

Kapitel 4

Tagging-Phantomexperimente

Eine verminderte Durchblutung (Perfusion) des Herzmuskels (Myokardischämie), die z.B. von Stenosen in den Herzkranzgefäßen verursacht wird, führt zu einer veränderten Herzbewegung (s. Abschnitt 5.1) [Mai92]. Mit Hilfe bildgebende Verfahren wie der Echokardiographie, der Computertomographie (CT) oder der MRT können geometrische Parameter, wie z.B. das Kammerolumen bzw. die Ejektionsfraktion (EF) oder die Herzwanddicke, bestimmt werden. Die Vermessung der Bewegung bestimmter Punkte, die eine Berechnung der Spannung im Herzmuskel ermöglicht, ist jedoch mit der Echokardiographie oder der CT nur dann möglich, wenn ultraschall- oder röntgensichtbare Markierungen implantiert werden [Ing75][Mey86][Yun91]. Diese stark invasiven Methoden sind für die Diagnostik deshalb ungeeignet. Die MRT erlaubt die Markierung durch eine modulierte Sättigung der Magnetisierung (*myocardial tagging*) [Axe89][Zer88][Bol90]. Dieses Markierungsmuster bewegt sich zusammen mit dem Gewebe und gestattet so, die Herzbewegung auch innerhalb des Myokards zu verfolgen. Diese Methode findet vorwiegend ihre Anwendung in der Analyse der linksventrikulären Funktion, wobei das Problem der (semi)automatischen Konturerkennung gegenwärtig noch nicht befriedigend gelöst ist [Baz94] [Kum94][O'D95][You95][Mou96]. Es ist zur Zeit noch nicht geklärt, ob hohe Feldstärken (3T) durch die zu erwartenden längeren T_1 -Relaxationszeiten bzw. das höhere S/R gegenüber niedrigeren Feldstärken einen Vorteil für das Tagging-Verfahren bedeuten.

In diesem Kapitel werden Experimente an einem durch einen Schrittmotor bewegten Phantom aus Silikon-Gel beschrieben, die die Prüfung verschiedener Methoden, ein Sättigungsmuster zu erzeugen, gestatten.

4.1 Tagging-Präparations-Sequenz

Der Vorgang des *myocardial tagging* kann in drei Schritte unterteilt werden: (i) durch eine Tagging-Präparations-Sequenz wird mit Hilfe von HF- und Gradienten-Pulsen ein Sättigungsmuster im Myokard erzeugt, (ii) eine Serie von MR-Bildern wird aufgenommen, um die Bewegung des Sättigungsmusters zu verfolgen und (iii) durch ein (semi)automatisches Konturerkennungsverfahren quantitativ zu analysieren (s. Abbildung 4.1).

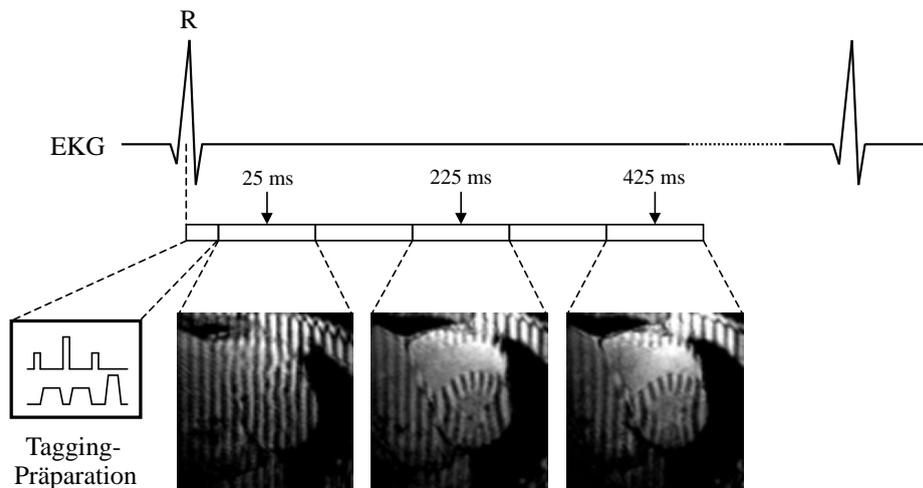


Abbildung 4.1: Prinzip des *myocardial tagging*. Zuerst wird nach einem Trigger-Signal vom EKG ein Sättigungsmuster im Myokard durch eine Präparations-Sequenz erzeugt. Dann wird eine Serie von MR-Bildern aufgenommen, in denen die Bewegung des Sättigungsmusters verfolgt wird. Abschließend kann mit Hilfe eines Konturerkennungsprogrammes die Bewegung des Sättigungsmusters und somit auch des Herzens quantitativ analysiert werden (nicht dargestellt).

Die Sättigung der Magnetisierung reduziert das MR-Signal in dünnen Schichten, die senkrecht zu der abgebildeten Schicht orientiert sind, so daß diese in den MR-Bildern als dunkle Linien (Tagging-Linien) erscheinen. Diese Sättigungsmuster verlieren jedoch durch die Wirkung der Spin-Gitter-Relaxation, bestimmt durch die Relaxationszeit T_1 , und die HF-Anregungspulse der Bildgebung (s. Abschnitt 4.1.3) an Kontrast. Aus den MR-Bildern kann nur die Verschiebung eines Volumenelementes des Gewebes, die senkrecht zu den Tagging-Linien stattgefunden hat, berechnet werden (s. Abbildung 4.2), da ein Punkt einer deformierten Tagging-Linie von jedem Punkt der Ausgangsebene stammen kann. Bewegt sich das Herz während der Aufnahme der Bewegung auch senkrecht zur abgebildeten Schicht (*through-plane motion*), so wird jedesmal eine andere Schicht des Herzmuskels aufgenommen. Deshalb kann aus einem zweidimensionalen Datensatz nicht auf die Bewegung innerhalb der Schicht geschlossen werden. Durch die Aufnahme eines dreidimensionalen Datensatzes mit orthogonalen Tagging-Linien ist eine eindeutige Bestimmung der Verschiebung jedes Volumenelementes möglich und damit die Charakterisierung der Bewegung des gesamten Herzmuskels. Wird aber immer dieselbe Herzschicht im Gegensatz zu derselben Schichtlage relativ zum MR-Tomographen abgebildet (CSPAMM mit *slice-following technique*, s. Abschnitt 4.1.4), kann für Teilaussagen das Problem auch auf zwei Dimensionen reduziert werden. Aus der Bewegungsanalyse ist es möglich auf die mechanische Spannung innerhalb des Myokards zu schließen und somit eine Aussage über die Elastizitätseigenschaften des Herzmuskels zu gestatten. [Baz94][Mou96]

Werden Verfahren zur Erzeugung paralleler Tagging-Linien verwendet (s. Abschnitt 4.1.1 und 4.1.2), so können diese in zwei orthogonalen Richtungen angebracht werden (zweidimensionale Tagging-Präparations-Sequenz). Dies führt zu einem Gitter, wobei die Deformation in beiden Richtungen anhand der Kreuzungspunkte eindeutig bestimmt werden kann. Da bei einer eindimensionalen Tagging-Präparations-Sequenz nur die Bewegung senkrecht zu den Tagging-Linien eindeutig bestimmbar ist, ist eine Reduktion der räumlichen Auflösung der anschlie-

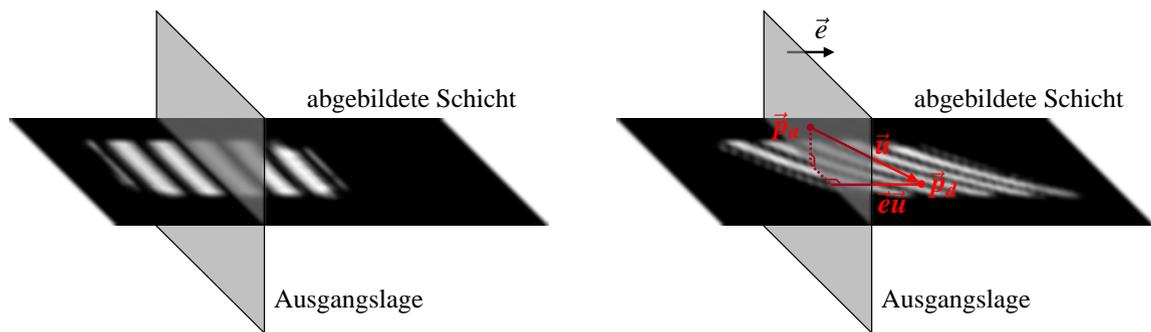


Abbildung 4.2: Aus einer eindimensionalen Modulation des Sättigungsmusters kann nur die Bewegung senkrecht zu den Tagging-Linien ausgewertet werden. (links) Im Ausgangszustand besteht das Sättigungsmuster üblicherweise aus parallelen, „gesättigten“ (dunklen) Ebenen, die senkrecht auf der abgebildeten Schicht stehen. (rechts) Befindet sich ein Punkt \vec{p}_d zu einem späteren Zeitpunkt auf einer Tagginglinie, so kann der Ursprung jeder beliebige Punkt der Ausgangsebene, z.B. \vec{p}_a sein. Von der eigentlichen Bewegung \vec{u} kann nur der Abstand senkrecht zur Ausgangsebene ($e\vec{u}$) bestimmt werden. Die vollständige Bewegung kann durch die Aufnahme von drei Datensätzen mit orthogonalen Tagging-Linien gewonnen werden.

ßenden Bildgebung in Richtung der Tagging-Linien möglich (s. Abschnitt 4.1.2). Wird hierfür die Phasenkodierrichtung gewählt, so ist damit auch eine Reduktion der Aufnahmezeit verbunden, so daß die Aufnahme von zwei Bewegungssequenzen mit orthogonalen Tagging-Linien nicht länger dauern muß als die Anwendung einer zweidimensionalen Tagging-Präparations-Sequenz. Außerdem ist eine eindimensionale Präparations-Sequenz kürzer, wodurch die Bewegung des Objektes früher aufgenommen werden kann. Darüber hinaus ist die automatische Analyse, d.h. die Konturerkennung des Sättigungsmusters, in den Bildern, die mit einer eindimensionalen Tagging-Präparations-Sequenz aufgenommen wurden, einfacher, da durch den automatischer Algorithmus nur Linien und keine Gitter-Kreuzungspunkte aufgefunden werden müssen.

Im folgenden bezeichnet TAG das Sättigungsmuster, d.h. ist $M_z^0(\vec{x})$ die Längsmagnetisierung vor der Tagging-Präparations-Sequenz am Ort \vec{x} ($M_x^0(\vec{x}) = M_y^0(\vec{x}) = 0$), dann gilt für die Längsmagnetisierung danach

$$M_z(\vec{x}) = \text{TAG}(\vec{x})M_z^0(\vec{x}) \quad (4.1)$$

mit

$$-1 \leq \text{TAG}(\vec{x}) \leq 1. \quad (4.2)$$

Auch wenn es eine Vielzahl von Möglichkeiten gibt, das Sättigungsmuster TAG zu erzeugen, werden im Folgenden die zwei am häufigsten verwendeten Methoden, parallele Tagging-Linien zu erzeugen, dargestellt.

4.1.1 DANTE

Aus der NMR-Spektroskopie stammt die DANTE (*Delays Alternating with Nutations for Tailored Excitations*) Anregungssequenz zur frequenzselektiven Anregung [Zer88]. Sie beruht auf dem Konzept, daß eine unendliche Serie von δ -förmigen Anregungspulsen ein Frequenzspek-

trum erzeugt, das ebenfalls aus einer unendlichen Serie δ -förmiger Spektralkomponenten besteht. Wird eine Serie sehr kurzer HF-Pulse während eines konstanten Feldgradienten ausgeführt (s. Abbildung 4.3), so führt dies zu einer Anregung dünner Schichten senkrecht zum Feldgradienten. Der gesamte Drehwinkel wird durch die Summe der Drehwinkel aller HF-Pulse bestimmt. Dieser Sequenz folgt üblicherweise ein kurzer Gradientenpuls (*spoiler*), der die transversale Magnetisierung verwirbeln soll.

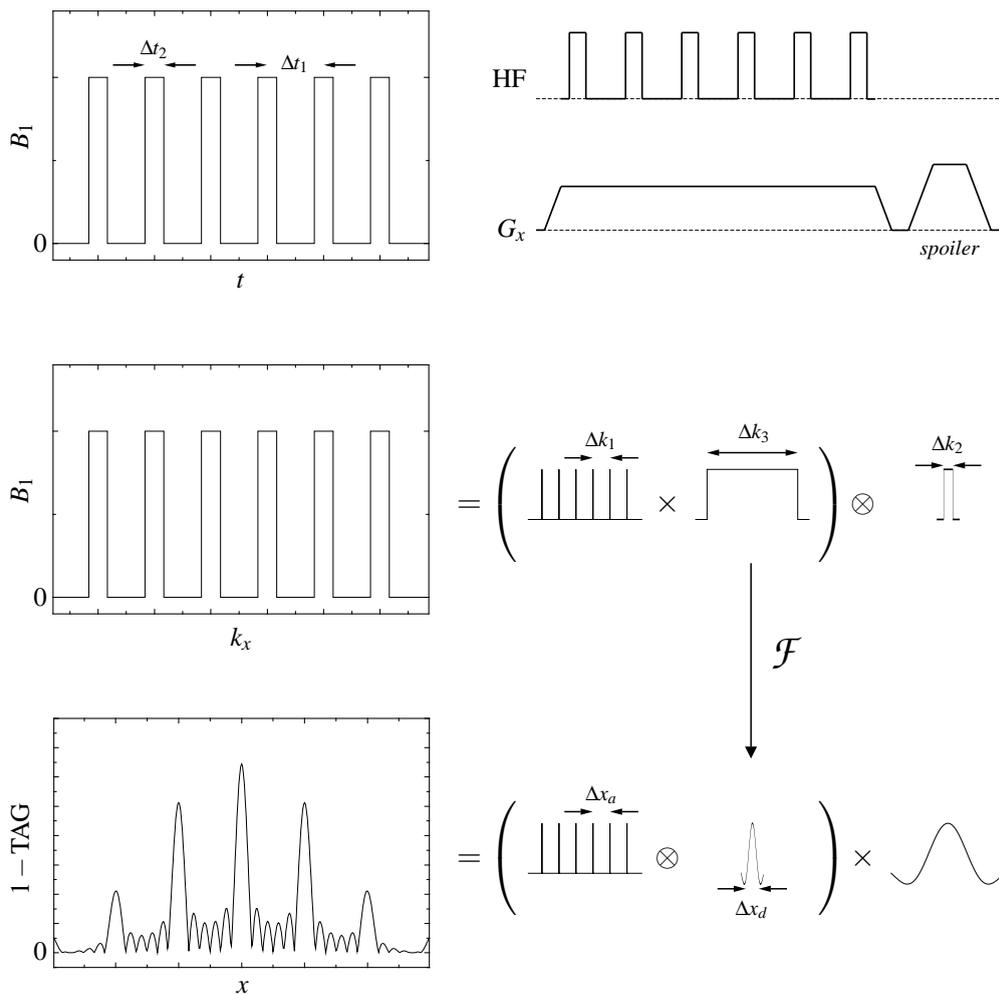


Abbildung 4.3: DANTE Anregungssequenz. (oben) Während eines konstanten Feldgradienten wird eine Serie kurzer HF-Pulse ausgeführt. Die transversale Magnetisierung wird anschließend durch einen *spoiler* verwirbelt. (Mitte, unten) Mit Hilfe des k -Raum-Formalismus (s. Abschnitt 2.6.2) kann das entstehende Sättigungsmuster (TAG) berechnet werden. Durch die Pulsdauer Δt_2 (bzw. das daraus resultierende Δk_2) entsteht ein Intensitätsabfall (Kontrastverlust) der Tagging-Linien zum Rand hin.

Das Sättigungsmuster kann mit Hilfe des k -Raum-Formalismus für den Sendefall (s. Abschnitt 2.6.2) beschrieben werden (s. Abbildung 4.3). Die Serie rechteckförmiger HF-Pulse wird dabei durch eine Serie von δ -Funktionen ($\text{comb}(\Delta k_1)$, s. Gleichung 2.43), die mit der Fensterfunktion $w(k)$ ($\text{rect}(\Delta k_3)$) multipliziert und der rechteckförmigen Funktion $r(k)$ ($\text{rect}(\Delta k_2)$) gefaltet wird,

beschrieben. Die k -Raum-Intervalle Δk_1 , Δk_2 und Δk_3 sind wie folgt definiert:

$$\Delta k_1 = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^{\Delta t_1} G dt = \frac{\gamma}{2\pi} G \Delta t_1 \quad (4.3)$$

$$\Delta k_2 = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^{\Delta t_2} G dt = \frac{\gamma}{2\pi} G \Delta t_2 \quad (4.4)$$

$$\Delta k_3 = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^{N\Delta t_1} G dt = \frac{\gamma}{2\pi} G \Delta t_1 N \quad (4.5)$$

mit Δt_1 = Zeit zwischen zwei HF-Pulsen, Δt_2 = Pulsdauer eines HF-Pulses und N = Anzahl der HF-Pulse. Das Profil einer Tagging-Linie wird somit durch die Fensterfunktion $w(k)$ bestimmt, wobei alternative Formen, wie z.B. ein Intensitätsverhältnis der HF-Pulse entsprechend den Binomialkoeffizienten, die Nebenmaxima verringern (s. Abbildung 4.4a). Im Falle der rechteckförmigen Fensterfunktion ist die Dicke Δx_d (erster Nulldurchgang der sinc-Funktion) einer Tagging-Linie

$$\Delta x_d = \frac{1}{\Delta k_3} = \frac{2\pi}{\gamma G \Delta t_1 N}. \quad (4.6)$$

Der Abstand Δx_a zwischen den einzelnen Tagging-Linien ist

$$\Delta x_a = \frac{1}{\Delta k_1} = \frac{2\pi}{\gamma G \Delta t_1}. \quad (4.7)$$

Ein Nachteil der DANTE Sequenz ist der Intensitätsabfall (Kontrastverlust) der Tagging-Linien zum Rand hin, da aufgrund der Beschränkung der maximalen Leistung des HF-Senders Δt_2 und damit Δk_2 nicht beliebig klein gewählt werden kann (s. Abbildung 4.4b).

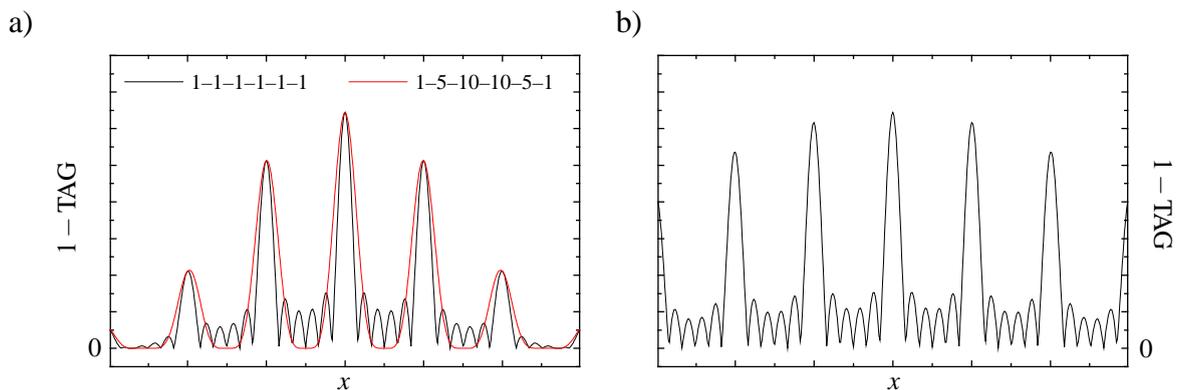


Abbildung 4.4: (a) Auswirkung der Fensterfunktion $w(k)$ auf das Profil der Tagging-Linien. Eine Modulation der Intensitätsverhältnisse der HF-Pulse entsprechend den Binomialkoeffizienten (z.B. 1-5-10-10-5-1) verringert die Nebenmaxima auf Kosten der Dicke der Tagging-Linien. (b) Eine Verkürzung der Dauer der einzelnen HF-Pulse bzw. Erhöhung des Feldgradienten verkürzt Δk_2 , wodurch der Intensitätsabfall zum Rand hin verringert wird. Dargestellt ist eine Halbierung von Δk_2 .

4.1.2 SPAMM

Die Anwendung der SPAMM (*S*patial *M*odulation of *M*agnetization) Methode stellt eine weitere Möglichkeit dar, parallele Tagging-Linien zu erzeugen [Axe89][Axe92][Stu99]. Hierbei wird der Feldgradient während der HF-Pulse ausgeschaltet (s. Abbildung 4.5). Deshalb ist $\Delta k_2 = 0$ (s. Gleichung 4.4), wodurch kein Intensitätsabfall stattfindet. Jedoch benötigt diese Methode kurze Schaltzeiten für das Gradientenfeld und dauert im Gegensatz zur DANTE Sequenz länger, um den gleichen Tagging-Linienabstand zu erzeugen. Eine $1-1^1$ SPAMM Sequenz erzeugt eine sinusförmige Modulation. SPAMM Sequenzen höherer Ordnung, z.B. $1-2-1$ oder $1-3-3-1$, generieren dünnere Tagging-Linien (s. Abbildung 4.6). Im k -Raum (Empfangsfall) wird das Ortsfrequenzspektrum des Objektes mit dem des Sättigungsmusters gefaltet, so daß bei einer eindimensionalen Tagging-Präparations-Sequenz in Ausleserichtung mehrere Maxima auftreten. Durch eine Reduktion des k -Raums in Phasenkodierrichtung (Auflösungsver schlechterung) gehen keine Informationen über das Sättigungsmuster verloren. Im Gegensatz dazu ist dies bei einer zweidimensionalen Präparations-Sequenz nicht möglich (s. Abbildung 4.7).

Die SPAMM Methode ist anfälliger für B_0 -Feldinhomogenitäten als die DANTE Sequenz, da während der HF-Pulse kein Gradientenfeld vorhanden ist. Dadurch kann die parallele Ausgangslage der Tagging-Linien verändert werden (s. Abbildung 4.8). Die Einführung eines 180° -Refokussierungspulses zwischen den beiden Tagging-Pulsen führt wie bei einer Spin-Echo-Sequenz zu einer Umkehr des durch die B_0 -Feldinhomogenität verursachten Effektes, wodurch parallele Tagging-Linien erzeugt werden. Ist der gesamte Drehwinkel größer als 90° , so tritt eine Inversion der Magnetisierung auf, wobei die Tagging-Linien (Intensitätsminima) durch die Betragsbildung in den MR-Bildern abhängig von dem Drehwinkel und Zeitraum zwischen Tagging-Präparationssequenz und MR-Bildgebung zu lokalen Maxima werden können (s. Abbildung 4.9).

4.1.3 Kontrast

Um quantitative Aussagen treffen zu können, muß die Lage der Tagging-Linien zu verschiedenen Zeitpunkten nach der Tagging-Präparations-Sequenz analysiert werden. Dazu erforderlich ist ein ausreichender Kontrast zwischen den Tagging-Linien und den dazwischen liegenden Bereichen. Bei den in diesem Kapitel beschriebenen Phantomexperimenten wurde eine einfache Gradienten-Echo-Sequenz für die Bildgebung verwendet. Da die Aufnahme eines Bildes mit einer solchen Sequenz nicht schnell genug möglich war, um die Bewegung des Objektes während des Aufnahmezeitraumes vernachlässigen zu können, wurde die Aufnahme unterteilt, wobei die Tagging-Präparations-Sequenz jedesmal während des gleichen Bewegungszustandes des Objektes durchgeführt werden mußte. Zu bestimmten Zeitpunkten t_i nach der Tagging-Präparations-Sequenz wurde jeweils eine k -Raum-Zeile und nach N_y Wiederholungen so verschiedene Bewegungszustände des Objektes aufgenommen (s. Abbildung 4.10).

Sind die Zeitintervalle zwischen den einzelnen Anregungen ($\Delta t = t_{i+1} - t_i$) klein im Vergleich zur Spin-Gitter-Relaxationszeit T_1 , stellt sich vor der Tagging-Präparations-Sequenz nicht wie-

¹Drehwinkelverhältnis der HF-Pulse

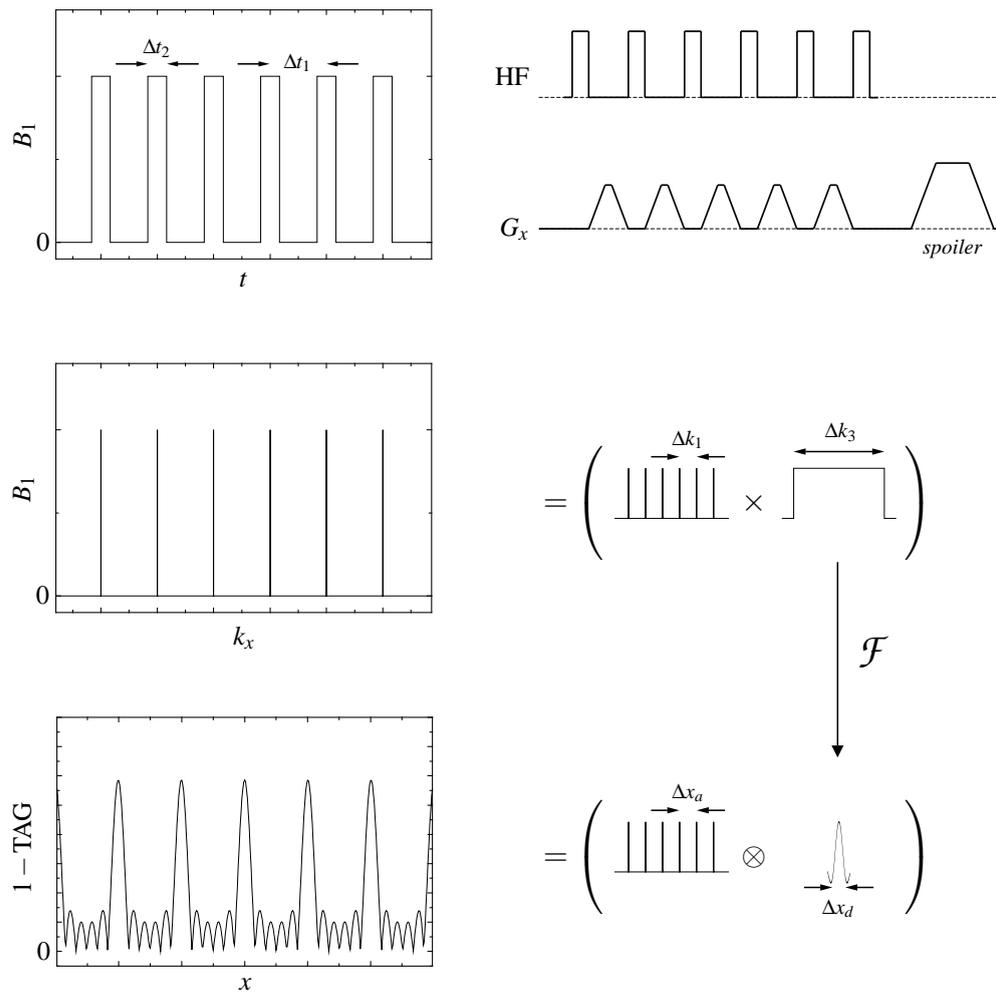


Abbildung 4.5: SPAMM Anregungssequenz. (oben) Zwischen einer Serie von HF-Pulsen wird ein Feldgradient geschaltet. Abschließend wird die transversale Magnetisierung durch einen *spoiler* verwirbelt. (Mitte, unten) Mit Hilfe des k -Raum-Formalismus (s. Abschnitt) kann das entstehende Sättigungsmuster (TAG) berechnet werden. Da im Gegensatz zur DANTE Sequenz (s. Abbildung 4.3) während der HF-Pulse kein Feldgradient anliegt, ist $\Delta k_2 = 0$, wodurch kein Intensitätsabfall der Tagging-Linien zum Rand hin stattfindet.

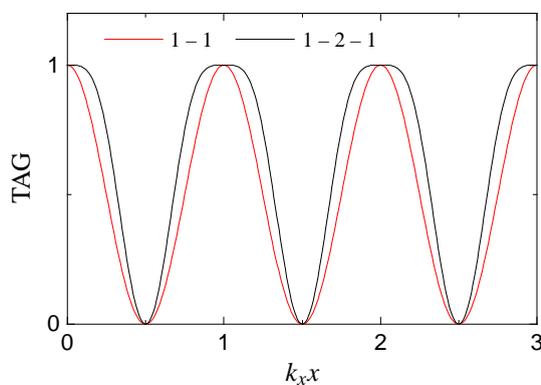


Abbildung 4.6: Modulation der Sättigung einer 1-1 SPAMM ($\text{TAG} = 0,5 + 0,5 \cos 2\pi k_x \cdot x$) und einer 1-2-1 SPAMM ($\text{TAG} = 0,75 - 0,25 \cos 2\pi k_x \cdot x + 0,5 \cos^2 2\pi k_x \cdot x$) Sequenz (Drehwinkel 90°).

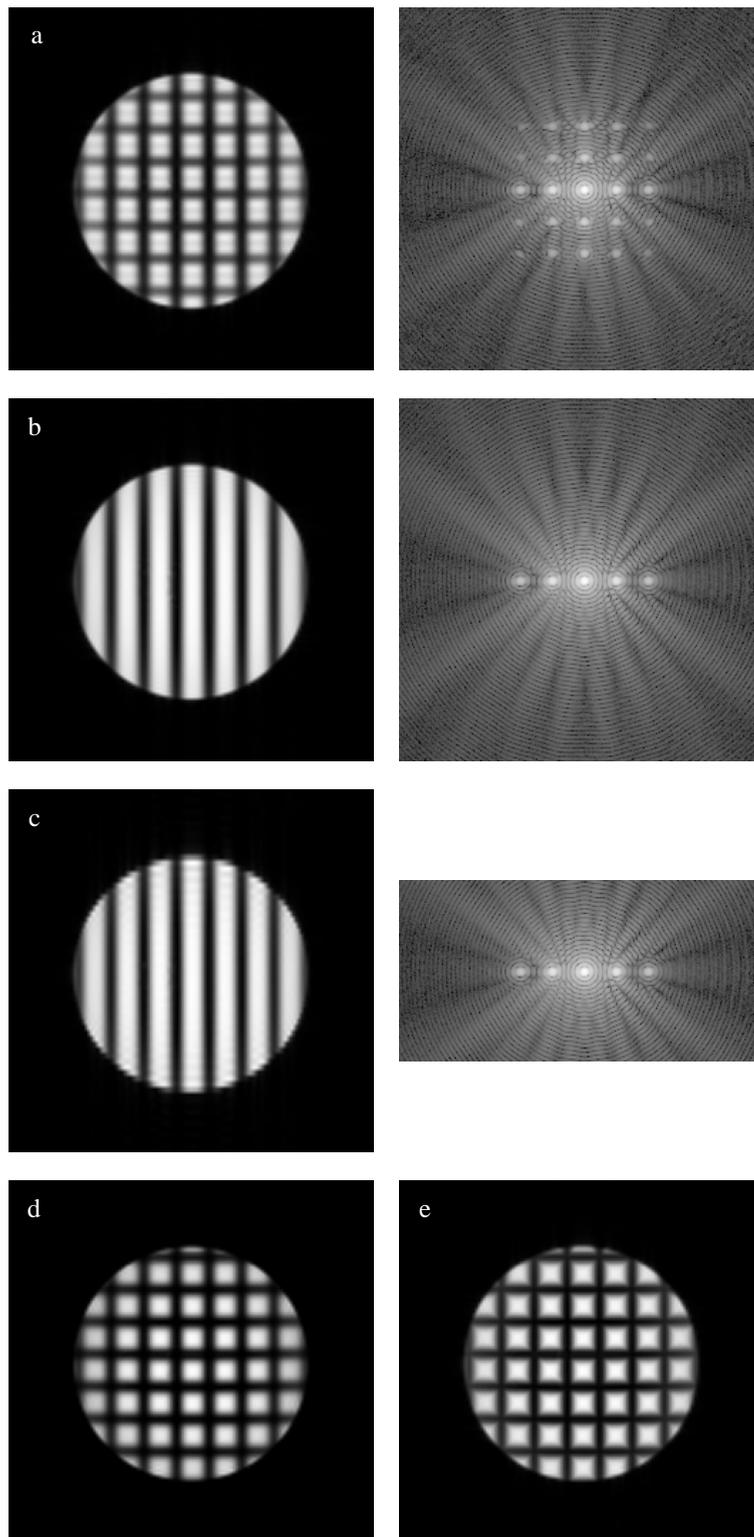


Abbildung 4.7: Phantomaufnahmen (Glaskolben gefüllt mit einer CuSO_4 -Lösung) unter Verwendung einer 1–2–1 SPAMM Präparations-Sequenz. (a) zweidimensionale Präparations-Sequenz mit dazugehörigem k -Raum-Bild (logarithmiert dargestellt), (b) eindimensionale Präparations-Sequenz und (c) wie in (b) mit halber Auflösung parallel zu den Tagging-Linien (Aufnahme des halben k -Raums). Durch die Auflösungsver schlechterung gehen keine wichtigen Informationen senkrecht zu den Tagging-Linien (s. Abbildung 4.2) verloren. Zwei mit reduziertem k -Raum aufgenommene Bilder mit orthogonalen Tagging-Linien können entweder wie in (d) dargestellt durch Multiplikation ($s = s_1 \cdot s_2$) oder wie in (e) gezeigt durch Bestimmung des Minimums ($s = \min(s_1, s_2)$) überlagert werden.

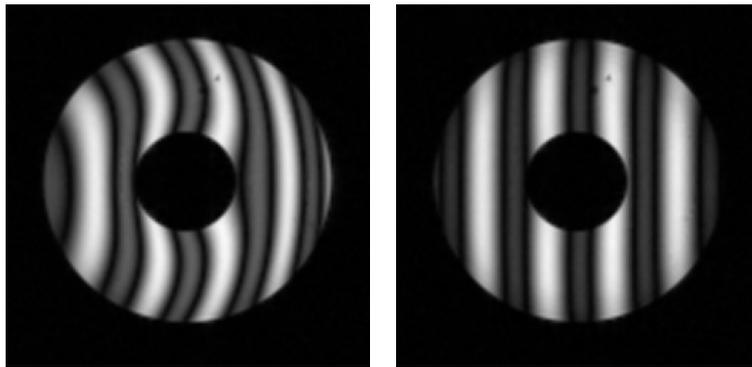


Abbildung 4.8: Phantomaufnahme des Silikon-Gel-Phantoms (s. Abbildung 4.15) unter Verwendung (links) einer 1–1 SPAMM Präparationssquenz und (rechts) mit 180° - Refokussierungspuls. Die Geometrie des Phantoms führt zu einer starken Feldverzerrung, so daß die Tagging-Linien (links) nicht mehr parallel verlaufen.

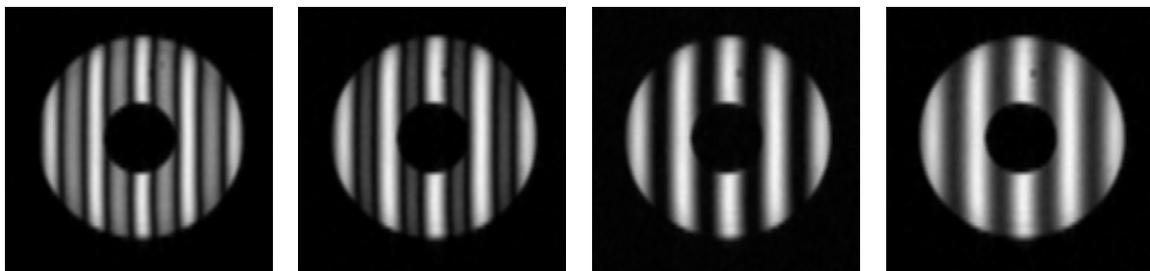


Abbildung 4.9: Phantomaufnahme des Silikon-Gel-Phantoms (s. Abbildung 4.15) unter Verwendung einer 1–1 SPAMM Präparationssquenz mit 180° Refokussierungspuls (Drehwinkel 180°). Das erste Bild ist direkt nach der Tagging-Präparationssequenz aufgenommen worden, die weiteren jeweils 100ms später. Da der Drehwinkel $> 90^\circ$ ist, tritt in bestimmten Bereichen eine Inversion der Magnetisierung auf, die dazu führt, daß die Intensitätsminima durch die Betragsbildung in den MR-Bildern zu lokalen Maxima werden. Mit zunehmender Zeit zwischen der Tagging-Präparation und der Aufnahme nimmt einerseits der Kontrast ab (s. Abschnitt 4.1.3) und die durch die Betragsbildung erzeugten lokalen Maxima verschwinden.

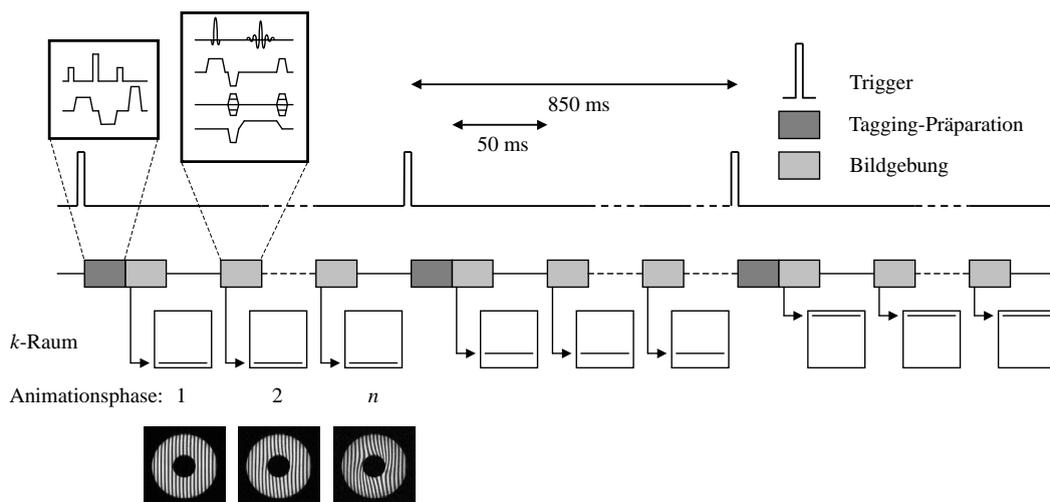


Abbildung 4.10: Prinzip der implementierten Sequenz zur Aufnahme der Bewegung des Silikonphantoms. Ein Triggerpuls synchronisiert die Bewegung des Phantoms mit der MR-Bildgebung. Nach dem Triggerpuls wird zuerst das Sättigungsmuster (1–1 SPAMM mit Refokussierung) erzeugt. In gleichmäßigen Zeitabständen (50 ms) wird eine k -Raum-Zeile der verschiedenen Animationsphasen (insgesamt 16) aufgenommen (s. Abschnitt 4.3). Nach 128 Wiederholungen entsteht so eine Bildsequenz der Bewegung des Phantoms.

der die thermische Gleichgewichtsmagnetisierung M_0 , sondern eine Gleichgewichtsmagnetisierung $M_{ss} < M_0$ ein. Nach der Tagging-Präparations-Sequenz zum Zeitpunkt t_0 ist die z -Komponente der räumlich modulierten Magnetisierung

$$M_z(t_0, \vec{x}) = M_{ss}(\vec{x}) \text{TAG}(\vec{x}). \quad (4.8)$$

Vor dem i -ten Anregungspuls (Drehwinkel α_i , Zeitpunkt t_i) ist die Längsmagnetisierung dann

$$M_z(t_i, \vec{x}) = M_{Ti}(\vec{x}) + M_{Ri}, \quad (4.9)$$

mit der Tagging-Komponente

$$M_{Ti}(\vec{x}) = M_{ss}(\vec{x}) \text{TAG}(\vec{x}) e^{-t_i/T_1} \prod_{j=0}^{i-1} \cos \alpha_j \quad (4.10)$$

$$M_{Ti}(\vec{x}) = M_{ss}(\vec{x}) \text{TAG}(\vec{x}) e^{-t_i/T_1} \quad (4.11)$$

und der Relaxations-Komponente

$$M_{Ri} = M_0 + (M_{Ri-1} \cos \alpha_{i-1} - M_0) e^{-\Delta t/T_1} \quad (4.12)$$

$$M_{Ri} = M_0 \left(1 - e^{-t_i/T_1} \right). \quad (4.13)$$

Für die Quermagnetisierung (∞ Signal) nach dem i -ten Anregungspuls gilt

$$M_{\perp i}(\vec{x}) = \left(M_{Ti}(\vec{x}) + M_{Ri} \right) \sin \alpha_i. \quad (4.14)$$

Vor der nächsten Tagging-Präparations-Sequenz zum Zeitpunkt T_R ist die Längsmagnetisierung nach Gleichung 4.10 und 4.12

$$M_z(T_R, \vec{x}) = M_{ss}(\vec{x}) = M_{ss}(\vec{x}) \text{TAG}(\vec{x}) r_1 + R_2 \quad (4.15)$$

$$r_1 = e^{-T_R/T_1} \prod_{j=0}^n \cos \alpha_j \quad (4.16)$$

$$R_2 = M_{Rn} \cos \alpha_n e^{-(T_R-t_n)/T_1} + M_0 \left(1 - e^{-(T_R-t_n)/T_1} \right). \quad (4.17)$$

Daraus folgt für die Gleichgewichtsmagnetisierung

$$M_{ss}(\vec{x}) = \frac{R_2}{1 - \text{TAG}(\vec{x}) r_1}. \quad (4.18)$$

Ist ΔTAG die Differenz zwischen Maximum und Minimum der Modulation $\text{TAG}(\vec{x})$, so beträgt der Kontrast C_i im i -ten Bild mit der Näherung, daß M_{ss} unabhängig von $\text{TAG}(\vec{x})$ ist ($r_1 \ll 1$, s. Gleichung 4.18),

$$C_i = \frac{\Delta M_{Ti}}{\Delta M_{Ti} + 2M_{Ri}} \quad (4.19)$$

$$\Delta M_{Ti} = \Delta \text{TAG} M_{ss} e^{-t_i/T_1} \prod_{j=0}^{i-1} \cos \alpha_j.$$

Mit zunehmender Zeit t_i dominiert die Relaxations-Komponente M_{Ri} und der Kontrast nimmt ab. Der Kontrast hängt zusätzlich von ΔTAG , also dem maximalen Drehwinkel der Tagging-Präparations-Sequenz ab. Außerdem wird die Abnahme nicht nur durch die Spin-Gitter-Relaxation, sondern auch durch die Anregungspulse α_i der Bildgebungssequenz verursacht, so daß Sequenzen mit einer geringeren Anzahl von Anregungspulsen (z.B. EPI) einen höheren Kontrast erzeugen können [Tan95]. Der Verlust an Kontrast führt dazu, daß die Bewegung des Herzens nur etwa 300ms von Enddiastole (üblicherweise der Zeitpunkt der Tagging-Präparations-Sequenz) bis Endsystole analysiert werden kann.

Einen gleich bleibenden Kontrast erhält man, wenn M_{Ti} zu allen Zeitpunkten gleich ist. Näherungsweise wird dies erreicht, wenn für die Drehwinkel α_i folgende Rekursionsformel gilt [Fis93]

$$\alpha_{n-i} = \sin^{-1} \left(\frac{C^i}{\sqrt{\sum_{j=0}^i C^{2j}}} \right) \quad (4.20)$$

mit

$$C = e^{-\Delta t/T_1}. \quad (4.21)$$

Dies wird wegen der Gewebeabhängigkeit von T_1 nur für eine spezielle Gewebeart erreicht. Die Sequenzen-Programmierung der aktuellen Software des Tomographen (ParaVision 2.0) erlaubte die Implementierung veränderlicher Drehwinkel nicht, so daß diese Methode nicht implementiert werden konnte.

4.1.4 CSPAMM

Eine Möglichkeit, den Kontrast zu steigern, ist die Trennung der Tagging-Komponente M_{Ti} (s. Gleichung 4.10) von der Relaxations-Komponente M_{Ri} (s. Gleichung 4.12). Dies wird bei der CSPAMM (*Complementary SPatial Modulation of Magnetization*) Methode [Fis93] dadurch erreicht, daß zwei Bilder I_A und I_B mit unterschiedlichen Sättigungsmustern $\text{TAG}_A(\vec{x})$ und $\text{TAG}_B(\vec{x})$ aufgenommen werden. Gilt für diese Sättigungsmuster

$$\text{TAG}_A(\vec{x}) + \text{TAG}_B(\vec{x}) = 0, \quad (4.22)$$

so ist die Differenz beider Bilder

$$\begin{aligned} I_{Ai}(\vec{x}) - I_{Bi}(\vec{x}) &\propto M_{ss}(\vec{x}) \left(\text{TAG}_A(\vec{x}) - \text{TAG}_B(\vec{x}) \right) e^{-t_i/T_1} \left(\prod_{j=0}^{i-1} \cos \alpha_j \right) \sin \alpha_i \\ &\propto 2M_{Ti}(\vec{x}) \sin \alpha_i, \end{aligned} \quad (4.23)$$

und die Summe

$$\begin{aligned} I_{Ai}(\vec{x}) + I_{Bi}(\vec{x}) &\propto 2M_0 + 2(M_{Ri-1} \cos \alpha_{i-1} - M_0) e^{-\Delta t/T_1} \sin \alpha_i \\ &\propto 2M_{Ri}(\vec{x}) \sin \alpha_i. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Eine 1–1 SPAMM Sequenz erzeugt folgendes Sättigungsmuster

$$\text{TAG}_A(x) = \sin^2 \beta \cos(2\pi \Delta k_1 x) + \cos^2 \beta, \quad (4.25)$$

mit β = Drehwinkel jedes HF-Pulses und Δk_1 aus Gleichung 4.3. Ist der Drehwinkel eines der beiden HF-Pulse $-\beta$, d.h. 180° Phasenunterschied zum anderen HF-Puls, so entsteht ein anderes Sättigungsmuster

$$\text{TAG}_B(x) = -\sin^2 \beta \cos(2\pi \Delta k_1 x) + \cos^2 \beta, \quad (4.26)$$

d.h. die Differenz beider Bilder enthält nur die cosinusförmige Modulation des Sättigungsmusters und somit im Betragsbild (s. Abbildung 4.11)

$$|I_A(x) - I_B(x)| \propto |\cos(2\pi \Delta k_1 x)|. \quad (4.27)$$

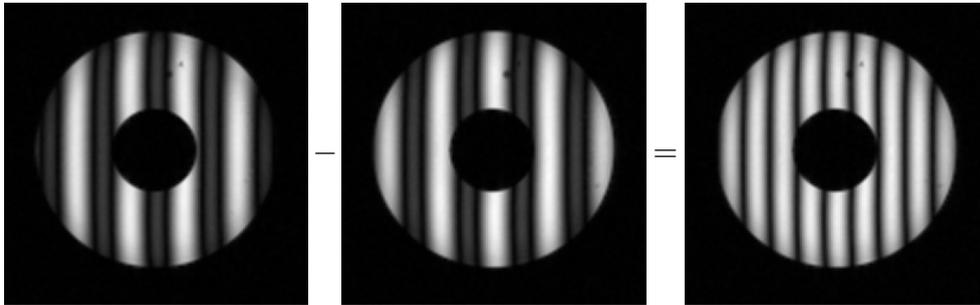


Abbildung 4.11: Bei der CSPAMM Methode wird das Bild aus der Differenz zweier Bilder mit unterschiedlichen Sättigungsmustern, für die Gleichung 4.22 gilt, berechnet. Dadurch entfällt die Relaxations-Komponente (s. Gleichung 4.12) und es bleibt nur die Tagging-Komponente übrig (s. Gleichung 4.10), so daß dies zu einem gleichbleibenden, hohen Kontrast führt.

Die so erzeugten Tagging-Linien sind dünner als bei einer 1–2–1 SPAMM Sequenz (s. Abbildung 4.12). Der Kontrast ist dabei konstant (= 1), da die Relaxations-Komponente eliminiert wurde (s. Gleichung 4.19). Jedoch nimmt das Kontrast-Rausch-Verhältnis (K/R) ab.

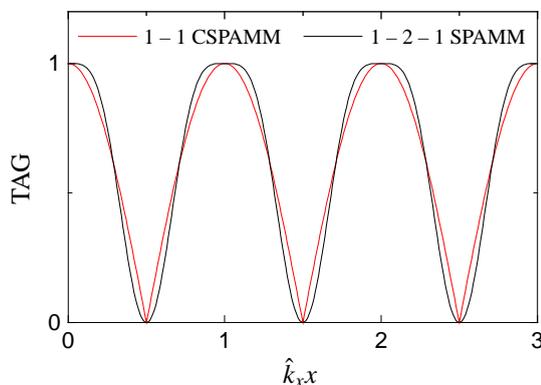


Abbildung 4.12: Vergleich der Modulation der Sättigungsmuster einer 1–2–1 SPAMM Sequenz (Drehwinkel 90°) und einer 1–1 CSPAMM Methode (Drehwinkel 180°).

Da die Intensität der Minima zu allen Zeitpunkten nahe Null ist, wird das automatische Auffinden der Tagging-Linien zur quantitativen Bewegungsanalyse erleichtert. Einen Nachteil stellt

die doppelt so lange Aufnahmezeit dar und die Bedingung, daß die Bewegung des Objektes (Herz) bei beiden Bewegungssequenzen identisch sein muß.

Die CSPAMM Methode erlaubt es außerdem, die Bewegung derselben Herzschicht während des Herzzyklus aufzunehmen (*slice-following technique* [Fis94]). Dabei wird das Sättigungsmuster schichtselektiv, d.h. nur in einer dünnen Schicht parallel zur später abgebildeten Schicht, aufgebracht. Die Schichtdicke der abgebildeten Schicht wird dann so groß gewählt, daß sich die Schicht mit dem Sättigungsmuster während des gesamten Herzzyklus innerhalb der abgebildeten Schicht befindet. Die Subtraktion zweier Bilder, die mit unterschiedlichen Sättigungsmustern, für die Gleichung 4.22 gilt, aufgenommen wurden, ergibt zu jedem Zeitpunkt ein Bild (Projektion entlang der Schichtichtung) des deformierten Sättigungsmusters, da sich sowohl die Signale außerhalb der Schicht des Sättigungsmusters, als auch die Relaxationsterme (s. Gleichung 4.12) gegenseitig auslöschen.

4.2 Experimenteller Aufbau

Um anhand eines deformierbaren Phantoms die Tagging-Methoden zu überprüfen, muß ein solches Phantom folgende Kriterien erfüllen:

1. Das Material muß starke, elastische Deformationen erlauben. Wegen der folgenden Bildgebung sind viele Wiederholungen derselben Bewegung nötig, z.B. 128 bei den Experimenten in Abschnitt 4.3, die zyklisch mit der Periode eines Herzschlages ausgeführt werden sollen.
2. Die Deformation des Phantoms soll aus Vergleichszwecken mathematisch modellierbar sein.
3. Die Relaxationszeiten, vor allem die Spin-Gitter-Relaxationszeit T_1 , die den Kontrast des Sättigungsmusters beeinflusst, sollen ähnlich denen des Myokards sein (s. Abschnitt 4.2.4).

4.2.1 Silikon-Gel

Als geeignetes Material hat sich ein Silikon-Gel herausgestellt, das aus zwei Komponenten hergestellt wird und z.B. bei Brustimplantaten zum Einsatz kommt. Die Komponenten A (Dimethylsiloxan-Methylvinylsiloxan-Copolymer) und B (Dimethylsiloxan-Methylsiloxan-Copolymer, s. Abbildung 4.13) (Sylgard Silicone Dielectric Gel 527, Dow Corning GmbH, Wiesbaden) wurden im Verhältnis 1:1 gemischt. Anschließend wurde die Mischung im Grobvakuum entgast, um Luftbläschen im fertigen Phantom zu vermeiden. Nach dem Gießen in die Phantomform wurde das Gel bei 70°C etwa sechs Stunden getrocknet. Das Mischungsverhältnis der beiden Komponenten, das die Elastizität bestimmt, wurde so gewählt, daß eine ausreichende Festigkeit bei gleichzeitig guter Deformierbarkeit erzielt wurde.

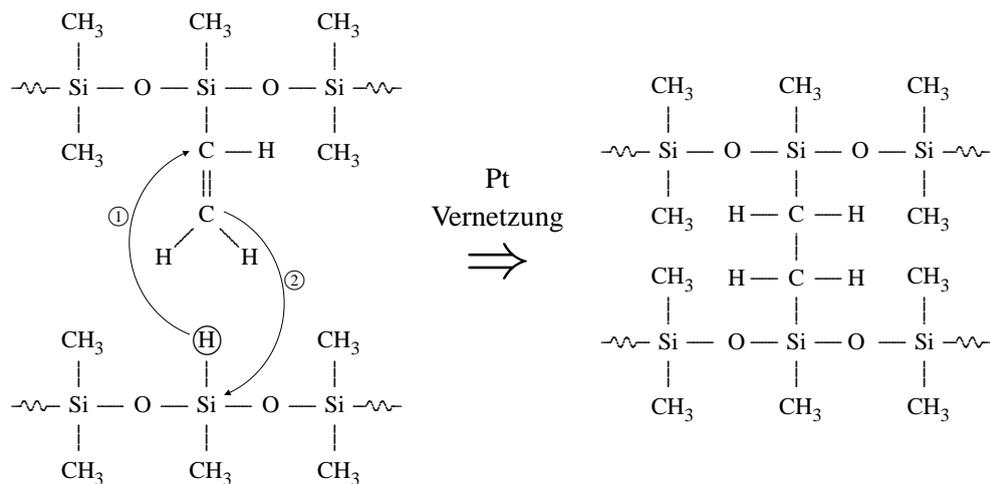


Abbildung 4.13: Durch eine Pt-Vernetzung (Pt als Katalysator) wurde das Silikon-Gel aus zwei Komponenten (Dimethylsiloxan-Methylvinylsiloxan-Copolymer und Dimethylsiloxan-Methylsiloxan-Copolymer) im Verhältnis 1:1 hergestellt.

4.2.2 Phantomaufbau

Das Phantom besteht aus zwei konzentrischen Zylindern aus Plexiglas (s. Abbildung 4.14). Der innere Zylinder besitzt einen Außendurchmesser von 3,5 cm ($R_1 = 1,75$ cm) und der äußere Zylinder einen Innendurchmesser von 10 cm ($R_2 = 5$ cm). Das Silikon-Gel wurde zwischen die beiden Zylinder mit einer Höhe von 3 cm gegossen. Der innere Zylinder kann an einen Stab befestigt werden, über den die gewünschte Bewegung auf den Zylinder übertragen wird. Dadurch sind Translations- und Rotations-Bewegungen möglich. Da der äußere Zylinder fest bleibt, wird so das dazwischen befindliche Silikon-Gel entsprechend deformiert. Unter der Annahme, daß es sich bei dem Silikon-Gel um ein isotropes, nicht kompressibles Material handelt, existieren für eine solche Geometrie (Zylinder) für beide Deformationstypen analytische Lösungen [You93].

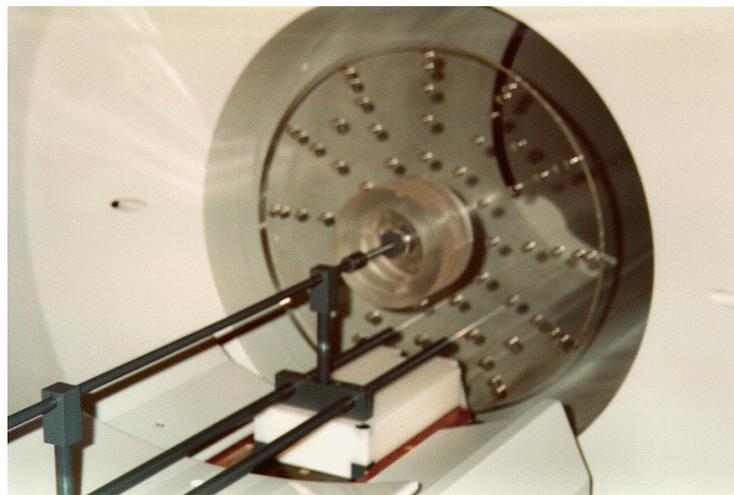
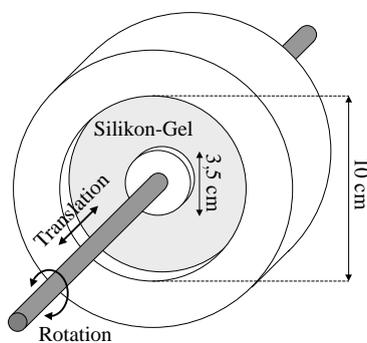


Abbildung 4.14: Das in den Experimenten verwendete Silikon-Gel-Phantom wurde aus zwei konzentrischen Zylindern aus Plexiglas, zwischen die das Silikon-Gel gegossen wurde, gefertigt. Über einen Stab wurde die Translations- bzw. Rotationsbewegung auf den inneren Zylinder und so auf das Silikon-Gel übertragen.

Die Bewegung eines Punktes während der Deformation wird am besten durch die Zylinderkoordinaten (r, θ, z) beschrieben, wobei die Koordinaten im undeformierten Zustand (R, Θ, Z) sind.

Rotationsbewegung

Die Deformation läßt sich bei einer Rotationsbewegung wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} r &= R, \\ \theta &= \omega(R) + \Theta, \\ z &= Z. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ist ω_1 der Rotationswinkel des inneren Zylinders, so ergibt sich aus den Randbedingungen $\omega(R_1) = \omega_1$ und $\omega(R_2) = 0$

$$\omega(R) = \omega_1 \frac{R_2^{-2} - R^{-2}}{R_2^{-2} - R_1^{-2}}, \quad (4.29)$$

d.h. die Bewegung (und damit auch die Deformation) ist unabhängig von den Materialeigenschaften, insbesondere der Elastizität des Gels, also dem Mischungsverhältnis der beiden Komponenten A und B.

Translationsbewegung

Für die Translationsbewegung gilt:

$$\begin{aligned} r &= R, \\ \theta &= \Theta, \\ z &= \gamma(R) + Z. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Aus der Auslenkung γ_1 des inneren Zylinders folgt aus den Randbedingungen $\gamma(R_1) = \gamma_1$ und $\gamma(R_2) = 0$

$$\gamma(R) = \gamma_1 \frac{\ln(R) - \ln(R_2)}{\ln(R_1) - \ln(R_2)}. \quad (4.31)$$

Auch diese Bewegung ist unabhängig von den Materialeigenschaften des Gels.

4.2.3 Schrittmotorsteuerung

Um verschiedene, definierte und periodische Bewegungen des inneren Zylinders zu erzielen, wurde ein 5-Phasen-Schrittmotor (Typ 566/50, Berger Lahr, Lahr) verwendet. Dieser wurde durch eine Leistungskarte (D225, Berger Lahr, Lahr) und eine dazu passende Adapterkarte (SMC-PC-1.5, LASERTEAM Meßtechnik GmbH, Rostock-Warnemünde) durch einen PC gesteuert. Dieser erzeugte auch über die parallele Schnittstelle ein 1 ms langes Triggerpuls, der die Pulssequenz des Tomographen mit der Bewegung des Phantoms synchronisierte (s. Anhang

A). Der Schrittmotor mußte wegen des großen Streufeldes des Tomographen am Ende der Patientenliege angebracht und die Bewegung über ein langes Gestänge (Länge 3 m, Material PVC) auf den inneren Zylinder übertragen werden (s. Abbildung 4.15).

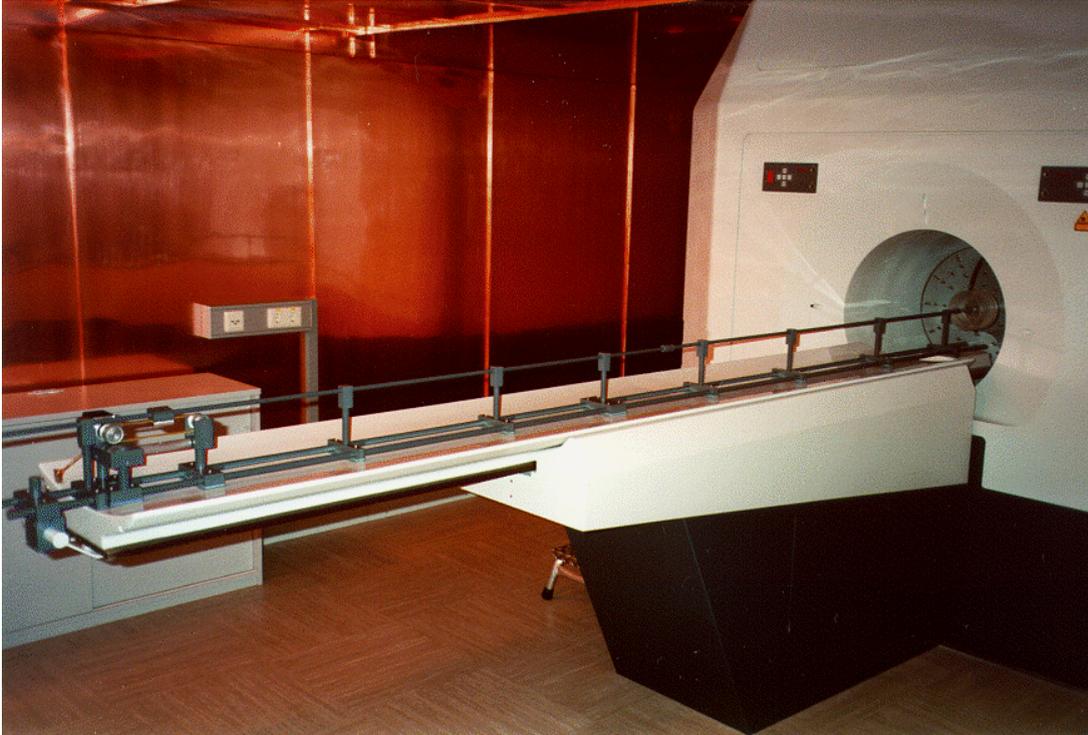


Abbildung 4.15: Bild des experimentellen Aufbaus. Wegen des starken Streufeldes des Tomographen mußte der Schrittmotor am Ende der Patientenliege angebracht werden. Über ein langes Gestänge wurde die Bewegung auf das Phantom übertragen.

4.2.4 Messung der Relaxationszeiten von Silikon-Gel

Dazu wurde das Phantom auf einer Halterung in der Mitte des Koprfresonators plaziert.

Spin-Gitter-Relaxationszeit T_1

Für die Bestimmung der T_1 -Relaxationszeit wurde eine *Inversion-Recovery*-Sequenz (s. Abbildung 4.16a) verwendet. Die Kernmagnetisierung wird durch den ersten Puls präpariert. Ein 180° -Puls erzeugt eine vollständige Inversion der Magnetisierung. Durch die Spin-Gitter-Relaxation hat die Längsmagnetisierung dann folgenden zeitlichen Verlauf

$$M_z(t) = M_0 - \left(M_0 - M(0) \right) e^{-t/T_1}, \quad (4.32)$$

mit $M(0)$ = Längsmagnetisierung direkt nach dem ersten Puls. Bei einem 180° -Puls ist $M(0) = -M_0$. Nach der Inversionszeit T_I erzeugt der zweite Puls einen FID, wobei ein 90° -Puls die Längsmagnetisierung vollständig in eine Quermagnetisierung umwandelt. Jedoch unabhängig von dem Drehwinkel ist die Signalintensität $S \propto M_z(T_I)$. Ist der Drehwinkel des ersten Pulses nicht genau 180° , so entsteht nach dem zweiten Puls neben dem FID ein Spin-Echo. Um dieses

zu vermeiden, wird nach dem ersten Puls die mögliche Quermagnetisierung durch einen Spoilerpuls vernichtet. Wiederholte Messungen mit unterschiedlichen Inversionszeiten liefern nach einem Fit der Gleichung 4.32 an die Signalintensitäten der FIDs die Spin-Gitter-Relaxationszeit T_1 .

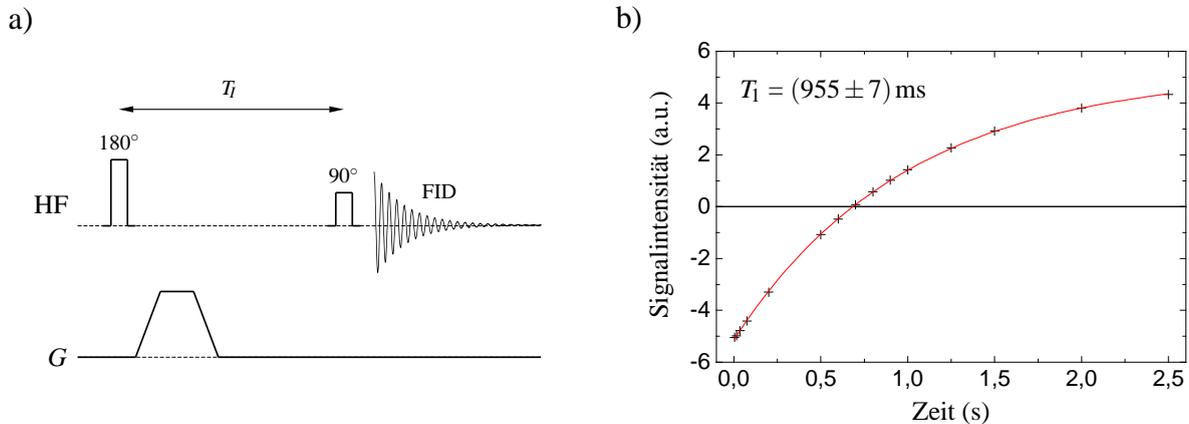


Abbildung 4.16: (a) Pulssequenz zur Bestimmung der Spin-Gitter-Relaxationszeit T_1 . Der Gradientenpuls (*spoiler*) verwirbelt die Quermagnetisierung für den Fall, daß der erste HF-Puls nicht exakt ein 180° -Puls ist. Dadurch entsteht nach dem zweiten HF-Puls neben dem FID kein Echo. (b) Signalintensität des FID vs. Inversionszeit T_i . Aus dem Fit eines exponentiellen Anstiegs wurde die T_1 -Relaxationszeit bestimmt.

Aus den Messungen mit Inversionszeiten zwischen 4 ms und 2,5 s ergab sich für das verwendete Silikon-Gel eine Spin-Gitter-Relaxationszeit T_1 von $(955 \pm 7) \text{ ms}$ (s. Abbildung 4.16b).

Spin-Spin-Relaxationszeit T_2

Die T_2 -Relaxationszeit wurde mit Hilfe einer Spin-Echo-Sequenz (s. Abbildung 4.17a) bestimmt. Um kurze Echozeiten zu ermöglichen, wurde nur die zweite Hälfte des Echos aufgenommen. Weicht der Refokussierungspuls von einem 180° -Puls ab, so entsteht ebenfalls ein störender FID. Dieser wird durch einen Gradienten-Spoilerpuls nach dem Refokussierungspuls verwirbelt. Ein gleich großer zweiter Gradienten-Puls vor dem Refokussierungspuls hebt die Wirkung des Spoilerpulses für das Spin-Echo auf. Auch wenn die beiden HF-Pulse nicht genau 90° bzw. 180° betragen, ist die Echointensität $S \propto M_0 e^{-T_E/T_2}$.

Die Messungen mit verschiedenen Echozeiten zwischen 10 ms und 2 s ergaben keinen mono-exponentiellen Abfall der Signalintensität. Ein Fit eines bi-exponentiellen Abfalls ergab für das verwendete Silikon-Gel zwei Spin-Spin-Relaxationszeiten T_2 von $(22 \pm 1) \text{ ms}$ und $(220 \pm 7) \text{ ms}$ (s. Abbildung 4.17b). Die Komponente mit der kürzeren T_2 -Relaxationszeit wies eine etwa 1,35 mal größere Intensität als die andere Komponente auf.

Beide Relaxationszeiten (T_1 und T_2) liegen im Bereich der Gewebe-Relaxationszeiten.

4.3 Experimente

Im Gegensatz zu den Abbildungen 4.14 und 4.15 wurde für die folgenden Experimente das Phantom auf einer Halterung im Kopffresonator angebracht, um diesen wegen der höheren

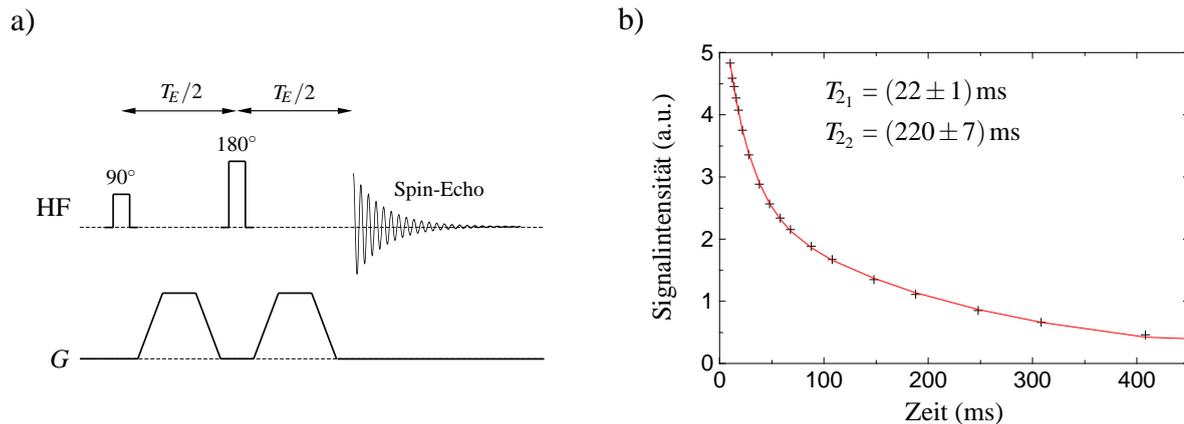


Abbildung 4.17: (a) Pulssequenz zur Bestimmung der Spin-Spin-Relaxationszeit T_2 . Die beiden Gradientenpulse (*spoiler*) verwirbeln den FID, der entsteht, wenn der zweite HF-Puls nicht exakt ein 180° -Puls ist. Auf das Spin-Echo haben sie keinen Einfluß. (b) Signalintensität des Spin-Echos vs. Echozeit T_E . Aus dem Fit eines bi-exponentiellen Abfalls wurden zwei T_2 -Relaxationszeit bestimmt.

Empfindlichkeit gegenüber dem Ganzkörperresonator verwenden zu können. Als Periodendauer der Phantombewegung wurden 850 ms gewählt. 50 ms nach dem Trigger-Signal wurde die Bewegung gestartet, wobei sowohl bei der Rotations- als auch bei der Translationsbewegung nach weiteren 400 ms die maximale Auslenkung und nach 800 ms der Ausgangszustand erreicht wurde. Der maximale Auslenkwinkel der Rotationsbewegung betrug $22,5^\circ$, bei einer konstanten Winkelgeschwindigkeit. Die Translationsbewegung wurde ebenfalls mit einer konstanten Geschwindigkeit und einer maximalen Auslenkung von 2 cm durchgeführt. Für die Tagging-Präparations-Sequenz wurde die CSPAMM Methode mit einem 180° -Refokussierungspuls (s. Abschnitt 4.1.2 und 4.1.4) gewählt. Die Gesamtdauer der eindimensionalen Präparations-Sequenz betrug 10 ms und erzeugte einen Linienabstand von 5,5 mm.

Wie in Abschnitt 4.1.3 beschrieben, wurde eine einfache Gradienten-Echo-Sequenz für die Bildgebung des Phantoms verwendet. Dabei handelte es sich um eine Standardsequenz des Tomographen (Herstellerbezeichnung: GEFI). Alle 50 ms wurde eine k -Raum-Zeile eines von insgesamt 16 Bewegungszuständen aufgenommen (Cine-Sequenz). Die Parameter der Sequenz betragen: $T_E = 8,8 \text{ ms}$, Abtastfrequenz 50 kHz, Bildmatrix 256×128 interpoliert auf 256×256 , Auflösung nach der Interpolation $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$, Schichtdicke 5 mm.

Aus vier Bilderserien (jeweils zwei mit horizontalen und vertikalen Tagging-Linien) wurde eine Bilderserie generiert. Zuerst wurden die CSPAMM-Bilder jedes der 16 Zeitpunkte durch Subtraktion der Bilder mit unterschiedlichen (inversen) Sättigungsmustern im k -Raum erzeugt und anschließend mit dem entsprechenden CSPAMM-Bild der anderen Orientierung der Tagging-Linien im Ortsraum nach der Betragsbildung multipliziert (s. Abbildung 4.18).

Für beide Phantombewegungen wurden verschiedene Schnitte aufgenommen (s. Abbildungen 4.19 bis 4.22).

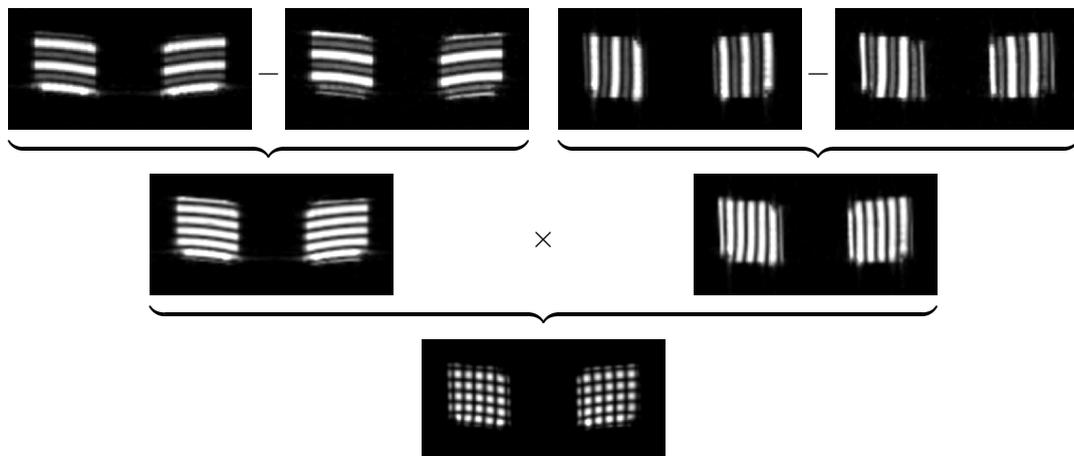


Abbildung 4.18: Die Tagging-Bilder (CSPAMM) werden aus vier Bilderserien, zwei für jedes Sättigungsmuster (horizontal und vertikal), generiert. Die Subtraktion findet im k -Raum statt, die Multiplikation wird im Ortsraum mit den Betragsbildern durchgeführt.

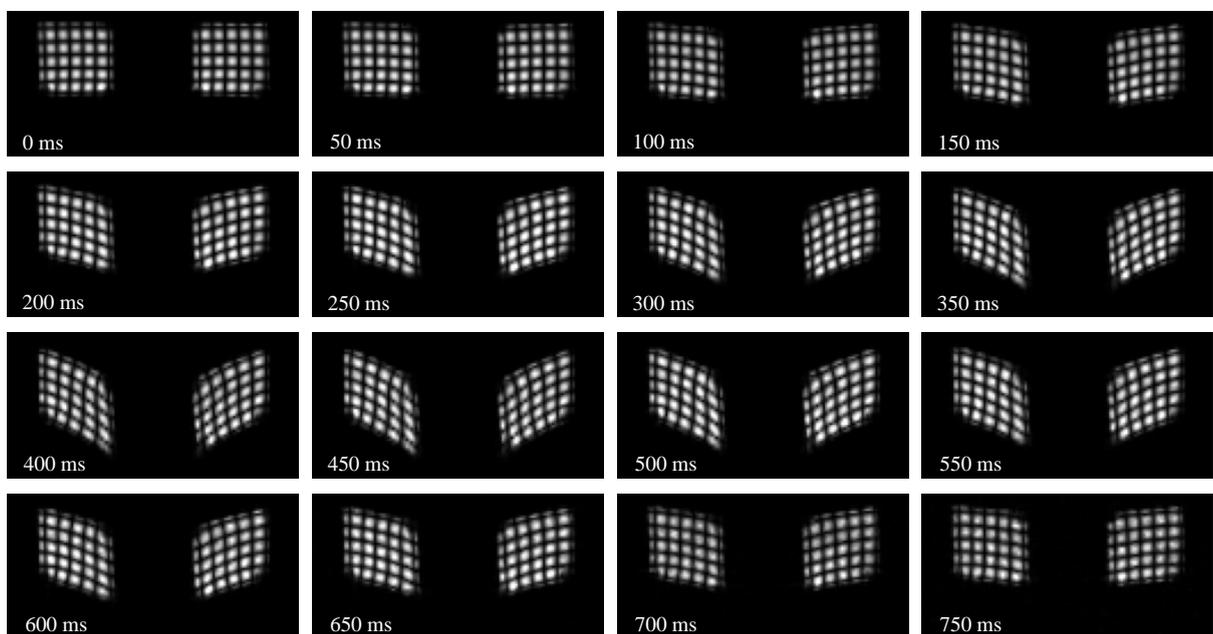


Abbildung 4.19: *Coronaler* Schnitt durch die Mitte des Silikon-Gel-Phantoms (*transversale* Auslenkung 2 cm). Die Zeiten geben den Abstand zum Ende der Tagging-Präparations-Sequenz an. In vertikaler Richtung weichen die Tagging-Linien zu den freien Rändern des Phantoms (vorne und hinten) von dem parallelen Ausgangszustand ab, so daß der eindimensionale Ansatz aus Gleichung 4.30 die Verformung außerhalb der Mittelebene nicht exakt beschreibt (s. Abbildung 4.21).

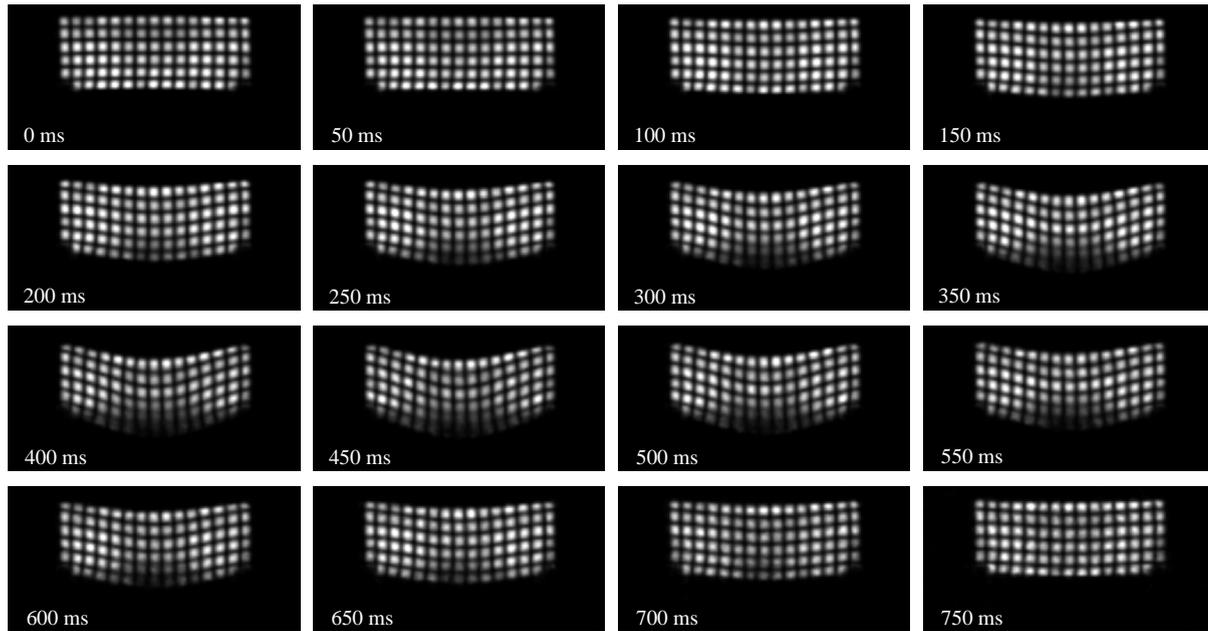


Abbildung 4.20: *Coronaler Schnitt 3 cm oberhalb der Mitte des Silikon-Gel-Phantoms (transversale Auslenkung 2 cm). Die Zeiten geben den Abstand zum Ende der Tagging-Präparations-Sequenz an.*

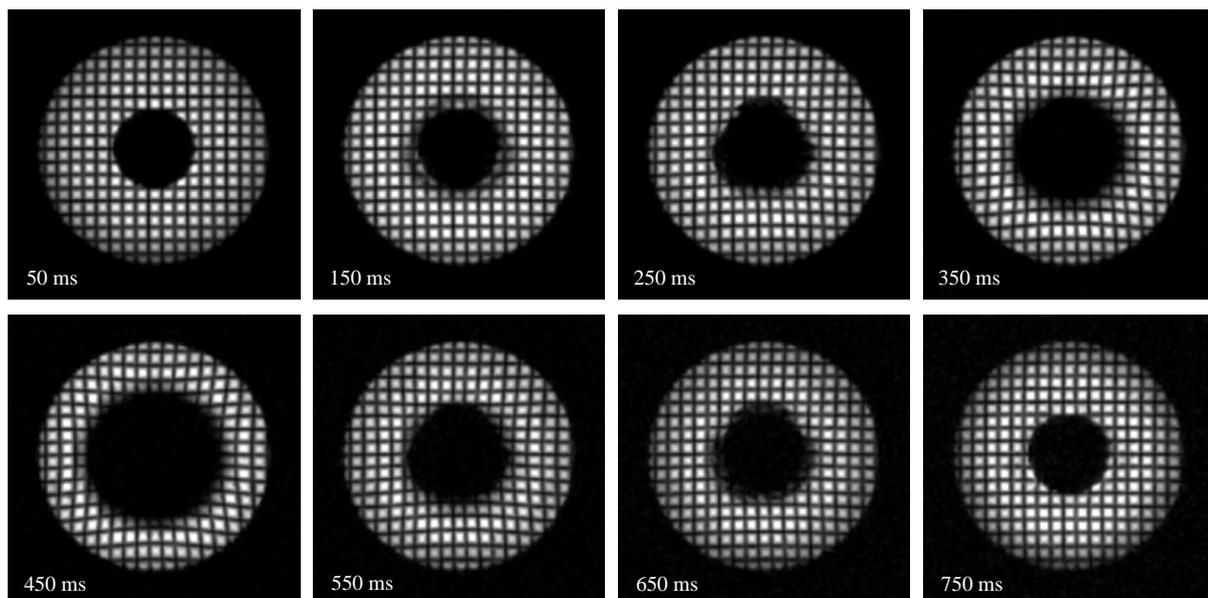


Abbildung 4.21: *Transversaler Schnitt 1 cm hinter der Mittelebene des Silikon-Gel-Phantoms (transversale Auslenkung 2 cm). Die Zeiten geben den Abstand zum Ende der Tagging-Präparations-Sequenz an. Durch die Auslenkung senkrecht zur abgebildeten Schicht bewegen sich Teile des anfänglich abgebildeten Teils des Phantoms, die sich nahe dem inneren Zylinder befinden, aus der abgebildeten Schicht heraus (through plane motion), wodurch sich der innere Bereich ohne Silikon-Gel vergrößert. Die zwischenzeitliche Abweichung der Tagging-Linien von ihrem parallelen Ausgangszustand weist darauf hin, dass der eindimensionale Ansatz aus Gleichung 4.30 die Verformung außerhalb der Mittelebene nicht exakt beschreibt (s. Abbildung 4.19).*

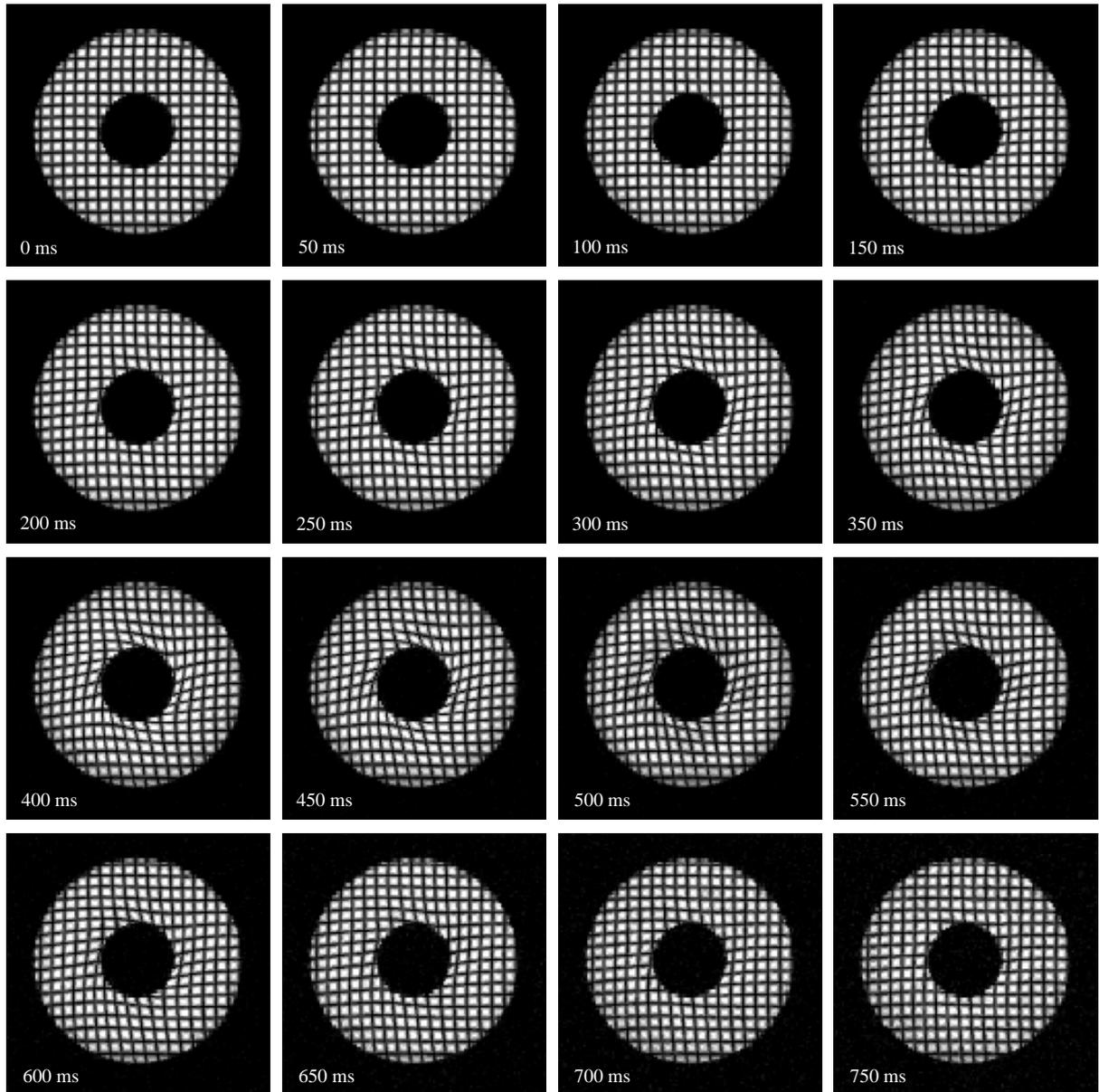


Abbildung 4.22: *Transversaler* Schnitt durch die Mittelebene des Silikon-Gel-Phantoms (Rotationsbewegung, Auslenkwinkel $22,5^\circ$). Die Zeiten geben den Abstand zum Ende der Tagging-Präparations-Sequenz an.

Die Bewegung des Sättigungsmusters (Gitter) wurde mit dem nach Gleichung 4.29 und 4.31 theoretisch berechneten qualitativ verglichen (s. Abbildungen 4.23 und 4.24). Wegen der starken Deformation treten auch kleine Verschiebungen senkrecht zur treibenden Kraft auf, die von der eindimensionalen Verformung in der Modellierung (s. Gleichung 4.28 und 4.30) nicht berücksichtigt wurden. Dieser sogenannte Kelvin-Effekt tritt in allen isotropen, nicht kompressiblen, hyperelastischen Materialien auf und führt in der Nähe der beiden freien Flächen (vorne und hinten) zu Abweichungen [Adk80].

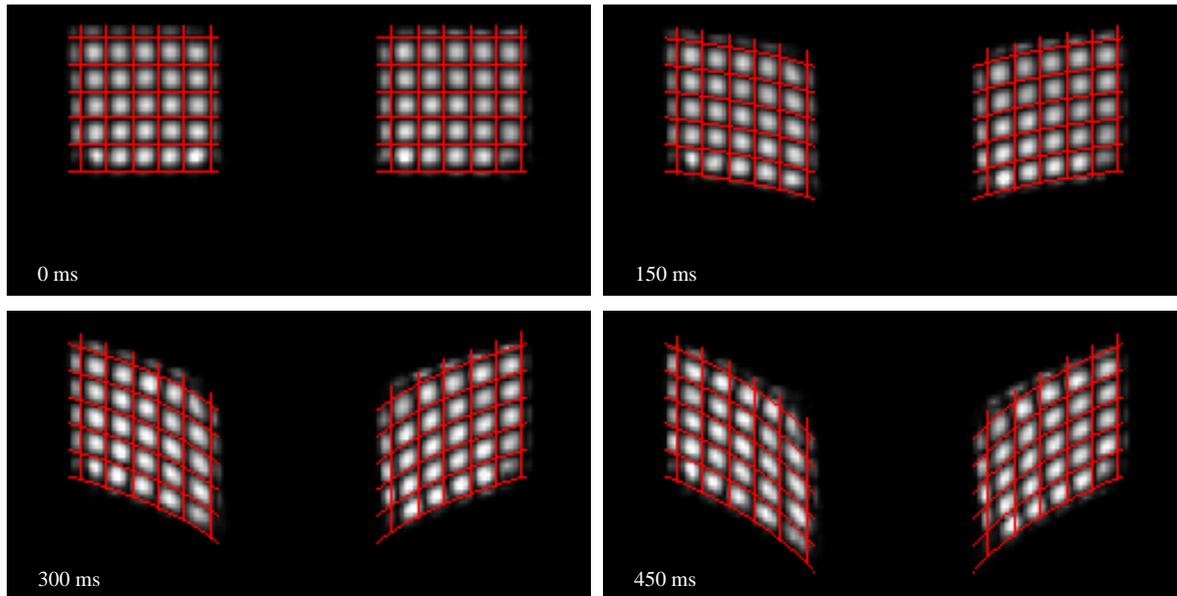


Abbildung 4.23: Überlagerung der theoretisch berechneten Bewegung des Phantoms nach Gleichung 4.30 (rote Linien) mit den Bildern aus Abbildung 4.19 zu vier verschiedenen Zeitpunkten. Die *transversale* Auslenkung wird sehr gut durch Gleichung 4.30 beschrieben, jedoch weisen die Abweichungen der vertikalen Linien darauf hin, daß zu den freien Rändern des Phantoms (vorne und hinten) der eindimensionale Ansatz die Verformung nicht exakt beschreibt.

4.4 Schlußfolgerung

Die Verformung eines Silikon-Gel-Phantoms kann mit dem implementierten CSPAMM-Verfahren mit hohem Kontrast verfolgt werden. Durch die Schrittmotor-Steuerung sind beliebige Verformungen denkbar, wobei zwei (translatorische und rotatorische Bewegung) wegen der vorhandenen analytischen Lösung der Verformung verwendet wurden. Die Abweichungen der Tagging-Linien von der analytischen Lösung nahe der Oberflächen des Phantoms sind darauf zurückzuführen, daß der eindimensionale Ansatz streng genommen nur für einen unendlich langen Zylinder gilt.

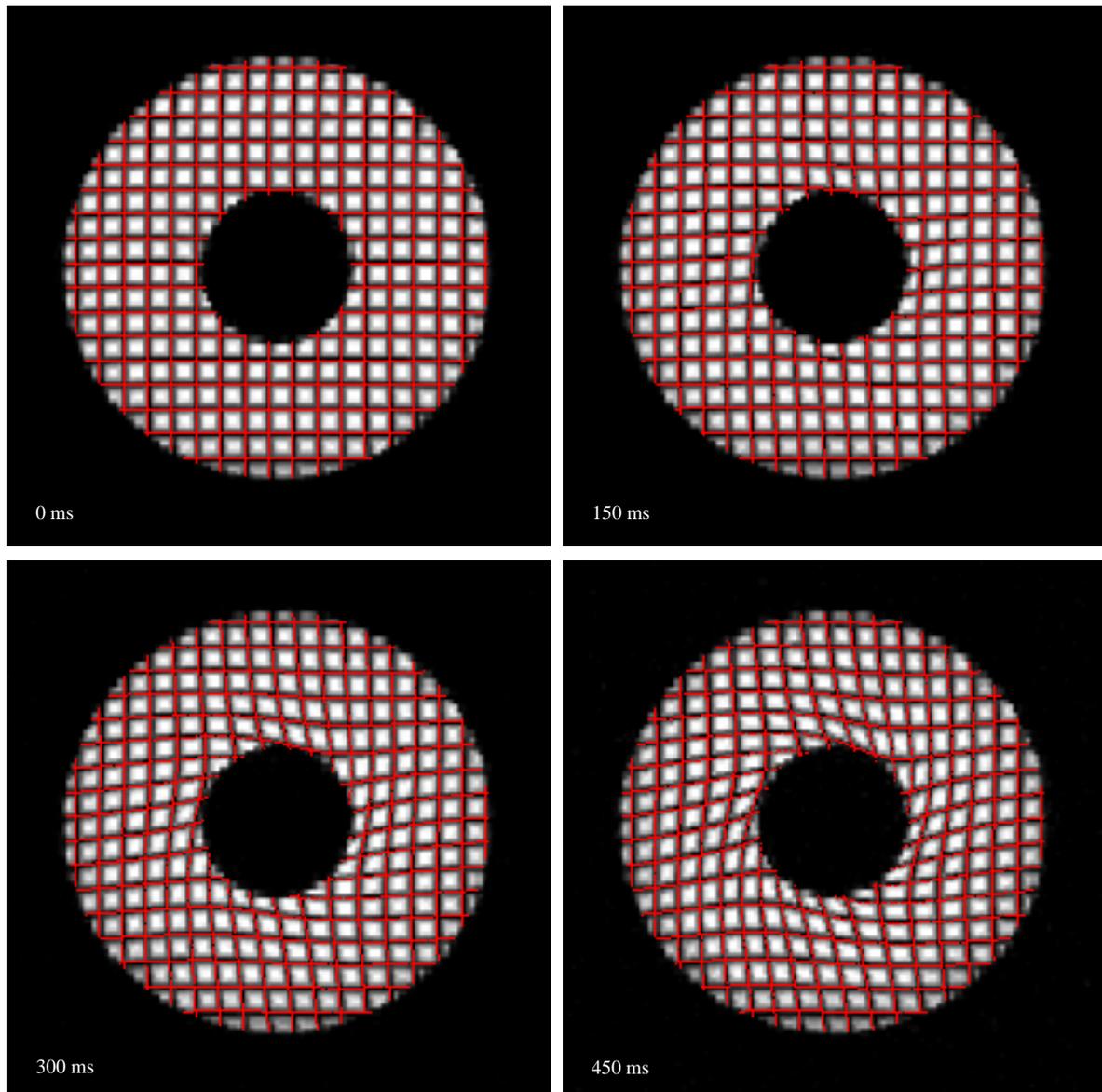


Abbildung 4.24: Überlagerung der theoretisch berechneten Bewegung des Phantoms nach Gleichung 4.28 (rote Linien) mit den Bildern aus Abbildung 4.22 zu vier verschiedenen Zeitpunkten. Die Rotationsbewegung wird in der Mittelebene sehr gut durch Gleichung 4.28 beschrieben.