

Kapitel 5

Numerische Beispiele

Wir wollen in diesem Kapitel unsere numerischen Erfahrungen mit den im letzten Kapitel beschriebenen Verfahren darstellen. Die Verfahren sind in MATHEMATICA auf einem SUN4M SPARC implementiert worden.

Beispiel 1

$$\begin{aligned} J^{\frac{1}{2}}u(x) - 2J^{\frac{1}{4}}u(x) + u(x) &= g(x), \quad 0 < x \leq X, \\ g(x) &:= \sin^2(\sqrt{2}x) + \cos(x) + \sqrt{\frac{x}{\pi}} \left[1 - {}_1F_2\left(1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; -2x^2\right) + 2 {}_1F_2\left(1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{x^2}{4}\right) \right] \\ &\quad - \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \left[1 - {}_1F_2\left(1, \frac{5}{8}, \frac{9}{8}; -2x^2\right) + 2 {}_1F_2\left(1, \frac{5}{8}, \frac{9}{8}; -\frac{x^2}{4}\right) \right]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Die exakte Lösung ist $u(x) = \sin^2(\sqrt{2}x) + \cos(x)$.

Die rechte Seite $g(x)$ ist von der Form

$$g(x) = g_0(x) + x^{\frac{1}{4}}g_1(x) + x^{\frac{1}{2}}g_2(x),$$

wobei $g_i \in C^\infty[0, X]$, $i = 0, 1, 2$.

Also ist nach Korollar 3.3.8 die Lösung $u(x)$ von (5.1) von der Form

$$u(x) = \tilde{g}_0(x) + x^{\frac{1}{4}}\tilde{g}_1(x) + x^{\frac{1}{2}}\tilde{g}_2(x), \quad \text{mit } \tilde{g}_i \in C^\infty[0, X], \quad i = 0, 1, 2,$$

die wir (da wir zunächst nicht wissen dürfen, daß die Lösung eine ganze Funktion ist) dem numerischen Verfahren zugrundelegen. Daher folgt aus Satz 4.2.3, wenn $p = 3$:

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{ \gamma = \mu + \frac{i}{4} + \frac{j}{2} \mid \mu, i, j \in \mathbb{N}_0, \gamma \leq 2 \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2 \right\}, \\ A_1 &= \left\{ \gamma = \mu + \frac{i}{4} + \frac{j}{2} + \frac{1}{4} \mid \mu, i, j \in \mathbb{N}_0, \gamma \leq 2 \right\} \subset A_0, \\ A_2 &= \left\{ \gamma = \mu + \frac{i}{4} + \frac{j}{2} + \frac{1}{2} \mid \mu, i, j \in \mathbb{N}_0, \gamma \leq 2 \right\} \subset A_0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Somit ist

$$A := A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2 \right\}, \quad \text{und } s := \text{card } A - 1 = 8$$

und die Startgewichte $w_{nj}(\frac{1}{4})$, $w_{nj}(\frac{1}{2})$ werden folgendermaßen bestimmt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^8 w_{nj}(\frac{1}{4}) j^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{5}{4})} n^{\gamma+\frac{1}{4}} - \sum_{j=0}^n w_{n-j}(\frac{1}{4}) j^\gamma, \quad \gamma \in A, \\ \sum_{j=0}^8 w_{nj}(\frac{1}{2}) j^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{3}{2})} n^{\gamma+\frac{1}{2}} - \sum_{j=0}^n w_{n-j}(\frac{1}{2}) j^\gamma, \quad \gamma \in A, \end{aligned} \quad (5.3)$$

wobei die Faltungsgewichte $w_n(\frac{1}{4})$, sowie $w_n(\frac{1}{2})$ aus $(BDF3)^{\frac{1}{4}}$ bzw. $(BDF3)^{\frac{1}{2}}$ stammen (s. Tabelle 4.1).

Dem gebrochenen linearen Mehrschrittverfahren (4.45) entsprechend, erhält man die Approximation u_n an $u(x_n)$ aus der Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} u_0 &= g(0) = 1; \\ u_n &= g(x_n) - \sum_{j=0}^n \left[h^{\frac{1}{2}} w_{n-j}(\frac{1}{2}) + 2h^{\frac{1}{4}} w_{n-j}(\frac{1}{4}) \right] u_j \\ &\quad - \sum_{j=0}^8 \left[h^{\frac{1}{2}} w_{nj}(\frac{1}{2}) + 2h^{\frac{1}{4}} w_{nj}(\frac{1}{4}) \right] u_j. \end{aligned} \quad (5.4)$$

In Tabelle 5.2 wird die experimentelle Konvergenzordnung dargestellt. Sie wird, wenn der Fehler die asymptotische Entwicklung in h die Form

$$u_n^h = u(x_n) + \chi(x_n) h^p + \mathcal{O}(h^\theta), \quad \theta > p,$$

hat, wie üblich mit der Methode von Aitken [Lin85], der Methode der Halbierung der Schrittweite aus

$$p_E \approx \log_2 \left(\frac{u(x_n) - u_n^h}{u(x_n) - u_{2n}^{h/2}} \right), \quad (5.5)$$

wenn die exakte Lösung bekannt ist, und aus

$$\tilde{p}_E \approx \log_2 \left(\frac{u_n^h - u_{2n}^{h/2}}{u_{2n}^{h/2} - u_{4n}^{h/4}} \right), \quad (5.6)$$

wenn die exakte Lösung nicht bekannt ist, geschätzt.

Dabei ist u_n^h die numerisch ermittelte Lösung in x_n im Gitter G_h .

Tabelle 5.1 enthält die Fehler $|u(x_n) - u_n|$ in einigen Gitterpunkten und Tabelle 5.2 die zugehörigen experimentellen Konvergenzordnungen. Wie die Approximationen mit kleiner werdender Schrittweite konvergieren, sieht man gut in Abbildung 5.1 und Abbildung 5.3. In Abbildung 5.1 haben wir die numerischen Lösungen zu den verschiedenen Schrittweiten und die exakte Lösung übereinandergelegt. In Abbildung 5.3, linear interpoliert zwischen den Gitterpunkten, werden die zugehörigen experimentellen Konvergenzordnungen graphisch dargestellt. Es bestätigt sich die theoretisch ermittelte Konvergenzordnung $\mathcal{O}(h^{3-\varepsilon})$ (mit $0 \leq \varepsilon < 1$ passend).

In Abbildung 5.2 werden linear interpoliert zwischen den Gitterpunkten, die Quotienten $\frac{|u(x_n) - u_n|}{h^3}$ für verschiedene Werte von h gezeigt. Es bestätigt sich die gleichmäßige Konvergenz des Fehlers zu einer Funktion $\chi(x)$, d. h., daß der Fehler $u(x_n) - u_n$ von der Form

$$u(x_n) - u_n = \chi(x_n)h^3 + o(h^3) \quad (5.7)$$

ist.

	$h = 2^{-5}$	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
x=0	0	0	0	0	0
0.25	.174E-2	.688E-4	.110E-5	.131E-7	.398E-9
0.50	.249E-2	.948E-4	.213E-5	.808E-7	.100E-7
0.75	.361E-2	.136E-3	.279E-5	.154E-6	.277E-7
1.00	.523E-2	.199E-3	.446E-5	.158E-6	.271E-7
1.25	.752E-2	.291E-3	.750E-5	.732E-7	.764E-8
1.50	.107E-1	.422E-3	.120E-4	.858E-7	.721E-8
1.75	.150E-1	.598E-3	.180E-4	.280E-6	.308E-7
2.00	.209E-1	.835E-3	.256E-4	.469E-6	.321E-7

Tabelle 5.1: Bsp1; Die Fehler $|u(x_n) - u_n|$.

	$h = 2^{-5}$	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}
x=0.25	4.659	5.107	7.249	5.039
0.50	4.713	5.474	4.722	3.011
0.75	4.734	5.606	4.177	2.477
1.00	4.719	4.476	4.818	2.543
1.25	4.690	5.279	6.678	3.261
1.50	4.665	5.133	7.129	3.573
1.75	4.651	5.055	6.008	3.184
2.00	4.647	5.029	5.769	3.868

Tabelle 5.2: Bsp1; Die experimentelle Konvergenzordnung (5.5) zu verschiedenen Werten von h .

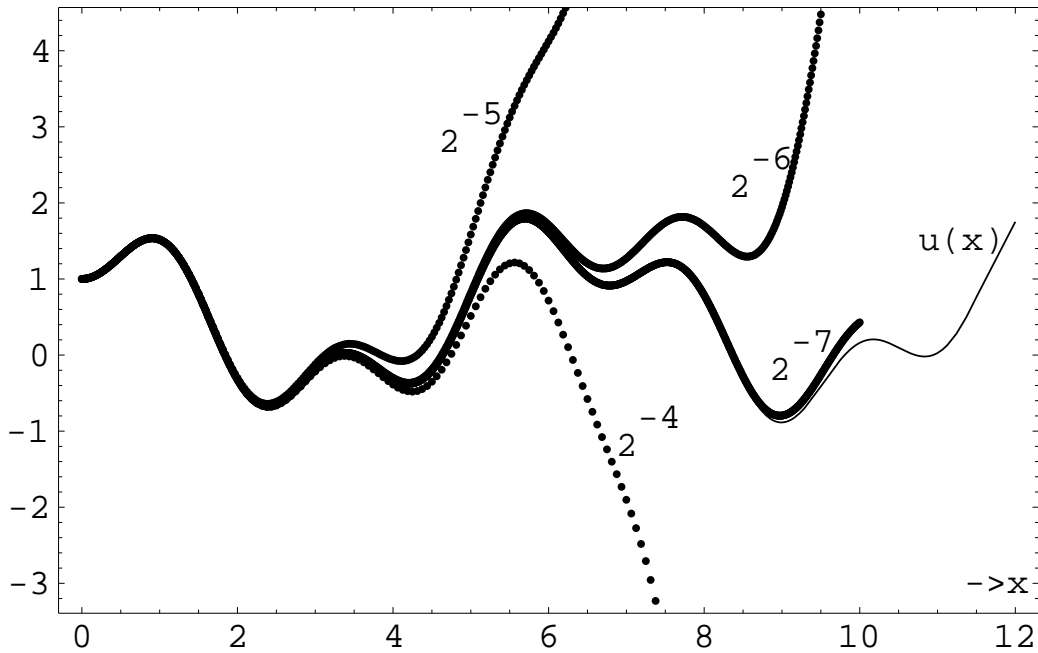


Abbildung 5.1: Bsp1; Die Approximationen an die Lösung $u(x)$ zu den Schrittweiten $h = 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}$.

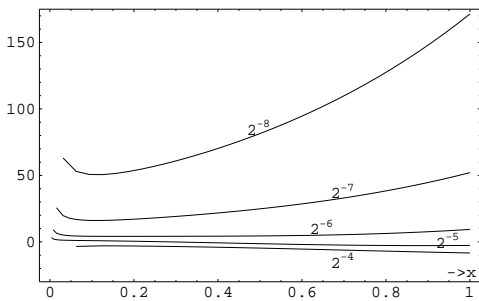


Abbildung 5.2: Bsp1; Die Quotienten $\frac{|u(x_n) - u_n|}{h^3}$ für verschiedene Werte von h .

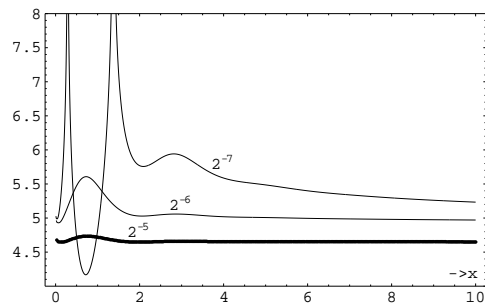


Abbildung 5.3: Bsp1; Die experimentelle Konvergenzordnung (5.5) für verschiedene Werte von h .

Beispiel 2

$$u(x) + \sqrt{2}x^{-\frac{1}{4}}J^{\frac{1}{2}}u(x) = g(x),$$

$$g(x) := -\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} + x^2 \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{13}{4})} \right] - \sum_{i=-1}^7 \left[\frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{i}{4} + \frac{5}{4})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{i}{4} + 1)} \right] x^{\frac{i}{4}} \quad (5.8)$$

Die exakte Lösung ist $u(x) = x^2 - \sum_{i=-2}^7 \frac{x^{\frac{i}{4}}}{\Gamma(\frac{i}{4}+1)}$.

Die Gleichung (5.8) wird wie in (4.93) diskretisiert. Da $g(x)$ die Form

$$g(x) = \sum_{i=-2}^9 q_i x^{\frac{i}{4}}, \quad q_i \in \mathbb{R}$$

hat, werden die Startgewichte $w_{nj}(1/2)$ wie in (4.96) bestimmt. Im Falle $p = 2$ erhält man dabei

$$A = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \right\} \quad \text{und somit } s = 7.$$

Tabelle 5.3 enthält die Fehler $|u(x_n) - u_n|$ in einigen Gitterpunkten und Tabelle 5.4 die zugehörigen experimentellen Konvergenzordnungen. In Abbildung 5.5 haben wir, linear interpoliert zwischen den Gitterpunkten, die experimentellen Konvergenzordnungen P_E graphisch dargestellt. Es bestätigt sich die theoretisch ermittelte Konvergenzordnung $\mathcal{O}(h^{2-\varepsilon})$ (mit $0 \leq \varepsilon < 1$ passend).

Wie sich die Quotienten $\frac{|u(x_n) - u_n|}{h^2}$ mit kleiner werdender Schrittweite verhalten, zeigt Abbildung 5.4. Es bestätigt sich die gleichmäßige Konvergenz des Fehlers zu einer Funktion $\chi(x)$, d. h., daß der Fehler $u(x_n) - u_n$ von der Form

$$u(x_n) - u_n = \chi(x_n)h^2 + o(h^2) \quad (5.9)$$

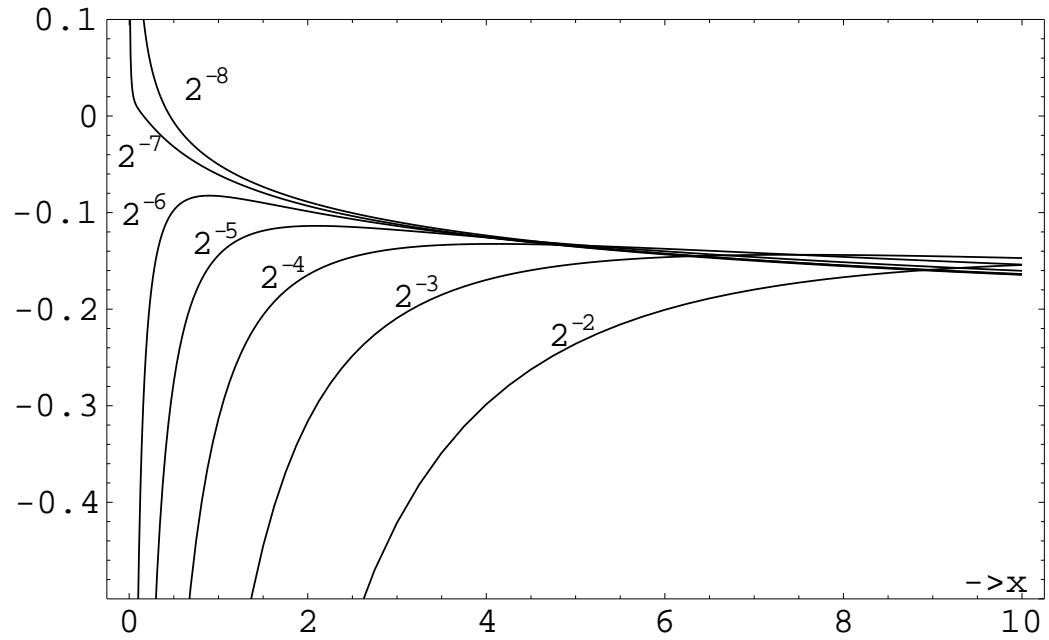
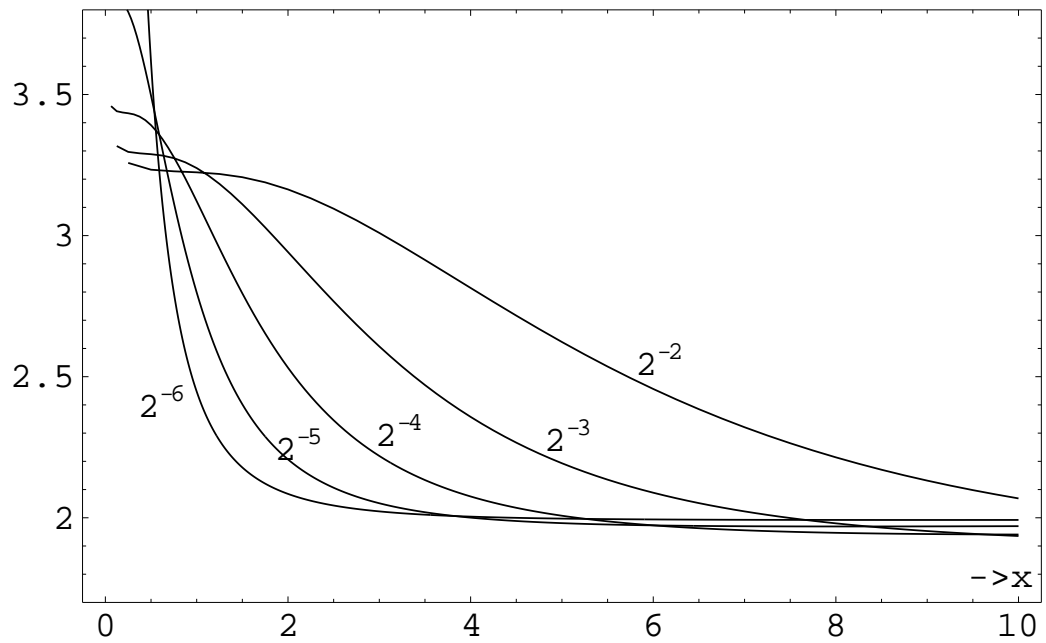
ist.

	$h = 2^{-2}$	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}
x=0	0	0	0	0	0	0	0
1	.108E+0	.116E-1	.122E-2	.141E-3	.202E-4	.371E-5	.766E-6
2	.443E-1	.494E-2	.643E-3	.111E-3	.241E-4	.568E-5	.136E-5
3	.263E-1	.327E-2	.536E-3	.115E-3	.278E-4	.684E-5	.167E-5
4	.187E-1	.265E-2	.517E-3	.123E-3	.307E-4	.765E-5	.189E-5
5	.147E-1	.239E-2	.523E-3	.130E-3	.330E-4	.826E-5	.205E-5
6	.125E-1	.228E-2	.537E-3	.137E-3	.348E-4	.875E-5	.217E-5
7	.112E-1	.225E-2	.553E-3	.143E-3	.364E-4	.915E-5	.228E-5
8	.104E-1	.225E-2	.570E-3	.148E-3	.377E-4	.949E-5	.236E-5
9	.994E-2	.227E-2	.586E-3	.152E-3	.389E-4	.979E-5	.244E-5
10	.964E-2	.230E-2	.600E-3	.157E-3	.399E-4	.100E-4	.250E-5

Tabelle 5.3: Bsp2; Die Fehler $|u(x_n) - u_n|$.

	$h = 2^{-2}$	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
1	3.22	3.25	3.11	2.80	2.45	2.28
2	3.16	2.94	2.53	2.21	2.08	2.07
3	3.01	2.60	2.22	2.05	2.02	2.03
4	2.82	2.36	2.07	2.00	2.00	2.02
5	2.62	2.19	2.01	1.98	2.00	2.01
6	2.45	2.09	1.97	1.97	1.99	2.01
7	2.32	2.02	1.95	1.97	1.99	2.01
8	2.21	2.15	1.95	1.97	1.99	2.01
9	2.13	1.95	1.95	1.97	1.99	2.00
10	2.07	1.94	1.93	1.97	1.99	2.00

Tabelle 5.4: Bsp2; Die experimentelle Konvergenzordnung p_E für verschiedene Werte von h .

Abbildung 5.4: Bsp2; $\frac{|u(x_n) - u_n|}{h^2}$.Abbildung 5.5: Bsp2; Die experimentelle Konvergenzordnung p_E .

Beispiel 3

$$u(x) - \frac{1}{3}x^{-\frac{3}{8}} \sin(x^{\frac{1}{8}}) J^{\frac{1}{4}} u(x) = x^{-\frac{1}{4}} \left[\cos(x^{\frac{1}{2}}) - 2 \sin(x^{\frac{3}{4}}) \right] \quad (5.10)$$

Die Gleichung (5.10) wird wie in (4.98) diskretisiert:

$$u_n = \frac{1}{3}(nh)^{-\frac{3}{8}} \sin[(nh)^{\frac{1}{8}}] h^{\frac{1}{4}} \left[\sum_{j=1}^n w_{n-j}(1/4) u_j + \sum_{j=1}^s w_{nj}(1/4) u_j \right] + (nh)^{-\frac{1}{4}} \left[\cos(x^{\frac{1}{2}}) - 2 \sin[(nh)^{\frac{3}{4}}] \right]. \quad (5.11)$$

Da

$$\frac{1}{3} \neq \frac{\Gamma(\frac{k}{4} + \frac{5}{4}) \Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{k}{4} + 1)} \quad (k = -1, 0, 1, 2, \dots),$$

werden die Startgewichte $w_{nj}(1/4)$ wie in (4.102) bestimmt. Wenn das zugrundeliegende Mehrschrittverfahren die 3-stufige Rückwärts-Differenzenmethode (BDF3) ist, dann erhält man dabei:

$$\tilde{A} = \{i/4 \mid i = -1, 0, \dots, 8\} \quad \text{und somit} \quad s := \text{card } \tilde{A} = 10.$$

Tabelle 5.5 enthält die experimentellen Konvergenzordnungen \tilde{p}_E für verschiedene Werte von h . In Abbildung 5.7 haben wir, linear interpoliert zwischen den Gitterpunkten, die experimentellen Konvergenzordnungen \tilde{P}_E graphisch dargestellt. Es bestätigt sich die theoretisch ermittelte Konvergenzordnung $\mathcal{O}(h^{3-\varepsilon})$ (mit $0 \leq \varepsilon < 1$ passend).

	$h = 2^{-1}$	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
x=0.5	5.236	5.414	3.344	4.343	4.644	4.288	4.332
1.0	5.232	5.412	3.343	4.344	4.662	4.331	4.461
1.5	5.231	5.411	3.343	4.350	4.690	4.383	4.632
2.0	5.230	5.411	3.344	4.360	4.723	4.438	4.837
2.5	5.230	5.410	3.345	4.365	4.759	4.489	5.068
3.0	5.230	5.409	3.347	4.373	4.793	4.532	5.305
3.5	5.230	5.408	3.348	4.380	4.822	4.564	5.514
4.0	5.229	5.406	3.349	4.385	4.845	4.582	5.648
4.5	5.230	5.403	3.350	4.390	4.860	4.586	5.673
5.0	5.230	5.400	3.351	4.390	4.867	4.575	5.589

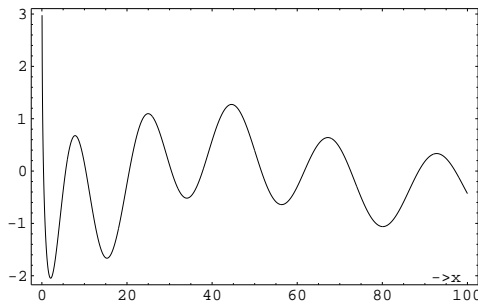
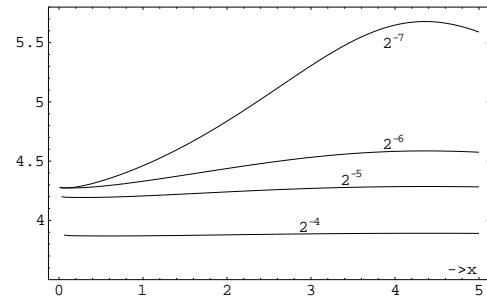
Tabelle 5.5: Bsp3; Die experimentelle Konvergenzordnung \tilde{p}_E .

Abbildung 5.6: Bsp3; Die numerische Lösung von (5.10)

Abbildung 5.7: Bsp3; Die experimentelle Konvergenzordnung \tilde{p}_E .

Beispiel 4

$$\begin{aligned} D_*^c u(x) + \lambda_1 D_*^a u(x) + \lambda_2 D_*^b u(x) + \lambda_3 u(x) &= f(x), \quad c > a > b, \\ u^{(i)}(0) &= d_i, \quad i = 0, \dots, \lceil c \rceil - 1. \end{aligned} \quad (5.12)$$

- (a) Ein Spezialfall von (5.12): Wenn $c = 2$, $a = \frac{3}{2}$, $\lambda_2 = 0$, und $\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$ ist die Anfangswertaufgabe für die inhomogene Bagley-Torvik-Gleichung [Pod]:

$$\begin{aligned} D^2 u(x) + \frac{1}{2} D^{\frac{3}{2}} u(x) + \frac{1}{2} u(x) &= f(x), \quad (x > 0); \\ u(0) = u'(0) &= 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

wobei

$$f(x) = \begin{cases} 8, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad (5.14)$$

Diese Gleichung beschreibt [BT84] die Bewegung einer großen Platte der Fläche S und der Einheitsmasse in einer Newtonschen Flüssigkeit der Viskosität μ und der Dichte $\frac{1}{16S^2\mu}$. Die Platte hängt an einer masselosen Feder der Steifigkeit λ_3 . f stellt die Impulsfunktion dar.

(5.13) ist äquivalent zur Gleichung

$$\frac{1}{2} J^2 u(x) + \frac{1}{2} J^{\frac{1}{2}} u(x) + u(x) = g(x)$$

mit

$$g(x) := J^2 f(x) = \begin{cases} 4x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 8x - 4, & x > 1. \end{cases}$$

Also hat nach Korollar 3.3.8 die Lösung $u(x)$ von (5.13) die Form

$$u(x) = \tilde{g}_0(x) + x^{1/2} \tilde{g}_1(x),$$

wobei $\tilde{g}_i \in C^\infty[0, X]$, $i = 0, 1$.

Wenn das zugrundeliegende Mehrschrittverfahren die 4-stufige Rückwärts-Differenzenmethode (BDF4) ist, dann erhalten wir aus Satz 4.2.3:

$$A = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\} \quad \text{und} \quad s = \text{card } A - 1 = 6.$$

Die Startgewichte $w_{nj}(2)$, $w_{nj}(\frac{1}{2})$ werden aus

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^6 w_{nj}(2)j^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+3)}n^{\gamma+2} - \sum_{j=0}^n w_{n-j}(2)j^\gamma, \quad \gamma \in A, \\ \sum_{j=0}^6 w_{nj}(\frac{1}{2})j^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\frac{3}{2})}n^{\gamma+\frac{1}{2}} - \sum_{j=0}^n w_{n-j}(\frac{1}{2})j^\gamma, \quad \gamma \in A \end{aligned} \quad (5.15)$$

bestimmt, wobei die Faltungsgewichte $w_n(2)$ sowie $w_n(\frac{1}{2})$ aus $(BDF4)^2$ bzw. $(BDF4)^{\frac{1}{2}}$ stammen (s. Tabelle 4.1).

Dem gebrochenen linearen Mehrschrittverfahren (4.45) entsprechend erhält man die Approximation u_n an $u(x_n)$ aus der Rekursionsgleichung

$$\begin{aligned} u_0 &= g(0) = 0; \\ u_n &= g(x_n) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \left[h^{\frac{1}{2}} w_{n-j}(\frac{1}{2}) + h^2 w_{n-j}(2) \right] u_j \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^6 \left[h^{\frac{1}{2}} w_{nj}(\frac{1}{2}) + h^2 w_{nj}(2) \right] u_j. \end{aligned} \quad (5.16)$$

	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
x=0.5	3.270	12.379	4.755	3.304	2.572	3.402	3.682
1.0	3.125	12.518	4.211	3.942	3.186	3.575	3.758
1.5	3.093	7.869	4.412	3.837	3.742	3.842	3.900
2.0	3.103	9.333	3.808	3.523	3.649	3.776	3.861

Tabelle 5.6: Bsp4 (a); Die experimentelle Konvergenzordnung \tilde{p}_E .

In Abbildung 5.8 wird die numerische Lösung von (5.13) gezeigt. In Tabelle 5.6 werden die experimentellen Konvergenzordnungen \tilde{p}_E angegeben. Es bestätigt sich die theoretisch nachgewiesene Konvergenzordnung $\mathcal{O}(h^{4-\varepsilon})$ (mit $0 \leq \varepsilon < 1$ passend).

(b)

$$Du(x) + \frac{1}{2}D_*^a u(x) + u(x) = 1 + x^{-1/2} \cos(2\pi x), \quad 0 < a < 1, \quad (5.17)$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = -1.$$

Die Gleichung (5.17) mit $a = \frac{1}{2}$ ist eine Art Basset-Gleichung – eine Gleichung, die in der Strömungsdynamik verwendet wird, um das Verhalten eines Partikels in einer turbulenten Flüssigkeit unter dem Einfluß der Schwerkraft zu simulieren [MS83, MRS].

Die Gleichung (5.17) ist äquivalent zu

$$Ju(x) + \frac{1}{2}J^{1-a}u(x) + u(x) = x + u(0) \left(1 + \frac{x^{1-a}}{2\Gamma(2-a)}\right) + J(x^{-1/2} \cos(2\pi x)). \quad (5.18)$$

Hier ist das zugrundeliegende Mehrschrittverfahren die 3-stufige Rückwärts-Differenzenmethode (BDF3).

(5.18) wird wie in (4.69) folgendermaßen diskretisiert:

$$u_n = x_n + u(0) \left(1 + \frac{x_n^{1-a}}{2\Gamma(2-a)}\right) + h \left(\sum_{i=1}^n w_{n-i}(1) x_i^{-1/2} \cos(2\pi x_i) + \sum_{i=1}^s w_{ni}(1) x_i^{-1/2} \cos(2\pi x_i) \right) - \sum_{i=0}^n \left(h w_{n-i}(1) + \frac{1}{2} h^{1-a} w_{n-i}(1-a) \right) u_i - \sum_{i=0}^{\bar{s}} \left(h \bar{w}_{ni}(1) + \frac{1}{2} h^{1-a} \bar{w}_{ni}(1-a) \right) u_i, \quad (5.19)$$

wobei s bzw. \bar{s} , wie in (4.74) bzw. (4.77) und die Startgewichte $w_{ni}(1)$ wie in (4.75), $\bar{w}_{ni}(1)$ und $\bar{w}_{ni}(1-a)$ wie in (4.76) bestimmt werden.

Wir möchten mit diesem Beispiel nicht nur zeigen, wie unser Verfahren konvergiert, sondern auch dokumentieren, wie sich die numerischen Lösungen in Abhängigkeit von a ändern.

In Abbildung 5.9-5.15 werden die numerischen Lösungen und die experimentellen Konvergenzordnungen für verschiedene Werte von a gezeigt. Es bestätigt sich die theoretisch nachgewiesene Konvergenzordnung $\mathcal{O}(h^{3-\varepsilon})$ (mit $0 \leq \varepsilon < 1$ passend).

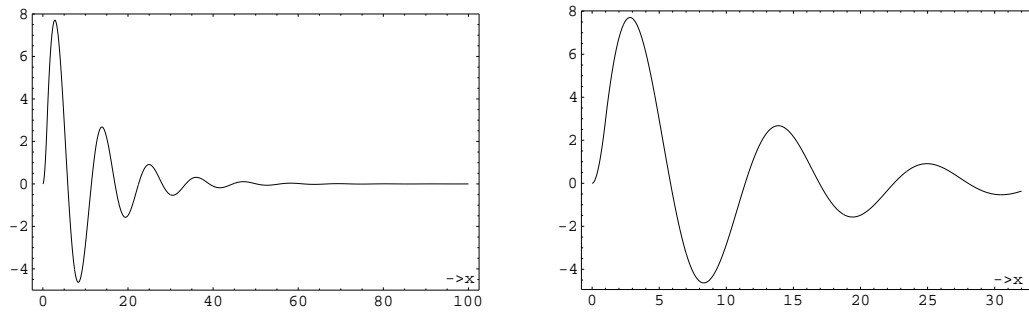


Abbildung 5.8: Die numerische Lösung der Bagley-Torvik-Gleichung (5.13) .

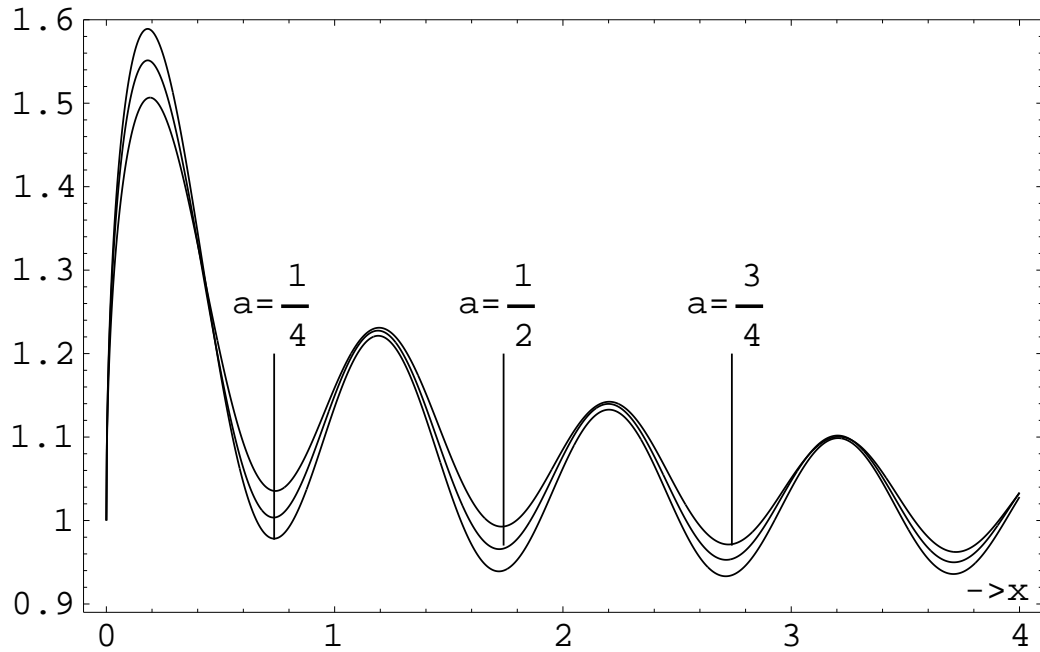


Abbildung 5.9: Bsp4(b); Die numerischen Lösungen von (5.17) für die verschiedenen Werte von $a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.

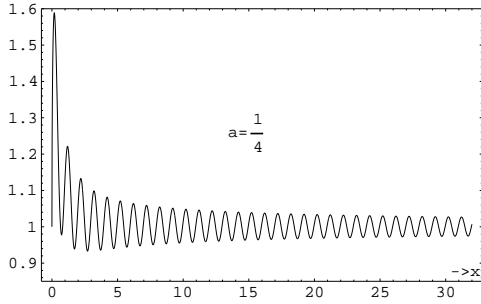


Abbildung 5.10: Bsp4(b); Die numerische Lösung von (5.17) für $a = \frac{1}{4}$.

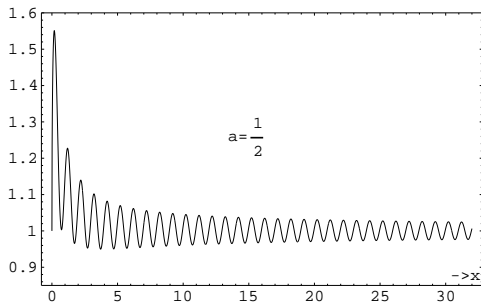


Abbildung 5.12: Bsp4(b); Die numerische Lösung von (5.17) für $a = \frac{1}{2}$.

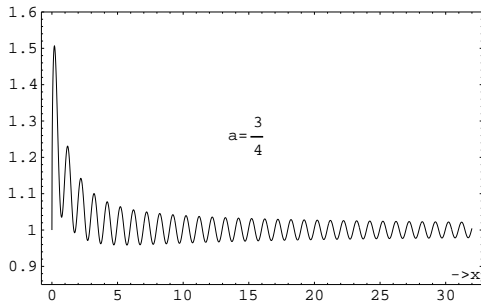


Abbildung 5.14: Bsp4(b); Die numerische Lösung von (5.17) für $a = \frac{3}{4}$.

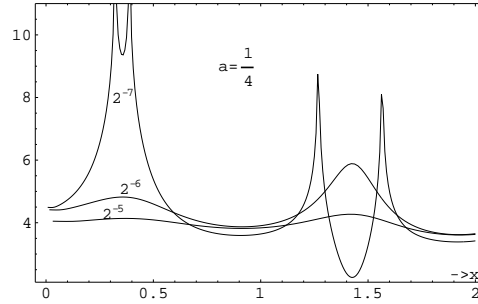


Abbildung 5.11: Bsp4(b); Die experimentelle Konvergenzordnung \tilde{P}_E für $a = \frac{1}{4}$.

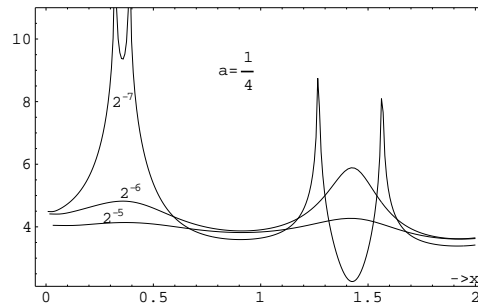


Abbildung 5.13: Bsp4(b); Die experimentelle Konvergenzordnung \tilde{P}_E für $a = \frac{1}{2}$.

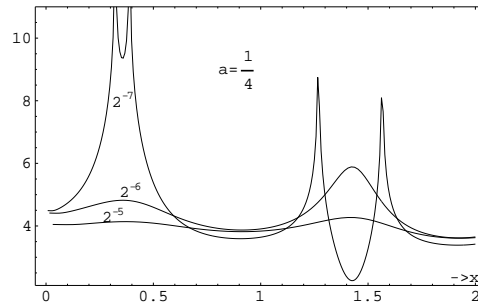


Abbildung 5.15: Bsp4(b); Die experimentelle Konvergenzordnung \tilde{P}_E für $a = \frac{3}{4}$.

(c)

$$D^2u(x) + \frac{1}{2}D_*^a u(x) + u(x) = 1 + x^{-1/2} \cos(2\pi x), \quad 0 < a < 2, \quad (5.20)$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = -1.$$

Die Gleichung (5.20) ist äquivalent zu

$$u(x) + \frac{1}{2}J^{2-a}u(x) + J^2u(x) = f_2(x) + J^2(x^{-1/2} \cos(2\pi x)), \quad (5.21)$$

mit

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + u(0) \left(1 + \frac{x^{2-a}}{2\Gamma(3-a)}\right) + xu'(0), & \text{falls } 0 < a \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} + u(0) \left(1 + \frac{x^{2-a}}{2\Gamma(3-a)}\right) + u'(0) \left(x + \frac{x^{3-a}}{2\Gamma(4-a)}\right), & \text{falls } 1 < a \leq 2. \end{cases} \quad (5.22)$$

Hier ist, wie in Beispiel 4(b), das zugrundeliegende Mehrschrittverfahren die 3-stufige Rückwärts-Differenzenmethode (BDF3).

Ähnlich wie in Beispiel 4(b) wird (5.21) wie in (4.69) folgendermaßen diskretisiert:

$$\begin{aligned} u_n &= f_2(x_n) \\ &+ h^2 \left(\sum_{i=1}^n w_{n-i}(2) x_i^{-1/2} \cos(2\pi x_i) + \sum_{i=1}^s w_{ni}(2) x_i^{-1/2} \cos(2\pi x_i) \right) \\ &- \sum_{i=0}^n \left(h^2 w_{n-i}(2) + \frac{1}{2} h^{2-a} w_{n-i}(2-a) \right) u_i \\ &- \sum_{i=0}^{\bar{s}} \left(h^2 \bar{w}_{ni}(1) + \frac{1}{2} h^{2-a} \bar{w}_{ni}(2-a) \right) u_i, \end{aligned} \quad (5.23)$$

wobei s bzw. \bar{s} , wie in (4.74) bzw. (4.77) und die Startgewichte $w_{ni}(1)$ wie in (4.75), $\bar{w}_{ni}(1)$ und $\bar{w}_{ni}(1-a)$ wie in (4.76) bestimmt werden.

Wir möchten mit diesem Beispiel nicht nur zeigen, wie unser Verfahren konvergiert, sondern auch dokumentieren, wie sich die numerischen Lösungen in Abhängigkeit von a ändern.

In Abbildung 5.16-5.29 werden die numerischen Lösungen und die experimentellen Konvergenzordnungen \tilde{p}_E für verschiedene Werte von a gezeigt. Es bestätigt sich die theoretisch nachgewiesene Konvergenzordnung $\mathcal{O}(h^{3-\varepsilon})$ (mit $0 \leq \varepsilon < 1$ passend).

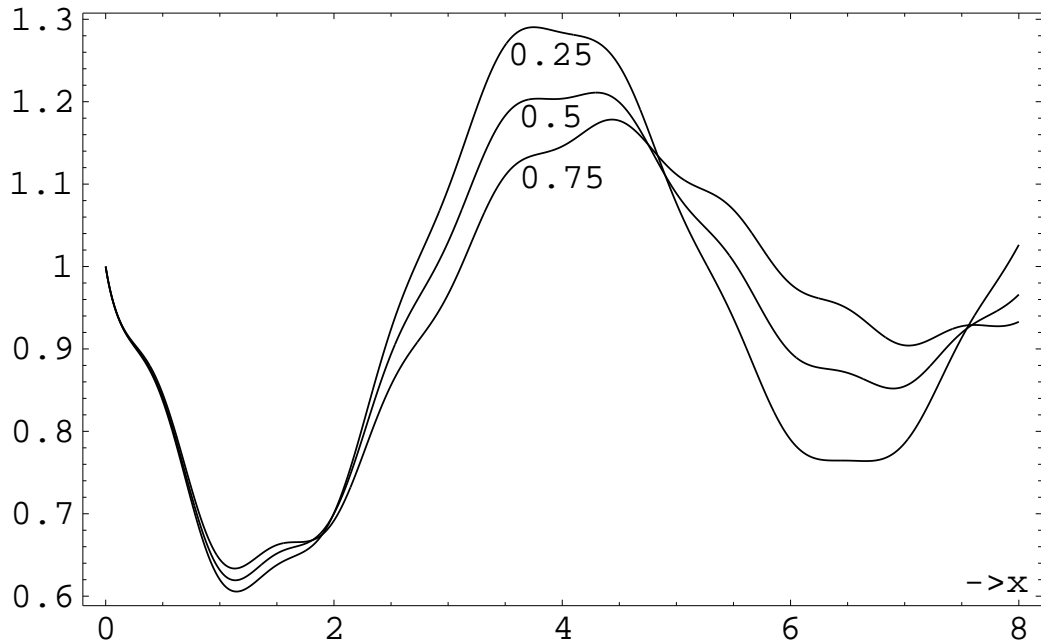


Abbildung 5.16: Bsp4(c); Die numerischen Lösungen von (5.20) für die verschiedenen Werte von $a = 0.25, 0.5, 0.75$.

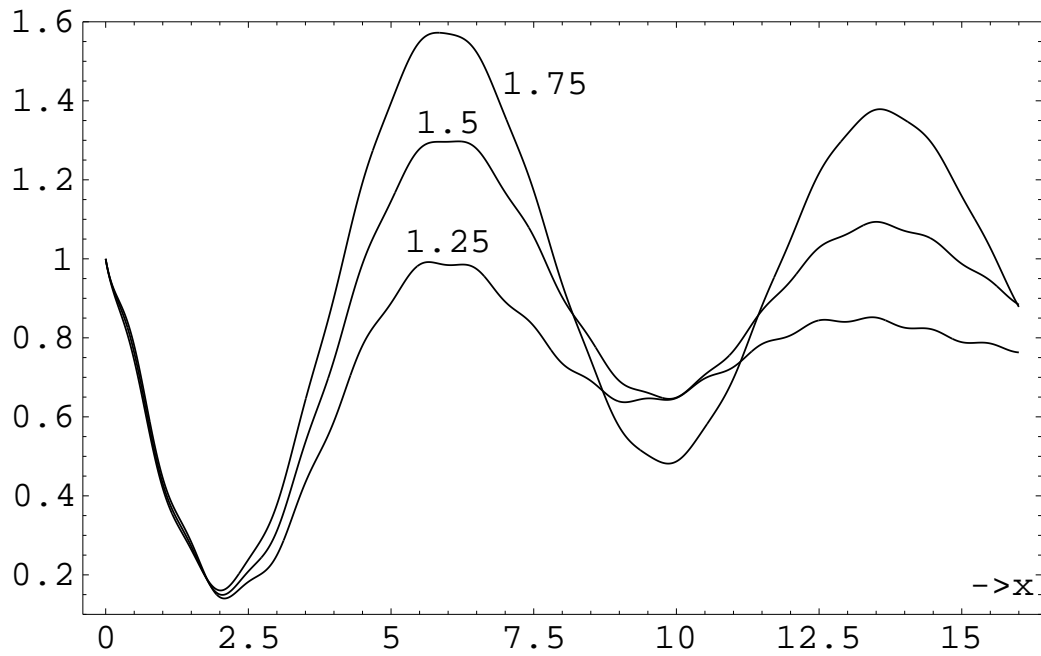


Abbildung 5.17: Bsp4(c); Die numerischen Lösungen von (5.20) für die verschiedenen Werte von $a = \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}$.

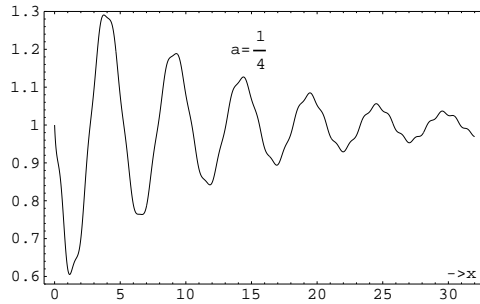


Abbildung 5.18: Bsp4(c); Die numerische Lösung von (5.20) für $a = \frac{1}{4}$.

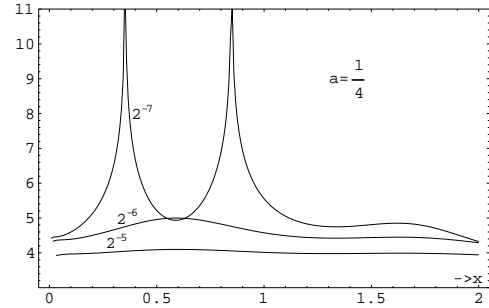


Abbildung 5.19: Bsp4(c); Die experimentelle Konvergenzordnung \tilde{P}_E für $a = \frac{1}{4}$.

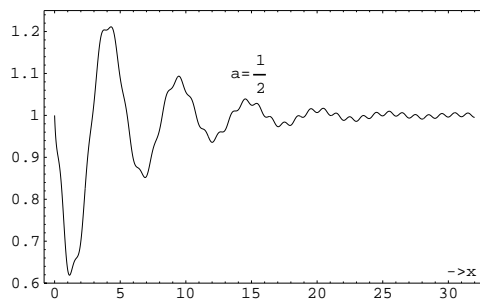


Abbildung 5.20: Bsp4(c); Die numerische Lösung von (5.20) für $a = \frac{1}{2}$.

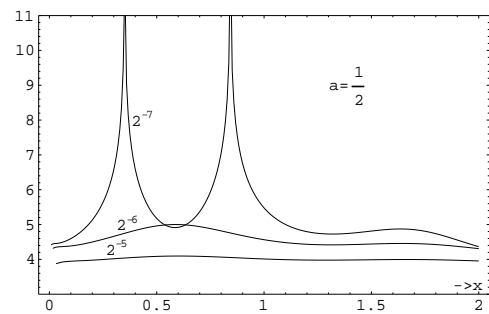


Abbildung 5.21: Bsp4(c); Die experimentelle Konvergenzordnung \tilde{P}_E für $a = \frac{1}{2}$.

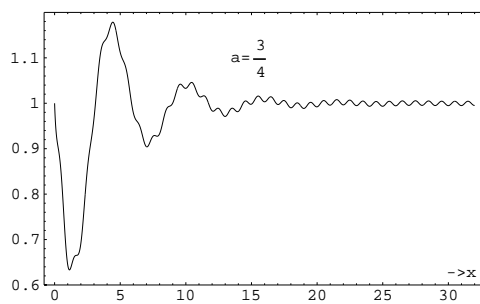


Abbildung 5.22: Bsp4(c); Die numerische Lösung von (5.20) für $a = \frac{3}{4}$.

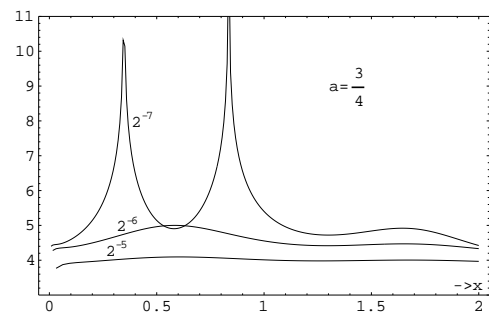


Abbildung 5.23: Bsp4(c); Die experimentelle Konvergenzordnung \tilde{P}_E für $a = \frac{3}{4}$.

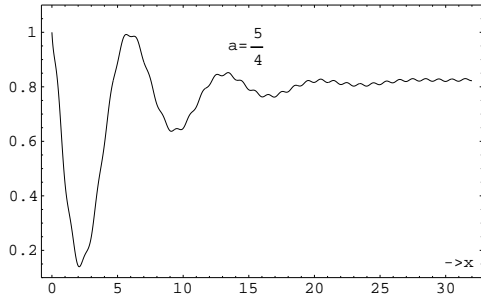


Abbildung 5.24: Bsp4(c); Die numerische Lösung von (5.20) für $a = \frac{5}{4}$.

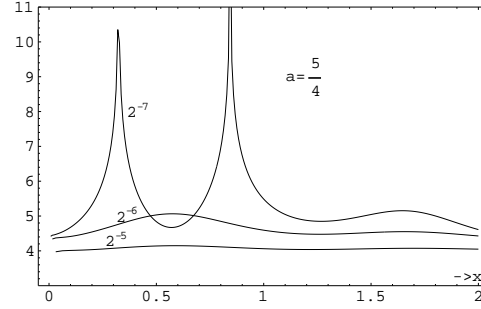


Abbildung 5.25: Bsp4(c); Die experimentelle Konvergenzordnung \tilde{P}_E für $a = \frac{5}{4}$.

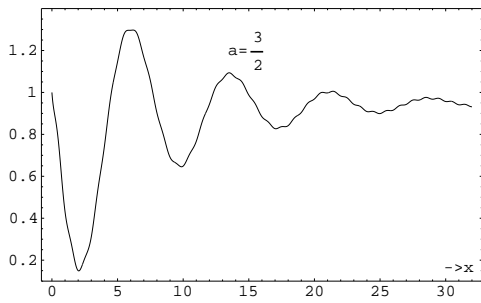


Abbildung 5.26: Bsp4(c); Die numerische Lösung von (5.20) für $a = \frac{3}{2}$.

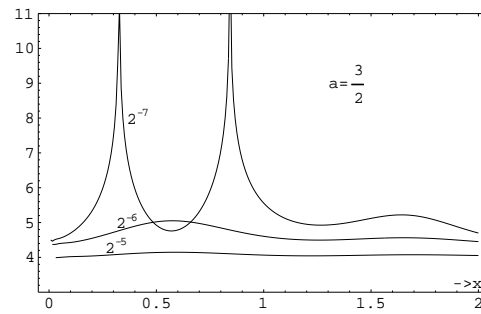


Abbildung 5.27: Bsp4(c); Die experimentelle Konvergenzordnung \tilde{P}_E für $a = \frac{3}{2}$.

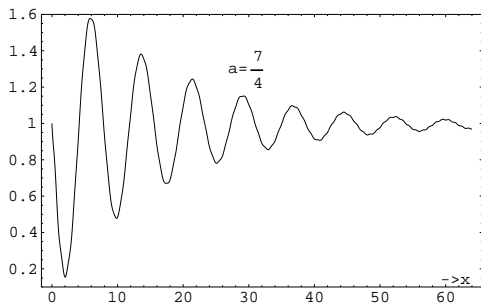


Abbildung 5.28: Bsp4(c); Die numerische Lösung von (5.20) für $a = \frac{7}{4}$.

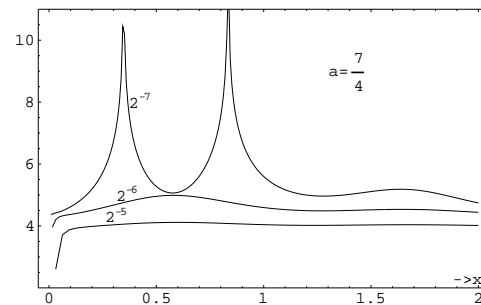


Abbildung 5.29: Bsp4(c); Die experimentelle Konvergenzordnung \tilde{P}_E für $a = \frac{7}{4}$.

