4 Neue Lösungsansätze auf Basis Gemischt-ganzzahliger Programmierung

4.1 Einführung

4.1.1 Motivation

Die Analyse bisheriger Lösungsansätze für Setzungsprobleme hat gezeigt, dass es bis heute keinen automatisierten Ansatz gibt, der ohne weiteres in der Lage ist, das in Kapitel 2 dokumentierte Setzungsproblem an allgemeinbildenden Schulen in akzeptabler Zeit zulässig und hinsichtlich der gesetzten Ziele befriedigend zu lösen. Aus den Untersuchungsergebnissen geht jedoch auch hervor, dass es durchaus Verfahrenstypen gibt, die möglicherweise ein Potenzial für die Entwicklung eines effektiven Ansatzes besitzen. Insbesondere die exakten Verfahrenstypen der Mathematischen und der Logischen Programmierung bergen nach meiner Überzeugung Möglichkeiten in sich, die in der wissenschaftlichen Literatur bislang zu wenig Aufmerksamkeit erfahren haben. Zur Eruierung dieser Möglichkeiten beizutragen, ist daher die Aufgabe der folgenden Betrachtungen. Der Schwerpunkt wird dabei auf der Anwendung der Gemischt-ganzzahligen Programmierung liegen, während die exakte Logische Programmierung sowie andere Verfahrenstypen der Mathematischen Programmierung nicht weiter betrachtet werden. Dieser Entscheidung liegen folgende Abwägungen zugrunde:

1. *(Gemischt-)Ganzzahlige Programmierung vs. Logische Programmierung*: Die Verwendung eines LP-basierten Branch-and-Bound-Verfahrens für die Ganzzahlige oder Gemischt-ganzzahlige Programmierung weist gegenüber einem Branch-and-Bound-Verfahren der Logischen Programmierung drei Vorteile auf:

    a. Die Lösung der LP-Relaxation eines Entscheidungsbaumknotens k kann bereits auf einer oberen Ebene des Baumes ganzzahlig sein, wodurch an k ein zulässiger und bezogen auf den Bereich unterhalb von k optimaler Endknoten des Entscheidungsbaumes bestimmt wird. In diesem Fall erübrigt sich eine weitere Tiefensuche unterhalb von k. Ein Logisches Programm kann einen ähnlichen Effekt nur dann erzielen, wenn es unterhalb von k nur genau eine zulässige Lösung gibt, die es durch die Constraint Propagation schrittweise eingrenzen kann.

    b. Die Logische Programmierung bietet keine effiziente Handhabung einer Bewertungsfunktion, die über die Zulässigkeitsprüfung hinausgeht. Entsprechende Bewertungsroutinen sind vom Anwendungsprogrammierer selbst zu implementieren und können sich nur auf die Werte der bereits festgelegten Variablen stützen. Die Projektion der Bewertung des besten von einem Knoten k aus zu erreichenden zulässigen Endknotens ist daher äußerst schwierig, wodurch wiederum die Identifikation dominierter Bereiche des Entscheidungsbaumes durch den Vergleich der Knotenbewertung $f(k)$ mit der Bewertungsgrenze f_{best} nur sehr eingeschränkt möglich ist. Mit der Zielbewertung $z(\mathrm{LP}(k))$ der LP-Relaxation von k verfügt die (Gemischt-)Ganzzahlige Programmierung hier über ein sehr viel wirkungsvolleres Instrument.

c. Lösungsansätze der Logischen Programmierung sind innerhalb des Branch-and-Bound-Verfahrens auf die Verwendung einer LIFO-Strategie für die Knotenwahl festgelegt, während die (Gemischt-) Ganzzahlige Programmierung hierfür auch andere Regeln anbietet, wie die Auswahl anhand der Knotenbewertung oder anhand der Summe der Verletzungen der Ganzzahligkeitsbedingung (vgl. Abschnitt 5.1.1).

2. *Gemischt-ganzzahlige Programmierung vs. Lineare Programmierung*: Die Lineare Programmierung ohne Berücksichtigung einer Ganzzahligkeitsforderung lässt sich nur dann sinnvoll einsetzen, wenn das Modell unimodular formuliert ist, so dass seine optimale Lösung automatisch ganzzahlig ist. Diese Eigenschaft ist jedoch an die Erfüllung strenger Voraussetzungen gebunden, die nur unter Relaxation fast aller Restriktionstypen zu erreichen ist.[43] Wegen des damit verbundenen hohen Risikos, keine für das Problem zulässige Lösung erreichen zu können, erscheint die Lineare Programmierung für die Setzung von Schulstundenplänen ungeeignet.

3. *Gemischt-ganzzahlige Programmierung vs. Nicht-lineare Programmierung*: Für die Lösung nicht-linearer Modelle existieren derzeit keine Verfahren, die eine dem LP-basierten Branch-and-Bound-Algorithmus vergleichbare Effizienz vorweisen können (vgl. Abschnitt 3.2.2.5). Die Verwendung der Nicht-linearen Programmierung für die Stundenplansetzung erscheint daher wenig attraktiv, zumal sich das Problem auch mit Hilfe linearer Modellrestriktionen und einer linearen Bewertungsfunktion gut abbilden lässt.

4. *Gemischt-ganzzahlige Programmierung vs. Ganzzahlige Programmierung*: Die Gemischt-ganzzahlige Programmierung erlaubt es, ganzzahlige bzw. 0/1-Variablen mit kontinuierlichen Variablen zu verknüpfen. Letztere haben den Vorteil, dass mit ihrer Hilfe bestimmte Modellzusammenhänge abgebildet werden können, ohne dass sich die Größe des Entscheidungsbaumes und damit dessen Komplexität erhöht.

Vor dem Hintergrund dieser Motivation und der im vorangegangenen Kapitel erworbenen Kenntnisse über bereits verwirklichte Lösungsansätze, soll nun anhand konkreter Modellformulierungen und eines auf ihnen aufbauenden Testprogramms in diesem und dem folgenden Kapitel die eingangs gestellte Leitfrage nach dem über bisherige Ansätze hinausgehenden Potenzial der Gemischt-ganzzahligen Programmierung für eine effektive automatisierte Setzung von Stundenplänen allgemeinbildender Schulen weiterverfolgt

[43] Vgl. die Ausführungen zur „natürlichen Ganzzahligkeit“ bei Meyer und Hansen [1996], S.60ff.

werden. Hierzu wird in Unterkapitel 4.2 ein Ansatz vorgestellt, welcher, der Idealvorstellung der Mathematischen Optimierung entsprechend, eine einstufige Lösung auf Basis eines umfassenden gemischt-ganzzahligen Totalmodells anstrebt und als ToMIP (= **To**tales **M**ixed **I**nteger **P**rogramming) bezeichnet ist. Ihm folgen in den Unterkapiteln 4.3 und 4.4 zwei weitere Ansätze, die auf verschiedenen Varianten einer Dekomposition des Gesamtmodells in mehrere Teilmodelle beruhen. Sie werden im Rahmen der Diskussion möglicher Dekompositions- und Relaxationsstrategien bereits im Folgenden Abschnitt kurz vorgestellt. Eine tabellarische Zusammenfassung der in diesem Kapitel vorgestellten Modelle findet sich in Anhang 8.2.

Grundlage der weiteren Betrachtung ist für alle Ansätze die Beschreibung des Setzungsproblems durch die in Tabelle 2.11 enthaltenen Restriktionstypen und Zielsetzungen.

4.1.2 Dekompositions- und Relaxationsstrategien

Aufgrund seiner Struktur und der in der Praxis i.d.R. gegebenen Fallgrößen weist das Problem der Stundenplansetzung an allgemeinbildenden Schulen eine äußerst hohe Komplexität auf. Es muss daher damit gerechnet werden, dass seine erfolgreiche Lösung auf Basis eines umfassenden, unrelaxierten Totalmodells der Gemischt-ganzzahligen Programmierung nicht in einer akzeptablen Zeitspanne durchgeführt werden kann. Um dennoch die Vorteile dieses Verfahrenstyps nutzen zu können, sind geeignete Dekompositions- und Relaxationsstrategien zu prüfen, die ggf. den Lösungsprozess vereinfachen können. Für eine Dekomposition des Totalmodells kommen mehrere Möglichkeiten in Betracht:

1. *Dekomposition in ein Wochen- und mehrere Tagesmodelle*: Dieses Verfahren wurde bereits von Gotlieb [1963] vorgeschlagen (vgl. Abschnitt 3.2.2.6). Dabei werden in einem ersten Schritt zunächst die zu erzeugenden Sitzungen den Wochentagen zugeordnet. Anschließend wird in einer zweiten Phase mit Hilfe separater Modelle für jeden Wochentag die genaue zeitliche und räumliche Positionierung der Sitzungen innerhalb der Tage bestimmt. Dabei können die Tagesmodelle unabhängig voneinander und in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.

   Ein Ansatz für die Modellierung des hier betrachteten Setzungsproblems mit Hilfe der Dekomposition in ein Wochen- und mehrere Tagesmodelle wird in Unterkapitel 4.3 ausführlich behandelt. Um die hierarchische Beziehung zwischen dem übergeordneten Wochenmodell und den sich aus seiner Lösung ergebenden Tagesmodellen zu betonen, wird dieser Ansatz im Folgenden als HiMIP (= **Hi**erarchisches **M**ixed **I**nteger **P**rogramming) bezeichnet.

2. *Dekomposition nach Klassen mit vorgeschalteter Prioritätsphase*: Diese Dekompositionsvariante beruht nicht auf einer Zerlegung der Zeitdimension, sondern auf einer Aufteilung der Menge aller Unterrichtseinheiten auf mehrere Teilmengen, die separat und sequenziell mit Hilfe jeweils eines Modells gesetzt werden. Die Regel, nach der diese Unterrichtseinheiten-Teilmengen gebildet werden, ist wiederum an einer Aufteilung der Menge aller Klassen in mehrere

Klassen-Teilmengen orientiert. Es werden jeweils diejenigen Unterrichtseinheiten für die Setzung im aktuellen (Teil-)Modell der Lösungssequenz ausgewählt, an denen mindestens eine Klasse aus der das Modell identifizierenden Klassen-Teilmenge beteiligt ist. Um die nach Klassen gebildete Modellsequenz von solchen Unterrichtseinheiten zu entlasten, die aufgrund mehrfacher Klassen- und/oder Lehrerbindungen besonders schwierig zu setzen sind, werden diese Unterrichtseinheiten in einer vorgeschalteten Prioritätsphase gesondert gesetzt. Die Teilmodelle, aus denen sich die Lösungssequenz insgesamt zusammensetzt, sind voneinander nicht unabhängig, da stets die Lösungen der vorgelagerten Teilmodelle durch entsprechende Variablenfixierungen im aktuellen Teilmodell berücksichtigt werden müssen, wenn Widersprüche in der Gesamtlösung der Sequenz vermieden werden sollen.

Eine ausführliche Beschreibung und Modellierung der Klassen-Dekomposition mit vorgeschalteter Prioritätsphase findet sich in Unterkapitel 4.4. Wegen seines sequenziellen Charakters und zur besseren Unterscheidung vom oben skizzierten HiMIP-Ansatz wird für diesen Ansatz im Folgenden die Bezeichnung SeMIP (= **Se**quenzielles **M**ixed **I**nteger **P**rogramming) gebraucht.

3. *Weitere Dekompositionsansätze*: Analog zur Dekomposition nach Klassen ließe sich eine Modellaufteilung auch nach Lehrer- oder Raumgruppen-Teilmengen vornehmen. In beiden Fällen sind jedoch die Aussichten, am Ende des Setzprozesses zu einer global zulässigen Lösung zu gelangen, als gering einzuschätzen, da aufgrund des Springstundenverbots für Klassen die Problematik entstünde, dass im letzten zu lösenden Teilmodell die verbliebenen Unterrichtseinheiten genau in die noch vorhandenen Lücken der Klassenpläne eingepasst werden müssten. Dies dürfte jedoch vor dem Hintergrund der noch vorhandenen Verfügbarkeiten von Lehrern und Räumen mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit misslingen. Dekompositionsansätze nach Lehrern und Raumgruppen werden daher in dieser Studie nicht weiter verfolgt.

Die Dekomposition des Totalmodells in mehrere Teilmodelle hat den Vorteil, dass die Teilmodelle, sofern sie zulässig sind, sowohl einzeln als auch in Summe sehr viel leichter und damit schneller lösbar sind als das Totalmodell. Der Preis, der für diesen Vorteil gezahlt werden muss, besteht in dem Verlust der Optimalitäts- und Zulässigkeitsgarantie in Bezug auf den Lösungsprozess insgesamt, d.h. es kann nicht garantiert werden, dass eine aus den Lösungen der Teilmodelle zusammengefasste zulässige bzw. optimale Gesamtlösung gefunden wird, auch wenn eine solche Lösung existiert.

Ein Dekompositionsansatz auf Basis der Gemischt-ganzzahligen Programmierung stellt daher keinen exakten, sondern einen heuristischen Ansatz dar, der jedoch auf einem exakten Verfahrenstyp basiert.[44] Problematisch ist dabei vor allem der Verlust der globalen

[44] Domschke und Drexl [1998] (S.120) bezeichnen Verfahrensansätze dieser Art als „unvollständig exakte Verfahren“.

Zulässigkeitsgarantie. Um sich gegen das Risiko einer durch die Modellzerlegung verursachten globalen Unzulässigkeit abzusichern, ist es ratsam, eine Vorgehensweise zu definieren, die es erlaubt, den Setzversuch auf unterschiedlichen Lösungspfaden zu wiederholen, um so nach etwaigen Fehlversuchen doch noch zu einer zulässigen Lösung zu gelangen. Weniger schwerwiegend hingegen ist der Verlust der Optimalitätsgarantie. Sie bezieht sich ohnehin lediglich auf die eindimensionale Zielfunktion des Gesamtmodells, welche die multidimensionale Zielsetzung des Stundenplaners nur ungenau erfassen kann. Eine hinsichtlich des Gesamtmodells optimale Lösung dürfte daher in den seltensten Fällen auch aus Sicht des Stundenplaners eine optimale Lösung darstellen.

Generell besteht eine Alternative zur Dekomposition des Gesamtmodells in der Relaxation eines oder mehrerer Restriktionstypen. Jedoch besteht bei weitreichender Relaxation das Risiko, mehr als eine akzeptable Zeitspanne mit der Verwandlung relaxiert-zulässiger Lösungen in unrelaxiert-zulässige Lösungen verbringen zu müssen. Aus diesem Grunde wird in dieser Studie grundsätzlich einer Dekomposition der Vorrang eingeräumt. Aber selbst bei Anwendung einer Dekompositionsstrategie kann es die Schwierigkeit eines Problemfalles oder sogar eine durch den Stundenplaner nicht wahrgenommene Inkonsistenz der Problemformulierung erfordern, einen oder mehrere Restriktionstypen zu relaxieren, damit eine zulässige Lösung des Modells erzielt werden kann. Für alle nachfolgend beschriebenen Lösungsansätze werden daher weitreichende Relaxationsmöglichkeiten formuliert, wobei der Schwerpunkt auf solchen Modellrestriktionen liegt, deren geringfügige Verletzung am ehesten vertretbar erscheint (vgl. Abschnitt 4.2.2.6).

4.1.3 Trennung von Zeit- und Raumzuordnung

Bei genauerer Betrachtung der drei Dimensionen Unterrichtseinheit, Zeit und Raum des Setzungsproblems an allgemeinbildenden Schulen lässt sich feststellen, dass die Freiheit der Raumzuordnung aufgrund der Raumgruppenspezifikation durch die Unterrichtseinheit (vgl. Definition 2.3) stark eingeschränkt ist. Unterstellt man nun, dass innerhalb einer Raumgruppe alle Räume gleichwertig sind, so können Zeit- und Raumzuordnung im Rahmen des Lösungsprozesses ohne jeglichen Qualitätsverlust der erzielten Stundenpläne separiert und sequenziell bearbeitet werden. Bedingung hierfür ist, dass die Zeitzuordnung der Raumzuordnung vorangeht und dass in das für die Zeitzuordnung definierte Modell Kapazitätsrestriktionen integriert werden, die sicherstellen, dass zu einem beliebigen Zeitpunkt nicht mehr Sitzungen eine Raumgruppe beanspruchen, als Räume dieser Gruppe zur Verfügung stehen. Liegt eine Zeitzuordnung vor, die diese Restriktionen erfüllt, so ist die nachfolgende Raumzuordnung trivial, da lediglich für jede Periode und Raumgruppe aus n verfügbaren Räumen $n_{aktiv} \leq n$ benötigte Räume beliebig auszuwählen sind.

Der Vorteil einer solchen Trennung von Zeit- und Raumzuordnung liegt vor allem in der deutlich geringeren Variablenzahl des auf zwei Dimensionen beschränkten Zeitzuordnungsmodells, das dadurch leichter lösbar wird. Die dem Modell implizite Annahme der Gleichwertigkeit aller Räume einer Raumgruppe bedeutet dabei keine schwerwiegende Verzerrung der Problemstellung, da es jederzeit in der Hand des Stundenplaners liegt, die Raumgruppenaufteilung so zu definieren, dass diese Voraussetzung erfüllt ist. Ein Problem erwächst hieraus nur dann, wenn die Zusammenfassung von Räumen unterschiedlicher Eignung explizit gewollt ist, etwa um abzubilden, dass für eine bestimmte Unterrichtseinheit zwar mehrere Räume in Frage kommen, diese jedoch unterschiedlich bevorzugt werden. Aber selbst in diesem Fall ist die globale Zulässigkeitsgarantie durch die Zerlegung nicht gefährdet. Lediglich die Zielverfolgung wird insofern beeinträchtigt, als Raumpräferenzen wegen der vorgezogenen separaten Zeitzuordnung zeitlichen Präferenzen hierarchisch untergeordnet werden. Die Verwirklichung von Raumpräferenzen wurde jedoch von keinem Teilnehmer der Umfrage unter Berliner Stundenplanern vom Winter 1997/98 als relevante Zielsetzung erwähnt (vgl. Abschnitt 2.2.2).

Aufgrund der, verglichen mit den positiven Effekten der Komplexitätsreduktion, geringen zu erwartenden Beeinträchtigung der Lösungsqualität durch eine Trennung von Zeit- und Raumzuordnung wird diese Trennung allen nachfolgend angestellten Betrachtungen zugrunde gelegt. So sind die beschriebenen gemischt-ganzzahligen Modelle innerhalb der Ansätze ToMIP, HiMIP und SeMIP sämtlich auf die Zeitzuordnung beschränkt. Die Raumzuordnung hingegen wird aufgrund ihrer trivialen Lösbarkeit nicht explizit modelliert. Sie ist in das Stundenplan-Einlesemakro der Microsoft Excel-Arbeitsmappe integriert, welche ich für Ansicht und Druck der mit Hilfe der neuen Lösungsansätze generierten Stundenpläne angelegt habe. (vgl. Abschnitt 5.1.3).

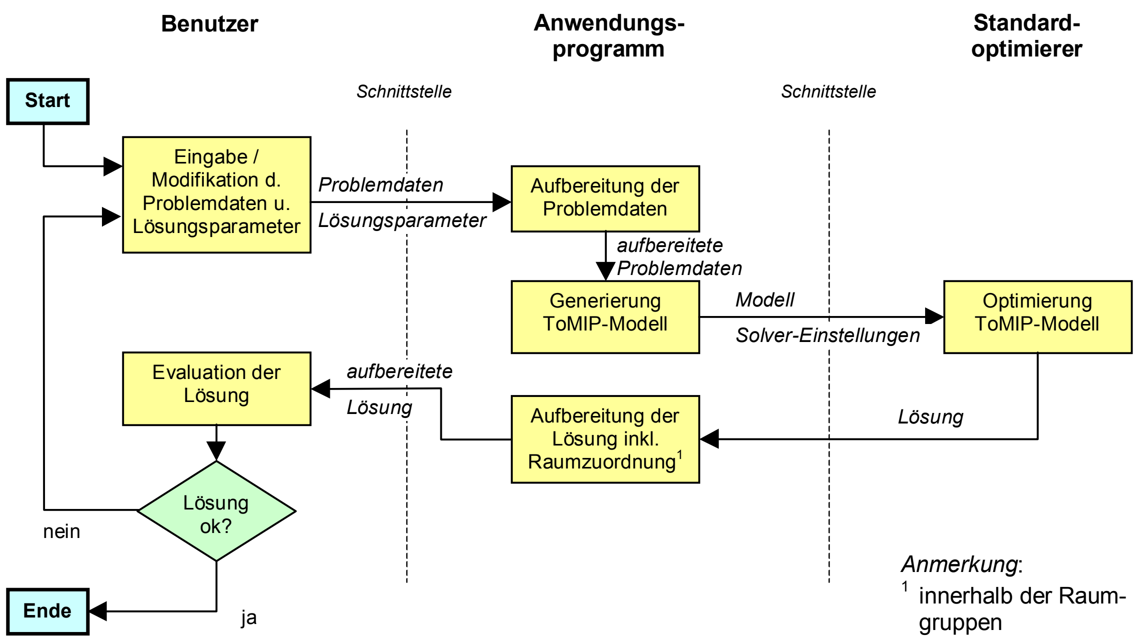
4.2 Ansatz 1: ToMIP - Einstufige Setzung im Totalmodell

4.2.1 Vorgehensweise

Die Idealvorstellung eines Ansatzes für die Stundenplansetzung mit Hilfe der Gemischt-ganzzahligen Programmierung besteht in der einstufigen Lösung im Totalmodell (ToMIP), da sie keine Einschränkung hinsichtlich der Zulässigkeits- und Optimalitätsgarantie beinhaltet. Eine Formulierung für dieses Modell wird in den nachfolgenden Abschnitten dieses Unterkapitels vorgestellt.

Der erfolgreiche Verlauf des Lösungsprozesses beruht allerdings nicht allein auf der mathematischen Modellformulierung. Hierzu bedarf es eines gut abgestimmten Zusammenwirkens von Benutzer, Anwendungsprogramm und darin eingebundenem Standard-Optimiererungsprogramm. Einen schematischen Überblick über dieses Zusammenwirken im Rahmen des ToMIP-Ansatzes gibt Abbildung 4.1.

Abbildung 4.1: Lösungsprozess auf Basis des ToMIP-Modells
(vereinfachtes Schema)



Das Anwendungsprogramm nimmt eine Mittlerrolle zwischen Benutzer und Standard-Optimierungsprogramm wahr, indem es einerseits die benutzerseitig getätigten Eingaben von Problemdaten und Lösungsparametern aufbereitet und in ein für den Optimierer interpretierbares Modell verwandelt und andererseits die vom Optimierer erzeugte Lösung in ein für den Benutzer übersichtliches und verständliches Format transferiert und entsprechend anzeigt. Zur Aufbereitung der Lösung gehört dabei auch die Bestimmung konkreter Räume innerhalb der für jede Sitzung vorgegebenen Raumgruppe (vgl. Abschnitt 4.1.3). Mit Hilfe der durch das Anwendungsprogramm bereitgestellten Benutzeroberfläche kann der Benutzer die jeweilige Lösung evaluieren und bei Nichtgefallen Änderungen an den Eingabedaten vornehmen, um anschließend einen erneuten Lösungsversuch zu starten.

Die Darstellung in Abbildung 4.1 ist zur besseren Übersichtlichkeit gegenüber den tatsächlichen Ablaufstrukturen vereinfacht. Sie gibt einen idealtypischen Prozessablauf wieder, der unterstellt, dass es stets eine zulässige Lösung für das jeweils betrachtete Problem gibt und dass die Optimierungssoftware immer in der Lage ist, innerhalb der durch den Benutzer vorgegebenen Zeitbegrenzung eine solche Lösung aufzufinden. Selbstverständlich muss die Implementation des Ansatzes auch den Fall berücksichtigen, dass keine zulässige Lösung gefunden werden kann. Dies kann durch die Vermittlung geeigneter Daten für die Ursachenanalyse an den Benutzer geschehen, der dann mit entsprechend veränderter Parametereinstellung einen erneuten Setzungslauf starten kann.

4.2.2 Modellformulierung

4.2.2.1 Vorbemerkungen

Um das Modell so gut lesbar wie möglich zu gestalten, werden für seine Darstellung folgende Konventionen verwandt:

1. Mengen werden durch Großbuchstaben bezeichnet und verwenden, soweit sie sich auf Elemente anderer Mengen beziehen, tiefergestellte Indizes.
2. Parameter werden durch Kombinationen von Kleinbuchstaben bezeichnet und verwenden, soweit sie sich auf Elemente von Mengen beziehen, geklammerte Indizes.
3. Variablen werden durch einzelne oder Kombinationen von Kleinbuchstaben bezeichnet und verwenden, soweit sie sich auf Elemente von Mengen beziehen, tiefergestellte Indizes.
4. Tiefergestellte Buchstabenkombinationen im Zusammenhang mit Parametern und höhergestellte Buchstabenkombinationen generell dienen ausschließlich der besseren Lesbarkeit und stellen keine Indizes dar.
5. Für die verschiedenen Größen werden größtenteils „sprechende“ Bezeichnungen verwendet, z.B. K für die Menge aller Klassen, $g(r)$ für den Gebäudekomplex der Raumgruppe r etc.
6. Zur besseren begrifflichen Differenzierung werden Planungsperioden von Unterrichtsperioden und Planungstage von Unterrichtstagen unterschieden. Dabei bezeichnet eine Planungsperiode allgemein jede Einzelperiode des betrachteten Planungshorizontes, ein Planungstag die Gesamtheit aller Planungsperioden, die demselben Tag angehören. Die Begriffe Unterrichtsperiode und Unterrichtstag hingegen beziehen sich stets auf eine einzelne Klasse oder einen einzelnen Lehrer. Dabei bezeichnet eine Unterrichtsperiode eine Planungsperiode, in der die betreffende Klasse bzw. der Lehrer für einen Unterricht eingesetzt ist. Ein Unterrichtstag enthält die Menge aller Planungsperioden, die

zwischen einschließlich der ersten und einschließlich der letzten Unterrichtsperiode der betreffenden Klasse oder des Lehrers an einem Planungstag liegen. Soweit im Folgenden die Begriffe Periode bzw. Tag ohne Erweiterung verwendet werden, sind sie stets in der Bedeutung Planungsperiode bzw. Planungstag zu verstehen.

Ferner werden folgende Vereinfachungen festgelegt, die keinen Verlust an Allgemeingültigkeit bedeuten, da sich jeder Anwendungsfall entsprechend anpassen lässt:

1. Jeder Planungstag umfasst eine Menge P von Planungsperioden 1, .., $|P|$. Sie ist für alle Planungstage identisch.
2. Unterrichtseinheiten definieren entweder nur solche Sitzungen, die gemäß Randstundenforderung (R-06) am Rande eines Unterrichtstages liegen müssen, oder nur solche Sitzungen, die nicht am Rande eines Unterrichtstages liegen müssen.
3. Jede Raumgruppe r lässt sich genau einem Gebäudekomplex $g(r)$ zuordnen.

Die nachfolgend präsentierte Modellformulierung ToMIP umfasst neben einer unrelaxierten Basisversion zwei Zusammenstellungen von Erweiterungen und Änderungen, die sich aus der Einbeziehung von Relaxationsmöglichkeiten einerseits (Abschnitt 4.2.2.6) und aus einer Definition täglicher Kern-Unterrichtszeiten für die Klassen (Abschnitt 4.2.2.7) andererseits ergeben und der vereinfachten Modelllösung dienen. Eine tabellarische Zusammenfassung der Modellformulierung einschließlich der genannten Erweiterungen und Änderungen findet sich in Anhang 8.2.1.

4.2.2.2 Mengen und Parameter

Seien gegeben:

K	:=	Menge aller Klassen
L	:=	Menge aller Lehrer
F	:=	Menge aller Unterrichtsfächer
T	:=	Menge aller Planungstage des Planungshorizontes
P	:=	$\{1, .., \|P\|\}$ = Menge aller Perioden eines Planungstages
U	:=	Menge aller durch die Unterrichtsverteilung vorgegebenen Unterrichtseinheiten
R	:=	Menge aller Raumgruppen

G	:= Menge aller Gebäudekomplexe, deren Entfernung voneinander zu längeren Wegezeiten führt	
F_k	:= $\{f \in F$: f wird in Klasse k unterrichtet$\}$;	$\forall\ k \in K$
P^{gP}	:= $\{p \in P$: p liegt vor einer großen Pause$\}$	
U_k	:= $\{u \in U$: u wird in Klasse k unterrichtet$\}$;	$\forall\ k \in K$
U_{kf}	:= $\{u \in U_k$: u betrifft Fach $f\}$;	$\forall\ k \in K, f \in F$
U_l	:= $\{u \in U$: u wird von Lehrer l unterrichtet$\}$;	$\forall\ l \in L$
U^{Tlg}	:= $\{u \in U$: u ist eine Teilung$\}$	
U_k^{Rd}	:= $\{u \in U_k$: die Sitzungen von u müssen am Rand eines Unterrichtstages der Klasse k liegen$\}$;	$\forall\ k \in K$
ds_{max}	:= maximal mögliche Sitzungsdauer einer Unterrichtseinheit in Anzahl Perioden	
D	:= $\{1, .., ds_{max}\}$ = Menge aller möglichen Sitzungsdauern	
$as(u, d)$	:= Anzahl zu erzeugender Sitzungen der Dauer d für Unterrichtseinheit u;	$\forall\ u \in U, d \in D$
D_u	:= $\{d \in D$: $as(u, d) > 0\}$ = Menge aller in der Spezifikation von u vorgesehenen Sitzungsdauern;	$\forall\ u \in U$
P_{udt}^{ok}	:= $\{p \in P$: eine zu u gehörende Sitzung der Dauer d darf in Periode p des Planungstages t beginnen$\}$;	$\forall\ u \in U, d \in D_u, t \in T$
$g(r)$	:= Gebäudekomplex, in dem die Räume der Raumgruppe r angesiedelt sind;	$\forall\ r \in R$
$ar(u, r)$	:= Anzahl der durch Unterrichtseinheit u beanspruchten Räume der Raumgruppe r;	$\forall\ u \in U, r \in R$
$ar_{verf}(r, t, p)$	:= Gesamtzahl der in Periode p des Tages t verfügbaren Räume der Raumgruppe r;	$\forall\ r \in R, t \in T, p \in P$
R_u	:= $\{r \in R$: $ar(u, r) > 0\}$ = Menge aller Raumgruppen, die durch Unterrichtseinheit u in Anspruch genommen werden;	$\forall\ u \in U$

U_r	:=	$\{u \in U: ar(u, r) > 0\}$ = Menge aller Unterrichtseinheiten, die Raumgruppe r beanspruchen;	$\forall\ r \in R$
$ast(u)$	:=	maximal zulässige Anzahl von Sitzungen der Teilung u am selben Tag;	$\forall\ u \in U^{Tlg}$
$att(u)$	:=	maximal zulässige Anzahl der für Sitzungen der Teilung u verwendeten Tage;	$\forall\ u \in U^{Tlg}$
$dkt_{min}(k)$	:=	minimale Dauer eines Unterrichtstages der Klasse k in Anzahl Perioden;	$\forall\ k \in K$
$dkt_{max}(k)$	:=	maximale Dauer eines Unterrichtstages der Klasse k in Anzahl Perioden;	$\forall\ k \in K$
$bkt_{max}(k)$	:=	Periode des spätest zulässigen Beginns eines Unterrichtstages der Klasse k;	$\forall\ k \in K$
$alss_{max}(l)$	:=	maximal zulässige Anzahl von Springstunden für Lehrer l;	$\forall\ l \in L$
$aft(l)$	:=	Anzahl freier Tage für Lehrer l;	$\forall\ l \in L$
$akp(k)$	:=	$\sum_{u \in U_k} \sum_{d \in D_u} as(u,d) \cdot d$ = Gesamtdauer aller Sitzungen der Klasse k;	$\forall\ k \in K$
$alp(l)$	:=	$\sum_{u \in U_l} \sum_{d \in D_u} as(u,d) \cdot d$ = Gesamtdauer aller Sitzungen des Lehrers l;	$\forall\ l \in L$
$avb(t, p)$	:=	Anzahl der Lehrer, die in Planungsperiode p des Tages t für Vertretungszwecke zur Verfügung stehen sollen;	$\forall\ t \in T, p \in P$
$auvb_{max}\ (t, p)$	:=	maximale Unterschreitung der gewünschten Vertretungsbereitschaft in Planungsperiode p des Planungstages t;	$\forall\ t \in T, p \in P$
$fix(u, d, t, p)$	:=	$\begin{cases} 1 & \text{eine Sitzung mit Dauer } d \text{ der Unterrichtseinheit } u \text{ muss in Periode } p \text{ des Planungstages } t \text{ beginnen (Fixierung)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$;	$\forall\ u \in U, d \in D_u, t \in T, p \in P_{udt}^{ok}$
w_{FTB}	:=	Zielgewichtung für den frühen Tagesbeginn der Klassen-Unterrichtstage	
w_{LeSS}	:=	Zielgewichtung für die Minimierung der Springstundenzahl für Lehrer	

w_{Vb} := Zielgewichtung für die Sicherung der Vertretungsbereitschaft

Soweit keine weiteren Einschränkungen vorgegeben sind, gilt für die Mengen P^{ok}_{udt} der für Sitzungen der Dauer d einer Unterrichtseinheit u an jedem Tag t zulässigen Startperioden folgende Festlegung:

$$P^{ok}_{udt} := \{1, .., |P|\text{-}d\text{+}1\}; \qquad \forall\ u \in U, d \in D_u, t \in T$$

4.2.2.3 Variablen

Für die Beschreibung der Modellrestriktionen und -zielfunktion werden folgende Variablen benötigt:

$$x_{udtp} := \begin{cases} 1 & \text{eine Sitzung mit Dauer } d \text{ der Unterrichtseinheit } u \text{ beginnt in Periode } p \text{ des Planungstages } t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \qquad \forall\ u \in U, d \in D_u, t \in T, p \in P^{ok}_{udt}$$

$$kb_{ktp} := \begin{cases} 1 & \text{Klasse } k \text{ ist in Periode } p \text{ des Planungstages } t \text{ belegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \qquad \forall\ k \in K, t \in T, p \in P$$

$$lb_{ltp} := \begin{cases} 1 & \text{Lehrer } l \text{ ist in Periode } p \text{ des Planungstages } t \text{ belegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \qquad \forall\ l \in L, t \in T, p \in P$$

$$v_{ltp} := \begin{cases} 1 & \text{Lehrer } l \text{ hat in Periode } p \text{ des Planungstages } t \text{ Dienst als Vertretungsbereitschaft} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \qquad \forall\ l \in L, t \in T, p \in P$$

$$lf_{lt} := \begin{cases} 1 & \text{Lehrer } l \text{ hat an Planungstag } t \text{ frei} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \qquad \forall\ l \in L\text{: } aft(l) > 0, t \in T$$

$$y_{ut} := \begin{cases} 1 & \text{Teilung } u \text{ wird an Planungstag } t \text{ unterrichtet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \qquad \forall\ u \in U^{Tlg}, t \in T$$

lss_l := Springstundenzahl des Lehrers l, wobei $0 \leq lss_l \leq alss_{max}(l)$ und lss_l kontinuierlich; $\forall\ l \in L$

uvb_{tp} := Unterschreitung der gewünschten Vertretungsbereitschaft in Planungsperiode p des Tages t, wobei $0 \leq uvb_{tp} \leq auvb_{max}(t, p)$ und uvb_{tp} kontinuierlich; $\forall\ t \in T, p \in P$

4.2.2.4 Abbildung der Problemrestriktionen

Vollständigkeit (R-01)

Die Vollständigkeitsforderung verlangt, dass alle in der Unterrichtsverteilung enthaltenen Unterrichtseinheiten entsprechend der jeweiligen Vorgabe bezüglich Anzahl und Dauer der abzuhaltenden Sitzungen vollständig in den Stundenplan gesetzt werden. Dies wird durch die Restriktionen

$$\sum_{t \in T} \sum_{p \in P_{udt}^{ok}} x_{udtp} \geq as(u,d); \qquad \forall\ u \in U, d \in D_u \qquad \text{(ToMIP-Voll)}$$

gewährleistet. Sie stellen für jede Unterrichtseinheit u sicher, dass für jede Sitzungsdauer d, die in der Spezifikation von u vorkommt, über alle für u und d als Startperioden zulässigen Planungsperioden der verschiedenen Planungstage hinweg mindestens so viele Sitzungen eingeplant werden, wie es die Spezifikation von u verlangt. Die Relation „≥" ist durch das Zusammenwirken mit den Restriktionen des Springstundenverbots für Klassen mit einer Gleichheitsrelation identisch, da diese sicherstellen, dass nie mehr Unterrichtsperioden eingeplant werden, als für die Klasse insgesamt gefordert. Die ≥-Relation wird dennoch verwandt, da sie sich als einseitige Restriktion durch den LP-Solver leichter verarbeiten lässt.

Kollisionsfreiheit (R-02)

Lehrer und Klassen dürfen während einer beliebigen Periode nicht doppelt belegt sein, und von jeder Raumgruppe dürfen zu jeder Zeit maximal so viele Räume beansprucht sein, wie in ihr enthalten sind. Diese Forderungen werden durch die Restriktionen

$$\sum_{u \in U_k} \sum_{d \in D_u} \sum_{\substack{\pi = \max\{p-d+1;1\} \\ \pi \in P_{udt}^{ok}}}^{p} x_{udt\pi} - kb_{ktp} \leq 0; \qquad \forall\ k \in K, t \in T, p \in P \qquad \text{(ToMIP-KlaKoll)}$$

sowie

$$\sum_{u \in U_l} \sum_{d \in D_u} \sum_{\substack{\pi = \max\{p-d+1;1\} \\ \pi \in P_{udt}^{ok}}}^{p} x_{udt\pi} + v_{ltp} - lb_{ltp} \leq 0; \quad \forall\ l \in L, t \in T, p \in P \qquad \text{(ToMIP-LeKoll)}$$

und

$$\sum_{u\in U_r} ar(u,r)\cdot \sum_{d\in D_u} \sum_{\substack{\pi=\max\{p-d+1;1\}\\ \pi\in P_{udt}^{ok}}}^{p} x_{udt\pi} \le ar_{verf}(r,t,p);\ \forall\ r\in R, t\in T, p\in P \quad \text{(ToMIP-RgKap)}$$

repräsentiert. Die Ungleichungen (ToMIP-KlaKoll) besagen, dass für jede Klasse k in jeder Periode p eines beliebigen Tages t die Summe der k betreffenden und in p fortdauernden Sitzungen nicht höher sein darf als der Wert ihrer Belegvariablen kb_{ktp}, also maximal 1. Dabei sind neben Sitzungen, die in p selbst beginnen, auch solche zu berücksichtigen, die bereits in einer vor p gelagerten Periode π begonnen haben, jedoch wegen ihrer mehrperiodigen Dauer in p noch nicht beendet sind. Die Belegvariablen der Klassen werden in die Restriktionen (ToMIP-KlaKoll) einbezogen, obwohl die Kollsionsfreiheit einfacher durch die Ungleichungen

$$\sum_{u\in U_k} \sum_{d\in D_u} \sum_{\substack{\pi=\max\{p-d+1;1\}\\ \pi\in P_{udt}^{ok}}}^{p} x_{udt\pi} \le 1; \qquad \forall\ k\in K, t\in T, p\in P$$

abgebildet werden kann. Der Grund für die in (ToMIP-KlaKoll) gewählte Formulierung liegt darin, dass sie den Einsatz der Belegvariablen für die Erzwingung des Springstundenverbots für Klassen ermöglicht. Die Kollisionsfreiheitsrestriktionen für Lehrer (ToMIP-LeKoll) sind analog zu (ToMIP-KlaKoll) zu interpretieren, wobei durch die Einbeziehung der Variablen v_{ltp} die Möglichkeit abgebildet wird, dass der Lehrer l in Planungsperiode p zur Vertretung bereit stehen muss und aus diesem Grunde keinen regulären Unterricht halten kann.

Ähnlich wie die Kollisionsfreiheitsrestriktionen für Klassen und Lehrer sind die Kapazitätsrestriktionen der Raumgruppen (ToMIP-RgKap) zu deuten. Dabei wird durch den Faktor $ar(u, r)$ berücksichtigt, dass eine Unterrichtseinheit, z.B. eine Kopplung, durchaus mehrere Räume einer Raumgruppe in Anspruch nehmen kann. $ar_{verf}(r, t, p)$ gibt die Gesamtzahl der in Periode p des Tages t verfügbaren Räume der Raumgruppe r an. (ToMIP-RgKap) sind ohne Belegvariablen der Raumgruppen formuliert, da derartige Variablen an anderer Stelle im Modell nicht benötigt werden.

Sperrungen (R-03)

Sperrungen von Klassen, Lehrern oder Räumen zu bestimmten Zeiten müssen nicht durch Restriktionen im Modell berücksichtigt werden, sondern es genügt, sie in die Festlegung der Mengen P_{udt}^{ok} sowie der Parameter $ar_{verf}(r, t, p)$ einzubeziehen. Für die Klassen und Lehrer kann dies durch Umsetzung der Implikationen

$$\begin{array}{l}\text{Klasse } k \text{ in Periode } p \text{ des Tages } t \text{ gesperrt}\\ \rightarrow [(p-d+1)\notin P_{udt}^{ok};\ \forall\ u\in U_k, d\in D_u]\end{array} \quad ; \quad \forall\ k\in K, t\in T, p\in P$$

und

$$\begin{array}{l}\text{Lehrer } l \text{ in Periode } p \text{ des Tages } t \text{ gesperrt} \\ \rightarrow [(p - d + 1) \notin P_{udt}^{ok}\,;\ \forall\ u \in U_l, d \in D_u]\end{array} \quad ; \qquad \forall\ l \in L, t \in T, p \in P$$

vor dem Start des Modellgenerators geschehen. Sie schließen aus, dass irgendeine Sitzung einer Unterrichtseinheit *u*, in die die während Periode *p* an Tag *t* gesperrte Klasse *k* (analog: der gesperrte Lehrer *l*) involviert ist, eine Startperiode erhält, die dazu führen würde, dass die Sitzung während *p* andauert. Ist während der Periode *p* des Tages *t* ein Raum aus der Raumgruppe *r* gesperrt, so ist dies durch entsprechende Reduktion der Anzahl $ar_{verf}(r, t, p)$ der in Periode *p* an Tag *t* verfügbaren Räume der Gruppe *r* um den Betrag 1 zu berücksichtigen.

Während Lehrer und Räume in jeder beliebigen Planungsperiode gesperrt sein können, sind Klassen in der Praxis selten in Perioden gesperrt, die nicht am Rande eines Planungstages liegen. Es bedarf daher keiner gesonderten Berücksichtigung von Sperrungen in den Restriktionen für das Springstundenverbot für Klassen.

Springstundenverbot für Klassen (R-04)

Das Springstundenverbot für Klassen kann mit Hilfe der Klassen-Belegvariablen kb_{ktp} durch die Restriktionen

$$kb_{ktp} + kb_{kt\pi} - kb_{kt(p+1)} \leq 1\,; \qquad \forall\ k \in K, t \in T,\ p = 1, .., |P|\text{-}2,\ \pi = p\text{+}2, .., |P| \qquad \text{(ToMIP-KlaSS.1)}$$

und

$$\sum_{t \in T} \sum_{p \in P} kb_{ktp} \leq akp(k)\,; \qquad \forall\ k \in K \qquad \text{(ToMIP-KlaSS.2)}$$

durchgesetzt werden. Die Ungleichungen (ToMIP-KlaSS.1) stellen sicher, dass die Belegung einer Klasse *k* in zwei nicht benachbarten Perioden *p* und $\pi \geq p + 2$ eines Tages *t* nur dann erfolgen kann, wenn *k* in Periode $p + 1$ ebenfalls belegt ist. Da für jede Periode zwischen *p* und π - 1 eine weitere Restriktion dieses Typs definiert ist, ist stets gewährleistet, dass die Belegung von *k* in *p* und π die Belegung in allen dazwischen liegenden Perioden nach sich zieht. Die Restriktionen (ToMIP-KlaSS.2) verlangen zusätzlich, dass *k* nur in maximal so vielen Perioden belegt wird, wie dem Gesamtunterrichtsumfang *akp*(*k*) für *k* entspricht.

Die Sicherstellung der Springstundenfreiheit für die Klasse *k* ergibt sich aus dem Zusammenwirken der Restriktionen (ToMIP-KlaSS.1) und (ToMIP-KlaSS.2) mit den Vollständigkeitsrestriktionen (ToMIP-Voll) und den Kollisionsfreiheitsrestriktionen für Klassen (ToMIP-KlaKoll) in folgender Weise: Wird *k* in einer beliebigen Periode unterrichtet, so muss k wegen (ToMIP-KlaKoll) in dieser Periode „belegt“ werden. Die unterrichtsbedingte Belegung von k in zwei nicht benachbarten Perioden desselben Tages hat wegen (ToMIP-KlaSS.1) die Belegung in allen dazwischenliegenden Perioden zur Folge. Da jedoch k wegen (ToMIP-KlaSS.2) nur in maximal $akp(k)$ Perioden belegt werden darf, muss der Stundenplan für k springstundenfrei sein, da sonst die durch (ToMIP-Voll) geforderte vollständige Zuordnung aller Unterrichtseinheiten von k nicht möglich ist.

Doppelunterrichtsverbot (R-05)

Grundsätzlich gilt, dass jedes Fach in jeder Klasse nur einmal an einem Tag unterrichtet werden darf. Es können jedoch Ausnahmen von dieser Regel definiert sein. Solche Ausnahmen betreffen in der Praxis insbesondere Teilungen. Durch sie werden einzelne Klassen in mehrere Schülergruppen aufgeteilt, die von unterschiedlichen Lehrern in unterschiedlichen Räumen und zumeist in unterschiedlichen Fächern unterrichtet werden. Finden mehrere Sitzungen einer solchen Teilung am selben Tag statt, tauschen die Schülergruppen zwischen den Sitzungen die Fächer, so dass zwar die Klasse als Ganzes in den betroffenen Fächern mehrfach unterrichtet wird, die einzelnen Schülergruppen jedoch in jedem Fach nur einmal Unterricht erhalten. Um Teilungen angemessen berücksichtigen zu können, werden die Modellrestriktionen für das Doppelunterrichtsverbot wie folgt formuliert:

$$\sum_{d \in D_u} \sum_{p \in P_{udt}^{ok}} x_{udtp} - ast(u) \cdot y_{ut} \leq 0; \qquad \forall\ u \in U^{Tlg}, t \in T \qquad \text{(ToMIP-DopUV.1)}$$

$$\sum_{u \in U_{kf} \setminus U^{Tlg}} \sum_{d \in D_u} \sum_{p \in P_{udt}^{ok}} x_{udtp} + \sum_{u \in U_{kf} \cap U^{Tlg}} y_{ut} \leq 1; \quad \forall\ k \in K, f \in F_k, t \in T \qquad \text{(ToMIP-DopUV.2)}$$

Die Ungleichungen (ToMIP-DopUV.1) zwingen die Variable y_{ut} auf den Wert 1, wenn mindestens eine Sitzung einer Teilung u an Tag t stattfindet. Der Parameter $ast(u)$ gibt dabei an, wieviele Sitzungen von u maximal an demselbem Planungstag stattfinden dürfen. Die Restriktionen (ToMIP-DopUV.2) stellen für jede Klasse k, jedes in k unterrichtete Fach f und jeden Planungstag t sicher, dass maximal entweder eine Sitzung einer f betreffenden Nicht-Teilungseinheit (erster Summenterm) oder die erlaubte Anzahl an Sitzungen einer f betreffenden Teilung (zweiter Summenterm) stattfinden.

Randstunden (R-06)

Für bestimmte Unterrichtseinheiten kann gelten, dass die zu ihnen gehörenden Sitzungen am Rand eines Unterrichtstages der betroffenen Klassen liegen müssen. Diese Forderung wird häufig für Unterrichtseinheiten gestellt, die nicht alle Schüler einer Klasse binden, z.B. weil es sich um einen konfessionsgebundenen Religionsunterricht handelt. Durch die Randlage der Sitzungen solcher Einheiten wird erreicht, dass die nicht involvierten Schüler später in die Schule kommen bzw. früher gehen können. Randstundenforderungen lassen sich durch die Modellrestriktionen

$$x_{udtp} + kb_{kt(p-1)} + kb_{kt(p+d)} \leq 2; \qquad \forall\ k \in K, u \in U_k^{Rd}, d \in D_u, t \in T, p \in \{2, .., |P|\text{-}d\} \cap P_{udt}^{ok} \qquad \text{(ToMIP-Rand)}$$

abbilden. Sie sorgen dafür, dass die Setzung einer Rand-Unterrichtseinheit *u* einer Klasse *k* in die Periode *p* des Planungstages *t* nur dann erfolgen kann, wenn *k* nicht sowohl vor als auch nach der Sitzung von *u* belegt ist. Da der Klassenplan für *k* gleichzeitig springstundenfrei sein muss, führen die Restriktionen (ToMIP-Rand) dazu, dass Sitzungen von Rand-Unterrichtseinheiten stets entweder am Anfang oder am Ende eines Unterrichtstages von *k* stattfinden.

Fixierungen (R-07)

Sitzungen, die im Zuge einer manuellen Teilsetzung vorab erzeugt wurden, können leicht durch Festlegung der entsprechenden Zuordnungsvariablen auf den Wert 1 berücksichtigt werden:

$$x_{udtp} = 1; \qquad \forall\ u \in U, d \in D_u, t \in T, p \in P_{udt}^{ok} : fix(u, d, t, p) = 1 \qquad \text{(ToMIP-Fix)}$$

Wegezeiten (R-09)

Besteht eine Schule aus mehreren Gebäudekomplexen, die jeweils längere Wegstrecken voneinander entfernt liegen, so müssen entsprechende Wegezeiten im Stundenplan berücksichtigt werden. Diese haben zur Folge, dass für die Lehrer, vor allem aber für die Klassen Sitzungen, die in unterschiedlichen Gebäudekomplexen stattfinden sollen, nur dann in benachbarten Perioden stattfinden können, wenn zwischen ihnen eine große Pause liegt, in der sich der Weg zwischen den Gebäudekomplexen bewältigen lässt. Diese Anforderung lässt sich für die Klassen durch die Restriktionen

$$x_{udtp} + x_{\upsilon\delta t(p+d)} \leq 1; \qquad \forall\ k \in K, u, \upsilon \in U_k: [u \neq \upsilon \wedge \exists\ r \in R_u, \rho \in R_\upsilon: g(r) \neq g(\rho)], d \in D_u, \delta \in D_\upsilon, t \in T, p \in P_{udt}^{ok} : [(p+d) \in P_{\upsilon dt}^{ok} \wedge (p+d\text{-}1) \notin P^{gP}] \qquad \text{(ToMIP-KlaWeg)}$$

und für die Lehrer durch die Restriktionen

$$x_{udtp} + x_{\upsilon\delta\, t(p+d)} \leq 1; \qquad \forall\ l \in L, u, \upsilon \in U_l: [u \neq \upsilon \wedge \exists\ r \in R_u, \rho \in R_\upsilon: g(r) \neq g(\rho)], d \in D_u, \delta \in D_\upsilon, t \in T, p \in P^{ok}_{udt}: [(p+d) \in P^{ok}_{\upsilon dt} \wedge (p+d\text{-}1) \notin P^{gP}] \qquad \text{(ToMIP-LeWeg)}$$

darstellen. Sie verbieten jede an einem Tag t denkbare direkte, nicht durch eine große Pause getrennte Folge von Sitzungen zweier Unterrichtseinheiten u und υ der Klasse k bzw. des Lehrers l, deren Raumanforderungen zwei Raumgruppen r und ρ aus unterschiedlichen Gebäudekomplexen $g(r)$ und $g(\rho)$ betreffen.

Freie Tage für Lehrer (R-12)

Sind für bestimmte Lehrer, z.B. Teilzeitlehrer, freie Tage einzuplanen, so kann diese Anforderung durch die Restriktionen

$$\sum_{t \in T} lf_{lt} \geq aft(l); \qquad \forall\ l \in L: aft(l) > 0 \qquad \text{(ToMIP-LeFT.1)}$$

sowie

$$\sum_{p \in P} lb_{ltp} + |P| \cdot lf_{lt} \leq |P|; \qquad \forall\ l \in L: aft(l) > 0, t \in T \qquad \text{(ToMIP-LeFT.2)}$$

in das Modell einbezogen werden. Dabei fordern die Ungleichungen (ToMIP-LeFT.1), dass für jeden Lehrer l mit Anspruch auf freie Tage mindestens so viele Freie-Tage-Variablen lf_{lt} auf 1 gesetzt werden, wie der Mindestzahl $aft(l)$ der für l einzuplanenden freien Tage entsprechen. Die Restriktionen (ToMIP-LeFT.2) gewährleisten im Zusammenwirken mit den Kollisionsfreiheitsrestriktionen (ToMIP-LeKoll), dass an freien Tagen für l kein Unterricht angesetzt wird.

Weitere Problemrestriktionen

Während der Vorbereitung des in Kapitel 5 dokumentierten Testprogramms stellten sich in persönlichen Gesprächen mit Stundenplanern zwei weitere, bisher nicht behandelte Beschränkungen für einige der teilnehmenden Schulen als relevant heraus. Diese betreffen zum einen das Verbot, zweiperiodige Sitzungen (Doppelstunden) über eine große Pause hinweg stattfinden zu lassen, zum anderen die Vorschrift, mehrere Sitzungen einer Teilung demselben Tag zuzuordnen. Beide Forderungen sollen aus diesem Grunde in die Modellformulierung einbezogen werden.

Das Verbot zweiperiodiger Sitzungen über eine große Pause hinweg braucht nicht in Form expliziter Modellrestriktionen definiert zu werden. Es kann leicht durch die Zuweisung

$$P_{u2t}^{ok} := P_{u2t}^{ok} \setminus P^{gP}; \qquad \forall\ u \in U{:}\ as(u, 2) > 0, t \in T$$

vor Beginn der Modellgenerierung berücksichtigt werden. Die Zuweisung schließt direkt vor einer großen Pause liegende Planungsperioden als Startperioden für diese Sitzungen aus. Demgegenüber stellt die Vorschrift einer Mehrfachzuordnung von Teilungssitzungen zu demselben Planungstag eine Verschärfung der im Zusammenhang mit dem Doppelunterrichtsverbot erörterten Kann-Bedingung dar. Sie lässt sich durch den Ersatz der ≤-Relation in (ToMIP-DopUV.1) durch eine Gleichheitsrelation darstellen:

$$\sum_{d \in D_u} \sum_{p \in P_{ud}^{ok}} x_{udtp} - ast(u) \cdot y_{ut} = 0; \qquad \forall\ u \in U^{Tlg}, t \in T \qquad \text{(ToMIP-DopUV.1=)}$$

4.2.2.5 Abbildung der Zielsetzungen

Die Stundenplansetzung an allgemeinbildenden Schulen unterliegt einer Mehrfachzielsetzung, für die es innerhalb der Gemischt-ganzzahligen Programmierung verschiedene Handhabungsmöglichkeiten gibt (vgl. Abschnitt 3.2.2). In der hiesigen Modellformulierung werden für die Abbildung der Zielsetzungen folgende Modellierungsvarianten genutzt:

1. *Modellierung als herkömmlicher Zielfunktionsterm*: Abbildung in Form einer Zielfunktionskomponente, die ggf. mit anderen Zielfunktionskomponenten zu einer gewichteten Zielfunktion verknüpft wird; geeignet für Minimierungs- bzw. Maximierungsziele;
2. *Modellierung als herkömmlicher Restriktionstyp*: Abbildung durch Einbeziehung adäquater Modellrestriktionen; geeignet für strenge Punkt- und Satisfizierungsziele, die einen restriktionsnahen Charakter aufweisen;
3. *Modellierung als Goal Programming-Restriktionstyp und -Zielfunktionsterm*: Abbildung durch Einbeziehung adäquater Modellrestriktionen mit Über- und/oder Unterschreitungsvariablen, die mit einer Gewichtung in die Zielfunktion aufgenommen werden; geeignet für weniger strenge Punkt- und Satisfizierungsziele.

Die Entscheidung, welche dieser Varianten jeweils angewendet wird, richtet sich zum einen nach der Zielrichtung – Minimierung, Maximierung, Punktgenauigkeit oder Satisfizierung –, zum anderen nach der Strenge, die dem jeweiligen Ziel beizumessen ist. Die Einschätzung dieser Strenge beruht dabei auf meinem subjektiven, aus den empirischen Untersuchungen und persönlichen Gesprächen erwachsenen Urteil und erhebt keinen Anspruch auf Allgemeingültigkeit.

Gleichlange Klassentage (Z-01)

Für jede Klasse sollten die Dauern ihrer Unterrichtstage möglichst ausgeglichen sein, um die Beanspruchung der Schüler über die Woche hinweg möglichst gleichmäßig zu gestalten. Diese Forderung kann über die Modellierung von Mindest- und Höchstdauern der Unterrichtstage umgesetzt werden. Sie zählt i.d.R. zu den strengen Zielsetzungen und wird im Modell daher durch die Standard-Restriktionen

$$\sum_{p\in P} kb_{ktp} \geq dkt_{\min}(k); \qquad \forall\ k\in K, t\in T \qquad \text{(ToMIP-KlaTa.1)}$$

und

$$\sum_{p\in P} kb_{ktp} \leq dkt_{\max}(k); \qquad \forall\ k\in K, t\in T \qquad \text{(ToMIP-KlaTa.2)}$$

repräsentiert. Das Modell ist nur dann zulässig lösbar, wenn für jedes k die Mindestdauer $dkt_{min}(k)$ eines Unterrichtstages unterhalb und die Höchstdauer $dkt_{max}(k)$ eines Unterrichtstages oberhalb der durchschnittlichen täglichen Unterrichtsbelastung $akp(k) / |T|$ liegt. Sind $dkt_{min}(k) = \lfloor akp(k) / |T| \rfloor$ und $dkt_{max}(k) = \lceil akp(k) / |T| \rceil$, so wird die größtmögliche Gleichförmigkeit der Tageslängen erzwungen.

Früher Unterrichtsbeginn (Z-02)

Für jede Klasse sollte der Unterricht an jedem Tag möglichst früh, wenn möglich in der ersten Periode, beginnen. Eine entsprechende Zielfunktionskomponente lässt sich in der Form

$$\text{minimiere} \sum_{k\in K}\sum_{t\in T}\left[\sum_{p=1}^{bkt_{max}(k)-1} kb_{ktp} + 2\cdot \sum_{p=bkt_{max}(k)}^{\substack{bkt_{max}(k)\\+dkt_{min}(k)\ -1}} kb_{ktp} + 3\cdot \sum_{\substack{p=bkt_{max}(k)\\+dkt_{min}(k)}}^{|P|} kb_{ktp}\right] \qquad \text{(ToMIP-FrüBeg)}$$

modellieren. Sie unterteilt die Periodenmenge P in drei Zeitblöcke mit unterschiedlichen „Benutzungskosten". Am günstigsten sind dabei die Perioden des ersten Blocks, die vor dem spätest gewünschten Beginn $bkt_{max}(k)$ eines Unterrichtstages der jeweiligen Klasse k liegen. Teuer ist hingegen die Nutzung des letzten Blocks, dessen Perioden sich, von Periode $bkt_{max}(k)$ aus gerechnet, nicht mehr innerhalb der Zeitspanne $dkt_{min}(k)$ der für k gewünschten minimalen Dauer eines Unterrichtstages befinden. Soll zusätzlich sichergestellt sein, dass ein Unterrichtstag für die Klasse k garantiert nicht später als in Periode $bkt_{max}(k)$ beginnt, so kann dies durch die Variablenfixierungen

$$kb_{kt(bkt_{\max}(k))} = 1; \qquad \forall\ k\in K, t\in T \qquad \text{(ToMIP-MaxBeg)}$$

erzwungen werden.

Springstundenminimierung für Lehrer (Z-06)

Die Minimierung der Springstundenzahl für Lehrer stellt eine weitere wichtige Zielsetzung dar. Sie lässt sich mit Hilfe der Belegvariablen lb_{ltp} der Lehrer und einer dem Springstundenverbot für Klassen ähnlichen Formulierung über die Restriktionen

$$lb_{ltp} + lb_{lt\pi} - lb_{lt(p+1)} \leq 1; \qquad \forall\ l \in L, t \in T,\ p = 1, .., |P|\text{-}2,\ \pi = p\text{+}2, .., |P| \qquad \text{(ToMIP-LeSS.1)}$$

und

$$\sum_{t \in T} \sum_{p \in P} lb_{ltp} - lss_l \leq alp(l); \qquad \forall\ l \in L \qquad \text{(ToMIP-LeSS.2)}$$

erreichen, wobei $alp(l)$ die Gesamtunterrichtsbelastung des Lehrers l und lss_l eine kontinuierliche Zählvariable für die Lehrerspringstunden darstellen. Durch Setzen einer Obergrenze $alss_{max}(l)$ für die Variable lss_l kann eine Beschränkung der Springstundenzahl für l erzwungen werden. Die lss_l sind als Überschreitungsvariablen der Goal-Restriktionen (ToMIP-LeSS.2) mit einer Gewichtung in die Zielfunktion aufzunehmen.

Vertretungsbereitschaft (Z-10)

Der Wunsch, es mögen avb_{tp} oder mehr Lehrer in Planungsperiode p des Tages t für Vertretungszwecke zur Verfügung stehen, kann über die Goal-Restriktionen

$$\sum_{\substack{l \in L:\, l \text{ in Periode} \\ p \text{ des Tages } t \text{ verfügbar}}} v_{ltp} + uvb_{tp} \geq avb(t, p); \qquad \forall\ t \in T, p \in P \qquad \text{(ToMIP-Vb)}$$

in das Modell einbezogen werden. Die Unterschreitungsvariablen uvb_{tp} sind mit einer Gewichtung in die Zielfunktion aufzunehmen. Durch Einbeziehung einer Obergrenze $auvb_{max}(t, p)$ für die Variablen uvb_{tp} kann die Einhaltung eines Mindestniveaus der Vertretungsbereitschaft gesichert werden.

Fächerbeziehungen (Z-12)

Die Vermeidung des Unterrichts bestimmter Fächer am selben Tag betrifft i.d.R. nur sehr wenige Fächerpaare, z.B. Sport und Schwimmen. Sie können leicht dadurch berücksichtigt werden, dass diesen Fächerpaaren eine übergeordnete gemeinsame Fächerbezeichnung zugeordnet wird, die dann unter das Doppelunterrichtsverbot fällt.

Zusammenfassung der Zielfunktion

Von den fünf für das Setzungsproblem an allgemeinbildenden Schulen betrachteten Zielgrößen werden zwei, die Nivellierung der Klassenunterrichtstage und die Vermeidung des Unterrichts bestimmter Fächerpaare am selben Tag, über Modellrestriktionen erzwungen.

Die Springstundenminimierung für Lehrer und die Sicherung der Vertretungsbereitschaft hingegen werden mit Hilfe von Goal-Restriktionen und Über- bzw. Unterdeckungsvariablen abgebildet, die entsprechend in die Zielfunktion aufzunehmen sind. Als einfache Zielgröße ist der frühe Unterrichtsbeginn für Klassen formuliert. Aus dieser Konstellation ergibt sich

$$\text{minimiere} \quad w_{FTB} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} \left[\sum_{p=1}^{bkt_{max}(k)-1} kb_{ktp} + 2 \cdot \sum_{p=bkt_{\max}(k)}^{bkt_{max}(k)+dkt_{\min}(k)-1} kb_{ktp} + 3 \cdot \sum_{\substack{p=bkt_{max}(k)\\+dkt_{\min}(k)}}^{|P|} kb_{ktp} \right] \quad \text{(ToMIP-Ziel)}$$

$$+ \quad w_{LeSS} \cdot \sum_{l \in L} lss_l \quad + \quad w_{Vb} \cdot \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} uvb_{tp}$$

als lineare gewichtete Gesamt-Zielfunktion für das Modell ToMIP.

4.2.2.6 Veränderungen des Modells durch Berücksichtigung von Relaxationen

Die Größe und Komplexität eines Problemfalles, aber auch die Eingabe inkonsistenter Rahmendaten können die Relaxation einiger Restriktionstypen erforderlich machen, um die Lösung des Modells zu erleichtern bzw. zu ermöglichen. Damit die dadurch verursachten Qualitätseinbußen so gering wie möglich ausfallen, werden Relaxationsmöglichkeiten nachfolgend ausschließlich für solche Restriktionstypen modelliert, deren begrenzte Verletzung möglicherweise im Einzelfall toleriert werden kann: die maximal gewünschte Lehrerspringstundenzahl, freie Tage für Lehrer, die minimale und/oder maximale Länge der Klassenunterrichtstage, Fixierungen, Wegezeiten, Randlagewünsche, ggf. die Muss-Bestimmung der Mehrfacherteilung von Teilungen am selben Tag, das Verbot großer Pausen innerhalb zweiperiodiger Sitzungen und schließlich das Doppelunterrichtsverbot. Für alle übrigen Restriktionstypen wird unterstellt, dass sie nicht relaxiert werden können, ohne die Brauchbarkeit der erzeugten Pläne von vornherein auszuschließen. Soweit sich nicht unmittelbar eine andere Vorgehensweise empfiehlt, werden alle Relaxationen mit den Mitteln des Goal Programming abgebildet, um die mit einer Lagrange-Relaxation verbundene Problematik der iterativen Bestimmung der Lagrange-Multiplikatoren zu umgehen (vgl. Abschnitt 3.2.2.7).

Zusätzliche Parameter und Variablen

Seien für die Relaxation folgende zusätzliche Parameter definiert:

$alss_{max}^{Relax}(l)$:= maximale aufgrund der Relaxation zulässige
Anzahl zusätzlicher Springstunden für Lehrer l; $\forall \ l \in L$

adu_{max}^{Relax} := maximale aufgrund der Relaxation zulässige
Anzahl von Sitzungen desselben
Fachs am selben Tag in derselben Klasse

w_{DUV}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation des Doppelunterrichtsverbotes

w_{Rd}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der Randstundenrestriktionen

w_{Fix}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der Fixierungen

w_{WzK}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der Wegezeitenrestriktionen für Klassen

w_{WzL}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der Wegezeitenrestriktionen für Lehrer

w_{LeTF}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation freier Lehrertage

w_{Dop}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der Pausenfreiheit für Doppelstunden

w_{Tlg}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der Forderung „Teilungsstunden am selben Tag“

w_{UKt}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der minimalen Länge für Klassen-Unterrichtstage

w_{OKt}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der maximalen Länge für Klassen-Unterrichtstage

w_{LeSS}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der maximalen Anzahl von Lehrerspringstunden

Seien ferner als zusätzliche Variablen definiert:

du_{kf}^{Relax} := Relaxation des Doppelunterrichtsverbots für Fach f in Klasse k, wobei $0 \leq du_{kf}^{Relax} \leq adu_{max}^{Relax}$; $\quad \forall\ k \in K, f \in F_k$

rs_{udt}^{Relax} := Relaxation für die Randlage von Sitzungen der Dauer d der Rand-Unterrichtseinheit u an Tag t, wobei $0 \leq rs_{udt}^{Relax} \leq 1$; $\quad \forall\ k \in K, u \in U_k^{Rd}, d \in D_u, t \in T$

wzk_{ktp}^{Relax}	:=	Relaxation der Wegezeit für Klasse k in Periode p des Tages t, wobei $0 \leq wzk_{ktp}^{Relax} \leq 1$;	$\forall\ k \in K, t \in T, p \in P$
wzl_{ltp}^{Relax}	:=	Relaxation der Wegezeit für Lehrer l in Periode p des Tages t, wobei $0 \leq wzl_{ltp}^{Relax} \leq 1$;	$\forall\ l \in L, t \in T, p \in P$
lf_l^{Relax}	:=	Anzahl trotz Anspruchs nicht gewährter freier Tage des Lehrers l, wobei $0 \leq lf_l^{Relax} \leq aft(l)$;	$\forall\ l \in L$
ts_{ut}^{Relax}	:=	Relaxation der Muss-Bestimmung „Teilungsstunden am selben Tag" für Teilung u und Planungstag t, wobei $0 \leq ts_{ut}^{Relax} \leq 1$;	$\forall\ u \in U^{Tlg}, t \in T$
ukt_{kt}^{Relax}	:=	Relaxation der Mindestdauer des Unterrichtstages der Klasse k an Planungstag t, wobei $0 \leq ukt_{kt}^{Relax} \leq dkt_{min}(k)$;	$\forall\ k \in K, t \in T$
okt_{kt}^{Relax}	:=	Relaxation der Höchstdauer des Unterrichtstages der Klasse k an Planungstag t, wobei $0 \leq okt_{kt}^{Relax} \leq \lvert P\rvert - dkt_{max}(k)$;	$\forall\ k \in K, t \in T$
lss_l^{Relax}	:=	Anzahl zusätzlicher Springstunden des Lehrers l, wobei $0 \leq lss_l^{Relax} \leq alss_{max}^{Relax}(l)$;	$\forall\ l \in L$

Alle zusätzlichen Variablen sind als kontinuierliche Variablen definiert, obwohl sie inhaltlich ganzzahlig zu verstehen sind. Dies ist möglich, da die Werte dieser Variablen dank des Zusammenwirkens von Modellrestriktionen und -zielfunktion in jeder durch das Branch-and-Bound-Verfahren erzeugten ganzzahligen LP-Lösung automatisch ebenfalls ganzzahlig sind.

Relaxation des Doppelunterrichtsverbotes (R-05)

Die Relaxation des Doppelunterrichtsverbots stellt bereits einen massiven Eingriff in die pädagogische Qualität des Stundenplanes dar. Sie sollte daher erst nach allen in den nachfolgenden Abschnitten erläuterten Relaxationsmöglichkeiten in Anspruch genommen werden. Umzusetzen ist die Relaxation des Doppelunterrichtsverbotes durch die Einbeziehung von Überschreitungsvariablen du_{kf}^{Relax} in die Restriktionen (ToMIP-DopUV.2):

$$\sum_{u \in U_{kf} \setminus U^{Tlg}} \sum_{d \in D_u} \sum_{p \in P^{ok}_{udt}} x_{udtp} + \sum_{u \in U_{kf} \cap U^{Tlg}} y_{ut} - du^{Relax}_{kf} \leq 1; \quad \forall\ k \in K, \quad f \in F_k, t \in T \qquad \text{(ToMIP-DopUV.2-R)}$$

Relaxation der Randstundenrestriktionen (R-06)

Randlagerestriktionen können durch Einfügung von Relaxationsvariablen rs^{Relax}_{udt} in die Restriktionen (ToMIP-Rand) entschärft werden:

$$x_{udtp} + kb_{kt(p-1)} + kb_{kt(p+d)} - rs^{Relax}_{udt} \leq 2; \quad \forall\ k \in K, u \in U^{Rd}_k, \; d \in D_u, t \in T, \; p \in \{2, .., |P|\text{-}d\} \cap P^{ok}_{udt} \qquad \text{(ToMIP-Rand-R)}$$

Relaxation der Fixierungen (R-07)

Sollen bereits fixierte Sitzungen in andere Perioden verlegt werden können, so sind die Restriktionen (ToMIP-Fix) aus dem Modell zu streichen und stattdessen die Benutzung der für die betroffenen Sitzungen bestimmten Planungstage und -perioden durch einen negativen Term in der Zielfunktion mit einer Gewichtung w^{Relax}_{Fix} zu belohnen.

Relaxation der Wegezeitenrestriktionen (R-09)

Eine Relaxation der Wegezeitenrestriktionen für die Klassen kann durch Erweiterung der Restriktionen (ToMIP-KlaWeg) um die Relaxationsvariable wzk^{Relax}_{ktp} in der Form

$$x_{udtp} + x_{\upsilon\delta t(p+d)} - wzk^{Relax}_{ktp} \leq 1; \quad \forall\ k \in K, u, \upsilon \in U_k: [u \neq \upsilon \wedge \exists\ r \in R_u, \rho \in R_\upsilon: g(r) \neq g(\rho)], \; d \in D_u, \delta \in D_\upsilon, t \in T, \; p \in P^{ok}_{udt} : [(p+d) \in P^{ok}_{udt} \wedge (p+d\text{-}1) \notin P^{gP}] \qquad \text{(ToMIP-KlaWeg-R)}$$

umgesetzt werden. Die entsprechende Anpassung der Restriktionen (ToMIP-LeWeg) für die Lehrer kann mit Hilfe der Relaxationsvariablen wzl^{Relax}_{ltp} durch die Neuformulierung

$$x_{udtp} + x_{\upsilon\delta t(p+d)} - wzl^{Relax}_{ltp} \leq 1; \quad \forall\ l \in L, u, \upsilon \in U_l: [u \neq \upsilon \wedge \exists\ r \in R_u, \rho \in R_\upsilon: g(r) \neq g(\rho)], \; d \in D_u, \delta \in D_\upsilon, t \in T, \; p \in P^{ok}_{udt} : [(p+d) \in P^{ok}_{udt} \wedge (p+d\text{-}1) \notin P^{gP}] \qquad \text{(ToMIP-LeWeg-R)}$$

erfolgen.

Relaxation freier Lehrertage (R-12)

Die Forderung nach freien Tagen für Lehrer lässt sich durch Modifikation der Restriktionen (ToMIP-LeFT.1) mit Hilfe der Unterschreitungsvariablen lf_l^{Relax} in der Form

$$\sum_{t \in T} lf_{lt} + lf_l^{Relax} \geq aft(l); \qquad \forall\ l \in L{:}\ aft(l) > 0 \qquad \text{(ToMIP-LeFT.1-R)}$$

relaxieren.

Relaxation des Verbots großer Pausen innerhalb zweiperiodiger Sitzungen

Ist in einem Fall die Forderung relevant, dass zweiperiodige Sitzungen nicht über große Pausen hinweg dauern dürfen, und soll diese Forderung relaxiert werden, so ist die in Abschnitt 4.2.2.4 formulierte Anweisung

$$P_{u2t}^{ok} := P_{u2t}^{ok} \setminus P^{gP}; \qquad \forall\ u \in U{:}\ as(u, 2) > 0, t \in T$$

rückgängig zu machen und stattdessen die Verwendung der unerwünschten Startperioden in der Zielfunktion mit einem Zielgewicht w_{Dop}^{Relax} zu bestrafen.

Relaxation der Muss-Bestimmung „Teilungssitzungen am selben Tag"

Ist in einem Fall die Forderung relevant, dass jeweils genau $ast(u)$ Sitzungen einer Teilung am selben Tag stattfinden müssen, so ist diese Einschränkung durch Einfügung von Relaxationsvariablen ts_{ut}^{Relax} in die Restriktionen (ToMIP-DopUV.1=) in folgender Weise entschärfbar:

$$\sum_{d \in D_u} \sum_{p \in P_{ud}^{ok}} x_{udtp} - ast(u) \cdot y_{ut} - ast(u) \cdot ts_{ut}^{Relax} = 0\,; \quad \forall\ u \in U^{Tlg}, t \in T \qquad \text{(ToMIP-DopUV.1=-R)}$$

Relaxation der Mindest- und Höchstlängen der Klassenunterrichtstage

Die Begrenzung der Klassen-Unterrichtstage kann durch Erweiterung der Restriktionen (ToMIP-KlaTa.1) und (ToMIP-KlaTa.2) um Unter- bzw. Überschreitungsvariablen ukt_{kt}^{Relax} und okt_{kt}^{Relax} in der Form

$$\sum_{p \in P} kb_{ktp} + ukt_{kt}^{Relax} \geq dkt_{\min}(k); \qquad \forall\ k \in K, t \in T \qquad \text{(ToMIP-KlaTa.1-R)}$$

und

$$\sum_{p \in P} kb_{ktp} - okt_{kt}^{Relax} \leq dkt_{\max}(k); \qquad \forall\ k \in K, t \in T \qquad \text{(ToMIP-KlaTa.2-R)}$$

relaxiert werden.

Relaxation der Begrenzung von Lehrerspringstunden

Die letzte der hier betrachteten Relaxationsmöglichkeiten betrifft die Begrenzung von Lehrerspringstunden, die im Zusammenhang mit dem Ziel der Springstundenminimierung festgelegt sein kann. Sie lässt sich durch die Erweiterung der Restriktionen (ToMIP-LeSS.2) in der Form

$$\sum_{t \in T} \sum_{p \in P} lb_{ltp} - lss_l - lss_l^{Relax} \leq alp(l); \qquad \forall \ l \in L \qquad \text{(ToMIP-LeSS.2-R)}$$

ausdrücken, wobei die Überschreitungsvariable lss_l^{Relax} die unter Ausnutzung der Relaxation verplanten zusätzlichen Springstunden des Lehrers l zählt.

Erweiterte Zielfunktion

Werden Relaxationen für einen oder mehrere Restriktionstypen vorgenommen, so ist die Zielfunktion des Modells entsprechend zu ergänzen, um die Inanspruchnahme der Relaxationsmöglichkeiten zu bestrafen. (ToMIP-Ziel-R) gibt die erweiterte Zielfunktion für den hypothetischen Fall an, dass alle oben ausgeführten Relaxationen vorgenommen werden sollen:

$$\begin{aligned}
\text{minimiere} \quad & w_{FTB} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} \left[\sum_{p=1}^{bkt_{max}(k)-1} kb_{ktp} + 2 \cdot \sum_{p=bkt_{max}(k)}^{\substack{bkt_{max}(k) \\ +dkt_{min}(k)-1}} kb_{ktp} + 3 \cdot \sum_{\substack{p=bkt_{max}(k) \\ +dkt_{min}(k)}}^{|P|} kb_{ktp} \right] \qquad \text{(ToMIP-Ziel-R)} \\
& + w_{LeSS} \cdot \sum_{l \in L} lss_l \qquad + w_{Vb} \cdot \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} uvb_{tp} \\
& + w_{DUV}^{Relax} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{f \in F_k} du_{kf}^{Relax} \qquad + w_{Rd}^{Relax} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{u \in U_k^{Rd}} \sum_{d \in D_u} \sum_{t \in T} rs_{udt}^{Relax} \\
& - w_{Fix}^{Relax} \cdot \sum_{u \in U} \sum_{d \in D_u} \sum_{t \in T} \sum_{\substack{p \in P_{udt}^{ok}: \\ fix(u,d,t,p)=1}} x_{udtp} \qquad + w_{WzK}^{Relax} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} wzk_{ktp}^{Relax} \\
& + w_{WzL}^{Relax} \cdot \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} wzl_{ltp}^{Relax} \qquad + w_{LFT}^{Relax} \cdot \sum_{l \in L} lf_l^{Relax} \\
& + w_{Dop}^{Relax} \cdot \sum_{\substack{u \in U: \\ \{2\} \in D_u}} \sum_{t \in T} \sum_{p \in P_{u2t} \cap P^{gP}} x_{u2tp} \qquad + w_{Tlg}^{Relax} \cdot \sum_{u \in U^{Tlg}} \sum_{t \in T} ts_{ut}^{Relax} \\
& + w_{UKt}^{Relax} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} ukt_{kt}^{Relax} \qquad + w_{OKt}^{Relax} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} okt_{kt}^{Relax} \\
& + w_{LeSS}^{Relax} \cdot \sum_{l \in L} lss_l^{Relax}
\end{aligned}$$

Werden einige Relaxationsmöglichkeiten nicht wahrgenommen, so sind die ihnen zugehörigen Relaxationsterme aus (ToMIP-Ziel-R) zu streichen. Damit trotz Relaxation eine Lösung erzielt werden kann, die eine möglichst geringe Unzulässigkeit hinsichtlich des unrelaxierten Modells aufweist, sind die Gewichte der Relaxationsterme so zu wählen, dass sie die Terme der originären Zielsetzungen eindeutig dominieren, z.B. im Verhältnis 100:1.

4.2.2.7 Veränderungen des Modells durch Berücksichtigung von Kernzeiten

Der starke Wunsch nach einem frühen Unterrichtsbeginn und in ihrer Dauer ausgeglichenen Unterrichtstagen für die Klassen führt in der Praxis häufig dazu, dass für den Unterricht tägliche Kernzeiten definiert werden können, in denen alle Klassen unterrichtet werden. Eine sehr häufige Ausprägung dieser Kernzeit dürfte z.B. der Zeitraum von einschließlich der zweiten bis einschließlich zur fünften Planungsperiode (Stunde) eines Planungstages sein. Derartige Kernzeiten lassen sich ohne Verlust für die Ergebnisqualität nutzen, um das Modell durch Streichung einiger Variablen und Modifikation einiger Restriktionstypen zu vereinfachen. Die Veränderungen, die sich aus der Ausnutzung von Kernzeiten für das Modell ergeben, werden im Folgenden dargestellt.

Zusätzliche Parameter und Mengen

Seien:

bkz := Periode des Beginns der täglichen Kernzeit

ekz := Periode des Endes der täglichen Kernzeit, wobei $ekz \geq bkz$

dkz := $ekz - bkz + 1$ = Dauer der täglichen Kernzeit

P^{Kz} := $\{p \in P\colon bkz \leq p \leq ekz\}$

Änderungen der Modellvariablen

Im Bereich der Modellvariablen wirkt sich die Einbeziehung von Kernzeiten ausschließlich auf die Belegvariablen der Klassen aus. Diese werden nur noch für solche Perioden benötigt, die außerhalb der Kernzeit liegen:

$$kb_{ktp} := \begin{cases} 1 & \text{Klasse } k \text{ ist in Periode } p \text{ des Planungstages } t \text{ belegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad ; \qquad \forall\ k \in K, t \in T, p \in P \setminus P^{Kz}$$

Änderungen der Modellrestriktionen und der -zielfunktion

Unter den Restriktionstypen sind durch die Einbeziehung der Kernzeit zunächst die Kollisionsfreiheitsrestriktionen der Klassen (ToMIP-KlaKoll) betroffen, die nun nach Kernzeitbereich und Nebenzeitbereich differenziert werden müssen. Die ≤-Relation ist durch eine Gleichheitsrelation zu ersetzen, da die Restriktionen für das Springstundenverbot der Klassen ebenfalls variiert werden, so dass sie den Wert der Belegvariablen für den Fall, dass die jeweilige Klasse in der betreffenden Periode unterrichtet wird, nicht mehr automatisch auf 1 zwingen. Es ergeben sich daher die Gleichungen

$$\sum_{u \in U_k} \sum_{d \in D_u} \sum_{\substack{\pi = \max\{p-d+1;1\} \\ \pi \in P_{udt}^{ok}}}^{p} x_{udt\pi} = 1; \qquad \forall\ k \in K, t \in T, p \in P^{Kz} \qquad \text{(ToMIP-KlaKoll-Kz.1)}$$

und

$$\sum_{u \in U_k} \sum_{d \in D_u} \sum_{\substack{\pi = \max\{p-d+1;1\} \\ \pi \in P_{udt}^{ok}}}^{p} x_{udt\pi} - kb_{ktp} = 0; \qquad \forall\ k \in K, t \in T, p \in P \setminus P^{Kz} \qquad \text{(ToMIP-KlaKoll-Kz.2)}$$

als Ersatz für (ToMIP-KlaKoll). Die Restriktionen (ToMIP-KlaKoll-Kz.1) stellen dabei sicher, dass jede Klasse während jeder Periode innerhalb der Kernzeit Unterricht erhält. Die Restriktionen (ToMIP-MaxBeg), die den spätestzulässigen Beginn der Klassen-Unterrichtstage sichern, entfallen.

Eine erhebliche Vereinfachung ergibt sich für das Modell durch die Modifikation der Restriktionen des Springstundenverbots für Klassen. Sie müssen lediglich noch absichern, dass die Unterrichtsperioden einer Klasse außerhalb und innerhalb der Kernzeit zusammenhängen. Dies lässt sich durch die Restriktionen

$$kb_{ktp} - kb_{kt(p+1)} \leq 0; \qquad \forall\ k \in K, t \in T, p = 1, .., bkz\text{-}2 \qquad \text{(ToMIP-KlaSS-Kz.1)}$$

und

$$kb_{ktp} - kb_{kt(p-1)} \leq 0; \qquad \forall\ k \in K, t \in T, p = ekz+2, .., |P| \qquad \text{(ToMIP-KlaSS-Kz.2)}$$

als Ersatz für (ToMIP-KlaSS.1) und (ToMIP-KlaSS.2) erreichen.

Konsequenzen hat die Einführung einer täglichen Kernzeit auch für die Modellierung der Randstundenrestriktionen. Hier ist zunächst durch die Zuweisung

$$P_{udt}^{ok} := P_{udt}^{ok} \setminus \{bkz+1, .., ekz\text{-}d\}; \qquad \forall\ u \in U^{Rd}, d \in D_u, t \in T$$

sicherzustellen, dass Rand-Unterrichtseinheiten nur am Rande der Kernzeit oder in der Nebenzeit unterrichtet werden. Zusätzlich ist durch die Restriktionen

$$x_{udtp} + kb_{kt(p-1)} \leq 1; \qquad \forall\ k \in K, u \in U_k^{Rd}, d \in D_u, t \in T, p \in \{2, .., bkz\} \cap P_{udt}^{ok} \qquad \text{(ToMIP-Rand-Kz.1)}$$

und

$$x_{udtp} + kb_{kt(p+d)} \leq 1; \qquad \forall\ k \in K, u \in U_k^{Rd}, d \in D_u, t \in T, p \in \{ekz\text{-}d+1, .., |P|\text{-}d\} \cap P_{udt}^{ok} \qquad \text{(ToMIP-Rand-Kz.2)}$$

als Ersatz für (ToMIP-Rand) zu gewährleisten, dass Randstunden stets entweder den Beginn [(ToMIP-Rand-Kz.1)] oder das Ende [(ToMIP-Rand-Kz.2)] eines Unterrichtstages der betroffenen Klasse(n) bilden. Eine entsprechende Anpassung ergibt sich für die Relaxationsversion der Randstundenrestriktionen, die nunmehr in die zwei Restriktionstypen

$$x_{udtp} + kb_{kt(p-1)} - rs_{udt}^{Relax} \leq 1; \qquad \forall\ k \in K, u \in U_k^{Rd}, d \in D_u, t \in T, p \in \{2, .., bkz\} \cap P_{udt}^{ok} \qquad \text{(ToMIP-Rand-Kz.1-R)}$$

und

$$x_{udtp} + kb_{kt(p+d)} - rs_{udt}^{Relax} \leq 1; \qquad \forall\ k \in K, u \in U_k^{Rd}, d \in D_u, t \in T, p \in \{ekz\text{-}d+1, .., |P|\text{-}d\} \cap P_{udt}^{ok} \qquad \text{(ToMIP-Rand-Kz.2-R)}$$

aufzuteilen ist.

Die Tatsache, dass in der Kernzeitvariante des Modells Klassenbelegvariablen nur für die Perioden der Nebenzeit definiert sind, macht eine Anpassung der Restriktionen (ToMIP-KlaTa.1) und (ToMIP-KlaTa.2) notwendig, die die minimale bzw. maximale Länge der Unterrichtstage für die Klassen regeln. Sie sind auf der rechten Seite jeweils um die Dauer *dkz* der Kernzeit zu reduzieren:

$$\sum_{p \in P \setminus P^{Kz}} kb_{ktp} \geq dkt_{\min}(k) - dkz; \qquad \forall\ k \in K, t \in T \qquad \text{(ToMIP-KlaTa-Kz.1)}$$

$$\sum_{p \in P \setminus P^{Kz}} kb_{ktp} \leq dkt_{\max}(k) - dkz; \qquad \forall\ k \in K, t \in T \qquad \text{(ToMIP-KlaTa-Kz.2)}$$

Auch die Relaxationsversionen dieser Restriktionstypen sind entsprechend zu modifizieren:

$$\sum_{p \in P \setminus P^{Kz}} kb_{ktp} + ukt_{kt}^{Relax} \geq dkt_{\min}(k) - dkz; \quad \forall\ k \in K, t \in T \qquad \text{(ToMIP-KlaTa-Kz.1-R)}$$

$$\sum_{p \in P \setminus P^{Kz}} kb_{ktp} - okt_{kt}^{Relax} \leq dkt_{\max}(k) - dkz; \quad \forall\ k \in K, t \in T \qquad \text{(ToMIP-KlaTa-Kz.2-R)}$$

Ist die Dauer der Kernzeit mit der für k geforderten Mindestlänge $dkt_{min}(k)$ des Unterrichtstages identisch, so können die Restriktionen (ToMIP-KlaTa-Kz.1) bzw. (ToMIP-KlaTa-Kz.1-R) aus dem Modell herausgenommen werden.

Alle weiteren Modellrestriktionen einschließlich ihrer Modifikationen für die Einbeziehung von Relaxationstermen bleiben durch die Einführung der Kernzeit unberührt. Auch die Zielfunktion ändert sich gegenüber der Modellformulierung ohne Kernzeit nicht.

Eine tabellarische Zusammenfassung der ToMIP-Modellformulierung finden sich in Anhang 8.2.1.

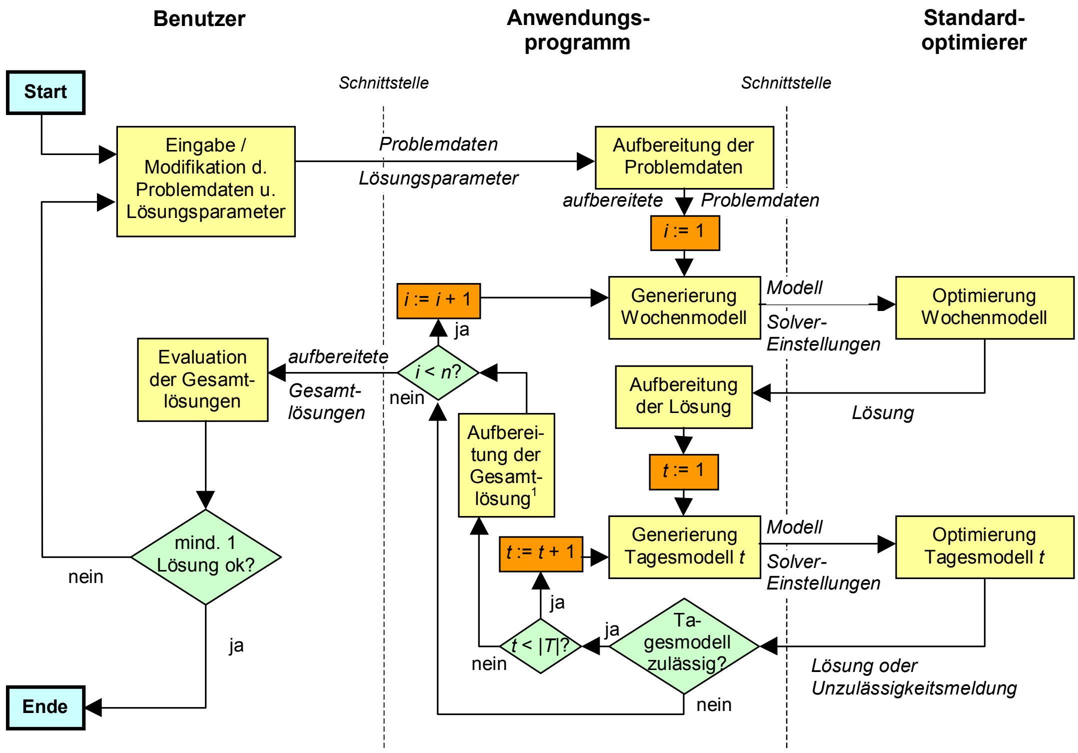
4.3 Ansatz 2: HiMIP - Hierarchische Setzung in einem Wochen- und mehreren Tagesmodellen

4.3.1 Vorgehensweise

Grundidee des HiMIP-Lösungsansatzes ist die hierarchische Dekomposition des gemischt-ganzzahligen Gesamtmodells ToMIP in ein übergeordnetes Wochenmodell und mehrere nachgeordnete Tagesmodelle. Aufgabe des Wochenmodells ist es dabei, für jede zu erzeugende Sitzung jeder Unterrichtseinheit einen Tag innerhalb des Planungshorizontes zu bestimmen, an dem die Sitzung stattfinden soll. Aus der Lösung des Wochenmodells ergeben sich die Basisdaten für mehrere Tagesmodelle, die, jeweils für einen Planungstag, den Sitzungen konkrete Perioden zuordnen. Die Tagesmodelle sind, da die Beziehungen zwischen den Tagen bereits durch das Wochenmodell behandelt werden, unabhängig voneinander lösbar.

Das Zusammenwirken von Benutzer, Anwendungsprogramm und Standard-Optimierungssoftware bei der Umsetzung des HiMIP-Ansatzes veranschaulicht Abbildung 4.2. Sie gibt zur besseren Übersichtlichkeit einen vereinfachten Prozessablauf wieder, welcher unterstellt, dass für das betrachtete Problem eine zulässige Gesamtlösung existiert und dass die Optimierungssoftware in der Lage ist, für jedes Wochen- oder Tagesmodell innerhalb der durch den Benutzer jeweils vorgegebenen Zeitbegrenzung eine zulässige Lösung aufzufinden, sofern es diese gibt. Der Lösungsprozess ist so gestaltet, dass die Tagesmodelle, die sich aus der Lösung des Wochenmodells ergeben, tageweise nacheinander gelöst werden. Der Prozess wird damit den Möglichkeiten der gebrauchsüblichen PC-Technologie gerecht, welche die prinzipiell mögliche Parallelverarbeitung der Tagesmodelle nicht zulässt.

Abbildung 4.2: Lösungsprozess auf Basis des HiMIP-Ansatzes
(vereinfachtes Schema)



Erläuterungen:
n := vorgegebene Anzahl der HiMIP-Iterationen
T := Menge aller Planungstage
i := Iterationszähler
t := Tageszähler

Anmerkung:
[1] inkl. Raumzuordnung innerhalb der Raumgruppen

Da der Dekompositionsansatz mit einem Verlust der Zulässigkeits- und Optimalitätsgarantie verbunden ist, muss bei einem einzelnen Durchlauf der Modellkette damit gerechnet werden, dass keine zulässige Gesamtlösung gefunden werden kann, auch wenn eine solche existiert. Um dieser Falle zu entkommen, sieht der Lösungsprozess eine n-malige Iteration der Modellkette vor. Da das Branch-and-Bound-Verfahren der Gemischt-ganzzahligen Programmierung deterministisch ist, kann eine solche Iteration jedoch nur dann zu unterschiedlichen Lösungspfaden und damit unterschiedlichen Ergebnissen führen, wenn vor jedem Iterationsschritt mindestens ein Modell- oder Lösungsparameter variiert wird. Zu diesem Zweck verwendet der vorliegende Ansatz eine zufallsabhängige Definition für die Zielfunktion des Wochenmodells (vgl. Abschnitt 4.3.2.5). Andere denkbare Vorgehensweisen für die Manipulation des Lösungspfades hingegen werden in dieser Studie nicht betrachtet. Dieser Entscheidung liegen folgende Erwägungen zugrunde:

1. Eine Veränderung algorithmischer Parameter, etwa der Strategie der Variablen- oder der Knotenwahl innerhalb des Branch-and-Bound-Algorithmus‘, kann zu einer verminderten Effizienz des Verfahrens führen, da neben das für die Gestaltung dieser Strategien entscheidende Kriterium der Aussicht auf ein schnelles Erreichen ganzzahliger Lösungen eine verzerrende effizienzunabhängige Komponente gesetzt wird. Dieses Argument ist lediglich eine Vermutung und kann

sich nicht auf eine empirische Beobachtung stützen. Es erscheint aus meiner Sicht jedoch ausreichend plausibel, um der Variation von Modellparametern gegenüber einer Modifikation von Verfahrensentscheidungen zunächst den Vorzug zu geben.

2. Da die Modellrestriktionen nach bestem Wissen auf die realen Anforderungen an den zu setzenden Stundenplan abgestimmt sind, ist eine Veränderung einzelner Restriktionen oder ganzer Restriktionstypen nicht ohne das Risiko einer unakzeptablen Verschlechterung der Abbildungsgenauigkeit des Modells realisierbar. Eine Modellvariation sollte daher bevorzugt im Bereich der – verhandelbaren – Zielsetzungen erfolgen.
3. Nur eine Teilmenge der Zielsetzungen des zugrunde liegenden Problems ist für die Entscheidung über die Aufteilung der Sitzungen auf die verfügbaren Planungstage relevant (vgl. Abschnitt 4.3.2.5). Die wenigen Problemziele, welche im Rahmen des HiMIP-Wochenmodells abgebildet werden müssen, können in Analogie zum ToMIP-Ansatz mit Hilfe von Modellrestriktionen abgebildet werden. Die Zielfunktion des HiMIP-Wochenmodells steht daher ohne Einschränkung für die zufallsbasierte Beeinflussung des Lösungspfades zur Verfügung.

Ein positiver Nebeneffekt ergibt sich aus dem iterativen Lösungsprozess dadurch, dass bei gutem Verlauf mehrere zulässige Gesamtlösungen erzeugt werden, aus denen der Benutzer jene Lösung zur weiteren Betrachtung auswählen kann, die sich nach seiner Überzeugung am besten für eine Umsetzung eignet. Dieser Vorteil ist nicht zu unterschätzen, da aufgrund der multidimensionalen, nicht-monetären Zielstruktur des Setzungsproblems die Optimalität einer Lösung nicht quantitativ bewiesen werden kann.

4.3.2 Formulierung des Wochenmodells

4.3.2.1 Vorbemerkungen

Zum Zweck der guten Lesbarkeit werden dieselben Konventionen und Vereinfachungen verwandt wie im Rahmen des ToMIP-Modells (vgl. Abschnitt 4.2.2.1). Soweit möglich, werden die für das ToMIP-Modell verwendeten Mengen-, Parameter- und Variablenbezeichnungen beibehalten oder analog definiert.

Grundsätzlich unterscheidet sich das HiMIP-Wochenmodell vom ToMIP-Gesamtmodell durch den Wegfall des Periodenindexes p in sämtlichen Variablen und Modellrestriktionen. Auch fallen jene Restriktionstypen heraus, welche die Anordnung der Sitzungen innerhalb der Planungstage betreffen, also etwa das Springstundenverbot für Klassen oder die Wegezeitrestriktionen für Klassen und Lehrer. Über diese Veränderungen hinaus weist das HiMIP-Wochenmodell jedoch einen weiteren bedeutsamen Unterschied gegenüber der ToMIP-Formulierung auf. Dieser Unterschied betrifft den Differenzierungsgrad des Modells hinsichtlich der zu erzeugenden Sitzungen. Im ToMIP-Modell wird bei Definition und Verwendung der 0/1-Zuordnungsvariablen x_{udtp} nur nach Unterrichtseinheiten u und Sitzungsdauern d, nicht jedoch nach einzelnen Sitzungen differenziert. Sind für eine Unterrichtseinheit u mehrere Sitzungen der Dauer d zu erzeugen, so werden für jene Sitzungen dieselben Variablen x_{udtp} genutzt. Dieser Differenzierungsgrad ist jedoch für die Formulierung des HiMIP-Wochenmodells nicht ausreichend, da es bei Wegfall der Periodenindizes p mit Hilfe der verbleibenden Indizes u, d und t und entsprechender Variablen x_{udt} nicht möglich ist, mehrere Sitzungen desselben u mit derselben Dauer d demselben Tag t zuzuordnen. Dies kann aber, etwa im Fall von Teilungen, durchaus erforderlich sein. Aus diesem Grunde werden die Zuordnungsvariablen im HiMIP-Wochenmodell stärker differenziert, indem für jede zu erzeugende Sitzung s eine eigene Variable x_{st} definiert wird.

Obwohl die geringere Zahl der Indizes in x_{st} gegenüber der ToMIP-analogen Alternative x_{udt} eine Komplexitätsreduktion suggeriert, bedeutet die Unterscheidung der Sitzungen s anstelle der Unterrichtseinheit-Sitzungsdauer-Kombinationen ud eine Erhöhung und nicht eine Verringerung der Variablenzahl, da es viele Kombinationen von u und d gibt, für die mehrere Sitzungen s zu erzeugen sind.

Eine tabellarische Zusammenstellung sämtlicher Komponenten des HiMIP-Wochenmodells findet sich in Anhang 8.2.2.

4.3.2.2 Mengen und Parameter

Seien als Mengen und Parameter gegeben:

K	:=	Menge aller Klassen	
L	:=	Menge aller Lehrer	
R	:=	Menge aller Raumgruppen	
F	:=	Menge aller Unterrichtsfächer	
T	:=	Menge aller Planungstage des Planungshorizontes	
P	:=	$\{1, .., \|P\|\}$ = Menge aller Perioden eines Planungstages	
U	:=	Menge aller durch die Unterrichtsverteilung vorgegebenen Unterrichtseinheiten	
S	:=	Menge aller Sitzungen, die entsprechend den Spezifikationen der in U enthaltenen Unterrichtseinheiten zu erzeugen sind	
F_k	:=	$\{f \in F$: f wird in Klasse k unterrichtet$\}$;	$\forall\ k \in K$
U_k	:=	$\{u \in U$: u bindet Klasse $k\}$;	$\forall\ k \in K$
U_{kf}	:=	$\{u \in U_k$: u betrifft Fach $f\}$;	$\forall\ k \in K, f \in F$
U_l	:=	$\{u \in U$: u bindet Lehrer $l\}$;	$\forall\ l \in L$
U^{Tlg}	:=	$\{u \in U$: u ist eine Teilung$\}$	

$u(s)$	:=	Unterrichtseinheit $u \in U$, zu der Sitzung s gehört;	$\forall\ s \in S$
S_u	:=	$\{s \in S: u(s) = u\}$;	$\forall\ u \in U$
S_k	:=	$\{s \in S: u(s) \in U_k\}$;	$\forall\ k \in K$
S_{kf}	:=	$\{s \in S_k: u(s) \in U_{kf}\}$;	$\forall\ k \in K, f \in F$
S_l	:=	$\{s \in S: u(s) \in U_l\}$;	$\forall\ l \in L$
S^{Tlg}	:=	$\{s \in S: u(s) \in U^{Tlg}\}$	
S_k^{Rd}	:=	$\{s \in S_k$: s muss am Rand eines Unterrichtstages der Klasse k liegen$\}$;	$\forall\ k \in K$
$ds(s)$	:=	Dauer der Sitzung s in Anzahl Perioden;	$\forall\ s \in S$
$ar(s, r)$	:=	Anzahl der durch Sitzung s beanspruchten Räume der Raumgruppe r;	$\forall\ s \in S, r \in R$
$ar_{verf}(r, t, p)$	:=	Gesamtzahl der in Periode p des Tages t verfügbaren Räume der Raumgruppe r;	$\forall\ r \in R, t \in T, p \in P$
R_s	:=	$\{r \in R: ar(s, r) > 0\}$;	$\forall\ s \in S$
S_r	:=	$\{s \in S: ar(s, r) > 0\}$;	$\forall\ r \in R$
$ast(u)$	:=	maximal zulässige Anzahl von Sitzungen der Teilung u am selben Tag;	$\forall\ u \in U^{Tlg}$
$att(u)$	:=	maximal zulässige Anzahl der für Sitzungen der Teilung u verwendeten Tage;	$\forall\ u \in U^{Tlg}$
$dkt_{min}(k)$	:=	minimale Dauer eines Unterrichtstages der Klasse k in Anzahl Perioden;	$\forall\ k \in K$
$dkt_{max}(k)$	:=	maximale Dauer eines Unterrichtstages der Klasse k in Anzahl Perioden;	$\forall\ k \in K$
$aft(l)$	:=	Anzahl zu berücksichtigender freier Tage für Lehrer l;	$\forall\ l \in L$
$akp(k)$	:=	$\sum_{s \in S_k} ds(s)$ = Gesamtdauer aller Sitzungen der Klasse k;	$\forall\ k \in K$
$akp_{max}(k, t)$	:=	maximal zulässige Gesamtdauer aller Sitzungen der Klasse k an Planungstag t;	$\forall\ k \in K, t \in T$

$alp(l)$:= $\sum_{s \in S_l} ds(s)$ = Gesamtdauer aller Sitzungen des Lehrers l; $\forall\ l \in L$

$alp_{max}(l, t)$:= maximal zulässige Gesamtdauer aller Sitzungen des Lehrers l an Planungstag t; $\forall\ l \in L, t \in T$

$$fix(s, t) := \begin{cases} 1 & \text{Sitzung } s \text{ muss an Planungstag } t \text{ stattfinden (Fixierung)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ; \quad \forall\ s \in S, t \in T$$

$zz(s, t)$:= zufällig erzeugter Zielfunktionskoeffizient, wobei $zz(s, t) \in \{1, 2\}$; $\forall\ s \in S, t \in T$

$prob(2)$:= Wahrscheinlichkeit, dass $zz(s, t)$ für ein beliebiges $s \in S$ und $t \in T$ den Wert 2 annimmt, wobei $0 \le prob(2) \le 1$

4.3.2.3 Variablen

Für die Beschreibung der Restriktionen und der Zielfunktion des HiMIP-Wochenmodells werden folgende Variablen benötigt:

$$x_{st} := \begin{cases} 1 & \text{Sitzung } s \text{ findet an Planungstag } t \text{ statt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ; \quad \forall\ s \in S, t \in T$$

$$lf_{lt} := \begin{cases} 1 & \text{Lehrer } l \text{ hat an Planungstag } t \text{ frei} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ; \quad \forall\ l \in L: aft(l) > 0, t \in T$$

$$y_{ut} := \begin{cases} 1 & \text{Teilung } u \text{ wird an Planungstag } t \text{ unterrichtet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ; \quad \forall\ u \in U^{Tlg}, t \in T$$

lss_l := Springstundenzahl des Lehrers l, wobei $0 \le lss_l \le alss_{max}(l)$ und lss_l kontinuierlich; $\forall\ l \in L$

4.3.2.4 Abbildung der Problemrestriktionen

Vollständigkeit (R-01)

Die Vollständigkeitsforderung bedingt, dass alle Sitzungen, die gemäß den Spezifikationen der in der Unterrichtsverteilung enthaltenen Unterrichtseinheiten zu erzeugen sind, jeweils einem Tag zugeordnet werden. Dies wird durch die Restriktionen

$$\sum_{t \in T} x_{st} = 1 \qquad \forall \; s \in S \qquad \text{(HiMIP-W-Voll)}$$

gewährleistet.

Kollisionsfreiheit (R-02)

Damit bei der späteren Lösung der Tagesmodelle eine kollisionsfreie Zuordnung der Sitzungen zu den Planungsperioden des jeweiligen Tages möglich ist, müssen bereits im Wochenmodell Kapazitätsrestriktionen für Klassen, Lehrer und Raumgruppen berücksichtigt werden, die dafür Sorge tragen, dass die betreffende Ressource an einem Tag nicht für mehr Perioden verplant wird, als ihrer Verfügbarkeit entspricht. Diese Anforderung wird durch die Ungleichungen

$$\sum_{s \in S_k} ds(s) \cdot x_{st} \;\leq\; akp_{max}(k,t); \qquad \forall \; k \in K, t \in T \qquad \text{(HiMIP-W-KlaKap)}$$

sowie

$$\sum_{s \in S_l} ds(s) \cdot x_{st} \;\leq\; alp_{max}(l,t); \qquad \forall \; l \in L, t \in T \qquad \text{(HiMIP-W-LeKap)}$$

und

$$\sum_{s \in S_r} ar(s,r) \cdot ds(s) \cdot x_{st} \;\leq\; \sum_{p \in P} ar_{verf}(r,t,p); \forall \; r \in R, t \in T \qquad \text{(HiMIP-W-RgKap)}$$

umgesetzt, wobei die Parameter $akp_{max}(k, t)$ und $alp_{max}(l, t)$ die für den Tag t maximal zulässige Unterrichtsbelastung der Klasse k bzw. des Lehrers l repräsentieren. Der Parameter $ar_{verf}(r, t, p)$ gibt die Zahl der Räume der Raumgruppe r an, die in Periode p des Tages t für den Unterricht zur Verfügung stehen. Durch den Faktor $ar(s, r)$ in den Restriktionen (HiMIP-W-RgKap) wird berücksichtigt, dass eine Sitzung s möglicherweise mehrere Räume der Raumgruppe r in Anspruch nimmt.

Sperrungen (R-03)

Ist eine Klasse $k \in K$, ein Lehrer $l \in L$ oder ein Raum einer Raumgruppe $r \in R$ in einer Planungsperiode $p \in P$ des Planungstages $t \in T$ gesperrt, so ist dies durch eine entsprechende Reduktion des jeweils relevanten Parameters $akp_{max}(k, t)$, $alp_{max}(l, t)$ oder $ar_{verf}(r, t, p)$ zu berücksichtigen. Einer Definition eigenständiger Modellrestriktionen bedarf es für die Umsetzung dieser Anforderung nicht.

Springstundenverbot für Klassen (R-04)

Das Springstundenverbot für Klassen betrifft die Anordnung der Sitzungen innerhalb eines Tages und ist daher für das Wochenmodell nicht relevant. Es wird im Zusammenhang der Tagesmodelle behandelt.

Doppelunterrichtsverbot (R-05)

Das Doppelunterrichtsverbot einschließlich der Berücksichtigung von Ausnahmefällen für Teilungen lässt sich im Rahmen des HiMIP-Wochenmodells durch die Restriktionen

$$\sum_{s \in S_u} x_{st} - ast(u) \cdot y_{ut} \leq 0; \qquad \forall\ u \in U^{Tlg}, t \in T \qquad \text{(HiMIP-W-DopUV.1)}$$

und

$$\sum_{u \in U_{kf} \setminus U^{Tlg}} \sum_{s \in S_u} x_{st} + \sum_{u \in U_{kf} \cap U^{Tlg}} y_{ut} \leq 1; \qquad \forall\ k \in K, f \in F_k, t \in T \qquad \text{(HiMIP-W-DopUV.2)}$$

abbilden. Die Ungleichungen (HiMIP-W-DopUV.1) zwingen die Variable y_{ut} auf den Wert 1, wenn mindestens eine Sitzung einer Teilung u an Tag t stattfindet. Der Parameter $ast(u)$ gibt dabei an, wieviele Sitzungen von u maximal an demselbem Planungstag stattfinden dürfen. Die Restriktionen (HiMIP-W-DopUV.2) stellen für jede Klasse k, jedes in k unterrichtete Fach f und jeden Planungstag t sicher, dass maximal entweder eine Sitzung einer f betreffenden Nicht-Teilung (erste Summe) oder die erlaubte Anzahl an Sitzungen einer f betreffenden Teilung (zweite Summe) stattfinden.

Randstunden (R-06)

Sind für eine Klasse k ein oder mehrere Unterrichtseinheiten definiert, deren Sitzungen in einer Randperiode eines Unterrichtstages von k stattfinden müssen, so ist im Rahmen des Wochenmodells sicherzustellen, dass nicht mehr als zwei solcher Sitzungen demselben Planungstag zugeordnet werden. Dies kann geschehen durch die Einbeziehung der Restriktionen:

$$\sum_{s \in S_k^{Rd}} x_{st} \leq 2; \qquad \forall\ k \in K\text{: } S_k^{Rd} \neq \emptyset, t \in T \qquad \text{(HiMIP-W-Rand)}$$

Fixierungen (R-07)

Sitzungen, die im Zuge einer manuellen Teilsetzung bereits erzeugt sind, sind durch eine Fixierung der entsprechenden Tageszuordnungsvariablen auf den Wert 1 zu berücksichtigen:

$$x_{st} = 1; \qquad \forall\ s \in S, t \in T\text{: } fix(s, t) = 1 \qquad \text{(HiMIP-W-Fix)}$$

Wegezeiten (R-09)

Die Berücksichtigung von Wegezeiten ist im Rahmen der Anordnung der Sitzungen innerhalb der einzelnen Tage relevant und wird daher erst im Tagesmodell behandelt.

Freie Tage für Lehrer (R-12)

Der Anspruch einzelner Lehrer l auf eine vorgegebene Anzahl $aft(l)$ an freien Tagen kann durch die Restriktionen

$$\sum_{t \in T} lf_{lt} \geq aft(l); \qquad \forall\ l \in L: aft(l) > 0 \qquad \text{(HiMIP-W-LeFT.1)}$$

und

$$\sum_{s \in S_l} x_{st} + |P| \cdot lf_{lt} \leq |P|; \qquad \forall\ l \in L: aft(l) > 0,\ t \in T \qquad \text{(HiMIP-W-LeFT.2)}$$

in das Wochenmodell einbezogen werden. Dabei fordern die Ungleichungen (HiMIP-W-LeFT.1), dass für jeden Lehrer l mit Anspruch auf freie Tage mindestens so viele Freie-Tage-Variablen lf_{lt} auf 1 gesetzt werden, wie der Untergrenze $aft(l)$ entsprechen. Die Restriktionen (HiMIP-W-LeFT.2) gewährleisten, dass an freien Tagen für l kein Unterricht angesetzt wird.

Weitere Problemrestriktionen

Im Abschnitt 4.2.2.4 wurden das Verbot zweiperiodiger Sitzungen (Doppelstunden) über eine große Pause hinweg einerseits und die Muss-Bestimmung, genau $ast(u)$ Sitzungen einer Teilung $u \in U^{Tlg}$ am selben Tag stattfinden zu lassen, andererseits als zusätzliche Forderungen an die Stundenplansetzung benannt. Von diesen beiden Problemrestriktionen ist das Verbot zweiperiodiger Sitzungen über eine große Pause hinweg nicht im Rahmen des Wochenmodells zu betrachten, da es erst für die tagesinterne Planung relevant ist. Demgegenüber stellt die zwingende Forderung nach Zuordnung mehrerer Sitzungen einer Teilung u zu demselben Planungstag eine Verschärfung der im Zusammenhang mit dem Doppelunterrichtsverbot abgebildeten Kann-Bedingung dar. Sie lässt sich durch den Ersatz der ≤-Relation in (HiMIP-W-DopUV.1) durch eine Gleichheitsrelation darstellen:

$$\sum_{s \in S_u} x_{st} - ast(u) \cdot y_{ut} = 0; \qquad \forall\ u \in U^{Tlg},\ t \in T \qquad \text{(HiMIP-W-DopUV.1=)}$$

4.3.2.5 Abbildung der Zielsetzungen

Für die Abbildung des Zielkatalogs werden im Rahmen des HiMIP-Wochenmodells dieselben Modellierungsvarianten genutzt wie in der Formulierung des ToMIP-Modells (vgl. Abschnitt 4.2.2.5). Wie dort sind auch hier die subjektive, aus den empirischen Untersuchungen und persönlichen Gesprächen erwachsene Bedeutungseinschätzung der einzelnen

Zielgrößen durch mich und die jeweilige Zielrichtung Minimierung, Maximierung, Punktgenauigkeit oder Satisfizierung ausschlaggebend für die getroffene Wahl der Modellierungsvariante.

Gleichlange Klassentage (Z-01)

Die Forderung nach gleichmäßig langen Unterrichtstagen kann über die Modellierung von Mindest- und Höchstdauern der Unterrichtstage umgesetzt werden. Sie zählt i.d.R. zu den strengeren Zielsetzungen und wird daher durch die Modellrestriktionen

$$\sum_{s\in S_k} ds(s)\cdot x_{st} \;\geq\; dkt_{\min}(k); \qquad \forall\; k\in K, t\in T \qquad \text{(HiMIP-W-KlaTa.1)}$$

und

$$\sum_{s\in S_k} ds(s)\cdot x_{st} \;\leq\; dkt_{\max}(k); \qquad \forall\; k\in K, t\in T \qquad \text{(HiMIP-W-KlaTa.2)}$$

repräsentiert. Dabei gibt der Parameter $ds(s)$ die Dauer der jeweiligen Sitzung s an. Das Wochenmodell ist nur dann zulässig lösbar, wenn für jedes k die Mindestdauer $dkt_{min}(k)$ eines Unterrichtstages nicht größer und die Höchstdauer $dkt_{max}(k)$ eines Unterrichtstages nicht kleiner als die durchschnittliche tägliche Unterrichtsbelastung $akp(k) / |T|$ ist. Sind $dkt_{min}(k) = \lfloor akp(k) / |T| \rfloor$ und $dkt_{max}(k) = \lceil akp(k) / |T| \rceil$, so wird die größtmögliche Gleichförmigkeit der Tageslängen erzwungen.

Früher Unterrichtsbeginn (Z-02)

Das Ziel des frühen Unterrichtsbeginns für Klassen ist im Zusammenhang mit der Anordnung der Sitzungen innerhalb der einzelnen Tage relevant und wird daher erst im Zusammenhang der Tagesmodelle behandelt.

Springstundenminimierung für Lehrer (Z-06)

Auch der Wunsch nach einer minimalen Springstundenzahl für Lehrer kann erst bei der Reihenfolgeplanung der Sitzungen innerhalb der einzelnen Tage berücksichtigt werden. Eine direkte tagesübergreifende Kontrolle der Lehrer-Springstundenzahl ist im HiMIP-Ansatz nicht möglich.

Vertretungsbereitschaft (Z-10)

Das Ziel der Verfügbarkeit einer Vertretungsbereitschaft in den verschiedenen Planungsperioden eines Planungstages ist ebenfalls erst im Zusammenhang mit der tagesinternen Planung zu behandeln.

Fächerbeziehungen (Z-12)

Die Vermeidung des Unterrichts bestimmter Fächer am selben Tag betrifft i.d.R. nur sehr wenige Fächerpaare, z.B. Sport und Schwimmen. Sie können durch die Verwendung einer gemeinsamen, übergeordneten Fächerbezeichnung berücksichtigt werden, welche dann unter das Doppelunterrichtsverbot fällt.

Gestaltung der Zielfunktion

Von den fünf betrachteten Zielgrößen des Problems ist, wie die obige Darstellung zeigt, nur die Nivellierung der Klassenunterrichtstage im Wochenmodell abzubilden, doch wird dieses Ziel wegen seines vermuteten strengen Charakters nicht als Zielfunktionsterm, sondern über die Formulierung unabdingbarer Restriktionen in das Modell integriert. Aus diesem Grunde steht die Zielfunktion des HiMIP-Wochenmodells für die zufallsabhängige Steuerung des Lösungsprozesses zur Verfügung, durch die eine mehrfache Iteration der Modellfolge mit jeweils variiertem Lösungspfad ermöglicht wird (vgl. Abschnitt 4.3.1). Die zufallsabhängige Gestaltung der Zielfunktion wird wie folgt vorgenommen:

Für jedes Paar (s, t) mit $s \in S$ und $t \in T$ wird durch den im Anwendungsprogramm enthaltenen Modellgenerator nach dem Zufallsprinzip ein Zielfunktionskoeffizient $zz(s, t)$ bestimmt, der mit Wahrscheinlichkeit $prob(2)$ den Wert 2 und mit Wahrscheinlichkeit $[1 - prob(2)]$ den Wert 1 annimmt. Der Parameter $prob(2)$ wird dabei benutzerseitig vorgegeben. Die Zielfunktion besteht aus der Summe der mit ihrem jeweiligen Koeffizienten $zz(s, t)$ gewichteten Zuordnungsvariablen x_{st}:

$$\text{minimiere } \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} zz(s,t) \cdot x_{st} \qquad \text{(HiMIP-W-Ziel)}$$

Der Grund für die Wahl der Werte 1 und 2 für $zz(s, t)$ statt etwa 0 und 1 liegt in meinem subjektiven Bedürfnis, jede Setzung zumindest mit einem „Erinnerungswert" in der Zielfunktion zu berücksichtigen. Letztlich ist jedoch die konkrete Ausprägung der beiden Alternativen für $zz(s, t)$ für die Qualität des erzielten Ergebnisses irrelevant, da das Optimierungsprogramm in jedem Fall versuchen wird, so wenige Variablen mit der höheren Gewichtung wie möglich auf den Wert 1 zu setzen. Einzige Bedingung ist, dass die beiden Gewichtungswerte nicht gleich sind.

4.3.2.6 Veränderungen des Modells durch Berücksichtigung von Relaxationen

Die Dekomposition des Gesamtmodells in ein Wochen- und mehrere, i.d.R. mindestens fünf, Tagesmodelle führt zu einer, bezogen auf die einzelnen Modelle, enormen Größen- und Komplexitätsreduktion, die die Verwendung von Relaxationen zumindest für das übergeordnete Wochenmodell überflüssig machen sollte. Die im Folgenden definierten Relaxationsmöglichkeiten sollten daher nur dann in Betracht gezogen werden, wenn die Vermutung oder Gewissheit besteht, dass es für die vom Benutzer eingegebene Datenkonstellation keine hinsichtlich aller Restriktionen zulässige Lösung gibt.

In Analogie zur ToMIP-Relaxation (vgl. Abschnitt 4.2.2.6) werden in diesem Abschnitt Relaxationsmöglichkeiten nur für solche Restriktionstypen definiert, deren Verletzung zumindest begrenzt tolerierbar erscheint. Hierzu lassen sich rechnen: die minimale und/oder maximale Länge der Klassenunterrichtstage, Freie-Tage-Restriktionen für Lehrer, Fixierungen, Randlagerestriktionen, ggf. die Muss-Bestimmung der Mehrfachzuordnung von Teilungen zu demselben Tag und schließlich das Doppelunterrichtsverbot.

Zusätzliche Parameter und Variablen

Seien für die Relaxation folgende zusätzliche Parameter definiert:

adu_{max}^{Relax} := maximale aufgrund der Relaxation zulässige Anzahl von Sitzungen desselben Fachs am selben Tag in derselben Klasse

w_{DUV}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation des Doppelunterrichtsverbotes

w_{Rd}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der Randstundenrestriktionen

w_{Fix}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der Fixierungen

w_{LeTF}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation freier Lehrertage

w_{Tlg}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der Forderung „Teilungsstunden am selben Tag“

w_{UKt}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der minimalen Dauer für Klassen-Unterrichtstage

w_{OKt}^{Relax} := Zielgewichtung für die Relaxation der maximalen Dauer für Klassen-Unterrichtstage

Seien ferner als zusätzliche kontinuierliche Variablen definiert:

du_{kf}^{Relax} := Relaxation des Doppelunterrichtsverbots für Fach f in Klasse k, wobei $0 \le du_{kf}^{Relax} \le adu_{max}^{Relax}$; $\forall\ k \in K, f \in F_k$

rs_{kt}^{Relax} := Relaxation für die Randlage von Sitzungen der Klasse k an Tag t, wobei $0 \le rs_{kt}^{Relax} \le |P|$-1; $\forall\ k \in K$: $S_k^{Rd} \neq \varnothing$, $t \in T$

lf_l^{Relax} := Anzahl trotz Anspruchs nicht gewährter freier Tage des Lehrers l, wobei $0 \le lf_l^{Relax} \le aft(l)$; $\forall\ l \in L$

ts_{ut}^{Relax} := Relaxation der Muss-Bestimmung „Teilungsstunden am selben Tag“ für Teilung u und Planungstag t, wobei $0 \leq ts_{ut}^{Relax} \leq 1$; $\forall\ u \in U^{Tlg}, t \in T$

ukt_{kt}^{Relax} := Relaxation der Mindestlänge des Unterrichtstages der Klasse k an Planungstag t, wobei $0 \leq ukt_{kt}^{Relax} \leq dkt_{min}(k)$; $\forall\ k \in K, t \in T$

okt_{kt}^{Relax} := Relaxation der Höchstlänge des Unterrichtstages der Klasse k an Planungstag t, wobei $0 \leq okt_{kt}^{Relax} \leq |P| - dkt_{max}(k)$; $\forall\ k \in K, t \in T$

Alle zusätzlichen Variablen sind als kontinuierliche Variablen definiert, obwohl sie inhaltlich ganzzahlig zu verstehen sind. Dies ist möglich, da die Werte dieser Variablen dank des Zusammenwirkens von Modellrestriktionen und -zielfunktion in jeder durch das Branch-and-Bound-Verfahren erzeugten ganzzahligen LP-Lösung automatisch ebenfalls ganzzahlig sind.

Relaxation des Doppelunterrichtsverbotes (R-05)

Eine Relaxation des Doppelunterrichtsverbots kann umgesetzt werden durch die Einbeziehung von Überschreitungsvariablen du_{kf}^{Relax} in die Restriktionen (HiMIP-W-DopUV.2) in der Form:

$$\sum_{u \in U_{kf} \setminus U^{Tlg}} \sum_{s \in S_u} x_{st} + \sum_{u \in U_{kf} \cap U^{Tlg}} y_{ut} - du_{kf}^{Relax} \leq 1; \ \forall\ k \in K, f \in F_k, t \in T \qquad \text{(HiMIP-W-DopUV.2-R)}$$

Relaxation der Randstundenrestriktionen (R-06)

Randlagerestriktionen können durch Einfügung von Relaxationsvariablen rs_{kt}^{Relax} in die Restriktionen (HiMIP-W-Rand) entschärft werden:

$$\sum_{s \in S_k^{Rd}} x_{st} - rs_{kt}^{Relax} \leq 2; \qquad \forall\ k \in K\colon S_k^{Rd} \neq \emptyset, t \in T \qquad \text{(HiMIP-W-Rand-R)}$$

Relaxation der Fixierungen (R-07)

Sollen manuell fixierte Sitzungen auf andere Planungstage verlegt werden können, so sind die Restriktionen (HiMIP-W-Fix) aus dem Modell zu entfernen und stattdessen die Benutzung der für die betroffenen Sitzungen bestimmten Planungstage durch einen negativen Term in der Zielfunktion mit der Gewichtung w_{Fix}^{Relax} zu belohnen.

Relaxation freier Lehrertage (R-12)

Die Forderung nach freien Tagen für Lehrer lässt sich durch Modifikation der Restriktionen (HiMIP-W-LeFT.1) mit Hilfe der Unterschreitungsvariablen lf_l^{Relax} in der Form

$$\sum_{t \in T} lf_{lt} + lf_l^{Relax} \geq aft(l); \qquad \forall\ l \in L{:}\ aft(l) > 0 \qquad \text{(HiMIP-W-LeFT.1-R)}$$

relaxieren.

Relaxation der Muss-Bestimmung „Teilungssitzungen am selben Tag"

Ist in einem Fall die Forderung relevant, dass jeweils genau $ast(u)$ Sitzungen einer Teilung $u \in U^{Tlg}$ am selben Tag stattfinden müssen, so ist diese Einschränkung durch Einfügung von Relaxationsvariablen ts_{ut}^{Relax} in die Restriktionen (HiMIP-W-DopUV.1=) in der Weise

$$\sum_{s \in S_u} x_{st} - ast(u) \cdot y_{ut} - ast(u) \cdot ts_{ut}^{Relax} = 0; \ \forall\ u \in U^{Tlg}, t \in T \qquad \text{(HiMIP-W-DopUV.1=-R)}$$

entschärfbar.

Relaxation der Mindest- und Höchstlängen der Klassenunterrichtstage

Die Begrenzung der Dauern der Klassen-Unterrichtstage nach unten wie nach oben kann durch Modifikation der Restriktionen (HiMIP-W-KlaTa.1) und (HiMIP-W-KlaTa.2) unter Einbeziehung von Unter- bzw. Überschreitungsvariablen ukt_{kt}^{Relax} und okt_{kt}^{Relax} in der Form

$$\sum_{s \in S_k} ds(s) \cdot x_{st} + ukt_{kt}^{Relax} \geq dkt_{\min}(k); \qquad \forall\ k \in K, t \in T \qquad \text{(HiMIP-W-KlaTa.1-R)}$$

und

$$\sum_{s \in S_k} ds(s) \cdot x_{st} - okt_{kt}^{Relax} \leq dkt_{\max}(k); \qquad \forall\ k \in K, t \in T \qquad \text{(HiMIP-W-KlaTa.2-R)}$$

relaxiert werden.

Erweiterte Zielfunktion

Werden Relaxationen für einen oder mehrere Restriktionstypen vorgenommen, so ist die Zielfunktion des Modells entsprechend zu ergänzen, um die Inanspruchnahme der Relaxationsmöglichkeiten zu bestrafen. (HiMIP-W-Ziel-R) gibt die erweiterte Zielfunktion für den hypothetischen Fall an, dass alle oben ausgeführten Relaxationen vorgenommen werden sollen:

$$\text{minimiere} \quad \sum_{s\in S}\sum_{t\in T} zz(s,t)\cdot x_{st} + w_{DUV}^{Relax}\cdot \sum_{k\in K}\sum_{f\in F_k} du_{kf}^{Relax}$$
$$+ w_{Rd}^{Relax}\cdot \sum_{k\in K: S_k^{Rd}\neq\varnothing}\sum_{t\in T} rs_{kt}^{Relax} - w_{Fix}^{Relax}\cdot \sum_{s\in S}\sum_{\substack{t\in T:\\ fix(s,t)=1}} x_{st}$$
$$+ w_{LFT}^{Relax}\cdot \sum_{l\in L} lf_l^{Relax} + w_{Tlg}^{Relax}\cdot \sum_{u\in U^{Tlg}}\sum_{t\in T} ts_{ut}^{Relax}$$
$$+ w_{UKt}^{Relax}\cdot \sum_{k\in K}\sum_{t\in T} ukt_{kt}^{Relax} + w_{OKt}^{Relax}\cdot \sum_{k\in K}\sum_{t\in T} okt_{kt}^{Relax} \qquad \text{(HiMIP-W-Ziel-R)}$$

Werden einzelne Relaxationsmöglichkeiten nicht wahrgenommen, so sind die ihnen zugehörigen Relaxationsterme aus (HiMIP-W-Ziel-R) zu entfernen. Damit trotz Relaxation eine Lösung erzielt werden kann, die eine möglichst geringe Unzulässigkeit hinsichtlich des unrelaxierten Modells aufweist, sind möglichst hohe Gewichte für die Relaxationsterme zu bestimmen, so dass der Zufallsterm in der Zielfunktion durch die Relaxationsterme dominiert wird.

4.3.3 Formulierung der Tagesmodelle

4.3.3.1 Vorbemerkungen

Die zulässige Lösung des HiMIP-Wochenmodells führt zu der Erzeugung mehrerer voneinander unabhängiger Tagesprobleme, deren Anzahl genau der Anzahl der Planungstage des Wochenmodells entspricht. Ein Muster, nach dem diese Tagesprobleme modelliert werden können, wird im Folgenden vorgestellt. Zum Zwecke der guten Lesbarkeit werden dieselben Vereinfachungen und Konventionen verwandt wie im Rahmen des ToMIP-Modells (vgl. Abschnitt 4.2.2.1). Soweit möglich, werden die für das ToMIP-Modell bzw. das HiMIP-Wochenmodell verwendeten Mengen-, Parameter- und Variablenbezeichnungen beibehalten oder analog definiert.

4.3.3.2 Mengen und Parameter

Seien gegeben:

K := Menge aller Klassen

L := Menge aller Lehrer

R := Menge aller Raumgruppen

G := Menge aller Gebäudekomplexe, deren Entfernung voneinander zu längeren Wegezeiten führt

F := Menge aller Unterrichtsfächer

P := {1, .., |P|} = Menge aller Perioden des betrachteten Planungstages

U	:=	Menge aller durch die Unterrichtsverteilung vorgegebenen Unterrichtseinheiten mit jeweils mindestens einer Sitzung an dem betrachteten Planungstag	
S	:=	Menge aller zu erzeugenden Sitzungen, die lt. Lösung des Wochenmodells an dem betrachteten Tag stattfinden müssen	
F_k	:=	$\{f \in F$: f wird in Klasse k unterrichtet$\}$;	$\forall\ k \in K$
P^{gP}	:=	$\{p \in P$: p liegt vor einer großen Pause$\}$	
S_k	:=	$\{s \in S$: s bindet Klasse $k\}$;	$\forall\ k \in K$
S_{kf}	:=	$\{s \in S_k$: s betrifft Fach $f\}$;	$\forall\ k \in K, f \in F$
S_l	:=	$\{s \in S$: s bindet Lehrer $l\}$;	$\forall\ l \in L$
$u(s)$	:=	Unterrichtseinheit $u \in U$, zu der Sitzung s gehört;	$\forall\ s \in S$
S^{Tlg}	:=	$\{s \in S$: $u(s)$ ist eine Teilung$\}$	
S_k^{Rd}	:=	$\{s \in S_k$: s muss am Rand des Unterrichtstages der Klasse k liegen$\}$;	$\forall\ k \in K$
$ds(s)$	:=	Dauer der Sitzung s in Anzahl Perioden;	$\forall\ s \in S$
P_s^{ok}	:=	$\{p \in P$: Sitzung s darf in Periode p des betrachteten Planungstages beginnen$\}$;	$\forall\ s \in S$
$g(r)$	:=	Gebäudekomplex, in dem die Räume der Raumgruppe r angesiedelt sind;	$\forall\ r \in R$
$ar(s, r)$	:=	Anzahl der durch Sitzung s beanspruchten Räume der Raumgruppe r;	$\forall\ s \in S, r \in R$
$ar_{verf}(r, p)$	:=	Gesamtzahl der in Periode p verfügbaren Räume der Raumgruppe r;	$\forall\ r \in R, p \in P$
R_s	:=	$\{r \in R: ar(s, r) > 0\}$;	$\forall\ s \in S$
S_r	:=	$\{s \in S: ar(s, r) > 0\}$;	$\forall\ r \in R$
$dkt(k)$	:=	$\sum_{s \in S_k} ds(s)$ = Dauer des Unterrichtstages der Klasse k in Anzahl Perioden;	$\forall\ k \in K$
$bkt_{max}(k)$	:=	Periode des spätest zulässigen Beginns des Unterrichtstages der Klasse k;	$\forall\ k \in K$

$alss_{max}(l)$:= maximal zulässige Anzahl von Springstunden für Lehrer l an dem betrachteten Planungstag; $\forall\ l \in L$

$akp(k)$:= $dkt(k)$ = Gesamtdauer aller Sitzungen der Klasse k an dem betrachteten Planungstag; $\forall\ k \in K$

$alp(l)$:= $\sum_{s \in S_l} s(l)$ = Gesamtdauer aller Sitzungen des Lehrers l an dem betrachteten Planungstag; $\forall\ l \in L$

$avb(p)$:= Anzahl der Lehrer, die in Planungsperiode p für Vertretungszwecke zur Verfügung stehen sollen; $\forall\ p \in P$

$auvb_{max}(p)$:= maximale Unterschreitung der gewünschten Vertretungsbereitschaft in Periode p; $\forall\ p \in P$

$$fix(s,p) := \begin{cases} 1 & \text{Sitzung } s \text{ muss in Planungsperiode } p \text{ stattfinden (Fixierung)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \quad \forall\ s \in S, p \in P$$

Soweit keine weiteren Einschränkungen vorgegeben sind, gilt für die Mengen P_s^{ok} der für Sitzung s an dem betrachteten Planungstag zulässigen Startperioden folgende Festlegung:

$$P_s^{ok} := \{1, .., |P|\text{-}ds(s)+1\}; \quad \forall\ s \in S$$

4.3.3.3 Variablen

Für die Beschreibung der Restriktionen und Zielfunktion eines Tagesmodells werden folgende Variablen benötigt:

$$x_{sp} := \begin{cases} 1 & \text{Sitzung } s \text{ beginnt in Periode } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \quad \forall\ s \in S, p \in P_s^{ok}$$

$$kb_{kp} := \begin{cases} 1 & \text{Klasse } k \text{ ist in Periode } p \text{ belegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \quad \forall\ k \in K, p \in P$$

$$lb_{lp} := \begin{cases} 1 & \text{Lehrer } l \text{ ist in Periode } p \text{ belegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \quad \forall\ l \in L, p \in P$$

$$v_{lp} := \begin{cases} 1 & \text{Lehrer } l \text{ hat in Periode } p \text{ Dienst als Vertretungsbereitschaft} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \quad \forall\ l \in L, p \in P$$

lss_l := Springstundenzahl des Lehrers l, wobei $0 \le lss_l \le alss_{max}(l)$ und lss_l kontinuierlich; $\forall\ l \in L$

uvb_p	:=	Unterschreitung der gewünschten Vertretungs-bereitschaft in Planungsperiode p, wobei $0 \le uvb_p \le auvb_{max}(p)$ und uvb_p kontinuierlich;	$\forall\ p \in P$

4.3.3.4 Abbildung der Problemrestriktionen

Vollständigkeit (R-01)

Die Vollständigkeitsforderung verlangt, dass alle in der Lösung des Wochenmodells für den betrachteten Planungstag vorgesehenen Sitzungen erzeugt werden. Sie wird durch die Restriktionen

$$\sum_{p \in P_s^{ok}} x_{sp} \ge 1; \qquad \forall\ s \in S \qquad \text{(HiMIP-T-Voll)}$$

gewährleistet. Die Relation „≥“ ist durch das Zusammenwirken mit den Restriktionen (HiMIP-T-KlaSS.2) des Springstundenverbots für Klassen mit einer Gleichheitsrelation identisch. Die ≥-Relation wird dennoch anstelle einer Gleichheitsrelation verwandt, da sie sich als einseitige Beschränkung durch den LP-Solver leichter verarbeiten lässt.

Kollisionsfreiheit (R-02)

Lehrer und Klassen dürfen während einer beliebigen Periode nicht doppelt belegt sein, und von jeder Raumgruppe dürfen zu jeder Zeit maximal so viele Räume beansprucht sein, wie in ihr enthalten sind. Diese Forderungen werden durch die Restriktionen

$$\sum_{s \in S_k} \sum_{\substack{\pi = \max\{p - ds(s)+1;1\} \\ \pi \in P_s^{ok}}}^{p} x_{s\pi} - kb_{kp} \le 0; \qquad \forall\ k \in K, p \in P \qquad \text{(HiMIP-T-KlaKoll)}$$

und

$$\sum_{s \in S_l} \sum_{\substack{\pi = \max\{p - ds(s)+1;1\} \\ \pi \in P_s^{ok}}}^{p} x_{s\pi} + v_{lp} - lb_{lp} \le 0; \qquad \forall\ l \in L, p \in P \qquad \text{(HiMIP-T-LeKoll)}$$

und

$$\sum_{s \in S_r} ar(s,r) \cdot \sum_{\substack{\pi = \max\{p - ds(s)+1;1\} \\ \pi \in P_s^{ok}}}^{p} x_{s\pi} \le ar_{verf}(r,p); \forall\ r \in R, p \in P \qquad \text{(HiMIP-T-RgKap)}$$

repräsentiert. Die Ungleichungen (HiMIP-T-KlaKoll) besagen, dass für jede Klasse k in jeder Periode p die Summe der laufenden Sitzungen nicht höher sein darf als der Wert der Belegvariablen kb_{kp}. Dabei sind neben Sitzungen, die in p selbst beginnen, auch solche zu berücksichtigen, die bereits in einer vor p gelagerten Periode π begonnen haben, jedoch wegen ihrer mehrperiodigen Dauer in p noch nicht beendet sind. Da kb_{kp} eine 0/1-Variable ist, kann die Summe nie größer als 1 sein, wodurch die Kollisionsfreiheit für k gesichert ist. Die Einbeziehung der Belegvariablen kb_{kp} in die Formulierung (HiMIP-T-KlaKoll) ermöglicht ihren effektiven Einsatz für die Erzwingung des Springstundenverbots für Klassen.

Die Kollisionsfreiheitsrestriktionen für Lehrer (HiMIP-T-LeKoll) sind analog zu (HiMIP-T-KlaKoll) zu interpretieren, wobei durch die Einbeziehung der Variablen v_{lp} die Möglichkeit abgebildet wird, dass der Lehrer l in Planungsperiode p zur Vertretung bereit stehen muss und aus diesem Grunde keinen regulären Unterricht halten kann. Ähnlich sind auch die Kapazitätsrestriktionen der Raumgruppen (HiMIP-T-RgKap) zu deuten. Sie berücksichtigen durch den Faktor $ar(s, r)$ den Umstand, dass eine Sitzung s mehrere Räume der Raumgruppe r in Anspruch nehmen kann. $ar_{verf}(r, p)$ gibt die Gesamtzahl der in Periode p verfügbaren Räume der Raumgruppe r an. Die Ungleichungen (HiMIP-T-RgKap) sind ohne Belegvariablen der Raumgruppen formuliert, da derartige Variablen an anderer Stelle im Modell nicht benötigt werden.

Sperrungen (R-03)

Sperrungen von Klassen, Lehrern oder Räumen zu bestimmten Zeiten müssen nicht durch Restriktionen im Modell berücksichtigt werden, sondern es genügt, sie in die Festlegung der Mengen P_s^{ok} sowie der Parameter $ar_{verf}(r, p)$ einzubeziehen. Für die Klassen und Lehrer kann dies durch Umsetzung der Implikationen

$$\begin{array}{l} \text{Klasse } k \text{ in Periode } p \text{ gesperrt} \\ \rightarrow [(p - ds(s) + 1) \notin P_s^{ok} ; \forall\, s \in S_k] \end{array} \quad ; \qquad \forall\ k \in K, p \in P$$

und

$$\begin{array}{l} \text{Lehrer } l \text{ in Periode } p \text{ gesperrt} \\ \rightarrow [(p - ds(s) + 1) \notin P_s^{ok} ; \forall\, s \in S_l] \end{array} \quad ; \qquad \forall\ l \in L, p \in P$$

vor dem Start des Modellgenerators geschehen. Sie schließen aus, dass irgendeine Sitzung s, in die die für Periode p gesperrte Klasse k (analog: der gesperrte Lehrer l) involviert ist, eine Startperiode erhält, die dazu führen würde, dass die Sitzung während p andauert.

Ist während p ein Raum aus der Raumgruppe r gesperrt, so ist dies durch entsprechende Reduktion der Anzahl $ar_{verf}(r, p)$ der in p verfügbaren Räume der Gruppe r um den Betrag 1 zu berücksichtigen.

Springstundenverbot für Klassen (R-04)

Das Springstundenverbot für Klassen kann mit Hilfe der Klassen-Belegvariablen kb_{kp} durch die Restriktionen

$$kb_{kp} + kb_{k\pi} - kb_{k(p+1)} \le 1; \qquad \forall\ k \in K, p = 1, .., |P|\text{-}2, \quad \pi = p\text{+}2, .., |P| \qquad \text{(HiMIP-T-KlaSS.1)}$$

und

$$\sum_{p \in P} kb_{kp} \le akp(k); \qquad \forall\ k \in K \qquad \text{(HiMIP-T-KlaSS.2)}$$

durchgesetzt werden. Die Ungleichungen (HiMIP-T-KlaSS.1) stellen sicher, dass die Belegung einer Klasse k in zwei nicht benachbarten Perioden p und $\pi \geq p + 2$ eines Tages t nur dann erfolgen kann, wenn k in Periode $p + 1$ ebenfalls belegt ist. Da für jede Periode zwischen p und $\pi - 1$ eine weitere Restriktion dieses Typs definiert ist, ist sichergestellt, dass die Belegung von k in p und π die Belegung in allen dazwischen liegenden Perioden nach sich zieht. Die Restriktionen (HiMIP-T-KlaSS.2) verlangen zusätzlich, dass k nur in maximal so vielen Perioden belegt wird, wie dem Gesamtunterrichtsumfang $akp(k)$ für k entspricht.

Die Springstundenfreiheit für die Klasse k ergibt sich aus dem Zusammenwirken der Restriktionen (HiMIP-T-KlaSS.1), (HiMIP-T-KlaSS.2), (HiMIP-T-Voll) und (HiMIP-T-KlaKoll): Wird k in einer beliebigen Periode p unterrichtet, so muss k wegen (HiMIP-T-KlaKoll) in p belegt werden ($kb_{kp} = 1$). Die Belegung von k in zwei nicht benachbarten Perioden p und π hat wegen (HiMIP-T-KlaSS.1) die Belegung in allen dazwischen liegenden Perioden zur Folge. Da nun k wegen (HiMIP-T-KlaSS.2) in maximal $akp(k)$ Perioden belegt werden darf, zugleich aber wegen (HiMIP-T-Voll) genau $akp(k)$ Unterrichtsperioden für k einzuplanen sind, ist jede Belegung von k zwangsläufig mit einem Unterricht von k verbunden. Der Stundenplan für k muss daher springstundenfrei sein.

Doppelunterrichtsverbot (R-05)

Das Doppelunterrichtsverbot ist für die Aufteilung der Sitzungen auf die verschiedenen Tage relevant und daher Teil des Wochenmodells.

Randstunden (R-06)

Die Anforderung, dass bestimmte Sitzungen am Rand des Unterrichtstages der betroffenen Klasse(n) liegen müssen, kann im Rahmen eines Tagesmodells durch die Restriktionen

$$x_{sp} + kb_{k(p-1)} + kb_{k(p+ds(s))} \le 2; \qquad \forall\ k \in K, s \in S_k^{Rd}, \quad p \in \{2, .., |P|\text{-}ds(s)\} \cap P_s^{ok} \qquad \text{(HiMIP-T-Rand)}$$

abgebildet werden. Sie sorgen dafür, dass die Setzung einer Rand-Sitzung s der Klasse k in die Periode p nur dann erfolgen kann, wenn k nicht sowohl vor als auch nach s belegt ist. Da der Klassenplan für k gleichzeitig springstundenfrei sein muss, führen die Restriktionen (HiMIP-T-Rand) dazu, dass Rand-Sitzungen entweder am Anfang oder am Ende des Unterrichtstages von k stattfinden.

Fixierungen (R-07)

Sitzungen, die im Zuge einer manuellen Teilsetzung vorab erzeugt und nicht im Rahmen einer Relaxation des Wochenmodells verschoben wurden, können durch Festlegung der entsprechenden Zuordnungsvariablen auf den Wert 1 berücksichtigt werden:

$$x_{sp} = 1; \qquad \forall\ s \in S,\ p \in P_s^{ok} : fix(s, p) = 1 \qquad \text{(HiMIP-T-Fix)}$$

Wegezeiten (R-09)

Müssen Wegezeiten zwischen verschiedenen Gebäudekomplexen berücksichtigt werden, so hat dies zur Folge, dass für die Lehrer, vor allem aber für die Klassen Sitzungen, die in unterschiedlichen Gebäudekomplexen stattfinden sollen, nur dann in benachbarten Perioden stattfinden können, wenn zwischen ihnen eine große Pause liegt, in der sich der Weg zwischen den Gebäudekomplexen bewältigen lässt. Diese Anforderung lässt sich für die Klassen durch die Restriktionen

$$x_{sp} + x_{\sigma(p+ds(s))} \leq 1; \qquad \forall\ k \in K, s, \sigma \in S_k: [s \neq \sigma \wedge \exists\ r \in R_s, \rho \in R_\sigma: g(r) \neq g(\rho)], p \in P_s^{ok} : [(p+ds(s)) \in P_\sigma^{ok} \wedge (p+ds(s)-1) \notin P^{gP}] \qquad \text{(HiMIP-T-KlaWeg)}$$

und für die Lehrer durch die Restriktionen

$$x_{sp} + x_{\sigma(p+ds(s))} \leq 1; \qquad \forall\ l \in L, s, \sigma \in S_l: [s \neq \sigma \wedge \exists\ r \in R_s, \rho \in R_\sigma: g(r) \neq g(\rho)], p \in P_s^{ok} : [(p+ds(s)) \in P_\sigma^{ok} \wedge (p+ds(s)-1) \notin P^{gP}] \qquad \text{(HiMIP-T-LeWeg)}$$

modellieren. Sie verbieten jede an dem betreffenden Planungstag denkbare direkte, nicht durch eine große Pause getrennte Folge zweier Sitzungen s und σ der Klasse k bzw. des Lehrers l, sofern die Raumanforderungen von s und σ zwei Raumgruppen r und ρ aus unterschiedlichen Gebäudekomplexen $g(r)$ und $g(\rho)$ betreffen. Die Menge P^{gP} fasst alle Perioden zusammen, die direkt vor einer großen Pause liegen.

Freie Tage für Lehrer (R-12)

Die Einplanung freier Tage für Lehrer stellt eine Einschränkung der Aufteilung der Sitzungen auf die verschiedenen Planungstage dar und wird entsprechend im Wochenmodell behandelt.

Weitere Problemrestriktionen

Soll über die bereits betrachteten Restriktionen hinausgehend beachtet werden, dass zweiperiodige Sitzungen nicht über eine große Pause hinweg andauern dürfen (vgl. Abschnitt 4.2.2.4), so kann diese Anforderung leicht durch die Zuweisung

$$P_s^{ok} := P_s^{ok} \setminus P^{gP}; \qquad \forall\ s \in S\text{: } ds(s) = 2$$

vor Beginn der Modellgenerierung berücksichtigt werden. Einer expliziten Einbeziehung dieser Forderung durch die Formulierung von Modellrestriktionen bedarf es nicht.

Die eventuelle Forderung, mehrere Sitzungen einer Teilung zwingend demselben Tag zuzuordnen, ist nicht für die tagesinterne Planung, sondern für die Aufteilung der Sitzungen auf die Tage innerhalb der Woche relevant. Sie wird daher im Rahmen des Wochenmodells behandelt.

4.3.3.5 Abbildung der Zielsetzungen

Für die Abbildung des Zielkatalogs werden im Rahmen des HiMIP-Tagesmodells dieselben Modellierungsvarianten genutzt wie in der Formulierung des ToMIP-Modells (vgl. Abschnitt 4.2.2.5). Wiederum sind meine subjektive Bedeutungseinschätzung der einzelnen Zielgrößen und die jeweilige Zielrichtung Minimierung, Maximierung, Punktgenauigkeit oder Satisfizierung für die Wahl der jeweiligen Modellierungsvariante entscheidend.

Gleichlange Klassentage (Z-01)

Die Länge der Unterrichtstage der Klassen geht für jeden Planungstag aus der Lösung des Wochenmodells hervor und ist daher im Rahmen der Tagesplanung nicht mehr Gegenstand einer Entscheidung.

Früher Unterrichtsbeginn (Z-02)

Für jede Klasse sollte der Unterricht an jedem Tag in der frühest möglichen Periode beginnen. Eine entsprechende Zielfunktionskomponente für das Tagesmodell lässt sich in der Form

$$\text{minimiere} \sum_{k \in K} \left[\sum_{p=1}^{bkt_{max}(k)-1} kb_{kp} + 2 \cdot \sum_{p=bkt_{max}(k)}^{bkt_{max}(k)+dkt(k)-1} kb_{kp} + 3 \cdot \sum_{p=bkt_{max}(k)+dkt(k)}^{|P|} kb_{kp} \right] \qquad \text{(HiMIP-T-FrüBeg)}$$

definieren. Sie unterteilt den Planungstag in drei Zeitblöcke, deren Nutzung unterschiedlich hoch bestraft wird. Hierdurch wird die Nutzung jener Perioden, die vor dem spätest gewünschten Beginn $bkt_{max}(k)$ des Unterrichtstages der jeweiligen Klasse k liegen, besonders begünstigt. Mit den höchsten Kosten sind hingegen die Perioden belegt, welche sich, von Periode $bkt_{max}(k)$ aus gerechnet, nicht mehr innerhalb der Zeitspanne $dkt(k)$ der Dauer des Unterrichtstages von k befinden. Soll zusätzlich sichergestellt sein, dass der Unterrichtstag für die Klasse k garantiert nicht später als in Periode $bkt_{max}(k)$ beginnt, so kann dies durch die Variablenfixierung

$$kb_{k(bkt_{\max}(k))} = 1; \qquad \forall\ k \in K \qquad \text{(HiMIP-T-MaxBeg)}$$

erzwungen werden. Allerdings erübrigt sich in diesem Fall die Summe des dritten Zeitblocks innerhalb des Ziels (HiMIP-T-FrüBeg), da bei zwingendem Unterrichtsstart in Periode $bkt_{max}(k)$ der Beginn einer Sitzung der Klasse k in Periode $bkt_{max}(k) + dkt(k)$ oder später nicht zulässig ist.

Springstundenminimierung für Lehrer (Z-06)

Die Minimierung der Springstundenzahl für Lehrer kann im Rahmen des HiMIP-Ansatzes nur auf Tagesebene direkt kontrolliert werden. Sie lässt sich mit Hilfe der Belegvariablen lb_{lp} der Lehrer und einer dem Springstundenverbot für Klassen ähnlichen Formulierung über die Restriktionen

$$lb_{lp} + lb_{l\pi} - lb_{l(p+1)} \leq 1; \qquad \forall\ l \in L, p = 1, .., |P|\text{-}2, \ \pi = p+2, .., |P| \qquad \text{(HiMIP-T-LeSS.1)}$$

und

$$\sum_{p \in P} lb_{lp} - lss_l \leq alp(l); \qquad \forall\ l \in L \qquad \text{(HiMIP-T-LeSS.2)}$$

erreichen, wobei $alp(l)$ die Gesamtunterrichtsbelastung des Lehrers l an dem betrachteten Planungstag und lss_l eine kontinuierliche Zählvariable für die Lehrerspringstunden darstellen. Durch Setzen einer Obergrenze $alss_{max}(l)$ für die Variable lss_l kann eine Beschränkung der Springstundenzahl für l erzwungen werden. Dies kann im Rahmen des HiMIP-Gesamtansatzes vor allem für solche Lehrer interessant sein, die in bereits vorliegenden Lösungen anderer Tagesmodelle eine hohe Springstundenzahl hinnehmen müssen. Die lss_l sind als Überschreitungsvariablen der Goal-Restriktionen (HiMIP-T-LeSS.2) mit einer Gewichtung in die Zielfunktion aufzunehmen.

Vertretungsbereitschaft (Z-10)

Das Ziel, eine Vertretungsbereitschaft von avb_p oder mehr Lehrern in Planungsperiode p des betrachteten Planungstages sicherzustellen, kann mit Hilfe der Goal-Restriktionen

$$\sum_{\substack{l \in L: l \text{ in Periode} \\ p \text{ verfügbar}}} v_{lp} + uvb_p \geq avb(p); \qquad \forall\ p \in P \qquad \text{(HiMIP-T-Vb)}$$

berücksichtigt werden. Die Unterschreitungsvariablen uvb_p sind mit einer Gewichtung in die Zielfunktion aufzunehmen. Durch Einbeziehung einer Obergrenze $auvb_{max}(p)$ für die

Variablen uvb_p kann die Einhaltung eines Mindestniveaus der Vertretungsbereitschaft gesichert werden.

Fächerbeziehungen (Z-12)

Die Vermeidung des Unterrichts bestimmter Fächer am selben Tag ist nur für das Wochenmodell relevant.

Zusammenfassung der Zielfunktion

Nur drei der fünf für das Setzungsproblem an allgemeinbildenden Schulen betrachteten Zielgrößen besitzen eine Relevanz innerhalb der Tagesmodelle: der frühe Unterrichtsbeginn für Klassen, die Minimierung der Zahl der Lehrerspringstunden und die Sicherung einer Vertretungsbereitschaft. Von diesen Zielsetzungen werden die Springstundenminimierung für Lehrer und die Sicherung der Vertretungsbereitschaft mit Hilfe von Goal-Restriktionen und Über- bzw. Unterdeckungsvariablen abgebildet, welche entsprechend in der Zielfunktion zu berücksichtigen sind. Als einfache Zielgröße ist der frühe Unterrichtsbeginn für Klassen formuliert. Aus dieser Konstellation ergibt sich

$$\text{minimiere} \quad w_{FTB} \cdot \sum_{k \in K} \left[\sum_{p=1}^{bkt_{max}(k)-1} kb_{kp} + 2 \cdot \sum_{p=bkt_{max}(k)}^{bkt_{max}(k)+dkt(k)-1} kb_{kp} + 3 \cdot \sum_{p=bkt_{max}(k)+dkt(k)}^{|P|} kb_{kp} \right] \qquad \text{(HiMIP-T-Ziel)}$$

$$+ \quad w_{LeSS} \cdot \sum_{l \in L} lss_l \quad + \quad w_{Vb} \cdot \sum_{p \in P} uvb_p$$

als lineare gewichtete Gesamt-Zielfunktion für das jeweilige HiMIP-Tagesmodell.

4.3.3.6 Veränderungen des Modells durch Berücksichtigung von Relaxationen

Im Gegensatz zum HiMIP-Wochenmodell, welches im Vergleich zum Totalansatz stark vereinfacht ist und als Start-Modell des hierarchischen Lösungsprozesses im Normalfall auch ohne Relaxation leicht lösbar sein sollte, ist die Verfügbarkeit von Relaxationsmöglichkeiten für die einzelnen Tagesmodelle von starker Relevanz. Dies hat seine Ursache darin, dass die engen Vorgaben, die der Planung der einzelnen Tage durch die Lösung des Wochenmodells gesetzt sind, leicht zu Unzulässigkeiten innerhalb eines oder sogar mehrerer Tagesmodelle führen können. Aus diesem Grunde sollen auch für diese Modellstruktur Relaxationsoptionen für solche Restriktionstypen vorgestellt werden, deren Verletzung möglicherweise in begrenztem Umfang toleriert werden kann, namentlich die Begrenzung der Lehrerspringstundenzahl, Fixierungen, Wegezeiten- und Randlagerestriktionen sowie das Verbot zweiperiodiger Sitzungen über große Pausen hinweg.

Zusätzliche Parameter und Variablen

Seien für die Relaxation folgende zusätzliche Parameter definiert:

$alss_{max}^{Relax}(l)$	:=	maximale aufgrund der Relaxation zulässige Anzahl zusätzlicher Springstunden für Lehrer l;	$\forall \ l \in L$
w_{Rd}^{Relax}	:=	Zielgewichtung für die Relaxation der Randstundenrestriktionen	
w_{Fix}^{Relax}	:=	Zielgewichtung für die Relaxation der Fixierungen	
w_{WzK}^{Relax}	:=	Zielgewichtung für die Relaxation der Wegezeitenrestriktionen für Klassen	
w_{WzL}^{Relax}	:=	Zielgewichtung für die Relaxation der Wegezeitenrestriktionen für Lehrer	
w_{Dop}^{Relax}	:=	Zielgewichtung für die Relaxation der Pausenfreiheit für Doppelstunden	
w_{LeSS}^{Relax}	:=	Zielgewichtung für die Relaxation der maximalen Anzahl von Lehrerspringstunden	

Seien ferner als zusätzliche kontinuierliche Variablen definiert:

rs_s^{Relax}	:=	Relaxation der Randlageforderung für Sitzung s, wobei $0 \leq rs_s^{Relax} \leq 1$;	$\forall \ k \in K, s \in \ S_k^{Rd}$
wzk_{kp}^{Relax}	:=	Relaxation der Wegezeit für Klasse k in Periode p, wobei $0 \leq wzk_{kp}^{Relax} \leq 1$;	$\forall \ k \in K, p \in \ P$
wzl_{lp}^{Relax}	:=	Relaxation der Wegezeit für Lehrer l in Periode p, wobei $0 \leq wzl_{lp}^{Relax} \leq 1$;	$\forall \ l \in L, p \in \ P$
lss_l^{Relax}	:=	Anzahl zusätzlicher Springstunden des Lehrers l, wobei $0 \leq lss_l^{Relax} \leq alss_{max}^{Relax}(l)$;	$\forall \ l \in L$

Alle zusätzlichen Variablen sind als kontinuierliche Variablen definiert. Sie nehmen jedoch aufgrund des Zusammenwirkens der Restriktionen und der Zielfunktion der HiMIP-Tagesmodelle in jeder ganzzahligen LP-Lösung des Modells automatisch ebenfalls ganzzahlige Werte an.

Relaxation der Randstundenrestriktionen (R-06)

Randlagerestriktionen können durch Einfügung von Relaxationsvariablen rs_s^{Relax} in die Restriktionen (HiMIP-T-Rand) entschärft werden:

$$x_{sp} + kb_{k(p-1)} + kb_{k(p+ds(s))} - rs_s^{Relax} \leq 2; \quad \forall\ k \in K, s \in S_k^{Rd}, \; p \in \{2, .., |P|\text{-}ds(s)\} \cap P_s^{ok} \qquad \text{(HiMIP-T-Rand-R)}$$

Relaxation der Fixierungen (R-07)

Sollen bereits fixierte Sitzungen umgesetzt werden können, so sind die Restriktionen (HiMIP-T-Fix) aus dem Modell zu streichen und stattdessen die Benutzung der für die betroffenen Sitzungen bestimmten Planungsperioden durch einen negativen Term in der Zielfunktion mit einer Gewichtung w_{Fix}^{Relax} zu belohnen.

Relaxation der Wegezeitenrestriktionen (R-09)

Eine Relaxation der Wegezeitenrestriktion für die Klassen kann durch Erweiterung der Restriktionen (HiMIP-T-KlaWeg) um die Relaxationsvariable wzk_{kp}^{Relax} in der Form

$$x_{sp} + x_{\sigma(p+ds(s))} - wzk_{kp}^{Relax} \leq 1; \quad \forall\ k \in K, s, \sigma \in S_k: [s \neq \sigma \wedge \exists\ r \in R_s, \rho \in R_\sigma: g(r) \neq g(\rho)], p \in P_s^{ok}: [(p+ds(s)) \in P_\sigma^{ok} \wedge (p+ds(s)\text{-}1) \notin P^{gP}] \qquad \text{(HiMIP-T-KlaWeg-R)}$$

erfolgen. Die entsprechende Anpassung der Restriktionen (HiMIP-T-LeWeg) für die Lehrer mit Hilfe der Relaxationsvariablen wzl_{lp}^{Relax} lautet:

$$x_{sp} + x_{\sigma(p+ds(s))} - wzl_{lp}^{Relax} \leq 1; \quad \forall\ l \in L, s, \sigma \in S_l: [s \neq \sigma \wedge \exists\ r \in R_s, \rho \in R_\sigma: g(r) \neq g(\rho)], p \in P_s^{ok}: [(p+ds(s)) \in P_\sigma^{ok} \wedge (p+ds(s)\text{-}1) \notin P^{gP}] \qquad \text{(HiMIP-T-LeWeg-R)}$$

Relaxation des Verbots großer Pausen innerhalb zweiperiodiger Sitzungen

Die Relaxation des Verbots, zweiperiodige Sitzungen über große Pausen hinweg andauern zu lassen, kann umgesetzt werden, indem die in Abschnitt 4.3.3.4 formulierte Anweisung

$$P_s^{ok} := P_s^{ok} \setminus P^{gP}; \qquad \forall\ s \in S: ds(s) = 2$$

rückgängig gemacht und stattdessen die Verwendung der unerwünschten Startperioden $p \in P^{gP}$ in der Zielfunktion mit einem Zielgewicht w_{Dop}^{Relax} bestraft wird.

Relaxation der Begrenzung von Lehrerspringstunden

Die Begrenzung von Lehrerspringstunden, die im Zusammenhang mit dem Ziel der Springstundenminimierung festgelegt sein kann, lässt sich durch die Erweiterung der Restriktionen (HiMIP-T-LeSS.2) in der Form

$$\sum_{p \in P} lb_{lp} - lss_l - lss_l^{Relax} \leq alp(l); \qquad \forall \; l \in L \qquad \text{(HiMIP-T-LeSS.2-R)}$$

relaxieren, wobei die kontinuierliche Überschreitungsvariable lss_l^{Relax} die unter Ausnutzung der Relaxation zusätzlich verplanten Springstunden des Lehrers l zählt.

Erweiterte Zielfunktion

Die Wahrnehmung der oben aufgeführten Relaxationsoptionen für die HiMIP-Tagesmodelle bedingt die Erweiterung der Zielfunktion um entsprechende Strafterme. (HiMIP-T-Ziel-R) gibt die erweiterte Zielfunktion für den hypothetischen Fall an, dass alle oben ausgeführten Relaxationen berücksichtigt werden sollen:

$$\begin{aligned}
\text{minimiere} \quad & w_{FTB} \cdot \sum_{k \in K} \left[\sum_{p=1}^{bkt_{max}(k)-1} kb_{kp} + 2 \cdot \sum_{p=bkt_{max}(k)}^{\substack{bkt_{max}(k) \\ +dkt(k)-1}} kb_{kp} + 3 \cdot \sum_{\substack{p=bkt_{max}(k) \\ +dkt(k)}}^{|P|} kb_{kp} \right] && \text{(HiMIP-T-Ziel-R)} \\
& + w_{LeSS} \cdot \sum_{l \in L} lss_l \qquad + w_{Vb} \cdot \sum_{p \in P} uvb_p \\
& + w_{Rd}^{Relax} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{s \in S_k^{Rd}} rs_s^{Relax} \qquad - w_{Fix}^{Relax} \cdot \sum_{s \in S} \sum_{\substack{p \in P_s^{ok}: \\ fix(s,p)=1}} x_{sp} \\
& + w_{WzK}^{Relax} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{p \in P} wzk_{kp}^{Relax} \qquad + w_{WzL}^{Relax} \cdot \sum_{l \in L} \sum_{p \in P} wzl_{lp}^{Relax} \\
& + w_{Dop}^{Relax} \cdot \sum_{\substack{s \in S: \\ d(s)=2}} \sum_{p \in P_s^{ok} \cap P^{gP}} x_{sp} \qquad + w_{LeSS}^{Relax} \cdot \sum_{l \in L} lss_l^{Relax}
\end{aligned}$$

Werden einige Relaxationsmöglichkeiten nicht wahrgenommen, so sind die ihnen zugehörigen Relaxationsterme aus (HiMIP-T-Ziel-R) zu entfernen. Um trotz Relaxation zu einer Lösung zu gelangen, die nur eine geringe Unzulässigkeit hinsichtlich des unrelaxierten Modells aufweist, sollten die Gewichtungen der Relaxationsterme so gewählt werden, dass sie die Terme der originären Zielkriterien dominieren.

4.3.3.7 Veränderungen des Modells durch Berücksichtigung von Kernzeiten

Im Rahmen der Präsentation des ToMIP-Ansatzes wurde die Möglichkeit aufgezeigt, Kernzeiten des Unterrichts für eine Vereinfachung des Modells zu nutzen (vgl. Abschnitt 4.2.2.7). Diese Option lässt sich auch für die Formulierung der Tagesmodelle im Rahmen des HiMIP-Ansatzes wahrnehmen. Die Veränderungen, die sich daraus ergeben, werden im Folgenden dargestellt.

Zusätzliche Parameter und Mengen

Seien:

bkz := Periode des Beginns der Kernzeit

ekz := Periode des Endes der Kernzeit, wobei $ekz \geq bkz$

dkz := $ekz - bkz + 1$ = Dauer der Kernzeit

P^{Kz} := $\{p \in P: bkz \leq p \leq ekz\}$ = Menge der Kernzeitperioden

Änderungen der Modellvariablen

Im Bereich der Modellvariablen wirkt sich die Einbeziehung von Kernzeiten ausschließlich auf die Belegvariablen der Klassen aus. Diese werden nur noch für solche Perioden benötigt, die außerhalb der Kernzeit liegen:

$$kb_{kp} := \begin{cases} 1 & \text{Klasse } k \text{ ist in Periode } p \text{ belegt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ; \qquad \forall\ k \in K, p \in P \setminus P^{Kz}$$

Änderungen der Modellrestriktionen und der -zielfunktion

Unter den Restriktionstypen sind zunächst die Kollisionsfreiheitsrestriktionen der Klassen (HiMIP-T-KlaKoll) betroffen, die nun nach Kernzeitbereich und Nebenzeitbereich differenziert werden müssen. Die ≤-Relation ist durch eine Gleichheitsrelation zu ersetzen, da die Restriktionen für das Springstundenverbot der Klassen ebenfalls variiert werden, so dass sie den Wert der Belegvariablen für den Fall, dass die jeweilige Klasse in der betreffenden Periode unterrichtet wird, nicht mehr automatisch auf 1 zwingen. Es ergeben sich daher die Gleichungen

$$\sum_{s \in S_k} \sum_{\substack{\pi = \max\{p - ds(s)+1;1\} \\ \pi \in P_s^{ok}}}^{p} x_{s\pi} = 1; \qquad \forall\ k \in K, p \in P^{Kz} \qquad \text{(HiMIP-T-KlaKoll-Kz.1)}$$

und

$$\sum_{s\in S_k}\ \sum_{\substack{\pi=\max\{p-ds(s)+1;1\}\\ \pi\in P_s^{ok}}}^{p} x_{s\pi} - kb_{kp} = 0; \qquad \forall\ k\in K, p\in P\setminus P^{Kz} \qquad \text{(HiMIP-T-KlaKoll-Kz.2)}$$

als Ersatz für (HiMIP-T-KlaKoll). Die Restriktionen (HiMIP-T-KlaKoll-Kz.1) stellen dabei sicher, dass jede Klasse während jeder Periode innerhalb der Kernzeit Unterricht erhält. Die Restriktionen (HiMIP-T-MaxBeg), die den spätestzulässigen Beginn der Klassen-Unterrichtstage sichern, entfallen.

Eine erhebliche Vereinfachung ergibt sich für das Modell durch die Modifikation der Restriktionen des Springstundenverbots für Klassen. Sie müssen lediglich noch absichern, dass die Unterrichtsperioden jeder Klasse außerhalb und innerhalb der Kernzeit zusammenhängen. Dies lässt sich durch die Restriktionen

$$kb_{kp} - kb_{k(p+1)} \leq 0; \qquad \forall\ k\in K,\ p = 1, .., bkz\text{-}2 \qquad \text{(HiMIP-T-KlaSS-Kz.1)}$$

und

$$kb_{kp} - kb_{k(p-1)} \leq 0; \qquad \forall\ k\in K,\ p = ekz+2, .., |P| \qquad \text{(HiMIP-T-KlaSS-Kz.2)}$$

als Ersatz für (HiMIP-T-KlaSS.1) und (HiMIP-T-KlaSS.2) erreichen.

Konsequenzen hat die Einführung einer täglichen Kernzeit auch für die Modellierung der Randstundenrestriktionen. Hier ist zunächst durch die Zuweisung

$$P_s^{ok} := P_s^{ok} \setminus \{bkz+1, .., ekz\text{-}ds(s)\}; \qquad \forall\ k\in K, s\in S_k^{Rd}$$

sicherzustellen, dass Rand-Sitzungen nur am Rande der Kernzeit oder in der Nebenzeit stattfinden. Zusätzlich ist durch die Restriktionen

$$x_{sp} + kb_{k(p-1)} \leq 1; \qquad \forall\ k\in K, s\in S_k^{Rd},\ p\in \{2, .., bkz\}\cap P_s^{ok} \qquad \text{(HiMIP-T-Rand-Kz.1)}$$

und

$$x_{sp} + kb_{k(p+ds(s))} \leq 1; \qquad \forall\ k\in K, s\in S_k^{Rd},\ p\in \{ekz\text{-}ds(s)+1, .., |P|\text{-}ds(s)\}\cap P_s^{ok} \qquad \text{(HiMIP-T-Rand-Kz.2)}$$

als Ersatz für (HiMIP-T-Rand) zu gewährleisten, dass Randstunden stets entweder den Beginn [(HiMIP-T-Rand-Kz.1)] oder das Ende [(HiMIP-T-Rand-Kz.2)] des Unterrichtstages der betroffenen Klasse(n) bilden. Entsprechend ist die Relaxationsversion der Randstundenrestriktionen zu gestalten:

$$x_{sp} + kb_{k(p-1)} - rs_s^{Relax} \leq 1; \qquad \forall\ k \in K, s \in S_k^{Rd},\ p \in \{2, .., bkz\} \cap P_s^{ok} \qquad \text{(HiMIP-T-Rand-Kz.1-R)}$$

und

$$x_{sp} + kb_{k(p+ds(s))} - rs_s^{Relax} \leq 1; \qquad \forall\ k \in K, s \in S_k^{Rd},\ p \in \{ekz\text{-}ds(s)+1, .., |P|\text{-}ds(s)\} \cap P_s^{ok} \qquad \text{(HiMIP-T-Rand-Kz.2-R)}$$

Alle weiteren Modellrestriktionen einschließlich ihrer Modifikationen für die Einbeziehung von Relaxationstermen bleiben durch die Einführung der Kernzeit unberührt. Auch die Zielfunktion ändert sich gegenüber der Modellformulierung ohne Kernzeit nicht.

Eine tabellarische Übersicht der Formulierungen für das HiMIP-Wochenmodell und die HiMIP-Tagesmodelle findet sich in Anhang 8.2.2.

4.4 Ansatz 3: SeMIP - Sequenzielle Setzung nach Klassen mit vorgeschalteter Prioritätsphase

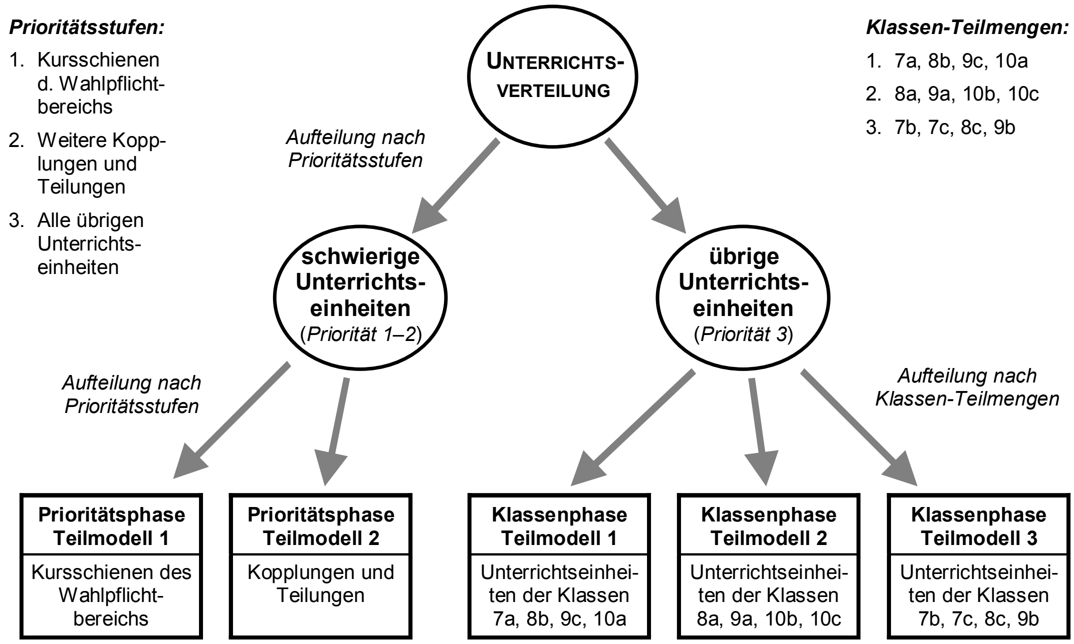
4.4.1 Vorgehensweise

Der Ansatz SeMIP für die Stundenplansetzung an allgemeinbildenden Schulen beruht auf einer Dekomposition der Gesamtmenge aller durch die Unterrichtsverteilung vorgegebenen Unterrichtseinheiten in mehrere Teilmengen, die separat und sequenziell in jeweils einem Teilmodell gesetzt werden. Grundprinzip für die Bildung der Unterrichtseinheiten-Teilmengen ist dabei die Aufteilung nach Klassen. Hierzu wird zunächst die Gesamtmenge aller Klassen in mehrere Klassen-Teilmengen separiert. Anschließend werden für jede Klassen-Teilmenge alle Unterrichtseinheiten, die mindestens eine Klasse aus dieser Klassen-Teilmenge binden, zu einer Unterrichtseinheiten-Teilmenge zusammengefasst. Da Unterrichtseinheiten existieren können, welche mehrere Klassen binden, die unterschiedlichen Klassen-Teilmengen zugeordnet sind, sind die durch die Klassen-Dekomposition gebildeten Unterrichtseinheiten-Teilmengen nicht notwendigerweise disjunkt. Ist daher eine Unterrichtseinheit mehreren Teilmengen zugeordnet, so wird sie durch das erste Teilmodell in der Lösungssequenz gesetzt, welches eine der dieser Teilmengen repräsentiert.

Die eben beschriebene reine Aufteilung der Unterrichtseinheiten mittels einer Klassen-Dekomposition ist aus lösungstechnischer Sicht mit einem Nachteil behaftet, der eine Erweiterung des Ansatzes erforderlich macht. In der Praxis befinden sich unter den Unterrichtseinheiten i.d.R. zahlreiche Kopplungen und Teilungen, die aufgrund der Tatsache, dass sie mehrere Klassen und/oder Lehrer und/oder Räume binden, besonders schwierig zu setzen sind. Dies gilt insbesondere für Kursschienen eines Wahlpflicht- oder Oberstufenbereichs, die gleichzeitig Kopplungen und Teilungen darstellen. Werden solche schwierigen Unterrichtseinheiten nicht bereits im ersten oder zweiten Teilmodell der Sequenz gesetzt, so besteht aufgrund der mit jedem Teilmodell zunehmenden Fixierungen ein hohes Risiko, dass sie nicht mehr zulässig zugeordnet werden können. Da aber zumeist für jede Klasse derartige Unterrichtseinheiten definiert sind, ist es nicht möglich, eine sinnvolle Klassen-Dekomposition zu finden, durch die eine frühe Setzung dieser Einheiten garantiert würde. Aus diesem Grunde muss der nach Klassen gebildeten Modellsequenz eine Lösungsstufe vorangestellt werden, in der schwierige Unterrichtseinheiten ohne Beachtung ihrer Klassen-Bindungen vorab gesetzt werden können. Diese Stufe, die selbst wiederum aus einem oder mehreren Teilmodellen bestehen kann, wird im Folgenden als Prioritätsphase bezeichnet, während die Modellsequenz nach Klassen-Aufteilung als Klassenphase referenziert wird.

Ein Beispiel für die Bildung einer SeMIP-Modellsequenz gibt Abbildung 4.3. Das Beispiel bezieht sich auf eine vierjährige Oberschule, die in jeder Jahrgangsstufe drei Klassen umfasst. Neben dem standardmäßigen Klassenunterricht sieht die Unterrichtsverteilung für einige Jahrgangsstufen der Schule einen Wahlpflichtbereich vor, in dem die Klassen dieser Jahrgangsstufen zu mehreren Kursen rekombiniert werden. Die so entstehenden Schienen gleichzeitig abzuhaltender Kurse mit mehrfacher Klassen-, Lehrer- und Raumbindung werden jeweils durch eine Unterrichtseinheit abgebildet, die zugleich Kopplung und Teilung ist. Die Setzung erfolgt in insgesamt fünf Teilmodellen, von denen zwei der Prioritätsphase und drei der Klassenphase angehören. In der Prioritätsphase werden im ersten Teilmodell die Kursschienen des Wahlpflichtbereichs, im zweiten Teilmodell die sonstigen Kopplungen und Teilungen gesetzt. Alle übrigen Unterrichtseinheiten werden in der Klassenphase behandelt. Sie werden dabei über die Bildung von drei Klassen-Teilmengen mit je vier Klassen auf drei Teilmodelle aufgeteilt.

Abbildung 4.3: Ableitung einer SeMIP-Modellsequenz
(Beispiel für eine dreizügige Oberschule mit Jahrgangsstufen 7 bis 10)



Ein bedeutender Unterschied der Teilmodelle des SeMIP-Ansatzes zu den Tagesmodellen des HiMIP-Ansatzes ist, dass die SeMIP-Teilmodelle nicht unabhängig voneinander und daher auch nicht parallel lösbar sind. Der Grund dafür liegt darin, dass bei der Aufstellung des zweiten und aller folgenden Teilmodelle der Lösungssequenz sämtliche Zuordnungen, die im Zuge der Lösung vorgelagerter Teilmengen erzeugt wurden, durch entsprechende Fixierungen berücksichtigt werden müssen. Würde dies unterlassen, so wäre die Wahrscheinlichkeit, die Lösungen aller Teilmodelle zu einer zulässigen Gesamtlösung vereinigen zu können, quasi 0.

Die Zerlegung der Unterrichtseinheitenmenge im Rahmen des SeMIP-Ansatzes wirft einige Entscheidungen auf, die durch den Benutzer getroffen werden müssen:

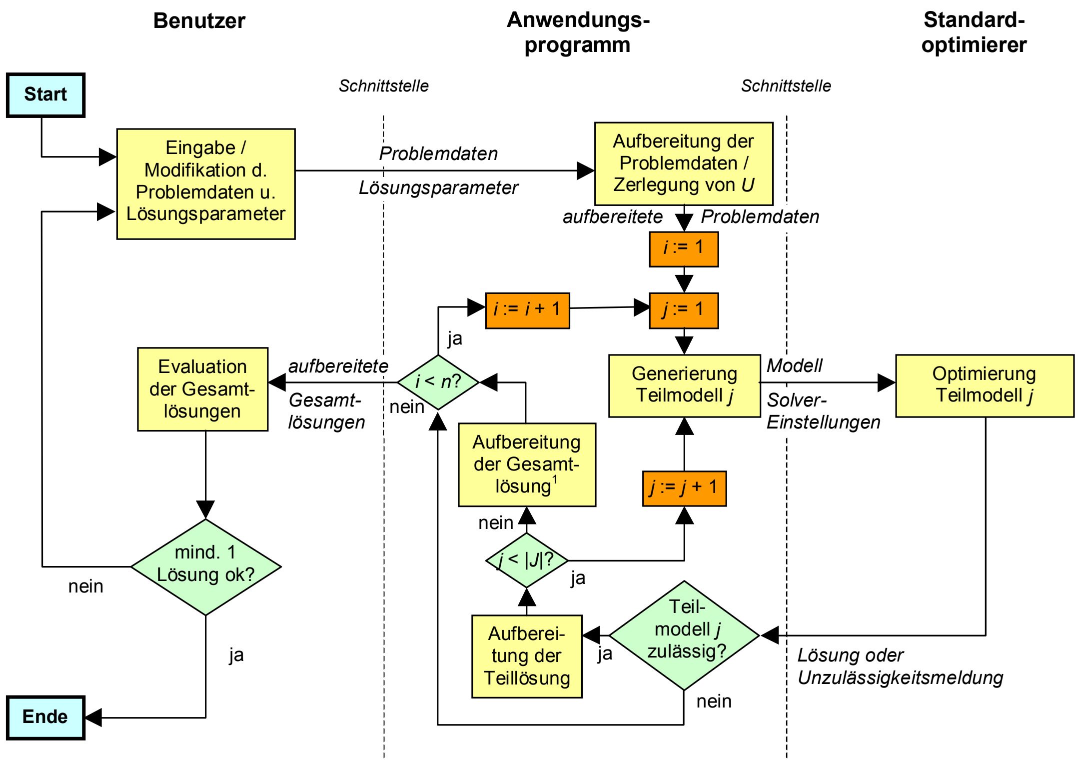
1. Welche Unterrichtseinheiten sind als besonders schwierig einzuschätzen und daher in der Prioritätsphase „vorab“ zu setzen?
2. Wieviele Teilmodelle sollen für die Prioritätsphase definiert werden?
3. Wieviele Teilmodelle sollen für die Klassenphase definiert werden?

4. Welche Klassen sollen den einzelnen Teilmodellen der Klassenphase und der damit jeweils verbundenen Position in der Lösungssequenz zugeordnet werden?

Eine einheitliche Regel, nach der diese Fragen für alle Praxisfälle einheitlich zu klären sind, ist nicht sinnvoll definierbar. Es ist jedoch darauf zu achten, dass die Anzahl der Teilmodelle nicht zu hoch ist, da das Risiko der Unzulässigkeit des jeweils letzten Teilmodells in der Sequenz mit dem Anteil der Unterrichtseinheiten, die bereits in den vorgelagerten Teilmodellen gesetzt wurden, ansteigt. Werden andererseits zu wenige Teilmodelle gebildet, so sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass die Modellsequenz innerhalb einer akzeptablen Laufzeit einen Stundenplan hervorbringen kann. Für den Spezialfall, dass nur ein einziges „Teilmodell" gebildet wird, welches sämtliche Unterrichtseinheiten der Unterrichtsverteilung enthält, ist der SeMIP-Ansatz mit dem ToMIP-Ansatz identisch.

Ein vereinfachtes Schema des Zusammenwirkens von Benutzer, Anwendungsprogramm und Standard-Optimierungssoftware bei der Umsetzung des SeMIP-Ansatzes gibt Abbildung 4.4.

Abbildung 4.4: Lösungsprozess auf Basis des SeMIP-Ansatzes
(vereinfachtes Schema)



Erläuterungen:
U := Menge aller Unterrichtseinheiten
n := vorgegebene Anzahl der SeMIP-Iterationen
J := Menge aller Teilmodelle
i := Iterationszähler
j := Modellzähler

Anmerkung:
[1] inkl. Raumzuordnung innerhalb der Raumgruppen

Wie bei der Darstellung des HiMIP-Ansatzes (vgl. Abbildung 4.2) wird ein idealtypischer Prozessablauf unterstellt, in dem für das eingegebene Problem eine zulässige Gesamtlösung existiert und die Optimierungssoftware in der Lage ist, innerhalb der jeweils durch den Benutzer vorgegebenen Laufzeitbegrenzung für jedes Teilmodell eine zulässige Lösung aufzufinden, sofern es diese gibt.

Wie bereits der HiMIP-Ansatz ist auch die SeMIP-Dekomposition mit einem Verlust der Zulässigkeits- und Optimalitätsgarantie verbunden. Um das Risiko eines Scheiterns des Lösungsprozesses zu verringern, ist daher auch hier die Möglichkeit einer mehrfachen Iteration der Modellsequenz mit unterschiedlichen Modell- bzw. Parametervorgaben zu schaffen. Als Ansatzpunkt hierfür wird in Analogie zum HiMIP-Ansatz eine zufallsabhängige Definition der Zielfunktion für den Einsatz in der Prioritätsphase verwendet.

4.4.2 Modellformulierung

4.4.2.1 Vorbemerkungen

Die Teilmodelle des SeMIP-Ansatzes sind in ihrer Struktur untereinander identisch. Ebenso gilt, bis auf wenige Modifikationen, eine Gleichheit zwischen der SeMIP-Modellstruktur einerseits und der ToMIP-Modellstruktur andererseits. Für beide Ansätze werden dieselben Mengen-, Parameter- und Variablenbezeichnungen, dieselben Restriktionstypen und, mit Ausnahme der zufallsabhängigen Variante für die SeMIP-Prioritätsphase, dieselbe Zielfunktion verwandt. Dies gilt für die Basisversion des jeweiligen Modells ebenso wie für seine Erweiterungen zum Zwecke der Relaxation und für seine Vereinfachung durch die Einführung von Kernzeiten. Aus diesem Grunde wird nachfolgend nicht die gesamte SeMIP-Modellformulierung ausführlich vorgestellt, sondern es werden nur die Abweichungen erläutert, die gegenüber dem ToMIP-Modell bestehen. Für die Formulierung der unveränderten Modellkomponenten und die Erklärung der gebrauchten Bezeichnungen sei an dieser Stelle auf die Darstellung des ToMIP-Modells in Abschnitt 4.2.2 verwiesen. Eine eigenständige tabellarische Zusammenfassung der SeMIP-Modellstruktur findet sich in Anhang 8.2.3.

Unterschiede der SeMIP-Teilmodelle gegenüber dem ToMIP-Gesamtmodell ergeben sich in zweierlei Hinsicht. Zum einen führt die Einschränkung der Menge U der im Modell berücksichtigten Unterrichtseinheiten auf nur eine Teilmenge aller zu setzenden Unterrichtseinheiten zu einer starken Reduktion der Modellgröße. Zum anderen bedarf es zumindest für die Prioritätsphase einer alternativen Formulierung der Zielfunktion, um eine Variation des Lösungspfades bei Wiederholung der SeMIP-Lösungssequenz sicherzustellen. Beide Unterschiede sollen im Folgenden näher erläutert werden.

4.4.2.2 Modellreduktion durch Teilung der Unterrichtseinheitseinheitenmenge

Die gegenseitige Abgrenzung der Teilmodelle im Rahmen des SeMIP-Ansatzes erfolgt über die Festlegung der Menge U der jeweils berücksichtigten Unterrichtseinheiten. Diese besteht für jedes Teilmodell der Lösungssequenz aus zwei Teilmengen:

1. der Menge U^{Fix} aller Unterrichtseinheiten, die über vorgelagerte Teilmodelle der SeMIP-Lösungssequenz bereits gesetzt wurden und nicht mehr verschoben werden dürfen. Sie sind durch entsprechende Fixierungen im aktuellen Teilmodell zu berücksichtigen. Sofern keine Relaxation dieser Fixierungen vorgesehen ist, müssen Zuordnungsvariablen für jede Einheit $u \in U^{Fix}$ nur für solche Perioden definiert werden, in denen eine Sitzung von u beginnen soll. Diese Modellvereinfachung lässt sich durch eine Einschränkung der Mengen P_{udt}^{ok} der für Sitzungen der Dauer d der Einheit u an Tag t erlaubten Startperioden in der Form

$$P_{udt}^{ok} \quad := \{p \in P\colon fix(u, d, t, p) = 1\}; \qquad \forall\ u \in U^{Fix}, d \in D_u, t \in T$$

abbilden. Dies führt zu einer Reduktion der Variablenzahl, da die Entscheidungsvariablen

$$x_{udtp} \ := \begin{cases} 1 & \text{eine Sitzung mit Dauer } d \text{ der} \\ & \text{Unterrichtseinheit } u \text{ beginnt in} \\ & \text{Periode } p \text{ des Planungstages } t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}; \qquad \forall\ u \in U, d \in D_u, t \in T, p \in P_{udt}^{ok}$$

nur für erlaubte Startperioden $p \in P_{udt}^{ok}$ definiert sind.

Für das erste Teilmodell der Lösungssequenz gilt, sofern benutzerseitig keine manuellen Fixierungen vorgegeben sind: $U^{Fix} = \varnothing$.

2. der Menge $U \setminus U^{Fix}$ aller noch ungesetzten Unterrichtseinheiten, die entsprechend den Benutzervorgaben mit Hilfe des aktuellen Teilmodells gesetzt werden sollen.

Die Einbeziehung von U^{Fix} in die Menge U des aktuellen Teilmodells ist erforderlich, um Setzungen zu vermeiden, die den Lösungen vorgelagerter Teilmodelle widersprechen. Unterrichtseinheiten, die erst in späteren Teilmodellen zu setzen sind, werden hingegen nicht in U integriert und bleiben im aktuellen Teilmodell völlig unbeachtet. Dieser Umstand kann insbesondere zu Beginn einer Lösungssequenz dazu führen, dass einzelne Klassen, Lehrer oder Raumgruppen durch das aktuelle Modell überhaupt nicht betroffen sind, da keine der Unterrichtseinheiten, in die sie involviert sind, in das Modell eingeht. In diesem Falle können die Mengen der Klassen, Lehrer und Raumgruppen entsprechend reduziert werden, was eine weitere Verkleinerung des Modells mit sich bringt. Erst für das letzte Teilmodell in der Sequenz gilt, dass U die gesamte Unterrichtsverteilung umfasst, doch ist in diesem Stadium ein Großteil der Unterrichtseinheiten bereits fixiert, so dass auch dieses letzte Teilmodell gegenüber dem ToMIP-Gesamtmodell deutlich vereinfacht ist.

4.4.2.3 Alternative Zielfunktion

Um bei mehrfacher Iteration der SeMIP-Modellsequenz einen Wechsel des Lösungspfades zwischen den Iterationen zu ermöglichen, wird für die Teilmodelle der Prioritätsphase eine zufallsabhängige Zielfunktion verwandt, welche die im Zusammenhang des ToMIP-

Modells definierte Version ersetzt. Letztere wird nur in der Klassenphase eingesetzt. Gründe für die Bevorzugung der Zielfunktion als Ansatzpunkt einer Beeinflussung des Lösungsprozesses wurden bereits im Zusammenhang mit der Einführung des HiMIP-Ansatzes erläutert (vgl. Abschnitt 4.3.1). Die Skepsis, welche dort gegenüber der Eignung alternativer Ansatzpunkte geäußert wurde, wird im Falle des SeMIP-Ansatzes durch das nachfolgend erläuterte Argument ergänzt, welches für die Prioritätsphase die Nutzung der Zielfunktion in der Weise, die durch die Struktur des ToMIP-Modells vorgegeben ist, fragwürdig erscheinen lässt.

Die ToMIP-Zielfunktion strebt nach einem frühen Unterrichtsbeginn für Klassen, einer Minimierung der Springstundenzahl für Lehrer und einer ausreichenden Vertretungsbereitschaft in jeder Planungsperiode (vgl. Abschnitt 4.2.2.5). In der Prioritätsphase der SeMIP-Lösungssequenz kann jedoch das Ziel des frühen Unterrichtsbeginns für Klassen kontraproduktiv wirken, da es bewirkt, dass die Sitzungen der wenigen in dieser Phase zu verplanenden Unterrichtseinheiten größtenteils in frühe Planungsperioden gelegt werden, obwohl möglicherweise eine größere Streuung über verschiedene Tageszeiten gewünscht ist. Diese Problematik wirkt umso stärker, als gerade in den Teilmodellen der Prioritätsphase noch keine oder wenige Fixierungen vorhanden sind, die eine breitere Streuung der Sitzungen über den Tag erzwingen könnten. Die Ziele der Minimierung der Springstundenzahl für Lehrer und einer hohen Vertretungsbereitschaft hingegen sind nur von schwacher Relevanz, da in der Prioritätsphase insgesamt und bezogen auf jeden einzelnen Lehrer nur wenige Unterrichtseinheiten zu setzen sind. Aus diesem Grunde kann die Zielfunktion in der Prioritätsphase ohne Risiko eines signifikanten Qualitätsverlustes hinsichtlich der Gesamtlösung der SeMIP-Modellsequenz für die Manipulation des Lösungspfades verwendet werden.

Die zufallsabhängige Gestaltung der Zielfunktion ist, analog zur Vorgehensweise im Rahmen des HiMIP-Wochenmodells (vgl. Abschnitt 4.3.2.5), mit Hilfe randomisierter Zielfunktionskoeffizienten zu realisieren. Sind hierzu als zusätzliche Modellparameter

$zz(u, d, t, p)$:= zufällig erzeugter Zielfunktionskoeffizient, wobei $zz(u, d, t, p) \in \{1, 2\}$; $\forall\ u \in U \setminus U^{Fix}, d \in D_u, t \in T, p \in P^{ok}_{udt}$

mit

$prob(2)$:= Wahrscheinlichkeit, dass $zz(u, d, t, p)$ für ein beliebiges $u \in U^{Fix}, d \in D_u, t \in T$ und $p \in P^{ok}_{udt}$ den Wert 2 annimmt, wobei $0 \leq prob(2) \leq 1$

definiert, dann lässt sich die zufallsabhängige Zielfunktion durch die Vorschrift

$$\text{minimiere} \sum_{u \in U \setminus U^{Fix}} \sum_{d \in D_u} \sum_{t \in T} \sum_{p \in P^{ok}_{udt}} zz(u,d,t,p) \cdot x_{udtp} \qquad \text{(SeMIP-Ziel-ZZ)}$$

beschreiben. Die Bestimmung der $zz(u, d, t, p)$ erfolgt dabei direkt vor oder während der Generierung des jeweiligen Modells. Die Wahl der Zahlen 1 und 2 als alternative Werte für die $zz(u, d, t, p)$ ist rein willkürlich bestimmt. Sie ist für den Lösungsprozess unerheblich, da das Optimierungsprogramm unabhängig von der konkreten Ausprägung dieser beiden Alternativen stets versuchen wird, so wenige Variablen x_{udtp} mit hohem $zz(u, d, t, p)$ wie möglich auf den Wert 1 zu setzen. Die relaxierte Version der zufallsabhängigen Zielfunktion ist durch die folgende Formulierung gegeben:[45]

$$\begin{aligned}
\text{minimiere} \quad & \sum_{u \in U \setminus U^{Fix}} \sum_{d \in D_u} \sum_{t \in T} \sum_{p \in P_{udt}^{ok}} zz(u,d,t,p) \cdot x_{udtp} \\
& + w_{DUV}^{Relax} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{f \in F_k} du_{kf}^{Relax} \qquad + w_{Rd}^{Relax} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{u \in U_k^{Rd}} \sum_{d \in D_u} \sum_{t \in T} rs_{udt}^{Relax} \\
& - w_{Fix}^{Relax} \cdot \sum_{u \in U} \sum_{d \in D_u} \sum_{t \in T} \sum_{\substack{p \in P_{udt}^{ok}: \\ fix(u,d,t,p)=1}} x_{udtp} \qquad + w_{WzK}^{Relax} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} wzk_{ktp}^{Relax} \\
& + w_{WzL}^{Relax} \cdot \sum_{l \in L} \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} wzl_{ltp}^{Relax} \qquad + w_{LFT}^{Relax} \cdot \sum_{l \in L} lf_l^{Relax} \\
& + w_{Dop}^{Relax} \cdot \sum_{\substack{u \in U: \\ \{2\} \in D_u}} \sum_{t \in T} \sum_{p \in P_{u2t} \cap P^{gP}} x_{u2tp} \qquad + w_{Tlg}^{Relax} \cdot \sum_{u \in U^{Tlg}} \sum_{t \in T} ts_{ut}^{Relax} \\
& + w_{UKt}^{Relax} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} ukt_{kt}^{Relax} \qquad + w_{OKt}^{Relax} \cdot \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} okt_{kt}^{Relax} \\
& + w_{LeSS}^{Relax} \cdot \sum_{l \in L} lss_l^{Relax}
\end{aligned} \qquad \text{(SeMIP-Ziel-ZZ-R)}$$

45 Für die Erläuterung der Relaxationen vgl. Abschnitt 4.2.2.6.