\right)/h^{\alpha+\gamma} \qquad (nh=1) \\
&= \mathcal{O}(h^{-\alpha+1}) + \mathcal{O}(h^{p-\alpha-\gamma}) \qquad (nh=1) \\
&= \mathcal{O}(n^{\alpha-1}).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$w_{ni}(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}), \quad i = 0, \dots, s.$$

(ii) Eine Taylorreihenentwicklung von v_j in 0 ergibt:

$$v_j(x) = \sum_{i=0}^{s_j} \frac{v_j^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{x^{s_j+1}}{(s_j+1)!} v_j^{(s_j+1)}(\xi_j), \quad \xi_j \in (0,x).$$

Somit gilt

$$u(x) = \sum_{j=1}^{L} \sum_{i=0}^{s_j} \frac{v_j^{(i)}(0)}{i!} x^{\beta_j+i} + \sum_{j=1}^{L} \frac{x^{s_j+\beta_j+1}}{(s_j+1)!} v_j^{(s_j+1)}(\xi_j), \quad \xi_j \in (0,x).$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > p - \beta_j - 1$ gilt

$$\begin{aligned}
(J_h^{\alpha} - J^{\alpha}) x^{m+\beta_j} &= (E_h^{\alpha} t^{m+\beta_j})(x) + h^{\alpha} \sum_{i=0}^{s} w_{ni}(\alpha)(ih)^{m+\beta_j} \\
&= x^{\alpha+m+\beta_j} (E_{h/x}^{\alpha} t^{m+\beta_j})(1) \\
&\quad + h^{\alpha+m+\beta_j} \sum_{i=0}^{s} w_{ni}(\alpha) i^{m+\beta_j} \\
&= x^{\alpha+m+\beta_j} \left[\mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{x}\right)^{m+\beta_j+1}\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{x}\right)^{p}\right)\right] \\
&\quad + \mathcal{O}(h^{m+\beta_j+1}) \\
&= \mathcal{O}(x^{m+\beta_j+\alpha-p} h^{p}).
\end{aligned}$$

Bei der Wahl (4.35) der Startgewichte $w_{ni}(\alpha)$ ist

$$(J_h^\alpha - J^\alpha)x^{i+\beta_j} = 0, \text{ für alle } i \in \{0,\dots,s_j\} \text{ und } j \in \{1,\dots,L\}\ .$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}(J_h^\alpha - J^\alpha)u(x) &= \sum_{j=1}^{L}\sum_{i=0}^{s_j} \frac{v_j^{(i)}(0)}{i!}(J_h^\alpha - J^\alpha)x^{\beta_j+i} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{L} \frac{v_j^{(s_j+1)}(\xi_j)}{(s_j+1)!}(J_h^\alpha - J^\alpha)x^{s_j+\beta_j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{L} \mathcal{O}(x^{s_j+\beta_j+\alpha-p+1}h^p).\end{aligned}$$

Sei $\mathcal{J} := \{j \mid \alpha + s_j + \beta_j - p + 1 < 0\}$.

Fall 1) $j \notin \mathcal{J} \Rightarrow 0 \le x^{\alpha+s_j+\beta_j-p+1} \le X^{\alpha+s_j+\beta_j-p+1}$ beschränkt,
also gilt $\mathcal{O}(x^{s_j+\beta_j+\alpha-p+1}h^p) = \mathcal{O}(h^p)$.
Fall 2) $j \in \mathcal{J}$: $x = n \cdot h,\ n^{\alpha+s_j+\beta_j-p+1} \le 1$
$\Rightarrow \mathcal{O}(x^{s_j+\beta_j+\alpha-p+1}h^p) = \mathcal{O}(n^{s_j+\beta_j+\alpha-p+1}h^{s_j+\beta_j+\alpha+1})$
$= \mathcal{O}(h^{s_j+\beta_j+\alpha+1})$

Wir definieren

$$\varepsilon := \begin{cases} 0, & \mathcal{J} = \emptyset \\ \max_{j\in\mathcal{J}} p - s_j - \beta_j - \alpha - 1, & \mathcal{J} \neq \emptyset. \end{cases} \tag{4.36}$$

Offenkundig gilt: $0 \le \varepsilon < 1$.
Aus

$$s_j + \beta_j + \alpha + 1 = p - (p - s_j - \beta_j - \alpha - 1) \ge p - \varepsilon\ \forall j \in \mathcal{J}$$

erhalten wir für den Fehler:

$$J_h^\alpha u(x) - J^\alpha u(x) = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}).$$

□

Satz 4.1.18.
Sei (ρ, σ) ein stabiles, konsistentes, lineares, implizites Mehrschrittverfahren der Ordnung $p \geq 1$ mit allen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\sigma(z)$ betragmäßig höchstens gleich Eins und sei

$$w(z;\alpha) := \left(\frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})}\right)^{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Sei weiterhin

$$\begin{aligned} u(x) &:= \sum_{j=1}^{L} x^{\lambda_j - 1} v_j(x), \quad u \text{ in } 0 \text{ divergent}, \\ 0 < \lambda_j \leq p, &\quad v_j \in C^p([0,X]), \quad j = 1, \ldots, L \end{aligned} \tag{4.37}$$

und

$$\begin{aligned} S_j := \{\gamma = \mu + \lambda_j \mid \mu \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \gamma \leq p\}, &\quad s_j := \operatorname{card} S_j - 1, \\ \tilde{S} := \bigcup_{j=1}^{L} S_j, &\quad s := \operatorname{card} \tilde{S} \end{aligned} \tag{4.38}$$

und die Startgewichte $w_{ni}(\alpha)$ seien durch das lineare System

$$\sum_{i=1}^{s} w_{ni}(\alpha) i^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)} n^{\gamma+\alpha-1} - \sum_{i=1}^{n} w_{n-i}(\alpha) i^{\gamma-1}, \quad \gamma \in \tilde{S} \tag{4.39}$$

gegeben. Dann gilt:

(i) $w_{ni}(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}),\ i = 1, \ldots, s;$

(ii) $J_h^{\alpha} u(x) - J^{\alpha} u(x) = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}),\ 0 \leq \varepsilon < 1,$ *ε passend (s. (4.40)) gleichmäßig für jedes fixierte $x_n = nh =: x \in [0, X]$.*

Beweis. (i) Unmittelbar aus Satz 4.1.12 folgt die Konvergenz von der Ordnung p des Faltungsteils Ω_h^{α} der Faltungsquadratur J_h^{α}, d.h.

$$(E_h^{\alpha} x^{\beta-1})(1) = \mathcal{O}(h^{\beta}) + \mathcal{O}(h^p), \quad \forall \beta > 0.$$

Aus (4.39) folgt

$$\begin{aligned}
(E_h^\alpha x^{\gamma-1})(1) &= h^\alpha \sum_{i=1}^{n} w_{n-i}(\alpha)(ih)^{\gamma-1} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\gamma-1}\, dt \\
&= h^{\alpha+\gamma-1} \sum_{i=1}^{n} w_{n-i}(\alpha) i^{\gamma-1} - \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \\
&= h^{\alpha+\gamma-1} \left[\sum_{i=1}^{n} w_{n-i}(\alpha) i^{\gamma-1} - \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} n^{\alpha+\gamma-1} \right] \\
&= h^{\alpha+\gamma-1} \sum_{i=1}^{s} w_{ni}(\alpha) i^{\gamma-1} \qquad (nh = 1).
\end{aligned}$$

Also ergibt sich für $\gamma \in \tilde{S}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{s} w_{ni}(\alpha) i^{\gamma-1} &= (E_h^\alpha x^{\gamma-1})(1)/h^{\alpha+\gamma-1} \qquad (nh=1) \\
&= \left(\mathcal{O}(h^\gamma) + \mathcal{O}(h^p)\right)/h^{\alpha+\gamma-1} \qquad (nh=1) \\
&= \mathcal{O}(h^{-\alpha+1}) + \mathcal{O}(h^{p-\alpha-\gamma+1}) \qquad (nh=1) \\
&= \mathcal{O}(n^{\alpha-1}).
\end{aligned}$$

Also ist

$$w_{ni}(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}), \quad i = 1, \ldots, s.$$

(ii) Eine Taylorreihenentwicklung von v_j in 0 ergibt:

$$v_j(x) = \sum_{i=0}^{s_j} \frac{v_j^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{x^{s_j+1}}{(s_j+1)!} v_j^{(s_j+1)}(\xi_j), \quad \xi_j \in (0, x).$$

Somit gilt

$$u(x) = \sum_{j=1}^{L} \sum_{i=0}^{s_j} \frac{v_j^{(i)}(0)}{i!} x^{\lambda_j+i-1} + \sum_{j=1}^{L} \frac{x^{s_j+\lambda_j}}{(s_j+1)!} v_j^{(s_j+1)}(\xi_j), \quad \xi_j \in (0, x).$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m > p - \lambda_j$ gilt

$$\begin{aligned}
(J_h^\alpha - J^\alpha)x^{m+\lambda_j-1} &= (E_h^\alpha t^{m+\lambda_j-1})(x) + h^\alpha \sum_{i=1}^{s} w_{ni}(\alpha)(ih)^{m+\lambda_j-1} \\
&= x^{\alpha+m+\lambda_j-1}(E_{h/x}^\alpha t^{m+\lambda_j-1})(1) \\
&\quad + h^{\alpha+m+\lambda_j-1}\sum_{i=1}^{s} w_{ni}(\alpha) i^{m+\lambda_j-1} \\
&= x^{\alpha+m+\lambda_j-1}\left[\mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{x}\right)^{m+\lambda_j}\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{h}{x}\right)^{p}\right)\right] \\
&\quad + \mathcal{O}(h^{m+\lambda_j}) \\
&= \mathcal{O}(x^{m+\lambda_j+\alpha-p-1}h^p).
\end{aligned}$$

Bei der Wahl (4.39) der Startgewichte $w_{ni}(\alpha)$ ist

$$(J_h^\alpha - J^\alpha)x^{i+\lambda_j-1} = 0, \text{ für alle } i \in \{0, \ldots, s_j\} \text{ und } j \in \{1, \ldots, L\}\ .$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}
(J_h^\alpha - J^\alpha)u(x) &= \sum_{j=1}^{L}\sum_{i=0}^{s_j} \frac{v_j^{(i)}(0)}{i!}(J_h^\alpha - J^\alpha)x^{\lambda_j+i-1} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{L}\frac{v_j^{(s_j+1)}(\xi_j)}{(s_j+1)!}(J_h^\alpha - J^\alpha)x^{s_j+\lambda_j} \\
&= \sum_{j=1}^{L}\mathcal{O}(x^{s_j+\lambda_j+\alpha-p}h^p).
\end{aligned}$$

Sei $\mathcal{J} := \{j \mid \alpha + s_j + \lambda_j - p < 0\}$.

Fall 1) $\quad j \notin \mathcal{J} \Rightarrow 0 \le x^{\alpha+s_j+\lambda_j-p} \le X^{\alpha+s_j+\lambda_j-p}$ beschränkt,
also gilt $\mathcal{O}(x^{s_j+\lambda_j+\alpha-p}h^p) = \mathcal{O}(h^p)$.

Fall 2) $\quad j \in \mathcal{J}: \quad x = n \cdot h,\ n^{\alpha+s_j+\lambda_j-p} \le 1$

$$\Rightarrow \mathcal{O}(x^{s_j+\lambda_j+\alpha-p}h^p) = \mathcal{O}(n^{s_j+\lambda_j+\alpha-p}h^{s_j+\lambda_j+\alpha}) = \mathcal{O}(h^{s_j+\lambda_j+\alpha}).$$

Wir definieren

$$\varepsilon := \begin{cases} 0, & \mathcal{J} = \emptyset \\ \max_{j\in\mathcal{J}} p - s_j - \lambda_j - \alpha, & \mathcal{J} \neq \emptyset. \end{cases} \tag{4.40}$$

Offenkundig gilt: $0 \leq \varepsilon < 1$.
Aus

$$s_j + \beta_j + \alpha = p - (p - s_j - \beta_j - \alpha) \geq p - \varepsilon \; \forall j \in \mathcal{J}$$

erhalten wir für den Fehler:

$$J_h^\alpha u(x) - J^\alpha u(x) = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}).$$

□

Korollar 4.1.19.
Seien $\alpha > 0$ und (ρ, σ) ein stabiles, konsistentes, lineares, implizites Mehrschrittverfahren von der Ordnung $p \geq 1$ mit allen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\sigma(z)$ betragmäßig höchstens gleich Eins.
Seien weiterhin die Faltungsgewichte $w_n(\alpha)$ aus der formalen Potenzreihe

$$w(z;\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha) z^n := \left(\frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})} \right)^\alpha$$

erzeugt und die Startgewichte $w_{ni}(\alpha)$ durch das folgende lineare System gegeben

$$\sum_{i=1}^{s} w_{ni}(\alpha) i^{\mu+\lambda-1} = \frac{\Gamma(\mu+\lambda)}{\Gamma(\mu+\lambda+\alpha)} n^{\mu+\alpha+\lambda-1} - \sum_{i=1}^{n} w_{n-i}(\alpha) i^{\mu+\lambda-1}, \quad (\mu = 1, \dots, s), \tag{4.41}$$

wobei $s \in \mathbb{N}$ derart gewählt wird, daß

$$s + \lambda \leq p < s + \lambda + 1, \tag{4.42}$$

erfüllt ist. Dann gilt:

(i) $w_{ni}(\alpha) = \mathcal{O}(n^{\alpha-1}),\; i = 1, \dots, s;$

(ii) sei $u(x) = x^{\lambda-1}v(x)$, *u in 0 divergent,* $v \in C^p([0,X])$
$\lambda = \tilde{\lambda} + k, \quad \tilde{\lambda} \in [0,1), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$
Dann gilt für den Diskretisierungsfehler:

$$J_h^\alpha u(x) - J^\alpha u(x) = \mathcal{O}(x^{\alpha-\tilde{\lambda}} h^p) \tag{4.43}$$

gleichmäßig für jedes fixierte $x_n = nh =: x \in [0,X]$.

Bei der Berechnung der Startgewichte $w_{nj}(\alpha)$ tauchen endliche Summen der Form

$$\sum_{j=0}^{n} w_{n-j}(\alpha) j^{\gamma-1}$$

auf, wobei $0 \leq n \leq N(h)$. Diese Summen können als diskrete Faltungen der Folgen $\{w_j(\alpha)\}$ und $\{j^{\gamma-1}\}$ aufgefaßt werden. Solche Faltungen werden am effizientesten durch die Fast-Fourier-Transform-(FFT)-Techniken berechnet, wenn die Anzahl $N(h)$ der Stützstellen sehr groß und eine Potenz von 2 ist.

4.2 Gebrochene lineare Mehrschrittverfahren für mehrgliedrige Abelsche Integralgleichungen

Sei eine Abbildung $f\colon [0,X] \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Ein gebrochenes lineares Mehrschrittverfahren für die mehrgliedrige Abelsche Integralgleichung

$$u(x) + \sum_{i=1}^{m} a_i \, J^{\alpha_i} u(x) = f(x) \tag{4.44}$$

hat die Form

$$\begin{aligned} u_n = f(x_n) &- \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_{n-j}(\alpha_i) \right) u_j \\ &- \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_{nj}(\alpha_i) \right) u_j, \quad x_n \in G_h(X) \end{aligned}$$

$$u_0 := \begin{cases} 0, & \text{falls } f(0) = \infty \\ f(0), & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.45}$$

mit festem $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die Startgewichte $w_{nj}(\alpha_i)$ und die Faltungsgewichte $w_{n-j}(\alpha_i)$ sind wie in Satz 4.1.17 bestimmt.

Wir wollen jetzt (4.45) näher betrachten. Für $n = 1, \dots, s$ erhalten wir

$$\begin{aligned} u_n = &- \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} \big(w_{n-j}(\alpha_i) + w_{nj}(\alpha_i) \big) \right) u_j \\ &+ f(x_n) - \sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} \big(w_n(\alpha_i) + w_{n0}(\alpha_i) \big) u_0, \quad n = 1, \dots, s, \end{aligned} \tag{4.46}$$

wobei $w_j(\alpha_i) = 0$, falls $j < 0$.
(4.46) ist äquivalent zum linearen System

$$\big(a_{nj}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \big) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ \vdots \\ g_s(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \end{pmatrix}, \tag{4.47}$$

mit

$$a_{nj}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} \left(w_0(\alpha_i) + w_{nn}(\alpha_i) \right), & \text{falls } n = j, \\ \sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_{nj}(\alpha_i), & \text{falls } n < j, \\ \sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} \left(w_{n-j}(\alpha_i) + w_{nj}(\alpha_i) \right), & \text{falls } n > j, \end{cases} \tag{4.47'}$$

$$(n, j = 1, \dots, s),$$

und

$$g_n = f(x_n) - \sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} \big(w_n(\alpha_i) + w_{n0}(\alpha_i) \big) u_0. \tag{4.47''}$$

Nehmen wir jetzt an, daß die “Anfangswerte” $\{u_1, \dots, u_s\}$ schon berechnet sind und sei $s + 1 \leq n \leq N(h)$. Die entsprechenden Näherungswerte $\{u_{s+1}, \dots, u_{N(h)}\}$ werden dann rekursiv berechnet aus

$$\begin{aligned} u_n = &\frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_0(\alpha_i)} \\ &\times \left[f(x_n) - \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_{n-j}(\alpha_i) \right) u_j - \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_{nj}(\alpha_i) \right) u_j \right] \end{aligned} \tag{4.48}$$

Lemma 4.2.1 (diskrete Gronwall Ungleichung).
Sei $z_n,\ 0 \leq n \leq N(h)$, eine Folge von nichtnegativen reellen Zahlen mit

$$z_n \leq C_1 + hC_2 \sum_{j=0}^{n-1} z_j, \qquad n = k, \dots, N(h), \tag{4.49}$$

wobei $k > 0,\ C_i > 0,\ i = 1, 2$ und C_2 unabhängig von h $(h > 0)$. Dann gilt:

$$z_n \leq (hC_2 z + C_1)(1 + hC_2)^{n-k}, \quad n = k, \dots, N(h), \tag{4.50}$$

wenn für die Anfangswerte $z_0, \dots, z_{k-1}$ gilt: $\quad z_i \leq z/k$.

Beweis. [Sch76] □

Lemma 4.2.2 (diskrete Gronwall Ungleichung).
Sei $z_n,\ 0 \leq n \leq N(h)$, eine Folge von nichtnegativen reellen Zahlen mit

$$z_n \leq \chi + Mh^\alpha \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)^{\alpha-1} z_j, \qquad 0 \leq n \leq N(h), \tag{4.51}$$

wobei $0 < \alpha < 1,\ \chi \geq 0,\ M > 0$ und M unabhängig von h $(h > 0)$. Dann gilt:

$$z_n \leq \chi E_\alpha(M\Gamma(\alpha)(nh)^\alpha), \qquad 0 \leq n \leq N(h), \tag{4.52}$$

wobei $E_\beta(x)$ die Mittag-Leffler-Funktion ist.

Beweis. [DM83] □

Satz 4.2.3 (Konvergenz des gebrochenen linearen Mehrschrittverfahrens).
Seien folgende Bedingungen erfüllt:

(i) Sei (ρ, σ) ein stabiles, konvergentes, lineares, implizites Mehrschrittverfahren der Ordnung $p \geq 1$ mit allen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\sigma(z)$ betragmäßig höchstens gleich Eins;

(ii) sei $w(z; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha) z^n := \left(\frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})}\right)^\alpha$;

(iii) sei $f(x) = \sum_{j=1}^{L} x^{\beta_j - 1} g_j(x)$,
$0 < \beta_j \leq p, \quad g_j \in C^p([0, X]), \quad j = 1, \dots, L.$

Die Integralgleichung (4.44) mit ($a_i \in \mathbb{C}$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, m$) werde durch das gebrochene lineare Mehrschrittverfahren (4.45) diskretisiert, wobei die Startgewichte $w_{nj}(\alpha_i)$ folgendermaßen bestimmt sind:

1) Falls $f(0) < \infty$ ist, soll das Gleichungssystem

$$\sum_{j=0}^{s} w_{nj}(\alpha_i) j^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha_i)} n^{\gamma+\alpha_i-1} - \sum_{j=0}^{n} w_{n-j}(\alpha_i) j^{\gamma-1}, \quad \gamma \in A, \tag{4.53}$$

erfüllt sein. Hierin ist

$$\begin{aligned} A_l &:= \{\gamma = \mu + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i l_i + \beta_l \,|\, \mu,\, l_i \in \mathbb{N}_0 \quad \gamma \le p\}, \quad l = 1, \dots, L, \\ A &:= \bigcup_{l=1}^{L} A_l, \quad s := \operatorname{card} A - 1. \end{aligned} \tag{4.54}$$

2) Falls $f(0) = \infty$ soll das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{s} w_{nj}(\alpha_i) j^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha_i)} n^{\gamma+\alpha_i-1} - \sum_{j=1}^{n} w_{n-j}(\alpha_i) j^{\gamma-1}, \quad \gamma \in A \tag{4.55}$$

mit $s = \operatorname{card} A$ (A wie in (4.54)) erfüllt sein.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \max_{0 \le n \le N(h)} |u(x_n) - u_n| = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}), \quad 0 \le \varepsilon < 1, \ \varepsilon \text{ passend}, \\ (h \downarrow 0,\ N(h) = [X/h]). \end{aligned} \tag{4.56}$$

Beweis. Wir beweisen den Satz für den Fall, daß $f(0) < \infty$.
Der Beweis für den Fall $f(0) = \infty$ verläuft analog.

(a) **Konsistenzfehler**. Die Lösung $u(x)$ von (4.44) mit $f(x)$ wie in (iii) hat nach Korollar 3.3.8 die Form

$$u(x) = \sum_{j=1}^{L} x^{\beta_j - 1} g_j(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=k \\ l_1,\dots,l_m \ge 0}} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{m} x^{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i (l_i + \delta_{ij}) + \beta_l - 1} \tilde{g}_l(x),$$

wobei die Funktionen $\tilde{g}_l$ genügend differenzierbar sind.
Daher gilt nach Satz 4.1.17 und Satz 4.1.18

$$J_h^{\alpha_i} u(x_n) - J^{\alpha_i} u(x_n) = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}),\ 0 \le \varepsilon < 1,$$

$$(i = 1, \dots, m; \quad n = 1, \dots, N(h)).$$

Somit gilt

$$d_n := \sum_{i=1}^{m} a_i \left(J_h^{\alpha_i} u(x_n) - J^{\alpha_i} u(x_n)\right) = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}),\ 0 \le \varepsilon < 1. \tag{4.57}$$

(b) **Fortpflanzungsfehler**. Sei $e_n := u(x_n) - u_n$.
Aus (4.1) und (4.45) erhalten wir:

$$\begin{aligned} e_n &= u(x_n) - u_n \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_{n-j}(\alpha_i) \right) u_j \\ &\quad + \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_{nj}(\alpha_i) \right) u_j - \sum_{i=1}^{m} a_i J^{\alpha_i} u(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i \left(J_h^{\alpha_i} u(x_n) - J^{\alpha_i} u(x_n)\right) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_{n-j}(\alpha_i) \right) e_j - \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_{nj}(\alpha_i) \right) e_j, \\ &\quad n = 1, \dots, N(h), \end{aligned} \tag{4.58}$$

und $e_0 = u(0) - f(0) = 0$.

Sei $1 \le n \le s$. Für diese Werte von n gilt

$$\big(a_{nj}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)\big) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_s \end{pmatrix}, \tag{4.59}$$

wobei die Matrixelemente $\{a_{nj}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)\}$ wie in (4.47′) und d_n wie in (4.57) definiert sind.
Da das lineare System (4.59), für $h > 0$ klein genug, nichtsingulär ist, gilt:

$$e_j = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}),\ 0 \leq \varepsilon < 1, \quad j = 1, \dots, s. \tag{4.60}$$

Wir betrachten nun den Fall $s + 1 \leq n \leq N(h)$.
Für $h > 0$ klein genug, gilt:

$$\begin{aligned} e_n = d_n &- \sum_{j=s+1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_{n-j}(\alpha_i) \right) e_j \\ &- \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} (w_{n-j}(\alpha_i) + w_{nj}(\alpha_i)) \right) e_j - \sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_0(\alpha_i) e_n. \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_0(\alpha_i) \right) e_n = d_n &- \sum_{j=s+1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_{n-j}(\alpha_i) \right) e_j \\ &- \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} (w_{n-j}(\alpha_i) + w_{nj}(\alpha_i)) \right) e_j. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.1.12 und Satz 4.1.17 existieren endliche Konstanten $C_1(\alpha_i)$ und $C_2(\alpha_i)$ so, daß gilt:

$$|w_{n-j}(\alpha_i)| \leq C_1(\alpha_i)(n-j)^{\alpha_i - 1}, \quad 0 \leq j < n \leq N(h)$$

und

$$|w_{nj}(\alpha_i)| \leq C_2(\alpha_i) n^{\alpha_i - 1}, \quad j = 0, \dots, s \quad (n \geq 1).$$

Außerdem existiert, für $h > 0$ klein genug, eine Konstante K so, daß gilt

$$\left| \left(1 + \sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha_i} w_0(\alpha_i) \right)^{-1} \right| \leq K < \infty$$

Daher gilt:

$$
\begin{aligned}
|e_n| \le K|d_n| &+ K \sum_{j=s+1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i| h^{\alpha_i} C_1(\alpha_i)(n-j)^{\alpha_i - 1} \right) |e_j| \\
&+ K \sum_{j=0}^{s} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i| h^{\alpha_i} \left(C_1(\alpha_i)(n-j)^{\alpha_i-1} + C_2(\alpha_i) n^{\alpha_i - 1} \right) \right) |e_j| \\
&\le K|d_n| + K \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i| h^{\alpha_i} C_1(\alpha_i)(n-j)^{\alpha_i - 1} \right) |e_j| \\
&+ K \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i| h^{\alpha_i} \left(C_1(\alpha_i)(n-j)^{\alpha_i-1} + C_2(\alpha_i) n^{\alpha_i - 1} \right) \right) |e_j| \\
&= K|d_n| + K \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i| h^{\alpha_i} \left(2C_1(\alpha_i)(n-j)^{\alpha_i-1} + C_2(\alpha_i) n^{\alpha_i - 1} \right) \right) |e_j| \\
&\le K|d_n| + K \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m} 2|a_i| h^{\alpha_i} C_1(\alpha_i)(n-j)^{\alpha_i - 1} \right) |e_j| \\
&+ Kh \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i| x_n^{\alpha_i - 1} C_2(\alpha_i) \right) |e_j|, \\
&(\text{da, } n^{\alpha_i - 1} \le n^{\alpha_i - 1} h^{\alpha_i} = h x_n^{\alpha_i - 1}).
\end{aligned}
$$

Also erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|e_n| \le K|d_n| &+ K \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i| h^{\alpha_i} C_3(\alpha_i)(n-j)^{\alpha_i - 1} \right) |e_j| \\
&+ Kh \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i| x_n^{\alpha_i - 1} C_3(\alpha_i) \right) |e_j|, \quad s+1 \le n \le N(h),
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

wobei

$$
C_3(\alpha_i) := \max\{2C_1(\alpha_i), C_2(\alpha_i)\}, \quad i = 1, \ldots, m.
$$

Sei $\bar{\alpha} := \min_{i=1,\ldots,m}\{\alpha_i\}$

1. Fall $\bar{\alpha} \geq 1$.
In diesem Fall gilt:

$$(n-j)^{\alpha_i - 1} \leq n^{\alpha_i - 1}, \; j = 0, \ldots, n-1, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Damit folgt aus (4.61)

$$|e_n| \leq K|d_n| + KB_1(x_n)h \sum_{j=0}^{n-1} |e_j|, \quad s+1 \leq n \leq N(h)$$

mit $B_1(x) := \sum_{i=1}^{m} |a_i| x^{\alpha_i - 1} C_3(\alpha_i)$ und aus Lemma 4.2.1

$$|e_n| \leq \left(K_1 B_1(x_n) h^{p+1-\varepsilon} + K h^{p-\varepsilon}\right)\left(1 + hKB_1(x_n)\right), \qquad K_1 > 0, \quad 0 \leq \varepsilon < 1.$$

Also gilt:

$$|e_n| = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}), \quad 0 \leq \varepsilon < 1.$$

2. Fall $\bar{\alpha} < 1$.
Aus der Ungleichung $0 \leq 1 - \frac{j}{n} \leq 1, \quad (j = 0, \ldots, n-1)$ folgt

$$(1 - \frac{j}{n})^{\alpha_i - 1} \leq (1 - \frac{j}{n})^{\bar{\alpha} - 1} \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Daher gilt für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$\begin{aligned} h^{\alpha_i}(n-j)^{\alpha_i - 1} &= h^{\alpha_i} n^{\alpha_i - 1}(1 - \frac{j}{n})^{\alpha_i - 1} \\ &\leq h^{\alpha_i} n^{\alpha_i - 1}(1 - \frac{j}{n})^{\bar{\alpha} - 1} \\ &= x_n^{\alpha_i - \bar{\alpha}} h^{\bar{\alpha}} (n-j)^{\bar{\alpha} - 1}. \end{aligned}$$

Weiterhin folgt aus $1 \leq (1 - \frac{j}{n})^{\bar{\alpha} - 1} \quad (j = 0, \ldots, n-1)$

$$h < h(1 - \frac{j}{n})^{\bar{\alpha} - 1} = x_n^{1 - \bar{\alpha}} h^{\bar{\alpha}} (n-j)^{\bar{\alpha} - 1}.$$

Mit Hilfe dieser Ungleichungen erhalten wir die Abschätzung

$$|e_n| \leq K|d_n| + B(x_n) h^{\bar{\alpha}} \sum_{j=0}^{n-1} (n-j)^{\bar{\alpha} - 1} |e_j|, \quad n = s+1, \ldots, N(h), \tag{4.62}$$

wobei

$$B(x) := 2K\sum_{i=1}^{m}|a_i|C_3(\alpha_i)x^{\alpha_i-\bar{\alpha}}.$$

Aus (4.60) und (4.62) folgt

$$|e_n| \leq K_2h^{p-\varepsilon} + B_2(x_n)h^{\bar{\alpha}}\sum_{j=0}^{n-1}(n-j)^{\bar{\alpha}-1}|e_j|, \quad n = 0,\dots,N(h),$$
$$K_2 > 0, \quad 0 \leq \varepsilon \tag{4.63}$$

und aus Lemma 4.2.2 und $nh \leq N(h)h \leq X$

$$|e_n| \leq K_2h^{p-\varepsilon}E_{\bar{\alpha}}\left(B_2(X)\Gamma(\alpha)X^{\alpha}\right), \quad 0 \leq \varepsilon < 1.$$

Da aber die Mittag-Leffler-Funktion $E_\alpha(z)$ gleichmäßig konvergent für alle X ist, existiert eine Konstante $C(X)$ so, daß gilt

$$|e_n| \leq C(X)h^{p-\varepsilon}, \quad 0 \leq \varepsilon < 1.$$

□

Bemerkung 4.2.4. Die mehrgliedrige Abelsche Integralgleichung 1. Art

$$\sum_{i=1}^{m} a_iJ^{\alpha_i}u(x) = f(x),\ a_i \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \alpha_i > 0,\ m > 1 \tag{4.64}$$

läßt sich durch Anwendung des Operators J^{α_k} (mit $\alpha_k := \min\{\alpha_i\,:\,1 \leq i \leq m\}$) auf beiden Seiten von (4.64) auf die Integralgleichung 2. Art

$$a_ku(x) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}} a_iJ^{\alpha_i-\alpha_k}u(x) = D^{\alpha_k}f(x) \tag{4.65}$$

zurückführen.
Generell muß nur noch $D^{\alpha_k}f(x)$ passend dargestellt werden, damit eine Diskretisierung erfolgen kann. Als Hilfsmittel können Tabellen von speziellen Funktionen [MOT66, OS74, MR93] herangezogen werden. Im trivialem Fall, falls $f(x)$ von der Form $\sum_{l=1}^{\tau} f_lx^{\beta_l+\alpha_k-1}$, $\beta_l > 0$ ist, wird (4.65) wie (4.44) diskretisiert, wobei die Startgewichte $w_{nj}(\alpha_i - \alpha_k)$ ähnlich wie in Satz 4.2.3 bestimmt werden.
Eine direkte Diskretisierung von (4.64) ohne vorherige Zurückführung auf die Form einer Integralgleichung 2. Art führt zu einem schlecht konditionierten linearen System.

4.3 Gebrochene lineare Mehrschrittverfahren für Caputo-Differentialgleichungen

Die Zurückfürung der Caputo-Differentialgleichung

$$D_*^{\alpha} u(x) + \sum_{i=1}^{m} a_i \, D_*^{\alpha_i} u(x) = f(x), \quad \alpha > \alpha_i \geq 0 \tag{4.66}$$

auf eine Integralgleichungsform (s. Beweis von Satz 3.5.5) ergibt:

$$u(x) + \sum_{i=1}^{m} a_i J^{\alpha-\alpha_i} u(x) = J^{\alpha} f(x) + r(x), \tag{4.67}$$

wobei

$$r(x) = \sum_{q=0}^{\nu-1} \frac{x^q}{q!} u^{(q)}(0^+) + \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\sum_{q=0}^{\nu_i-1} \frac{x^{\alpha-\alpha_i+q}}{\Gamma(\alpha-\alpha_i+q+1)} u^{(q)}(0^+) \right)$$

mit

$$\nu = \lceil \alpha \rceil, \quad \nu_i := \lceil \alpha_i \rceil, \; i = 1, \ldots, m.$$

Sei $f\colon [0, X] \longrightarrow \mathbb{C}$ von der Form

$$\begin{aligned} f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sum_{l=1}^{L} x^{\beta_l - 1} g_l(x), \qquad f_1(x) = \sum_{l \in \mathcal{M}} x^{\beta_l - 1} g_l(x), \\ f_2(x) = \sum_{l \notin \mathcal{M}} x^{\beta_l - 1} g_l(x), \quad \mathcal{M} := \{ l \quad | \quad g_l(x) \text{ nicht quasipolynomial} \} \end{aligned} \tag{4.68}$$

gegeben.

Bemerkung 4.3.1. Unter quasipolynomiale Funktionen verstehen wir Funktionen $g(x)$, die sich in der Form

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\tau} c_i x^{\zeta_i}, \quad c_i \in \mathbb{C}, \; \zeta_i \geq 0, \; \tau \in \mathbb{N}$$

darstellen lassen.

Ein gebrochenes lineares Mehrschrittverfahren für die Caputo-Differentialgleichung (4.66) hat die Form

$$\begin{aligned} u_n =&(J_h^\alpha f_1)(x_n) + (J^\alpha f_2)(x_n) - \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha-\alpha_i} w_{n-j}(\alpha - \alpha_i) \right) u_j \\ &- \sum_{j=0}^{\bar{s}} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i h^{\alpha-\alpha_i} \bar{w}_{nj}(\alpha - \alpha_i) \right) u_j + r(x_n), \qquad x_n \in G_h(X) \end{aligned} \tag{4.69}$$

mit festem $\bar{s}, \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, wobei $(J_h^\alpha f_1)(x_n)$ folgendermaßen bestimmt wird:

Fall 1) $\beta_l \geq 1 \; \forall l \in \mathcal{M} \quad (f_1(0) < \infty)$

$$(J_h^\alpha f_1)(x_n) := h^\alpha \sum_{i=0}^{n} w_{n-i}(\alpha) f_1(x_i) + h^\alpha \sum_{i=0}^{s} w_{ni}(\alpha) f_1(x_i) \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned} B_l := \{\gamma = \mu + \beta_l \quad | \quad \mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \gamma \leq p\}, \quad l \in \mathcal{M} \\ B := \bigcup_{l \in \mathcal{M}} B_l, \quad s := \operatorname{card} B - 1, \end{aligned} \tag{4.71}$$

mit den durch das lineare System

$$\sum_{i=0}^{s} w_{ni}(\alpha) i^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)} n^{\gamma+\alpha-1} - \sum_{i=0}^{n} w_{n-i}(\alpha) i^{\gamma-1}, \quad \gamma \in B, \tag{4.72}$$

gegebenen Startgewichten $w_{ni}(\alpha)$;

Fall 2) $f_1(0) = \infty$

$$(J_h^\alpha f_1)(x_n) := h^\alpha \sum_{i=1}^{n} w_{n-i}(\alpha) f_1(x_i) + h^\alpha \sum_{i=1}^{s} w_{ni}(\alpha) f_1(x_i), \tag{4.73}$$

wobei

$$\begin{aligned} S_j := \{\gamma = \mu + \beta_j \quad | \quad \mu \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \gamma \leq p\}, \quad j \in \mathcal{M} \\ \tilde{S} := \bigcup_{j \in \mathcal{M}} S_j, \quad s := \operatorname{card} \tilde{S} \end{aligned} \tag{4.74}$$

und die Startgewichte $w_{ni}(\alpha)$ durch das lineare System

$$\sum_{i=1}^{s} w_{ni}(\alpha) i^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha)} n^{\gamma+\alpha-1} - \sum_{i=1}^{n} w_{n-i}(\alpha) i^{\gamma-1}, \quad \gamma \in \tilde{S}. \tag{4.75}$$

gegeben sind.

Satz 4.3.2.
Seien folgende Bedingungen erfüllt:

(i) Sei (ρ,σ) ein stabiles, konvergentes, lineares, implizites Mehrschrittverfahren der Ordnung $p \geq 1$ mit allen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\sigma(z)$ betragmäßig höchstens gleich Eins;

(ii) sei $w(z;\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha) z^n := \left(\frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})}\right)^{\alpha}$;

(iii) sei f wie in (4.68) definiert mit
$1 - \min\{1,\alpha\} < \beta_l \leq p, \quad g_l \in C^p([0,X]), \quad l = 1,\ldots,L.$

Die Caputo-Differentialgleichung (4.66) mit ($a_i \in \mathbb{C}$, $\alpha > \alpha_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,m$) werde durch das gebrochene lineare Mehrschrittverfahren (4.69) diskretisiert, wobei die Startgewichte $\bar{w}_{nj}(\alpha-\alpha_i)$ folgendermaßen bestimmt sind:

$$\sum_{j=0}^{\bar{s}} \bar{w}_{nj}(\alpha-\alpha_i) j^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\alpha-\alpha_i)} n^{\gamma+\alpha-\alpha_i-1} - \sum_{j=0}^{n} w_{n-j}(\alpha-\alpha_i) j^{\gamma-1} \quad \gamma \in A, \tag{4.76}$$

mit

$$\begin{aligned} A_l &:= \{\gamma = \mu + \sum_{i=1}^{m} (\alpha-\alpha_i) l_i + \alpha + \beta_l \quad | \quad \mu,\, l_i \in \mathbb{N}_0, \quad \gamma \leq p\}, \\ & \quad l = 1,\ldots,L, \\ A_{L+1} &:= \{\gamma = \mu + \sum_{i=1}^{m} (\alpha-\alpha_i) l_i + 1 \quad | \quad \mu,\, l_i \in \mathbb{N}_0, \quad \gamma \leq p\}, \\ A &:= \bigcup_{l=1}^{L+1} A_l, \quad \bar{s} := \operatorname{card} A - 1; \end{aligned} \tag{4.77}$$

Dann gilt:

$$\max_{0\le n\le N(h)} |u(x_n)-u_n| = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}), \quad 0\le\varepsilon<1,\ \varepsilon \textit{ passend}, \qquad (h\downarrow 0,\ N(h)=[X/h]). \tag{4.78}$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 4.2.3 unter Berücksichtigung der Gestalt (3.187) von $u(x)$ und der Aussagen von Satz 4.1.17 und Satz 4.1.18. □

4.4 Gebrochene lineare Mehrschrittverfahren für Riemann-Liouville-Differentialgleichungen

Die Zurückfürung der gebrochenen Riemann-Liouville-Differentialgleichung

$$(D^\mu u)(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i (D^{\mu_i} u)(x) = f(x), \quad \mu > \mu_i \ge 0 \tag{4.79}$$

auf eine Integralgleichungsform (s. Beweis von Satz 3.4.1) ergibt:

$$u(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i J^{\mu-\mu_i} u(x) = J^\mu f(x) + \tilde{r}(x), \tag{4.80}$$

wobei

$$\tilde{r}(x) = \sum_{q=0}^{\eta-1} \frac{b_q}{\Gamma(\mu-q)} x^{\mu-q-1} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(\sum_{q=0}^{\eta_i-1} \frac{c_{iq}}{\Gamma(\mu-q)} x^{\mu-q-1} \right)$$

mit

$$\begin{aligned} \eta = \lceil\mu\rceil, \quad \eta_i := \lceil\mu_i\rceil,\ i=1,\dots,m, \\ \lim_{x\to 0}(J^{\eta-\mu}u)(x) = b_{\eta-1}, \lim_{x\to 0}(D^{\mu-q-1}u)(x) = b_q,\ (q=0,\dots,\eta-2), \\ \lim_{x\to 0}(J^{\eta_i-\mu_i}u)(x) = c_{i(\eta_i-1)}, \quad \lim_{x\to 0}(D^{\mu_i-q-1}u)(x) = c_{iq}, \\ (i=1,\dots,m;\ q=0,\dots,\eta_i-2). \end{aligned}$$

Sei $f\colon [0,X] \longrightarrow \mathbb{C}$ von der Form

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + f_2(x) = \sum_{l=1}^{L} x^{\beta_l - 1} g_l(x), \qquad f_1(x) = \sum_{l \in \mathcal{M}} x^{\beta_l - 1} g_l(x), \\ f_2(x) &= \sum_{l \notin \mathcal{M}} x^{\beta_l - 1} g_l(x), \quad \mathcal{M} := \{l \quad | \quad g_l(x) \text{ nicht quasipolynomial}\} \end{aligned} \tag{4.81}$$

gegeben.
Ein gebrochenes lineares Mehrschrittverfahren für die Riemann-Liouville-Differentialgleichung (4.66) hat die Form

$$\begin{aligned} u_n =& (J_h^\mu f_1)(x_n) + (J^\mu f_2)(x_n) + \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i h^{\mu - \mu_i} w_{n-j}(\mu - \mu_i) \right) u_j \\ &+ \sum_{j=0}^{\bar{s}} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i h^{\mu - \mu_i} \bar{w}_{nj}(\mu - \mu_i) \right) u_j + \tilde{r}(x_n), \qquad x_n \in G_h(X), \end{aligned} \tag{4.82}$$

$$u_0 := \begin{cases} 0, & \text{falls } u(0) = \infty \\ u(0), & \text{falls } u(0) < \infty \end{cases}$$

mit festem $\bar{s}, \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, wobei $(J_h^\mu f_1)(x_n)$ folgendermaßen bestimmt wird:

Fall 1) $\beta_l \geq 1 \; \forall l \in \mathcal{M} \quad (f_1(0) < \infty)$

$$(J_h^\mu f_1)(x_n) := h^\mu \sum_{i=0}^{n} w_{n-i}(\mu) f_1(x_i) + h^\mu \sum_{i=0}^{s} w_{ni}(\mu) f_1(x_i) \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned} B_l := \{\gamma = \upsilon + \beta_l \quad | \quad \upsilon \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \gamma \leq p\}, \quad l \in \mathcal{M} \\ B := \bigcup_{l \in \mathcal{M}} B_l, \quad s := \operatorname{card} B - 1 \end{aligned} \tag{4.84}$$

mit den Startgewichten $w_{ni}(\mu)$ durch das lineare System

$$\sum_{i=0}^{s} w_{ni}(\mu) i^{\gamma - 1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + \mu)} n^{\gamma + \mu - 1} - \sum_{i=0}^{n} w_{n-i}(\mu) i^{\gamma - 1}, \quad \gamma \in B, \tag{4.85}$$

gegeben;

Fall 2) $f_1(0) = \infty$

$$(J_h^\mu f_1)(x_n) := h^\mu \sum_{i=1}^{n} w_{n-i}(\mu) f_1(x_i) + h^\mu \sum_{i=1}^{s} w_{ni}(\mu) f_1(x_i), \qquad (4.86)$$

wobei

$$\begin{aligned} S_j &:= \{\gamma = \upsilon + \beta_j \quad | \quad \upsilon \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \gamma \le p\}, \quad j \in \mathcal{M} \\ \tilde{S} &:= \bigcup_{j \in \mathcal{M}} S_j, \quad s := \operatorname{card} \tilde{S} \end{aligned} \qquad (4.87)$$

und die Startgewichte $w_{ni}(\mu)$ durch das lineare System

$$\sum_{i=1}^{s} w_{ni}(\mu) i^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+\mu)} n^{\gamma+\mu-1} - \sum_{i=1}^{n} w_{n-i}(\mu) i^{\gamma-1}, \quad \gamma \in \tilde{S}. \qquad (4.88)$$

gegeben.

Satz 4.4.1.
Seien die Voraussetzungen von Satz 3.4.1 erfüllt und f wie in (4.81) *mit*

$$0 < \beta_l \le p, \quad g_l \in C^p([0,X]), \quad l = 1, \ldots, L,$$

definiert.
Sei weiterhin (ρ, σ) ein stabiles, konvergentes, lineares, implizites Mehrschrittverfahren der Ordnung $p \ge 1$ mit allen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\sigma(z)$ betragmäßig höchstens gleich Eins und die Potenzreihe $w(z;\mu)$ folgendermaßen definiert:

$$w(z;\mu) := \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\mu) z^n = \left(\frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})} \right)^{\mu}$$

Die Riemann-Liouville-Differentialgleichung (4.79) *mit* ($\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\mu > \mu_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$) *werde durch das gebrochene lineare Mehrschrittverfahren* (4.82) *diskretisiert, wobei die Startgewichte $\bar{w}_{nj}(\mu - \mu_i)$ folgendermaßen bestimmt sind:*

1) Falls $f \in C_{-\varsigma}$ *mit* $\varsigma := \min\{1, \mu\}$ *und* ($b_{\eta-1} = 0$, *falls* $\mu \notin \mathbb{N}$) *und* ($c_{i(\eta_i-1)} = 0$, *falls* $\eta_i = \eta$, $i = 1, \ldots, m$), *soll das Gleichungssystem*

$$\sum_{j=0}^{\bar{s}} \bar{w}_{nj}(\mu - \mu_i) j^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + \mu - \mu_i)} n^{\gamma+\mu-\mu_i-1} - \sum_{j=0}^{n} w_{n-j}(\mu - \mu_i) j^{\gamma-1}, \qquad \gamma \in C, \tag{4.89}$$

mit

$$\begin{aligned} C_l &:= \{\gamma = \upsilon + \sum_{i=1}^{m} (\mu - \mu_i) l_i + \mu + \beta_l \quad | \quad \upsilon, l_i \in \mathbb{N}_0, \quad \gamma \le p\}, \\ & \quad l = 1, \ldots, L, \\ C_{L+q} &:= \{\gamma = \upsilon + \sum_{i=1}^{m} (\mu - \mu_i) l_i + \mu - q \quad | \quad \mu, l_i \in \mathbb{N}_0, \quad \gamma \le p\}, \\ & \quad q = 1, \ldots, \eta, \\ C &:= \bigcup_{l=1}^{L+\eta} C_l, \quad \bar{s} := \operatorname{card} C - 1 \end{aligned} \tag{4.90}$$

erfüllt sein.

2) Falls $f \in C_{-1} \backslash C_{-\varsigma}$ *oder* ($b_{\eta-1} \neq 0$, *falls* $\mu \notin \mathbb{N}$) *oder* ($c_{i(\eta_i-1)} \neq 0$, *falls* $\eta_i = \eta$, $i = 1, \ldots, m$), *soll das Gleichungssystem*

$$\sum_{j=1}^{\bar{s}} \bar{w}_{nj}(\mu - \mu_i) j^{\gamma-1} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + \mu - \mu_i)} n^{\gamma+\mu-\mu_i-1} - \sum_{j=1}^{n} w_{n-j}(\mu - \mu_i) j^{\gamma-1}, \qquad \gamma \in C, \quad \bar{s} := \operatorname{card} C \ (C \text{ wie in } (4.90)) \tag{4.91}$$

erfüllt sein.
Dann gilt:

$$\max_{0 \le n \le N(h)} |u(x_n) - u_n| = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}), \quad 0 \le \varepsilon < 1, \quad (h \downarrow 0, \ N(h) = [X/h]). \tag{4.92}$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 4.2.3 unter Berücksichtigung der Gestalt (3.149) von $u(x)$ und der Aussagen von Satz 4.1.17 und Satz 4.1.18. Wie man aus (3.149) ablesen kann, ist $u(0) < \infty$, wenn die Voraussetzungen in 1) erfüllt sind und $u(0) = \infty$, wenn die Voraussetzungen in 2) erfüllt sind. □

4.5 Gebrochene lineare Mehrschrittverfahren für eine Klasse von Abel-Volterra-Integralgleichungen

Ein gebrochenes lineares Mehrschrittverfahren für die Abel-Volterra-Integralgleichung (3.113)

$$u(x) + \lambda x^{\beta} J^{\alpha} u(x) = \sum_{k=0}^{m} q_k x^{\gamma_k}$$

hat die Form

$$u_n = -\lambda (nh)^{\beta} h^{\alpha} \left(\sum_{j=0}^{n} w_{n-j}(\alpha) u_j + \sum_{j=0}^{s} w_{nj}(\alpha) u_j \right) + \sum_{k=0}^{m} q_k (nh)^{\gamma_k}. \quad (4.93)$$

Satz 4.5.1.
Sei $\alpha > 0,\ \beta > -\min\{1, \alpha\},\ \lambda \in \mathbb{C},\ \gamma_k > -1,\ q_k \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.
Seien weiterhin folgende Bedingungen erfüllt:

(i) Sei (ρ, σ) *ein stabiles, konvergentes, lineares, implizites Mehrschrittverfahren der Ordnung* $p \geq 1$ *mit allen Nullstellen des charakteristischen Polynoms* $\sigma(z)$ *betragmäßig höchstens gleich Eins;*

(ii) sei $w(z; \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha) z^n := \left(\frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})} \right)^{\alpha}$*;*

Die Integralgleichung (3.113) *werde durch das gebrochene lineare Mehrschrittverfahren* (4.93) *diskretisiert, wobei die Startgewichte* $w_{nj}(\alpha)$ *folgendermaßen bestimmt sind:*

1) Falls $\gamma_k \geq 0$ $(k = 1, \ldots, m)$ *soll das Gleichungssystem*

$$\sum_{j=0}^{s} w_{nj}(\alpha) j^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} n^{\gamma+\alpha} - \sum_{j=0}^{n} w_{n-j}(\alpha) j^\gamma, \quad \gamma \in A, \tag{4.94}$$

erfüllt sein. Hierin ist

$$\begin{aligned} A_k &:= \{\gamma = \mu + (\alpha+\beta)l + \gamma_k \,|\, \mu,\, l \in \mathbb{N}_0 \quad \gamma \leq p-1\}, \quad k = 1, \ldots, m, \\ & \qquad A := \bigcup_{k=1}^{m} A_k, \quad s := \operatorname{card} A - 1. \end{aligned} \tag{4.95}$$

2) Falls $\min_{k=1,\ldots,m} \gamma_k < 0$*, soll das Gleichungssystem*

$$\sum_{j=1}^{s} w_{nj}(\alpha) j^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} n^{\gamma+\alpha} - \sum_{j=1}^{n} w_{n-j}(\alpha) j^\gamma, \quad \gamma \in A \tag{4.96}$$

mit $s = \operatorname{card} A$ *(*A *wie in* (4.95)*) erfüllt sein.*

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq n \leq N(h)} |u(x_n) - u_n| = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}), \quad 0 \leq \varepsilon < 1,\ \varepsilon \text{ passend}, \\ (h \downarrow 0,\ N(h) = [X/h]). \end{aligned} \tag{4.97}$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 4.2.3 unter Berücksichtigung der Gestalt (3.114) von $u(x)$. □

Wir betrachten nun die lineare Abel-Volterra-Integralgleichung (3.121):

$$u(x) - a(x)(J^\alpha u)(x) = f(x),$$

wobei die Funktionen $a(x)$ und $f(x)$ die asymptotischen Verhalten für $x \to 0+$ (3.122)

$$a(x) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma(\alpha k + 1)} x^{\alpha k}$$

bzw. (3.123)

$$f(x) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{\psi_k}{\Gamma(\alpha k+1)} x^{\alpha k}$$

haben.
Ein gebrochenes lineares Mehrschrittverfahren für die Abel-Volterra-Integralgleichung (3.121) hat die Form

$$u_n = a(nh)\, h^\alpha \left(\sum_{j=0}^{n} w_{n-j}(\alpha) u_j + \sum_{j=0}^{s} w_{nj}(\alpha) u_j \right) + f(nh). \tag{4.98}$$

Satz 4.5.2.
Sei $\alpha > 0$. f und a haben die asymptotischen Verhalten (3.123) *bzw* (3.122) *mit*

$$a_{-1} \neq \frac{\Gamma(\alpha k+\alpha+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha k+1)} \quad (k=-1,0,1,2,\dots). \tag{4.99}$$

Seien weiterhin folgende Bedingungen erfüllt:

(i) Sei (ρ,σ) ein stabiles, konvergentes, lineares, implizites Mehrschrittverfahren der Ordnung $p \geq 1$ mit allen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\sigma(z)$ betragmäßig höchstens gleich Eins;

(ii) sei $w(z;\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\alpha) z^n := \left(\frac{\sigma(z^{-1})}{\rho(z^{-1})}\right)^\alpha$;

Die Integralgleichung (3.121) *werde durch das gebrochene lineare Mehrschrittverfahren* (4.98) *diskretisiert, wobei die Startgewichte $w_{nj}(\alpha)$ folgendermaßen bestimmt sind:*

1) Falls $\psi_{-1} = 0$, soll das Gleichungssystem

$$\sum_{j=0}^{s} w_{nj}(\alpha) j^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} n^{\gamma+\alpha} - \sum_{j=0}^{n} w_{n-j}(\alpha) j^\gamma, \quad \gamma \in A, \tag{4.100}$$

mit

$$A = \{\gamma = \mu + \alpha l \,|\, \mu,\, l \in \mathbb{N}_0 \quad \gamma \leq p-1\}, \quad s := \operatorname{card} A - 1, \tag{4.101}$$

erfüllt sein.

2) Falls $\psi_{-1} \neq 0$*, soll das Gleichungssystem*

$$\sum_{j=1}^{s} w_{nj}(\alpha) j^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} n^{\gamma+\alpha} - \sum_{j=1}^{n} w_{n-j}(\alpha) j^{\gamma}, \quad \gamma \in \bar{A}, \tag{4.102}$$

$$\bar{A} = \{\gamma = \mu + \alpha(l-1) \,|\, \mu, l \in \mathbb{N}_0 \quad \gamma \le p-1\}, \quad s := \operatorname{card} \bar{A}, \tag{4.103}$$

erfüllt sein.

Dann gilt:

$$\max_{0 \le n \le N(h)} |u(x_n) - u_n| = \mathcal{O}(h^{p-\varepsilon}), \quad 0 \le \varepsilon < 1, \ \varepsilon \textit{ passend}, \\ (h \downarrow 0, \ N(h) = [X/h]). \tag{4.104}$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 4.2.3 unter Berücksichtigung der Gestalt (3.125) von $u(x)$, falls $\psi_{-1} \neq 0$ und der Gestalt (3.136) von $u(x)$, falls $\psi_{-1} = 0$. □

Bemerkung 4.5.3. Satz 4.5.2 gilt auch für den Fall, daß

$$a_{-1} = \frac{\Gamma(\alpha j + \alpha + 1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha j + 1)}$$

für ein $j \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ und das lineare System (3.134) lösbar ist, da unter diesen Bedingungen, nach Bemerkung 3.3.15, $u(x)$ das asymptotische Verhalten (3.135) hat.