Anhang I: Grundelemente der Fuzzy-Logik

Die Fuzzy-Logik stellt einen wesentlichen methodischen Baustein der Syndromanalyse und insbesondere der Diagnose typischer nicht-nachhaltiger Kausalmechanismen der Mensch-Umwelt-Beziehungen dar. Einige Elemente dieser relativ jungen Methode (Zadeh 1965; Zimmermann 1993, Böhme 1993; Kruse et al. 1993) werden in verschiedenen Abschnitten dieser Dissertation immer wieder genutzt und sollen daher hier kurz und in einheitlicher Notation zusammenfassend vorgestellt werden.

Es gibt zahlreiche Anwendungen der Fuzzy-Logik, die sich ihrerseits wiederum in verschiedene Teilgebiete aufschlüsselt. Im Folgenden wird speziell die im Zusammenhang mit dem Syndromkonzept häufig genutzte Fuzzy-Mengen-Theorie vorgestellt. Diese Theorie wird am häufigsten bei der Dispositions- und Intensitätsbestimmung für ein Syndrom X genutzt, indem Zugehörigkeitswerte zu der Menge der für dieses Syndrom anfälligen oder von diesem Syndrom betroffenen Regionen bestimmt werden. Die Tatsache, dass diese Menge nicht scharf spezifiziert werden kann, also z. B. durch die Bedingung *„Zahl der Bäume pro Quadratkilometer kleiner 5 m“* und *„Durchschnittsalter der ortsansässigen Menschen größer 25.7 Jahre“*, empfiehlt die Verwendung von Fuzzy-Methoden. Dementsprechend werden keine Zugehörigkeitswerte *„ja“* oder *„nein“*, sondern ein kontinuierlicher Wert $\mu \in [0,1]$ angenommen. Dieser Zugehörigkeitswert kann in der Form eines *„eher ja“* oder *„eher nein“*, bzw. den verschiedensten Feinabstufungen dazwischen interpretiert werden. Ausgehend von den vorliegenden quantitativen Daten ist die Bewertung hinsichtlich dieser Zugehörigkeit in mehreren Schritten durchzuführen, die im Folgenden in der in den Einzelabschnitten verwendeten Notation beschrieben werden.

Fuzzyfizierung:

Im ersten Schritt müssen die quantitativen Daten $\varphi_i, i = 1,2,3,...,N$ jeweils auf Zugehörigkeitswerte für verschiedene Mengen F_i abgebildet werden. Im Allgemeinen kann man die Mengen F_i durch einfache logische Klauseln spezifizieren (Extensionalitätsprinzip). So kann man sich unter φ_1 z. B. die Tagesmitteltemperatur an einem Ort vorstellen und unter F_1 die Menge der *„warmen* Tage“. Um dann eine Temperatur von 22.3°C im Hinblick auf diese Menge einordnen zu können wird eine Zugehörigkeitsfunktion $\mu(\varphi_1, F_1)$ definiert. Die in dieser Arbeit am häufigsten genutzten sind:

$$R_+(\varphi;\phi^1,\phi^2) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \varphi < \phi^1 \\ \dfrac{\varphi - \phi^1}{\phi^2 - \phi^1} & \text{wenn } \phi^1 \le \varphi \le \phi^2 \\ 1 & \text{wenn } \varphi > \phi^2 \end{cases} \qquad \text{Gleichung 36}$$

und

$$R_-(\varphi;\phi^1,\phi^2) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \varphi < \phi^1 \\ \dfrac{\phi^2 - \varphi}{\phi^2 - \phi^1} & \text{wenn } \phi^1 \le \varphi \le \phi^2 \\ 0 & \text{wenn } \varphi > \phi^2 \end{cases} \qquad \text{Gleichung 37}$$

Diese Zugehörigkeitsfunktionen stellen einfache Rampenfunktionen dar (Abbildung 43), die jeweils von zwei Parametern ϕ^1 und ϕ^2 abhängen. Mit Ausnahme der Fuzzyfizierung der Erreichbarkeit (Kap. 5.1, 5.2) wurden diese einfachen Rampenfunktionen für die Generierung der Zugehörigkeitsmengen der linguistischen Variablen verwendet.

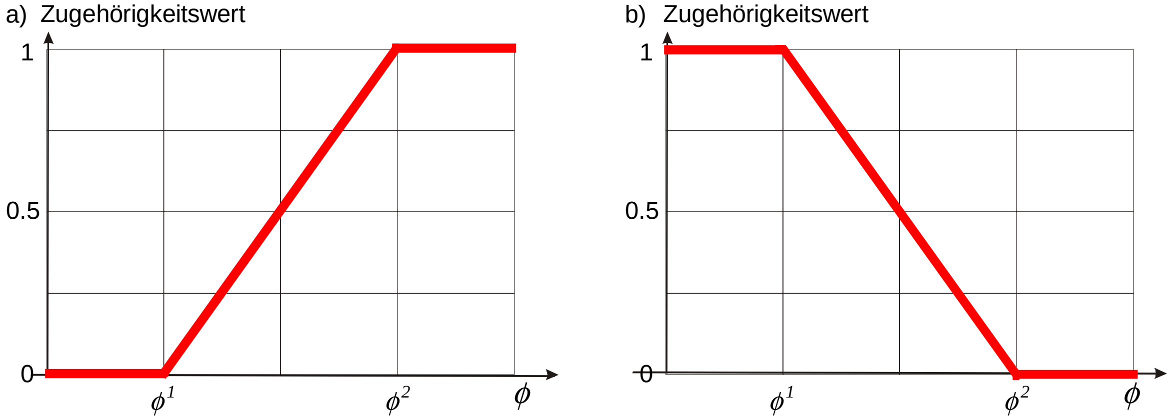


Abbildung 43: Zugehörigkeitsfunktionen

Häufig ist es aber darüber hinaus wünschenswert, nicht-monotone Abbildungsfunktionen zu verwenden, also solche, bei denen Zugehörigkeitswerte ungleich Null nur für eine endliches Intervall der quantitativen Größe φ auftreten. Dieses trapezförmige Funktion

$$T(\varphi;\phi^1,\phi^2,\phi^3,\phi^4) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \varphi < \phi^1 \\ \dfrac{\varphi-\phi^1}{\phi^2-\phi^1} & \text{wenn } \phi^1 \le \varphi < \phi^2 \\ 1 & \text{wenn } \phi^2 \le \varphi < \phi^3 \\ \dfrac{\phi^4-\varphi}{\phi^4-\phi^3} & \text{wenn } \phi^3 \le \varphi < \phi^4 \\ 0 & \text{wenn } \phi^4 \ge \varphi \end{cases} \qquad \text{Gleichung 38}$$

wird durch vier Parameter ϕ^i, $i = 1,\ldots 4$ bestimmt.

Die verschiedenen Parameter ϕ^i müssen wiederum aus Einzelstudien und mit Hilfe von Referenzfällen gewonnen werden, wobei auch Experteneinordnungen dienlich sind. Dabei muss aus den Studien selbst eine Menge von realen Fällen für die Aussage F entnommen und dann mit der Fuzzyfizierung der entsprechenden quantitativen Daten verglichen werden.

Zur Verdeutlichung wird nochmals die Aussage „*warmer* Tag“ mit dem zu Grunde liegenden quantitativen Datum *Tagesmitteltemperatur* untersucht. Die Kategorie „*warm*“ ist dabei nach unten gegenüber der Bewertung „*kalt*“ und nach oben gegenüber der Klasse der „*heißen*“ Tage abzugrenzen. In diesem Fall bietet sich die Nutzung der Trapezfunktion T an. Als „auf jeden Fall *warm*“ würde man Tage mit Mitteltemperaturen von etwa 18°C - 25°C einordnen, womit ϕ^2= 18°C und ϕ^3= 25°C ist. Als „in jedem Fall nicht mehr *warm*“ werden Tage mit Mitteltemperaturen unterhalb von 15°C und oberhalb von 28°C und somit ϕ^1 = 15°C und ϕ^4= 28°C betrachtet. In diesem Fall würde die Zugehörigkeitsfunktion durch

$$\mu(\varphi_1, F_1) = T(\varphi_1, 15°C, 18°C, 25°C, 28°C) \qquad \text{Gleichung 39}$$

spezifiziert werden und ist in Abbildung 44 dargestellt.

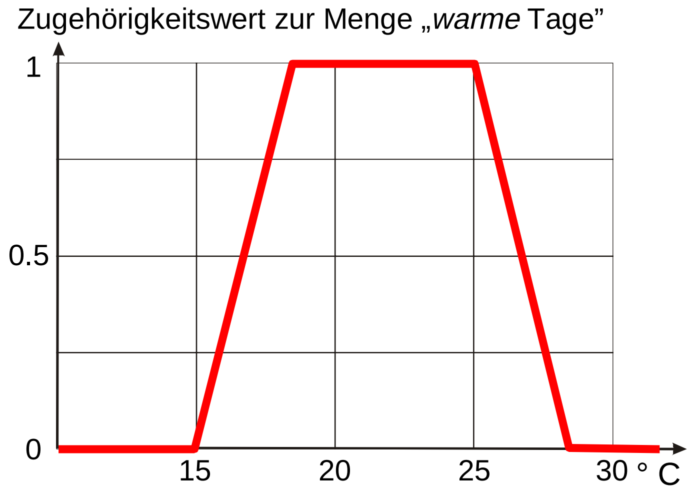


Abbildung 44: Trapezförmige Zugehörigkeitsfunktion für die Menge der *„warmen* Tage“.

Operatoren

Im zweiten Anwendungsgebiet der Fuzzy-Logik im Syndromkonzept werden logische Operatoren genutzt um aus den Zugehörigkeitswerten zu den Mengen mit einfachen Klauseln wie etwa *„warmer* Tag“ oder *„feuchter* Tag“ die Werte für Aussagen wie „*warmer* und *feuchter* Tag“, bzw. *„warmer* oder *feuchter* Tag“ zu berechnen.

Bei einer rein booleschen Auswertung sind die formalen Aspekte der Operatoren UND und ODER eindeutig bestimmt: Eine UND-Aussage ist nur dann wahr, wenn *beide* Aussagen wahr sind. Entsprechendes gilt für das ODER. Eine graphische Darstellung der grundlegenden booleschen Verschneidungsoperationen ist in Abbildung 45 dargestellt.

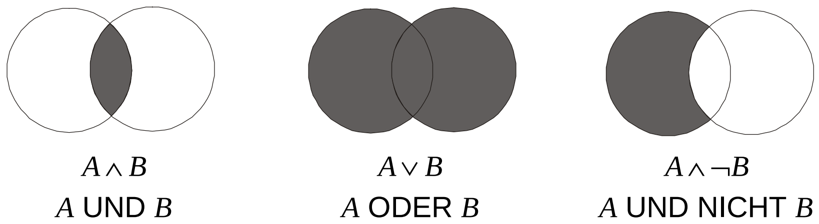


Abbildung 45: Venn-Diagramm für einfache boolesche Verschneidungsoperationen.

Im Falle der Fuzzy-Logik ist die Sache nicht so eindeutig. Es ist gerade eine der Grundideen der Fuzzy-Logik auch unscharfe Aussagen modellieren zu können, wie sie menschlichen Bewertungen häufig zu Grunde liegen. So ist etwa die *„Kompensation“* eine solche Eigenschaft: Sollte also der Zugehörigkeitswert zur Menge der *„warmen* Tagen“ bei 0.8 liegen, hier wird auch oft vom Wahrheitswert 0.8 für die Aussage *„warmer* Tag“ gesprochen, und an zwei verschiedenen Orten der Wahrheitswert für *„feucht“* bei 0.3 bzw. 0.7 liegen, so würde die Intuition letzterem Fall eine höher Zugehörigkeit zur Menge der *„warmen* und *feuchten* Tage“ zuweisen. Die Abbildbarkeit dieser Art der Intuition gehört zu den Stärken der Fuzzy-Logik und wird auch in den Entscheidungsbäumen für Syndromdispositionen und -intensitäten genutzt. Die Fuzzy-Logik stellt verschiedene Auswerteverfahren für die logischen Operatoren UND und ODER zu Verfügung, deren boolescher Grenzfall, so existent, das entsprechende boolesche Ergebnis liefern muss. Die für diese Arbeit notwendigen Operatoren werden im folgenden kurz vorgestellt, wobei die Operatoren immer in Paaren auftreten (Zimmermann 1993, Böhme 1993; Kruse et al. 1993). Dabei werden zwei einfache Klauseln X und Y, sowie deren Wahrheitswerte $\mu(X)$ und $\mu(Y)$ betrachtet.

Minmax-Operatoren

Hierbei handelt es sich um vollständig nicht-kompensatorische Operatoren:

$$\mu(X \wedge Y) = \min\{\mu(X), \mu(Y)\} \qquad \text{Gleichung 40}$$

für das logische UND und

$$\mu(X \vee Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\} \qquad \text{Gleichung 41}$$

für das logische ODER.

Für beide Operatoren gilt das Assoziativgesetz, so dass Kombination mehrerer Aussagen wiederum durch Minimums- oder Maximumsbildung problemlos möglich sind. Operatoren dieser Klasse werden immer dann verwendet, wenn keinerlei kompensatorische oder komperative Eigenschaften der Konjunktion bzw. Disjunktion nötig sind. Zur Veranschaulichung sind diese Funktionen graphisch in Abbildung 46 dargestellt.

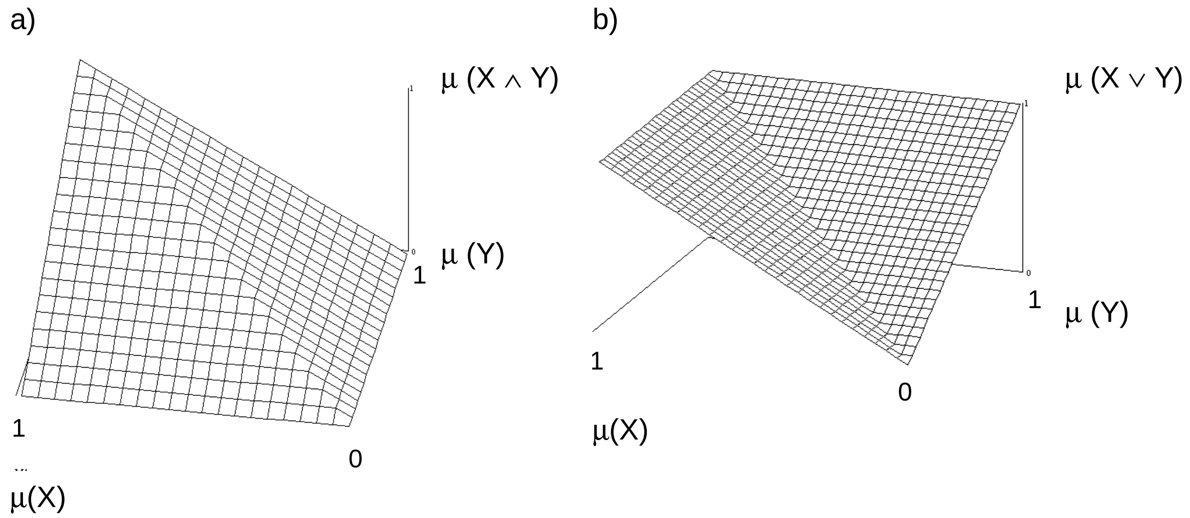


Abbildung 46: Nicht-kompensatorische min-max-Operatoren. Zur Abbildung der UND-Verknüpfung wird das Minimum (a), für das logische ODER das Maximum (b) verwendet.

Lukasievicz-Operatoren

Eine gleichgewichtige Kompensation, bzw. Komparation, haben die sog. *Lukasievicz-Operatoren*. Dabei ist der jeweilige Ausgleich jedoch nicht über den gesamten Definitionsbereich der beiden Variablen gültig, sondern verlangt im Falle des UNDs einen ausreichend großen Wahrheitswert beider Klauseln, bzw. für das ODER tritt die Komperation nur bei hinreichend kleinen Wahrheitswerten auf. Formal werden die Operatoren als

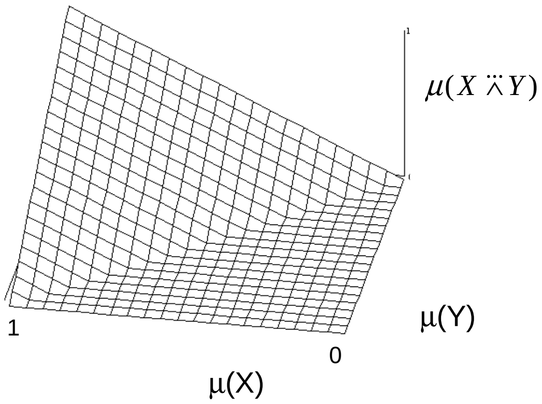
$$\mu(X \ddot{\wedge} Y) = \max\{0, \mu(X) + \mu(Y) - 1\} \qquad \text{Gleichung 42}$$

für das UND und

$$\mu(X \ddot{\vee} Y) = \min\{\mu(X) + \mu(Y), 1\} \qquad \text{Gleichung 43}$$

für das ODER beschrieben. Zur Veranschaulichung ist die graphische Repräsentation des Lukasievicz-UND in Abbildung 47 dargestellt.

Abbildung 47: UND-Verknüpfung nach Lukasievicz ($\ddot{\wedge}$).



Fuzzy-Operatoren

Eine umfassendere Kompensation ist mit Hilfe des Fuzzy-UND, bzw. Fuzzy-ODER Operators möglich. Im Gegensatz zur Formulierung nach Lukasievicz erstreckt sich die Kompensation hier über den gesamten Bereich. Weiterhin ist hier der Grad der Kompensation mit Hilfe eines Parameters *$\gamma \in [0,1]$* einstellbar. Die Operatoren für Variablen bzw. Aussagen können als

$$\mu(x_1 \tilde{\wedge} x_2 \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} x_n) = \gamma \cdot \min\{\mu(x_1), \mu(x_2), \ldots, \mu(x_n)\} + (1-\gamma)\tfrac{1}{n}\sum_{k=1} \mu(x_k) \qquad \text{Gleichung 44}$$

bzw.

$$\mu(x_1 \tilde{\vee} x_2 \tilde{\vee} \ldots \tilde{\vee} x_n) = \gamma \cdot \max\{\mu(x_1), \mu(x_2), \ldots, \mu(x_n)\} + (1-\gamma)\tfrac{1}{n}\sum_{k=1} \mu(x_k) \qquad \text{Gleichung 45}$$

formuliert werden. Für $\gamma = 1$ ergeben sich die bereits vorgestellten min-max-Operatoren, während für $\gamma = 0$ jeweils das arithmetische Mittel bestimmend ist. Somit wächst mit abnehmenden Werten von γ die Kompensation.

Der γ-Operator

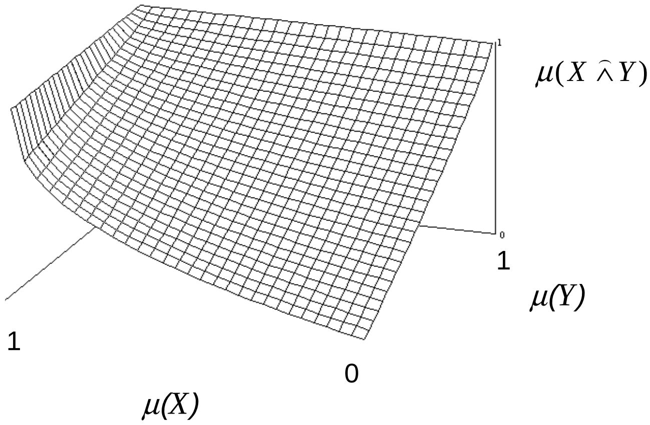
Dies ist der wohl bekannteste Fuzzy-Operator. Empirische Studien haben gezeigt, dass er am ehesten das *„menschliche UND“* abzubilden in der Lage ist. Auch hier gibt es einen Kompensationsparameter *$\gamma \in [0,1]$*, der das Gewicht zwischen dem eingehenden ODER ($\gamma = 1$) und dem entsprechenden UND-Operator ($\gamma = 0$) darstellt. In seiner allgemeinsten Form wird der Operator mit zwei weiteren Gewichten δ_1 und δ_2, die eine Asymmetrie zwischen den beiden Variablen abzubilden erlauben, formuliert:

$$\mu(X \hat{\wedge} Y) = \left\{1 - (1-\mu(X))^{\delta_1} \cdot (1-\mu(Y))^{\delta_2}\right\}^{\gamma} \cdot \left\{\mu(X)^{\delta_1} \cdot \mu(Y)^{\delta_2}\right\}^{(1-\gamma)}. \qquad \text{Gleichung 46}$$

Die Parameter δ_i und γ müssen wieder mit Hilfe von Fall-, bzw. Expertenwissen bestimmt werden, d. h. die Ergebnisse der formalen Analyse müssen mit einzelnen Beispielen abgeglichen werden. Unter Umständen kann es sich dabei als vorteilhaft erweisen, erst ein mögliches Endresultat einer vollständigen fuzzy-logischen Analyse zum Vergleich zu nutzen.

Zur Veranschaulichung ist der γ-Operator für den Parametersatz, $\gamma = 1$, $\delta_1 = 0.85$ und $\delta_2 = 0.4$, in Abbildung 48 dargestellt.

Abbildung 48: Darstellung des γ-Operators mit Parametern $\gamma = 1$, $\delta_1 = 0.85$ und $\delta_2 = 0.4$: Der Wahrheitswert der Aussage Y wird höher bewertet als der der Variable X.



Der $K_{0.5}$ Operator

Eine spezielle Form des γ-Operators ist der min-max-Kompensationsoperator. Dieser K_γ-Operator beschreibt das menschliche Verhalten Kompromisse einzugehen. Auch er enthält sowohl Minimum als auch Maximum Operationen, die je nach Situation mehr zu einem UND, für γ-Werte nahe 0, oder zu einem ODER, für γ-Werte nahe 1, gewichtet werden können.

$$K_\gamma(X,Y) = \mu(X \hat{\wedge} Y) = [\min\{\mu(X,Y)\}]^{1-\gamma} \cdot [\max\{\mu(X,Y)\}]^{\gamma} \qquad \text{Gleichung 47}$$

Für einen für γ-Wert von 0.5 liefert der Operator das geometrische Mittel aus Minimal- und Maximalwert.

$$K_{0.5}(X,Y) = \mu(X \hat{\wedge} Y) = \sqrt{\mu(X) \cdot \mu(Y)} \qquad \text{Gleichung 48}$$

Der $K_{0.5}$-Operator drückt aus, dass in den Kombinationen zweier Parameter schon die positive Bewertung einer Komponente für Zugehörigkeit zur Aussagenmenge ausreicht. Eine graphische Darstellung diese Operators ist in Abbildung 49 gegeben.

Abbildung 49: Darstellung eines min-max-Kompensationsoperator K_γ, mit $\gamma = 0.5$.