

5 Typen räumlicher Kopplungen

Eine räumliche Kopplung beschreibt die Wechselwirkung der Systemteile untereinander. Jede räumliche Kopplung kann allgemein durch zwei Eigenschaften charakterisiert werden: erstens durch ihre Stärke und zweitens durch ihre Reichweite. Ist die Reichweite sehr klein (Nachbar-Nachbar-Wechselwirkung), so spricht man von lokaler Kopplung; ist die Reichweite hingegen groß, von nicht-lokaler Kopplung. Im Extremfall sehr großer Reichweite (größer als die Systemlänge) und gleichbleibender Stärke spricht man von globaler Kopplung.

Wie in diesem Kapitel gezeigt wird, ist die nicht-lokale oder langreichweitige Kopplung der allgemeinste Fall einer räumlichen Kopplung. Erst in den letzten Jahren hat sich die Forschung verstärkt mit diesem Kopplungstyp beschäftigt, und es gibt bis dato nicht viele Untersuchungen dazu.

Wir betrachten, wie erwähnt, nur Systeme mit *einer räumlichen Dimension*. Um die Haupteigenschaften des Kopplungstyps zu analysieren, ist es sinnvoll, zunächst nur eine Variable $u(x, t)$ zu betrachten.

5.1 Lokale Kopplung

Die lokale Kopplung ist der am besten untersuchte Kopplungstyp, da er von einem Transportprozeß erzeugt wird, der in sehr vielen Systemen auftritt, der Diffusion. Die Vielfalt der Musterbildungsprozesse, die mit diffusiver Kopplung erfolgreich erklärt werden konnten, hat diese geradezu paradigmatisch werden lassen. Dies ist der Grund, warum die Ausdrücke ‚lokale‘ und ‚diffusive‘ Kopplung synonym gebraucht werden. Es gibt aber auch eine Reihe von Systemen, die mit Hilfe eines anderen Transportprozesses kommunizieren, aber dennoch mit lokaler Kopplung adäquat beschrieben werden können, wie in der Einleitung schon erwähnt wurde.

Nach dem ersten Fickschen Gesetz ist die Teilchenstromdichte j proportional zum Konzentrationsgradienten

$$j = -D \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5.1)$$

wobei u die Konzentration der beteiligten Spezies und D die Diffusionskonstante ist. Das negative Vorzeichen bedeutet, daß Materie von hohen zu niedrigen Konzentrationen transportiert wird.

Wenn D unabhängig vom Ort und u keine Funktion von x ist, folgt aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}. \quad (5.2)$$

Mit (5.1) lautet das zweite Ficksche Gesetz

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.3)$$

Auf einer unendlich ausgedehnten Domäne und einer δ -förmigen Störung, kann man die partielle Differentialgleichung (5.3) lösen:

$$c(x, t) = C \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi \cdot D \cdot t}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4 \cdot D \cdot t}\right), \quad (5.4)$$

wobei die konstante C durch die Anfangsbedingungen bestimmt wird. Dieser Ansatz setzt voraus, daß Diffusion ein kurzreichweitiger oder lokaler Effekt ist. Dies kann man zeigen (siehe [40]), wenn man in Gl. (5.3) den Laplace-Operator analysiert: Dieser mittelt lediglich über die *umgebenden* Konzentrationen, da man den Differentialoperator als Grenzfall $R \rightarrow 0$ der Abweichung vom Mittelwert der Konzentration $\langle u \rangle$ in einer Umgebung U mit dem Abstand R um x schreiben kann. Im folgenden wird also gezeigt, daß

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left(\frac{\langle u(x, t) \rangle - u(x, t)}{R^2} \right) \rightarrow \nabla^2 u \text{ gilt.} \quad (5.5)$$

Der Mittelwert ist durch die Integration über U gegeben:

$$\bar{u} = \langle u(x, t) \rangle := \frac{1}{2R} \cdot \int_U u(x+r, t) dr. \quad (5.6)$$

Da der Abstand R gegen Null geht ($R \rightarrow 0$) kann $u(x+r, t)$ um x herum Taylor-entwickelt werden:

$$u(x+r, t) = u(x, t) + r \cdot \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{r=x} + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{r=x} + \dots \quad (5.7)$$

Eingesetzt in Gl. (5.6) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{2R} \cdot \left[u(x, t) \cdot \int_U dr + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \int_U r^2 dr + \dots \right] \\ &= u(x, t) + \frac{2}{3} \cdot R^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \end{aligned} \quad (5.8)$$

Aus Symmetriegründen verschwinden die Integrale über die ungeraden Funktionen.

Vergleicht man den Ausdruck (5.8) mit Gl. (5.5), dann sieht man, daß die Terme dritter und höherer Ordnung verschwinden ($R \rightarrow 0$). Damit ist also gezeigt, daß (5.5) gilt, mithin, daß der Laplace-Operator eine lokale Kopplung beschreibt.

Verwendet man periodische Randbedingungen, so ist eine sinnvolle Transformation für den Ort:

$$\frac{2\pi}{L} \cdot x \rightarrow x. \quad (5.9)$$

Mit einer geeigneten Transformation für u und $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \cdot D \rightarrow D$. So kann man die dimensionslose Diffusionsgleichung wie Gl. (5.3) schreiben.

Entwickelt man u in einer Fourier-Reihe mit Wellenvektor n für periodische Randbedingungen:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cdot \cos[n \cdot x] + b_n(t) \cdot \sin[n \cdot x], \quad (5.10)$$

wobei L den Umfang des Systems bezeichnet, so ergeben sich die zeitlichen Entwicklungen der Fourier-Koeffizienten (Modengleichungen) aus (5. 10) eingesetzt in die Diffusionsgleichung (5. 3):

$$\dot{a}_q(t) = -\frac{2\pi \cdot D}{L^2} \cdot q^2 \cdot a_q(t). \quad (5. 11)$$

Die diffusive Kopplung wirkt also nicht auf die homogene Mode ($q=0$), und die hohen Moden werden verstärkt (große q) gedämpft. Diese Eigenschaft erlaubt, schon mit relativ wenigen Moden ein diffusionsgekoppeltes System gut zu beschreiben. Weiterhin wird die Kopplung mit zunehmendem D stärker.

Die diffusive Kopplung kann in Verbindung mit einer Nichtlinearität zu vielfältiger Musterbildung führen. Die typischen Modellgleichungen sind in Kap. 2 besprochen worden (siehe (2. 2)).

5.2 Nicht-lokale Kopplung

Die Definition einer nicht-lokalen Kopplung lautet: Der Wert einer Zustandsvariable am Ort x beeinflusst instantan die Zustandsvariablen an allen Orten in einer Umgebung von x die innerhalb der Reichweite der Kopplung liegt, mit einer Stärke, die ortsabhängig gewichtet ist. Es ist klar, daß die lokale Kopplung ein Spezialfall der nicht-lokalen Kopplung darstellt, nämlich für den Grenzwert, daß die Reichweite gegen Null geht (nur die nächsten Nachbarn). Aber auch die globale Kopplung ist ein Spezialfall der nicht-lokalen, nämlich für den Fall, daß die Reichweite größer oder gleich der Systemlänge ist und die Gewichtungsfunktion ortsunabhängig ist.

Dies zeigt schon, weshalb eine einfache und elegante Modellierung der nicht-lokalen Kopplung von Bedeutung ist.

5.2.1 Erster Ansatz zur Modellierung der nicht-lokalen Kopplung¹

Nimmt man nicht mehr an, daß $j \propto \nabla u$, also implizit, daß die Kopplung lokal ist, sondern allgemeiner, daß der Teilchenstrom eine Funktion des Konzentrationsgradienten ist, so kann man schreiben:

¹ Die Darstellung in den nächsten beiden Abschnitten lehnt sich an [40] an.

$$j = \frac{G}{r \in N(x)} [\nabla u(x+r, t)], \quad (5.12)$$

wobei $N(x)$ eine Umgebung um x ist, in der die Dynamik am Ort x beeinflusst wird, und G eine Funktion des Gradienten ist. Aus Symmetrieüberlegungen heraus kann man folgern, daß der erste Korrekturterm für j zum linearen Gradienten ∇u der Term $\nabla(\nabla^2 u)$ ist. Der Fluß kann also durch

$$j = -D_1 \cdot \nabla u + \nabla D_2 (\nabla^2 u) \quad (5.13)$$

angenähert werden, wobei D_1 und D_2 positive Konstanten sind.

Wiederum ergibt sich für die zeitliche Entwicklung der Konzentration:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (5.14)$$

Sind D_1 und D_2 räumlich konstant, so wird aus (5.14):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_2 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \quad (5.15)$$

Diese Form kann nun mit Gl. (5.3) verglichen werden: Der erste Term entspricht, wie vorher, dem Mittelwert über die nächsten Nachbarn, der zweite Term entspricht einem Beitrag vom Mittelwert über den Mittelwert über die nächsten Nachbarn. Der zweite Term beschreibt daher eine langreichweitige Kopplung, wobei D_2 die langreichweitige Kopplung gewichtet. Diese erste Darstellung einer nicht-lokalen Kopplung ist aber wegen (5.13) eine Näherung; eine allgemeinere Formulierung wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

5.2.2 Integral- und Differentialdarstellung der langreichweitigen Kopplung

Allgemein kann ein nicht-lokales Wechselwirkungspotential $W(x)$ geschrieben werden als das Integral über die Variable gewichtet mit einem ortsabhängigen Potential $w(x-x')$.

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x-x') \cdot u(x') \cdot dx' \quad (5.16)$$

$w(x-x')$ quantifiziert also den Beitrag eines Ortes x' zur zeitlichen Änderung am Ort x .

Der Teilchenstrom ist dann gegeben durch

$$j = -\frac{\partial W(x)}{\partial x} \quad (5.17)$$

Eine adäquate Näherung für das Wechselwirkungspotential $W(x)$ besteht darin, durch eine Taylor-Entwicklung der betrachteten Variablen u um x herum zu einer Differentialdarstellung zu gelangen und so die Darstellung aus dem vorangegangenen Abschnitt wiederzugewinnen.

Mit $y = x - x'$, gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(x-x') \cdot u(x') \cdot dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} w(y) \cdot u(x-y) \cdot dy \quad (5.18)$$

Expandiert man nun $u(x-y)$ in einer kleinen x_0 -Umgebung um x herum in einer Taylor-Reihe, erhält man:

$$W(x) \cong \int_{-\infty}^{+\infty} w(y) \cdot \left[u(x) - y \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{y^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{y^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \dots \right] \cdot dy \quad (5.19)$$

Ist das Wechselwirkungspotentials $w(y)$ symmetrisch um Null, verschwinden alle Integrale über ungerade Funktionen. Man kann demzufolge die Kopplungsfunktion vereinfachen zu:

$$W(x) \cong w_0 \cdot u + w_2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + w_4 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + w_6 \cdot \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \dots \quad (5.20)$$

mit

$$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} w(y) dy, \quad w_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot w(y) dy, \quad w_4 = \frac{1}{4!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y^4 \cdot w(y) dy \quad \text{usw.} \quad (5.21)$$

Die spezielle Form der Gewichtungsfunktion $w(x-x')$ bestimmt die Beiträge der Zustandsvariablen an den verschiedenen Orten x' zu einer Störung an einem Ort x . Das Vorzeichen von w_{\max} entscheidet darüber, ob die Wirkung einer Veränderung an den Orten x' am Ort x positiv oder negativ eingehen.

5.2.3 Spezielle Gewichtungsfunktion: die Gauß-Kurve

Von Fall zu Fall muß $w(x)$ spezifiziert werden. Eine sehr allgemeine Funktion ist die Gauß-Verteilung mit der Stärke w_{\max} und der Reichweite x_0 mit Symmetriezentrum Null:

$$w(x) = \frac{w_{\max}}{\sqrt{\pi} \cdot x_0} \cdot \exp\left[-\frac{x^2}{x_0^2}\right]. \quad (5.22)$$

Damit können nun die Koeffizienten $w_0, w_2, w_4 \dots$ der Differentialdarstellung der nicht-lokalen Kopplung in Gl. (5.20) ausgerechnet werden [122].

$$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx = \frac{w_{\max}}{\sqrt{\pi} x_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{x^2}{x_0^2}\right] dx = w_{\max}, \quad (5.23)$$

$$w_2 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot w(x) dx = \frac{w_{\max}}{4} \cdot x_0^2, \quad (5.24)$$

$$w_4 = \frac{1}{4!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \cdot w(x) dx = \frac{3 \cdot w_{\max}}{4 \cdot 4!} \cdot x_0^4, \quad (5.25)$$

$$\text{und } w_6 = \frac{1}{6!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 \cdot w(x) dx = \frac{5 \cdot w_{\max}}{4 \cdot 6!} \cdot x_0^6. \quad (5.26)$$

$$\text{Also ist } w_n \propto w_{\max} \cdot x_0^n. \quad (5.27)$$

Das Verhältnis der Koeffizienten der Differentialdarstellung w_n/w_{n-2} ist also x_0^2 . Um herauszufinden, wovon es abhängt, ob w_n kleiner oder größer als w_{n-2} ist, wird hier eine Dimensionsbetrachtung angeschlossen. Mit periodischen Randbedingungen (die hier gewählt werden, da die in dieser Arbeit betrachteten elektrochemischen Systeme periodischen Randbedingungen unterliegen) ist es günstig, den Ort durch $2\pi x/L \rightarrow x$ dimensionslos zu machen. Damit wird auch x_0 gemäß $2\pi x_0/L \rightarrow x_0$ transformiert. Das

dimensionslose x_0 wird also immer dann kleiner Eins sein, wenn sich die langreichweitige Kopplung nicht über die gesamte Systemlänge L erstreckt. Bei langreichweitigen Kopplungen, die sich auf bis zu ca. einem Zehntel der Systemlänge erstrecken, ist also x_0 hinreichend klein gegenüber Eins, so daß die Berechnung der Integrale über $-\infty$ bis $+\infty$ legitim bleibt. Also gilt: $w_n < w_{n-2} < \dots < w_4 < w_2 < w_0$. Das bedeutet, daß der Diffusionsterm in der Differentialdarstellung (die zweite Ableitung) um x_0^2 größer ist als die vierte Ableitung. Ist w_{\max} positiv, d.h. die Kopplung stabilisierend, so kann man für ein sehr kleines x_0 die höheren Terme in guter Näherung vernachlässigen und erhält die bekannte diffusive Kopplung. Ist aber w_{\max} negativ, mithin die Kopplung destabilisierend, so kann man auch bei kleiner Reichweite x_0 die Terme höherer Ordnung, mindestens aber den vierter Ordnung nicht vernachlässigen, da man sonst eine instabile Gleichung erhielte.

Eine weitere Möglichkeit, die langreichweitige Kopplung darzustellen, besteht darin, das Integral im Modenraum auszurechnen (siehe [40]). Dazu wird u in einer Fourier-Reihe entwickelt (siehe Gl. (5. 10)). Mit (5. 18) gilt:

$$W(x) = \int w(y) \cdot u(x-y) \cdot dy = \frac{w_{\max}}{\sqrt{\pi} \cdot x_0} \cdot \int e^{-\frac{y^2}{x_0^2}} \cdot u(x-y) dy \quad (5. 28)$$

Aus den Additionstheoremen für die harmonischen Funktionen eingesetzt in (5. 28), erhält man für die Kopplungsfunktion

$$\begin{aligned} u(x-y, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cdot \cos[n \cdot (x-y)] + b_n(t) \cdot \sin[n \cdot (x-y)] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos[n \cdot x] \cdot (a_n \cdot \cos[n \cdot y] - b_n \cdot \sin[n \cdot y]) \quad , \\ &\quad + \sin[n \cdot x] \cdot (a_n \cdot \sin[n \cdot y] + b_n \cdot \cos[n \cdot y]) \end{aligned} \quad (5. 29)$$

$$W(x) = \frac{w_{\max}}{\sqrt{\pi} \cdot x_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \cos[n \cdot x] \cdot \left(a_n \cdot \int e^{-\frac{y^2}{x_0^2}} \cdot \cos[n \cdot y] dy - b_n \cdot \int e^{-\frac{y^2}{x_0^2}} \cdot \sin[n \cdot y] dy \right) \\ + \sin[n \cdot x] \cdot \left(a_n \cdot \int e^{-\frac{y^2}{x_0^2}} \cdot \sin[n \cdot y] dy + b_n \cdot \int e^{-\frac{y^2}{x_0^2}} \cdot \cos[n \cdot y] dy \right) \end{array} \right\} \quad (5. 30)$$

wobei

$$\frac{w_{\max}}{\sqrt{\pi} \cdot x_0} \cdot \int e^{-\frac{y^2}{x_0^2}} \cdot \cos[n \cdot y] dy = w_{\max} \cdot \exp\left[-\frac{n^2 \cdot x_0^2}{4}\right] \quad (5.31)$$

und

$$\frac{w_{\max}}{\sqrt{\pi} \cdot x_0} \cdot \int e^{-\frac{y^2}{x_0^2}} \cdot \sin[ny] dy = 0 \quad (5.32)$$

ist. Der Ausdruck (5.32) ergibt sich, da der Sinus eine ungerade Funktion, die Gauß-Kurve aber eine gerade Funktion ist.

Damit kann man die Kopplungsfunktion als Fourier-Reihe schreiben

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n \cdot \cos[nx] + B_n \cdot \sin[nx]\} \quad (5.33)$$

mit den Koeffizienten

$$A_n = w_{\max} \cdot \exp\left[-\frac{n^2 \cdot x_0^2}{4}\right] \cdot a_n \quad (5.34)$$

und

$$B_n = w_{\max} \cdot \exp\left[-\frac{n^2 \cdot x_0^2}{4}\right] \cdot b_n \quad (5.35)$$

Es ist demzufolge im Modenraum möglich, die Abhängigkeit der langreichweitigen Kopplungsfunktion von der Reichweite x_0 und der Stärke w_{\max} explizit und ohne Näherung auszurechnen, wenn man für $w(x)$ die Gauß-Kurve verwendet. In [40] wird auch vorgeführt, wie das langreichweitige Wechselwirkungspotential im Modenraum berechnet werden kann, wenn $w(x)$ kurzreichweitig attraktiv und langreichweitig repulsiv ist.

5.2.4 Modell mit langreichweitiger Kopplung

Eine langreichweitige Wechselwirkung $W(x)$ kann einen Transportprozeß $j = -\frac{\partial W(x)}{\partial x}$ induzieren. Der Transportterm lautet dann: $\frac{\partial j}{\partial x} = \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2}$. Die Grundgleichung eines Modells, welches ausschließlich über den langreichweitigen Transportprozeß gekoppelt ist, hat also folgende Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, p) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_0^{2\pi} w(x-x') \cdot u(x') dx' \right). \quad (5.36)$$

Die Variable u kann hier der Aktivator oder der Inhibitor sein.

Mit Gl. (5. 20) und (5. 42) kann unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten w_i alle variablenunabhängig sind, geschrieben werden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, p) + w_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + w_2 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + w_4 \cdot \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \dots, \quad (5.37)$$

wobei $\langle u \rangle$ den Mittelwert von u bezeichnet (siehe (5. 42)).

Die Kopplung in Gleichung (5. 37) kann im Modenraum folgendermaßen geschrieben werden:

$$\text{Kopp}(n) = -w_0 \cdot n^2 + w_2 \cdot n^4 - w_4 \cdot n^6 + \dots \quad (5.38)$$

Man erhält also eine alternierende Reihe in der Wellenzahl n . Je nach Vorzeichen von w_{\max} , also von w_i , beginnt die Reihe positiv (für $w_{\max} > 0$) oder negativ (für $w_{\max} < 0$). Ist $w_{\max} < 0$, so kann der Term sechster Ordnung vernachlässigt werden; ist hingegen $w_{\max} > 0$, so muß er berücksichtigt werden.

Wird das Integral im Modenraum explizit ausgerechnet, so lautet die Kopplung im Modenraum (siehe (5. 33)-(5. 35)):

$$\text{Kopp}_{\text{Gauß}}(n) = -w_{\max} \cdot n^2 \cdot \exp\left[-\frac{n^2 \cdot x_0^2}{4}\right]. \quad (5.39)$$

Verwendet man wieder die Fourier-Reihendarstellung (5. 10) für u , so lautet die Dispersionskurve der langreichweitigen Kopplung:

$$a_n(t) = -w_{\max} \cdot n^2 \cdot \exp\left[-\frac{n^2 \cdot x_0^2}{4}\right]. \quad (5. 40)$$

In einem Ein-Variablen-Modell mit einem Aktivator, der eine desynchronisierende langreichweitige Kopplung hat, kann es schon eine Turing-Bifurkation geben, wie M. Hildebrand [69, 71] gezeigt hat. Weiterhin kann in einem Zwei-Variablen Modell mit desynchronisierend gekoppeltem Aktivator eine Wellenbifurkation stattfinden [70, 72].

5.3 Globale Kopplung

Der andere Grenzfall zur nicht-lokalen Kopplung ist die globale Kopplung; in diesem Fall ist die Reichweite der Kopplung größer oder gleich der Systemlänge, und es werden alle Orte gleichgewichtet beeinflusst. Dieser Kopplungstyp hat in den letzten Jahren verstärkt die Aufmerksamkeit auf sich gezogen, wie schon in der Einleitung beschrieben. Darüber hinaus ist es in vielen Systemen möglich, eine globale Kopplung zusätzlich von außen aufzuprägen (was natürlich bei den anderen Kopplungstypen schwierig ist) und dadurch die Musterbildung zu beeinflussen. Insbesondere ist eine globale Kopplung in der Elektrochemie, wie unten gezeigt wird, in einigen Operationsmodi inherent.

Bei einer globalen Kopplung ist also w nicht mehr ortsabhängig und kann aus dem Integral herausgezogen werden. Bei einer globalen Kopplung und periodischen Randbedingungen geht (5. 16) somit in folgenden Ausdruck über:

$$W(x) = L \cdot s \cdot \int_0^{2\pi} u(x') \cdot dx', \quad (5. 41)$$

mit der Stärke s der Kopplung und der Systemlänge L .

Die globale Kopplung induziert keinen Transport, und so ist die Kopplungsfunktion einfach durch (5. 41) gegeben. Verwendet man die Reihendarstellung (siehe (5. 10)) für $u(x)$, kann die Integration ausgeführt werden. Da die Integration mit periodischen Randbedingungen über harmonische Funktionen Null ergibt, ist das Integral proportional zur homogenen Mode und demnach die Kopplungsfunktion einfach der Mittelwert über $u(x)$:

$$W(x) = L \cdot s \cdot \int_0^{2\pi} u(x) \cdot dx = L \cdot s \cdot 2\pi \cdot a_0 = L \cdot s \cdot 2\pi \cdot \langle u(x) \rangle. \quad (5.42)$$

Die globale Kopplung wirkt also nur auf die homogene Mode.

Ein typisches dimensionsloses Reaktions-Diffusions-Modell mit globaler Kopplung ist also

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v, p) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + s^u \cdot \langle u \rangle, \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v, p) + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + s^v \cdot \langle u \rangle, \quad (5.44)$$

wobei d das Verhältnis der Diffusionskonstanten des Inhibitors D_v zur Diffusionskonstanten D_u des Aktivators bezeichnet. s^u und s^v stellen die dimensionslosen Stärken der globalen Kopplungen des Aktivators respektive des Inhibitors dar. Die Stabilität eines Fixpunktes (u_0, v_0) des homogenen Anteils des Gleichungssystems (5.43)-(5.44) ergibt sich aus der Jacobi-Matrix:

$$J^{\text{hom}} = \begin{pmatrix} f_u + s^u & f_v \\ g_u & g_v + s^v \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)}. \quad (5.45)$$

Ein Fixpunkt (u_0, v_0) ist stabil, wenn die Spur negativ ist, also:

$$\text{Tr}(J^{\text{hom}}) = f_u + g_v + (s^u + s^v) < 0, \quad (5.46)$$

und die Determinante positiv ist, d.h.:

$$\text{Det}(J^{\text{hom}}) = f_u \cdot g_v - f_v \cdot g_u + s^u \cdot g_v + s^v \cdot f_u + s^u \cdot s^v > 0 \quad (5.47)$$

Ist entweder der Aktivator oder der Inhibitor oder sind beide global gekoppelt, so gehen in die Jacobi-Matrix der homogenen Komponenten des Gleichungssystems Terme ein, die von der globalen Kopplung herrühren, nicht aber in die Jacobi-Matrix der inhomogenen Komponenten des Gleichungssystems. Dies hat einen Sprung in der Dispersionsrelation zur Folge, d.h., der Eigenwert der homogenen Mode schließt nicht kontinuierlich an das Eigenwertspektrum der inhomogenen Moden an. Untersuchen wir die Eigenschaften der

globalen Kopplung an einem einfachen System, bei dem sowohl Aktivator als auch Inhibitor lediglich lokal und global, aber nicht langreichweitig gekoppelt sind.

Je nach Vorzeichen der globalen Kopplung wird die homogene Mode stabilisiert oder destabilisiert. Um zu eruieren, welches Vorzeichen welchen Stabilitätseffekt hat, stellen wir folgende einfache Überlegungen an:

Betrachten wir einen homogenen Fixpunkt (u_0, v_0) , der ohne globale Kopplung instabil ist mit den Eigenschaften: $f_u > 0$ und $g_v < 0$ (also $\text{Tr}(J^{\text{hom}}) > 0$ und $\text{Det}(J^{\text{hom}}) < 0$).

Sei $s^u > 0$ und $s^v = 0$. Es ist leicht zu sehen, daß die Spur der homogenen Jacobi-Matrix positiver wird (siehe (5. 46)). Damit wird also eine notwendige Bedingung für die Stabilität des Fixpunktes schwerer erfüllt als ohne globale Kopplung. Die Determinante wird negativer, da $g_v < 0$ ist (siehe (5. 47)); demzufolge ist die weitere Bedingung für die Stabilität des Fixpunktes ebenfalls schwerer erfüllt. *Eine globale Kopplung des Aktivators mit positivem Vorzeichen destabilisiert also die homogene Komponente des Systems.*

Bei einer solchen globalen Kopplung bleibt der Eigenwert der homogenen Mode immer der größte des Eigenwertspektrums. Damit kann eine destabilisierende globale Kopplung nicht zur Herausbildung inhomogener Strukturen führen. Im Gegenteil diese wird erschwert.

Sei nun $s^u < 0$ und $s^v = 0$. Die Spur der homogenen Jacobi-Matrix kann bei hinreichend großen Werten von s^u negativ werden (siehe (5. 46)). Die Determinante wird positiver (siehe (5. 47)); demzufolge ist die zweite Bedingung für die Stabilität des Fixpunktes ebenfalls leichter erfüllt. *Eine globale Kopplung des Aktivators mit negativem Vorzeichen stabilisiert also die homogene Komponente des Systems.*

Dies hat zur Folge, daß, auch wenn die Turing-Bedingungen nicht erfüllt sind, stationäre Strukturen auftreten können. Nehmen wir an, das System sei ohne globale Kopplung oszillatorisch und die Turing-Bedingungen sind nicht erfüllt. Da die Turing-Bedingungen nicht erfüllt sind, ist der Eigenwert der homogenen Mode der größte aus dem ganzen Eigenwertspektrum. Weiterhin ist das Eigenwertspektrum bis zu einer Wellenzahl n_c positiv. Wird nun eine stabilisierende globale Kopplung zusätzlich einbezogen, so kann der Eigenwert der homogenen Mode negativ werden, wenn s^u groß genug ist. Dann ist der größte Eigenwert des Spektrums derjenige, der zur Wellenzahl Eins gehört, und man erhält eine stationäre Struktur mit Wellenzahl Eins. Weiterhin kann die Spur der homogenen

Jacobi-Matrix negativ bei hinreichend großem s^u sein, die Determinante aber negativ sein, so daß der Imaginärteil der Eigenwerte nicht Null ist. Ein solcher Fall kann dann zu Antiphasenoszillationen führen.

Nehmen wir nun $s^u=0$ und $s^v>0$ an. Die Spur der Jacobi-Matrix wird wie im ersten betrachteten Fall positiver (siehe (5. 46)). Damit wird also eine notwendige Bedingung für die Stabilität des Fixpunktes schwerer erfüllt als ohne globale Kopplung. Die Determinante wird aber ebenfalls positiver, da $f_u>0$ ist (siehe (5. 47)). Demzufolge kann der Fixpunkt bei geeigneten Werten von s^u , f_u , f_v , g_u und g_v stabilisiert werden. *Eine globale Kopplung des Inhibitors mit positivem Vorzeichen stabilisiert oder destabilisiert also die homogene Komponente des Systems, je nachdem, wie groß s^v , f_u , f_v , g_u und g_v sind.*

Da die Spur der homogenen Jacobi-Matrix nicht negativ werden kann, muß der Imaginärteil eines Eigenwertes mit positivem Realteil immer verschwinden. Dies hat zur Folge, daß sich bei positiver globaler Kopplung des Inhibitors bei geeigneten Eigenschaften des lokalen Teils des Systems lediglich einfache stationäre Strukturen herausbilden können.

Sei $s^u=0$ und $s^v<0$. Die Spur der Jacobi-Matrix kann wie bei der negativ globalen Kopplung des Aktivators negativ werden (siehe (5. 46)). Die Determinante wird aber, im Gegensatz zum zweiten betrachteten Fall, ebenfalls negativer (siehe (5. 47)). Demzufolge ist die zweite Bedingung für die Stabilität des Fixpunktes schwerer erfüllbar. *Eine globale Kopplung des Inhibitors mit positivem Vorzeichen stabilisiert oder destabilisiert also die homogene Komponente des Systems, je nachdem, wie groß s^v , f_u , f_v , g_u und g_v sind.*