Kapitel 6

Die Zweifelhaftigkeit der Gebrauchsthese in Dummetts Lesart

Das Ziel dieses zweiten Teils ist mit der vorangegangenen Argumentation bereits erreicht; mit ihr ist die Gebrauchsthese$_d$, also die Annahme der Entwickelbarkeit einer Bedeutungstheorie$_d$ in erheblichen und wohlbegründeten Zweifel gezogen.

Das soll in diesem sechsten Kapitel deutlich werden. Ferner will ich auf zwei weitere Probleme neben dem der Vermeidung des strikten Finitismus aufmerksam machen, die sich im Rahmen des Projekts der Entwicklung einer Bedeutungstheorie$_d$ mit Blick auf die Mathematik stellen würden und die den im vorigen Kapitel geweckten Zweifel an der Durchführbarkeit dieses Projekts noch um einiges verstärken.

6.1 Das strikt-finitistische Normativitätsargument als Quasi-Reductio der These

Die Gleichsetzung mathematischer Wahrheit mit *praktischer* Beweisbarkeit ist völlig inakzeptabel – ganz gleich, welchen Beweisbegriff man dabei zugrundelegt. In dieser Einschätzung sind sich die allermeisten Philosophen der Mathematik einig. Wright macht sich also zum Außenseiter, wenn er in Auseinandersetzung mit Dummetts

Fundamental-Kritik in *Wang's Paradox*[1] des strikten Finitismus diesen verteidigt – in seinem Aufsatz *Strict Finitism*, der wie folgt endet:

> The points I hope to have made plausible are: [...] that strict finitism remains the natural outcome of the anti-realism which Dummett has propounded by way of support for the intuitionist philosophy of mathematics [...] and that there is no extant compelling reason to suppose that [as Dummett claims] its involvement with predicates of surveyability calls its coherence into question. The correct philosophical assessment of strict finitism, and its proper mathematical exegesis, remain absolutely open, almost virgin issues. This is not a situation which philosophers of mathematics should tolerate very much longer. (S. 166)

Vielleicht hat ja Wright recht damit, daß nicht ohne weiteres auszuschließen ist, daß sich mathematische Wahrheit kohärentermaßen mit praktischer Beweisbarkeit identifizieren läßt. Außer Frage steht aber, daß diesbezüglich gehörige Skepsis angebracht ist. Somit sprechen das strikt-finitistischen Pendant des Manifestations- und das des Normativitätsarguments indirekt gegen die Gebrauchsthese$_d$ – diese hätte ja gemäß den beiden eben die Konsequenz der Identität mathematischer Wahrheit mit praktischer Beweisbarkeit.

Nun treffen offenbar die in 2.2 gegen das Manifestationsargument vorgebrachten Einwände das strikt-finitistische Manifestationsargument genauso wie jenes. Solange die Einwände nicht entkräftet sind, ist also festzuhalten: Das strikt-finitistische Manifestationsargument ist ebensowenig überzeugend wie das Manifestationsargument und stellt somit keine Reductio der Gebrauchsthese$_d$ auf die zumindest scheinbare Absurdität der Identität mathematischer Wahrheit mit praktischer Beweisbarkeit dar.

Anders verhält es sich mit dem strikt-finitistischen Normativitätsargument bzw. mit folgender Variante desselben:

Eine $\mathcal{L}$-Bedeutungstheorie$_d$ ist ein bloßes Hirngespinst; sie läßt sich selbst mit noch

[1] Womöglich wird sich mancher Leser später darüber wundern, daß ich auf diesen Aufsatz lediglich in dieser Fußnote eingegangen sein werde – und das auch nur äußerst flüchtig. Schließlich legt die Überschrift des Aufsatzes die Vermutung nahe, daß es Dummett darin gerade darum geht, den Verdacht auszuräumen, seine bedeutungstheoretischen Überlegungen zugunsten des Intuitionismus ließen sich genausogut zugunsten des strikten Finitismus vorbringen.

Der Grund, weshalb ich den Aufsatz dennoch getrost vernachlässigen kann, ist der: Dummett entwickelt darin im wesentlichen *allein* besagte Fundamental-Kritik des strikten Finitismus. Und sollte sich die Kritik denn als stichhaltig erweisen, so wäre damit das Fazit dieses Abschnitts, daß das strikt-finitistische Normativitätsargument eine Quasi-Reductio der Gebrauchsthese$_d$ darstellt, eher noch gestärkt als geschwächt.

so großem Aufwand nicht entwickeln. Sie wäre nämlich nicht nur insbesondere mit der mathematisch-realistischen Grundintuition unvereinbar, sondern auch mit jeglicher anti-realistischer Auffassung mathematischer Wahrheit, dergemäß auch die bloß prinzipielle Beweisbarkeit eines mathematischen Satzes für dessen Wahrheit hinreichend ist. Denn wenngleich wir keine sehr genaue Vorstellung von ihrer Theorie der Kraft haben, so ist doch immerhin klar: Mit den von der Theorie der Kraft gelieferten Sprachspiel-Erklärungen ginge eine Erklärung mathematischer Wahrheit in Form einer Zurückführung der Wahrheit mathematischer $\mathcal{L}$-Sätze auf die Korrektheit von Äußerungen der Sätze einher. Und offenbar müßte gemäß der Erklärung, soll sie in Einklang mit einer nicht-strikt-finitistischen Auffassung mathematischer Wahrheit stehen, gelten: Ein mathematischer $\mathcal{L}$-Satz ist genau dann wahr, wenn er prinzipiell korrekt äußerbar ist; wobei eine Äußerung eines solchen Satzes bei Vorliegen eines Beweises des Satzes korrekt ist. Das hieße aber sicherlich, es gäbe durchaus praktisch verwendbare mathematische $\mathcal{L}$-Sätze, deren Bedeutungen jeweils durch eine Regel mitbestimmt wären, die die $\mathcal{L}$-Sprecher nur prinzipiell befolgen könnten. Und dies ist völlig inakzeptabel.

Wie die Diskussion in 5.2 deutlich gemacht hat, ist diese Überlegung nur durch eine geeignete reduktive Analyse des Regelfolgens zu entkräften, an deren Möglichkeit allerdings stark zu zweifeln ist. Und da, wie gesagt, die Kohärenz des strikten Finitismus, wenn nicht ohne weiteres auszuschließen, so doch ebenfalls stark anzuzweifeln ist, stellt die Überlegung nahezu eine Reductio der Gebrauchsthese$_d$ dar; sie widerlegt diese zwar nicht definitiv, zieht sie aber überzeugend in erheblichen Zweifel.

6.2 Das Problem der Sprachlichkeit von Beweisen

6.2.1 Das Problem in bezug auf intuitionistische Beweise

Wie im strikt-finitistischen Normativitätsargument festgestellt, müßte die Theorie der Kraft z.B. einer $\mathcal{D}$-Bedeutungstheorie$_d$, soll sie in Einklang mit der intuitionistischen Analyse stehen, bedingen: Ein mathematischer $\mathcal{D}$-Satz ist genau dann wahr, wenn er prinzipiell korrekt äußerbar ist; wobei eine Äußerung eines solchen Satzes bei Vorliegen eines i-Beweises des Satzes korrekt ist. Hieran ist, wie gesehen, problematisch, daß die i-Beweise z.B. von $\mathsf{gv}(10^{10^{10}})$ oder von $\ulcorner\neg\,\mathsf{gv}(10^{10^{10}})\urcorner$ unüberschaubar sind. Doch ist dies nicht der einzige problematische Punkt; auf einen weiteren macht Dummett – anscheinend ohne sich dessen bewußt zu sein – in folgender Passage aus *Elements of Intuitionism* aufmerksam:

> Of what sort are the constructions which are supposed to constitute proofs of mathematical statements, in the sense in which 'proof' is used in the intuitive [intuitionistic] explanations of the logical constants? We know that they must be mental constructions: hence they are not to be identified with the formal proofs of any formalized theory. Intuitionists usually say that written proofs are only imperfect representations of the corresponding mental constructions: but, unless we are to acquiesce in a purely solipsistic interpretation of the whole conception, they must be communicable, and, if communicable, to be communicated by means of language. There is therefore no justification for holding that their linguistic representations may, in certain cases, necessarily be imperfect. The important point is not that the mental construction is, as it were, in a different medium from the written proof, but, rather, that the written proof is a proof in the required sense only in virtue of its being couched in an interpreted language: the features which make it genuinely a proof of its conclusion, and effectively recognizable as such, are neither identifiable with nor isomorphic to any of its purely formal characteristics as a complex structure of written signs, but belong to it solely in virtue of the meanings of those signs. We therefore have no reason to expect that any proof of some given statement will be recognizable as such by any means that falls short of demanding a full understanding of the language in which the proof is expressed. (S. 390 f.)

Die gegebene Definition des Begriffs der elementaren Rechnung ist weit davon entfernt, eine streng formale bzw. rein syntaktische zu sein. Es ist jedoch plausibel, daß sie sich mit ein wenig Mühe in eine derartige Definition umwandeln ließe. Das heißt, es darf davon ausgegangen werden, daß sich für einen i-Beweis einer arithmetischen Gleichung die Bedingung des Vorliegens desselben in rein syntaktischen Begriffen fassen läßt. Nach Dummett trifft dies allerdings ganz gewiß nicht auf beliebige i-Beweise zu; seines Erachtens ist ein schriftlicher, konkret gegebener i-Beweis i.a. wesentlich ein *sprachliches*, sich aus *bedeutungsvollen* Ausdrücken zusammensetzendes Objekt. Und in der Tat, angesichts der Klauseln [iB4] und [iB6] erscheint eine rein formale Definition des i-Beweisbegriffs ausgeschloßen. Doch wenn dem so ist, wenn sich also zunächst, d.h. vor einer etwaigen Erklärung von Bedeutung, die Bedingung des Vorliegens eines i-Beweises i.a. nur mithilfe *semantischer* Begriffe festmachen läßt, so könnte die Theorie der Kraft gerade nicht bedingen, daß eine Äußerung eines mathematischen $\mathcal{D}$-Satzes bei Vorliegen eines i-Beweises desselben korrekt ist. Schließlich soll die Theorie der Kraft bzw. die Bedeutungstheorie$_d$ einen entscheidenden Beitrag zu einer solchen Erklärung leisten.

6.2.2 Das Problem in bezug auf intuitionistische Demonstrationen

Damit nicht genug! Wie aus folgender Bemerkung Dummetts in *The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic* hervorgeht, gilt selbst unter der abwegigen Annahme der formalen Definierbarkeit des i-Beweisbegriffs (sowie unter der intuitionistischen Analyse): Die Theorie der Kraft müßte als (hinreichende) Bedingung für die Korrektheit einer Äußerung eines mathematischen $\mathcal{D}$-Satzes eine auszeichnen, die sich offenkundig zunächst nur mithilfe semantischen Vokabulars herausgreifen läßt:

> In the course of a cogent argument for the assertibility of a mathematical statement, [for instance] a disjunction of which we do not possess an actual proof may be asserted, and an argument based upon this disjunction. This argument will not itself be a proof, since any initial segment of a proof must again be a proof: it merely indicates an effective method by which we might obtain a proof of the theorem if we cared to apply it. We thus appear to require a distinction between a proof proper – a canonical proof – and the sort of argument which will normally appear in a mathematical article or textbook, an argument which we may call a 'demonstration'. A demonstration is just as cogent a ground for the assertion of its conclusion as is a canonical proof, and is related to it in this way: that a demonstration of a proposition provides an effective means for finding a canonical proof. But it is in terms of the notion of a canonical proof that the meanings of the logical constants are given. (S. 240)

Die Theorie der Kraft müßte bedingen, daß eine Äußerung eines mathematischen $\mathcal{D}$-Satzes nicht nur bei Vorliegen eines i-Beweises des Satzes korrekt ist, sondern auch bei Vorliegen einer i-„Demonstration“ desselben. Aber der Begriff einer solchen, eines überzeugenden Arguments für die i-Beweisbarkeit eines mathematischen Satzes, eines gewöhnlichen intuitionistischen Beweises, wie er sich in von Intuitionisten herausgegebenen mathematischen Zeitschriften findet, ist ein hochgradig semantischer. Er kann also innerhalb der Theorie der Kraft nicht ohne weiteres als explanatorischer Begriff fungieren; hierzu bedürfte es vielmehr einer Erklärung seiner in nicht-semantischer Begrifflichkeit. Es ist jedoch schlechterdings nicht einmal vage zu erahnen, wie eine solche Erklärung möglich sein sollte, ohne eine vorgängige Erklärung von Bedeutung, zu der ja – um es zu wiederholen – gerade die Theorie der Kraft bzw. die Bedeutungstheorie$_d$ einen entscheidenden Beitrag leisten soll.

6.2.3 Das Problem in bezug auf Demonstrationen allgemein

Diese Überlegung ist offenbar nicht an den i-Beweisbegriff gebunden; welchen Begriff eines Beweises im engen Sinne, eines kanonischen Beweises man auch zugrunde legen mag – sei er formal oder nicht –, die Theorie der Kraft müßte bedingen: Eine Äußerung eines mathematischen $\mathcal{D}$-Satzes ist nicht allein bei Vorliegen eines kanonischen Beweises des Satzes korrekt, sondern auch bei Vorliegen einer Demonstration, eines Beweises des Satzes im weiten Sinne, der zeigt, daß sich der Satz im engen Sinne beweisen ließe.

Das heißt, allgemein, im Rahmen des Projekts der Entwicklung einer Bedeutungstheorie$_d$ würde sich mit Blick auf die Mathematik das Problem einer Erklärung des Begriffs einer Demonstration ohne Verwendung semantischen Vokabulars und ohne Rückgriff auf eine vorgängige Erklärung von Bedeutung stellen. Und dieses Problem ist anscheinend unlösbar. Schließlich sind Demonstrationen bzw. Beweise im weiten Sinne Argumente, denen zwar jeweils ein womöglich rein syntaktisch zu fassender Beweis im engen Sinne entspricht, auf die dies aber allein vermöge der *Bedeutungen* zutrifft, welche die Ausdrücke, insbesondere die Sätze, besitzen, aus denen sie sich (in ihren konkreten Fassungen) zusammensetzen.

6.3 Das Problem des Zusammenhangs zwischen Oberflächen- und Tiefenstruktur arithmetischer Sätze

Die gewiß nicht als bloße Detailprobleme abzutuenden Schwierigkeiten hinsichtlich der Entwicklung einer Bedeutungstheorie$_d$, die ich bisher mit Blick auf die Mathematik beleuchtet habe, betreffen allein die Theorie der Kraft einer solchen Theorie. Liegt das daran, daß beim Versuch der Entwicklung der Semantik einer Bedeutungstheorie$_d$ zumindest die mathematischen Sätze der betreffenden Sprache keine Probleme bereiten würden, an deren Überwindbarkeit ernsthaft zu zweifeln wäre? Keineswegs! Zwar würden die offenkundigsten gravierenden Probleme im Rahmen des Projekts der Entwicklung der Semantik etwa einer $\mathcal{D}$-Bedeutungstheorie$_d$ von nicht-mathematischen $\mathcal{D}$-Sätzen aufgeworfen; z.B. von solchen, die intensionale Kontexte schaffende Ausdrücke wie »glaubt« oder »notwendig« enthalten, oder Quantoren wie »die meisten« oder »nur wenige«. Aber eben nur: die offenkundigsten gravierenden Probleme; nicht: die einzigen. Die Behandlung allein schon der arithmetischen $\mathcal{D}$-Sätze seitens der Semantik ist durchaus alles andere als klar vorgezeichnet. Genauer: Es ist sogar mit Blick allein auf diese Sätze völlig unklar, wie im zweiten der beiden Stadien vorzugehen wäre, in die sich – wie von Davidson in *Radikale Interpretation* festgestellt – das Projekt der Entwicklung der Semantik „in der Praxis“ gliedern würde:

> Die Aufgabe, eine Wahrheitstheorie im Detail auf eine natürliche Sprache anzuwenden [bzw. eine rekursive wahrheitskonditionale Semantik für eine solche zu entwickeln], wird sich in der Praxis nahezu gewiß in zwei Stadien gliedern. Im ersten Stadium wird die Wahrheit nicht für die gesamte Sprache, sondern mit Bezug auf einen sorgfältig zurechtgestutzten Teil der Sprache charakterisiert. In grammatischer Hinsicht wird dieser Teil zwar ohne Zweifel ein harter Brocken sein, doch er wird unendlich viele Sätze umfassen, die das Ausdrucksvermögen der gesamten Sprache erschöpfen. Der zweite Teil wird jeden der übrigen Sätze auf einen [...] der Sätze abbilden, mit Bezug auf die die Wahrheit bereits charakterisiert ist. Die Sätze, die dem ersten Stadium angehören, können wir so auffassen, daß sie die logische Form bzw. Tiefenstruktur sämtlicher Sätze angeben. (S. 193 f.)

Hinsichtlich des arithmetischen Teils von $\mathcal{D}$ geht es in den beiden Stadien im wesentlichen um die Entwicklung einer Tarskischen oder modelltheoretischen „Wahrheitsdefinition“[2] für die $\mathcal{A}$-Sätze bzw. einer „Transformationsgrammatik“ für sämtliche arithmetischen $\mathcal{D}$-Sätze – inklusive der *umgangssprachlichen* –, welche jedem solchen einen $\mathcal{A}$-Satz zuordnet; natürlich nicht irgendeinen, sondern einen mit derselben Wahrheitsbedingung, der somit insofern, als seine logische Form offen zutage liegt, die „Tiefenstruktur“ jenes Satzes wiedergibt.

Die Entwicklung der Wahrheitsdefinition wird einem mathematisch halbwegs begabten, aufmerksamen Hörer einer gediegenen Vorlesungsreihe zur Einführung in die mathematische Logik nach nicht einmal der Hälfte aller Vorlesungen ohne größere Schwierigkeiten gelingen. Ganz anders verhält es sich jedoch mit der Transformationsgrammatik. Deren Entwicklung liefe auf die (im weitesten Sinne) rekursive Bestimmung einer Abbildung hinaus, für die gilt: Sie ordnet dem (umgangssprachlichen arithmetischen) $\mathcal{D}$-Satz »Für das Ergebnis der Addition zweier natürlicher Zahlen ist die Reihenfolge der beiden Summanden unerheblich« den $\mathcal{A}$-Satz $\ulcorner \forall x\, \forall x'\, (x + x') = (x' + x) \urcorner$ zu; sie ordnet dem $\mathcal{D}$-Satz »Quadrieren einer natürlichen Zahl führt nicht immer zu einer anderen Zahl« den $\mathcal{A}$-Satz $\ulcorner \neg\, \forall x\, \neg\, (x \cdot x) = x \urcorner$ zu; sie ordnet dem $\mathcal{D}$-Satz »Das Produkt einer natürlichen

[2]Siehe Tarski: *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* bzw. Kirkham: *Theories of Truth*, Kap. 5 und Ebbinghaus, Flum, Thomas: *Einführung in die mathematische Logik*, Kap. 3.

Zahl mit der Summe zweier weiterer ist die Summe (1) des Produkts der ersten Zahl mit der zweiten mit (2) dem Produkt der ersten mit der dritten« den $\mathcal{A}$-Satz $\ulcorner \forall x\, \forall x'\, \forall x''\, (x \cdot (x' + x'')) = ((x \cdot x') + (x \cdot x''))\urcorner$ zu u.s.w. Und die Möglichkeit einer solchen Bestimmung kann nur als sehr fraglich gelten; zumal in ihr ja nicht (wesentlich) auf semantische Merkmale der arithmetischen $\mathcal{D}$-Sätze Bezug genommen werden dürfte.