Regularity and error estimators for elliptic problems with discontinuous coefficients

Dissertation am Fachbereich für Mathematik und Informatik an der Freien Universität Berlin zur Erlangung des akademischen Titels eines Doktors der Naturwissenschaften eingereicht am 17.1.2001 von

Martin Petzoldt

Gutachter:	Prof. Dr. Eberhard Bänsch	Freie Universität Berlin
	Prof. Dr. Rüdiger Verfürth	Ruhr Universität Bochum
	Prof. Dr. Anna-Margarete Sändig	Universität Stuttgart

Die Disputation wurde am 30.5.2001 abgehalten.

Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik
Mohrenstr. 39
D-10117 Berlin
Germany

martin.petzoldt@gmx.de
http://www.wias-berlin.de/˜petzoldt

Betreuer: Prof. Dr. Eberhard Bänsch

Contents

Chapter 5

Conclusions

Elliptic problems with discontinuous, piecewise constant diffusion coefficients (interface problems) are a natural generalization of the Laplace problem. These problems possess characteristic properties of problems with non-constant diffusion coefficients as singularities. Singularities decrease the regularity and cause in Finite Element applications approximation errors of lower order.

In the present work we investigated interface problems from the *analytical* point of view and proposed a-posteriori error estimators for their *numerical* treatment when calculating an approximation with Finite Element Methods.

In both areas, in order to achieve robustness, a special criterion on the *structure of the diffusion coefficients* turned out to be important. This criterion is called quasi-monotonicity condition. Robustness is essential in case of a-posteriori error estimators since one does not want to enter large factors in the error bounds. But robustness is also important from the analytical point of view, since regularity of a problem can be seen as a measure of its quality.

We showed that quasi-monotonicity is necessary and sufficient for *regularity* $H^{1+1/4}$ independent of the bounds of k. If quasi-monotonicity is violated, we derived sharp regularity results depending on the bounds of k and gave an example of a function with lowest regularity under given bounds of the diffusion coefficient. In the quasi-monotone case we derived *robust error estimates*.

Numerical experiments with model problems showed that the performance of the estimators depends on the regularity of the problem. The estimators are robust in the quasi-monotone case, but in case of low regularity, that means in the non-quasi-monotone case, it seems that this is not true.

Acknowledgement

Das diesem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wurde mit Mitteln des Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen $FU01.84M$ gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt beim Autor.
Ich möchte allen danken, die mich bei der Erarbeitung dieser Doktorarbeit unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt Prof. Willy Dörfler, der durch sein Engagement meine Arbeit massgeblich gefördert hat, danke Willy! Ich möchte mich bei Prof. Eberhard Bänsch für sein Interesse und seine Hilfe bei der Fertigstellung dieser Doktorarbeit bedanken. Bei Dr. Jürgen Fuhrmann bedanke ich mich für die Aufgabenstellung, die Unterstützung bei der Implementation des Codes, sowie für die anregenden Diskussionen und die Bereitstellung der finanziellen Mittel, die mir die Promotion ermöglichten. Dankbar bin ich meinen Kollegen aus dem WIAS für zahlreiche interdisziplinäre Diskussionen und hilfreiche Tips, wie Thomas Koprucki, Dr. Klaus Gärtner, Dr. Jens Griepentrog, Dr. Joachim Rehberg und Dr. Mathé für den Hinweis auf den Satz von Müntz.
Ich bedanke mich bei Frau Prof. Sändig und Prof. Nicaise für Hinweise bei den Regularitätsaussagen. Ich danke dem Projektpartner Prof. Diersch für Diskussionen und die Bereitstellung von Daten.

Bibliography

[1] R. A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

[2] M. Ainsworth and I. Babuska. Reliable and robust a posteriori error estimation for singularly perturbed reaction-diffusion problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(2):331–353, 1998.

[3] M. Ainsworth and T. Oden. *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. John Wiley, New York, 2000.

[4] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, 1992.

[5] T. Apel. *Anisotropic finite elements: local estimates and applications*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1999.

[6] T. Apel, A.-M. Sändig, and J. R. Whiteman. Graded mesh refinement and error estimates for finite element solutions of elliptic boundary value problems in non-smooth domains. *Math. Methods Appl. Sci.*, 19(1):63–85, 1996.

[7] I. Babuska, B. Andersson, B. Guo, J.M. Melenk, and H.-S. Oh. Finite element method for solving problems with singular solutions. *J. Comput. Appl. Math.*, 74(1-2):51–70, 1996.

[8] I. Babuska, T. Strouboulis, C.S. Upadhyay, and S.K. Gangaraj. A posteriori estimation and adaptive control of the pollution error in the h-version of the finite element method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 38(24):4207–4235, 1995.

[9] R. E. Bank and R. K. Smith. A posteriori error estimates based on hierachical bases. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(4):921–935, 1993.

[10] R. Beck, B. Erdmann, and R. Roitzsch. KASKADE 3.0 - an object oriented finite element code. Technical report 95-4, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin, 1994.

[11] C. Bernardi and R. Verfürth. Adaptive finite element methods for elliptic equations with non-smooth coefficients. *Numer. Math.*, 85(4):579–608, 2000.

[12] F. Bornemann, B. Erdmann, and R. Kornhuber. A posteriori error estimates for elliptic problems in two and three space dimensions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33:1188–1204, 1996.

[13] J. H. Bramble and Jinchao Xu. Some estimates for a weighted L^2-projection. *Math. Comput.*, 56:463–476, 1991.

[14] Z. Chen, R. H. Nochetto, and A. Schmidt. Error control and adaptivity for a phase relaxation model. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 34(4):775–797, 2000.

[15] P. G. Ciarlet. Basic Error Estimates for Elliptic Problems. In *Handbook of numerical analysis, Vol. II*, pages 17–352. North-Holland, Amsterdam, 1991.

[16] Ph. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge Anal. Numér.*, 9(R-2):77–84, 1975.

[17] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Singularities of Maxwell interface problems. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(3):627–649, 1999.

[18] M. Costabel and E. Stephan. A direct boundary integral equation method for transmission problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 106:367–413, 1985.

[19] J. Dieudonne. *Grundzüge der modernen Analysis 2*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.

[20] M. Dobrowolski. Numerical approximation of elliptic interface problems and corner problems. Habilitationsschrift, Math. Fak. Univ. Bonn, 1981.

[21] W. Dörfler and O. Wilderotter. An adaptive finite element method for a linear elliptic equation with variable coefficients. *ZAMM*, 80(7):481–491, 2000.

[22] W. Dörfler. A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(3):1106–1124, 1996.

[23] W. Dörfler and R.H. Nochetto. Small data oscillation implies the saturation assumption. MSRI preprint 2000-027, MSRI, 2000.

[24] M. Dryja, M.V. Sarkis, and O. B. Widlund. Multilevel Schwarz Methods for elliptic problems with discontinuous coefficients in three dimensions. *Numer. Math.*, 72:313–348, 1996.

[25] T. Dupont and R. Scott. Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces. *Math. Comp.*, 34(150):441–463, 1980.

[26] K. Eriksson and C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems. I. A linear model problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(1):43–77, 1991.

[27] J. Fuhrmann, Th. Koprucki, and H. Langmach. pdelib: An open modular tool box for the numerical solution of partial differential equations. design patterns. In *Proceedings of the 14th GAMM Seminar on Concepts of Numerical Software,Kiel*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Braunschweig, 1998. To appear.

[28] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 224.

[29] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1985.

[30] P. Grisvard. *Singularities in boundary value problems*. Springer-Verlag, 1992. Research Notes in Applied Mathematics, RMA 22.

[31] F. Jochmann. An H^s-regularity result for the gradient of solutions to elliptic equations with mixed boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 238(2):429–450, 1999.

[32] M. Jung. On adaptive grids in multilevel methods. Tech. Report No. 5, Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, 1993.

[33] R. B. Kellogg. Higher Order Singularities for Interface Problems. *Academic Press, New York and London*, pages 589–602, 1972. Proceedings of a Symposium held at the University of Maryland Baltimore, Maryland, June 26-30, 1972.

[34] R. B. Kellogg. On the Poisson Equation with Intersecting Interfaces. *Applicable Analysis*, 4:101–129, 1975.

[35] V.A. Kondrat'ev. Boundary problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Tr. Mosk. Mat. O.-va*, 16:209–292, 1967.

[36] T. Kühn. Die Regularität der Lösungen von Interfaceproblemen in Gebieten mit singulären Punkten. Diplomtheses, Uni Rostock, 1992.

[37] G. Kunert. *A posteriori error estimation for anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes*. Logos-Verlag, Berlin, 1999.

[38] G. Kunert and R. Verfürth. Edge residuals dominate a posteriori error estimates for linear finite element methods on anisotropic triangular and tetrahedral meshes. *Numer. Math.*, 86(2):283–303, 2000.

[39] D. Leguillon and E. Sánchez-Palencia. *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987.

[40] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 3*. Dunod, Paris, 1970. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 20.

[41] P. Morin, R. H. Nochetto, and K. G. Siebert. Data oscillation and convergence of adaptive FEM. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(2):466–488 (electronic), 2000.

[42] P. Morin, R. H. Nochetto, and K. G. Siebert. Local Problems on stars: A posteriori error estimators, convergence, and performance. preprint 29/00, Univ. Freiburg, 2000.

[43] S. Nicaise. *Polygonal interface problems*. Verlag Peter D. Lang, Frankfurt am Main, 1993.

[44] S. Nicaise and A.-M. Sändig. General Interface Problems i,ii. *Math. Methods Appl. Sci.*, 17(6):395–450, 1994.

[45] S. Nicaise and A.-M. Sändig. Transmission Problems for the Laplace and Ellasticity Operators: regularity and boundary intergral formulation. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 6:855–898, 1999.

[46] R. H. Nochetto, G. Savare, and C. Verdi. A posteriori error estimates for variable time-step discretizations of nonlinear evolution equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, 53(5):525–589, 2000.

[47] L.A. Oganesjan and L.A Ruchowiec. *Variacionno-Rassnostnye Metody Reshenya Elliptichyeskizh Uravnenij*. Issdate'lstvo Akademii Nauk Armjansckoji SSR, Erevan, 1979.

[48] H.-S. Oh and I. Babuska. The method of auxiliary mapping for the finite element solutions of elasticity problems containing singularities. *J. Comput. Phys.*, 121(2):193–212, 1995.

[49] M. Petzoldt. A posteriori error estimators for elliptic equations with discontinuous diffusion coefficients. *Advances in Computational Mathematics*, 2001. accepted for publication.

[50] M. Petzoldt. Regularity results for Laplace interface problems in two dimensions. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 20(2):431–455, 2001.

[51] G. Savaré. Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains. *J. Funct. Anal.*, 152(1):176–201, 1998.

[52] A. Schmidt and K. G. Siebert. Concepts of the finite element toolbox ALBERT. In *Proceedings of the 14th GAMM Seminar on Concepts of Numerical Software,Kiel*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Braunschweig, 1998. http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/ALBERT/.

[53] A. Schmidt and K. G. Siebert. A posteriori estimators for the h-p version of the finite element method in 1D. *Appl. Numer. Math.*, 35(1):43–66, 2000.

[54] J. Schöberl. NETGEN: An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules. *Comput. Vis. Sci.*, 1(1):41–52, 1997.

[55] K. G. Siebert. An a posteriori error estimator for anisotropic refinement. *Numer. Math.*, 73(3):373–398, 1996.

[56] G. Strang and G. J. Fix. *An analysis of the finite element method.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1973. Prentice-Hall Series in Automatic Computation.

[57] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques*. Wiley-Teubner, 1996.

[58] R. Verfürth. A posteriori error estimates for nonlinear problems: $L^r(0,T;W^{1,\rho}(\Omega))$-error estimates for finite element discretizations of parabolic equations. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, 14(4):487–518, 1998.

[59] R. Verfürth. Robust a posteriori error estimators for a singulary perturbed reaction-diffusion equation. *Numer. Math.*, pages 479 – 493, 1998.

[60] L. B. Wahlbin. Local behavior in finite element methods. In *Handbook of numerical analysis, Vol. II*, pages 353–522. North-Holland, Amsterdam, 1991.

[61] J. Weisel. Lösung singulärer Variationsprobleme durch die Verfahren von Ritz und Galerkin mit finiten Elementen - Anwendungen in der konformen Abbildung. *Mitteilungen Mathem, Seminar Giessen*, 138:1–156, 1979.

[62] Jinchao Xu. Counterexamples concerning a weighted L^2 projection. *Math. Comput.*, 57:563–568, 1991.

[63] O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 24(2):337–357, 1987.

Appendix A

Zusammenfassung der Dissertation

Es werden elliptische Randwertaufgaben mit unstetigen Diffusionskoeffizienten in räumlich zwei- oder dreidimensionalen Gebieten betrachtet. Hierbei wird vorausgesetzt, dass der Diffusionskoeffizient teilgebietsweise konstant ist. Es werden Dirichlet-, Neumann- und teilweise Cauchy-Randbedingungen zugelassen.

Im ersten Teil der Doktorarbeit werden H^s-Regularitätsaussagen hergeleitet, die unabhängig von der Anzahl und Geometrie der Teilgebiete gelten. In der speziellen Klasse der quasimonotonen Diffusionskoeffizienten, die in [24] in Hinblick auf Finite-Elemente Anwendungen eingeführt wurde, gelingt es, $H^{5/4}$-Regularität zu zeigen. Diese optimale Regularität gilt unabhängig von der Variation (den Sprüngen) des Diffusionskoeffizienten (2D-Fall). Untersucht man die H^s-Regularität in Abhängigkeit von der Variation des Diffusionskoeffizienten, so werden optimale H^s-Regularitätsaussagen des Types $s = 1 + O(\delta)$ für die Schranken $\delta \leq k \leq \delta^{-1}$ an den Diffusionskoeffizienten k erzielt (2D-Fall). Regularitätsaussagen für den 3D-Fall werden auf Grundlage von [17] vom 2D-Fall hergeleitet.

Im zweiten Teil der Arbeit wird das stetige Problem mit dem Galerkinverfahren und mit linearen Finiten Elementen diskretisiert. Es werden residuenbasierte a-posteriori Fehlerschätzer entwickelt, die robuste (vom Diffusionskoeffizienten unabhängige) Schranken des Approximationsfehlers darstellen. Diese Aussagen gelten aber nur für quasimonotone Diffusionskoeffizienten. Parallele, unabhängige Arbeiten [11], [21] setzen stärkere Einschränkungen an den Diffusionskoeffizienten voraus.

In numerischen Beispielen mit Modellproblemen und mit realen Daten werden die Fehlerschätzer auf ihre Effizienz geprüft. Numerisch wird für den quasimonotonen Fall auf adaptierten Gittern eine optimale Reduktion des Fehlers bezüglich der Anzahl der Freiheitsgrade und ein moderater Effizienzindex beobachtet. Experimente mit nicht quasimonotonem Diffusionskoeffizienten weisen darauf hin, dass der Fehlerschätzer hier nicht robust ist.

Beispielrechnungen mit Daten der Wasy GmbH zeigten die Verlässlichkeit der Fehlerschätzer für den Fall des gesättigten Fliessens in einem beschränkten Aquifer.

Lebenslauf

Name	Martin Petzoldt
22.1.1970	geboren in Halle an der Saale
1984 - 1988	Heinrich-Hertz Spezialschule für Mathematik und Naturwissenschaften in Berlin
Nov. 1988 - Apr. 1989	Wehrdienst
1989 - 1994	Studium der Angewandten Mathematik an der Universität Warschau, Diplomarbeit bei Prof. Dryja
1994 - 1996	Graduiertenkolleg an der Universität Warschau, Betreuer Prof. Dryja
Okt. - Dez. 1996	Praktikum am Fraunhofer -Institut für Software- und Systemtechnik ISST in Berlin
Apr. - Juni 1997	wiss. Mitarbeiter an der Universität Rostock
ab Juli 1997	wiss. Mitarbeiter im Weierstrass-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

Berlin, den 15.1.2001