

Integrierte Modelle zur physikalischen Interpretation Geodätischer Deformationsuntersuchungen

vorgelegt von
Diplom-Ingenieur
Ivo Milev

Vom Fachbereich 9 - Bauingenieurwesen und angewandte Geowissenschaften
der Technischen Universität Berlin
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

-Dr. Ing.-

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender: Prof. Dr.-Ing. Dieter Lelgemann

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Lothar Gründig

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Willfried Schwarz

Gutachter: Dr.-Ing. habil. Rainer Blum

Tag der wissenschaftlichen Aussprache: 15.12.2000

Berlin 2001

D 83

Kurzfassung

In der Arbeit werden zunächst die für Deformationsuntersuchungen geeigneten Mess-, Auswerte- Analysemethoden und Interpretationsmodelle zusammengestellt.

Da die hieraus abgeleiteten Verschiebungen interpretiert werden müssen, wurde ein integrierter Lösungsansatz entwickelt, der sowohl geodätische als auch mechanische Beziehungen berücksichtigt. Dieser wurde an verschiedenen Arten von Untersuchungsobjekten erprobt.

Eine verallgemeinerte Beziehung zwischen Variationsmethoden der Mechanik und dem Allgemeinfall der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate (MKQ) wurde hergeleitet und die Lösungen nach MKQ auf mechanische Variationsmodelle übertragen. Diese führen über die Lagrangefunktion mit Multiplikatoren zu einem erweiterten Modell für das Energiepotential.

Ausgehend von den durchgeführten Untersuchungen wird als allgemeines Deformationsanalysemodell ein Ansatz nach dem erweiterten Hamilton'schen Prinzip vorgeschlagen. Auch hierfür wird ein integrierter Lösungsansatz empfohlen.

Abstract

The presented integrated model for interpretation of measured displacements includes geodetic and mechanic relationships.

This general relationship between the variation principle of mechanics and the general case of the least square adjustment will be delivered, and the geodetic calculation methods applied for use of variation objectives. This covers the Lagrange function with multipliers and presents an extended model for the potential.

The complex deformation model based on the extended dynamical Hamilton's principle will be established and recommended as an integrated solution.

1. EINFÜHRUNG	5
1.1. Allgemeines über Deformationsuntersuchungen	5
1.2. Motivation und Zielsetzung	6
1.3. Übersicht über Methoden und Modelle zur Bestimmung, Analyse und Interpretation von Deformationen - Vergleich und Abschätzung	6
1.3.1. Vorbemerkungen	6
1.3.2. Übersicht über existierende Lösungen und Systematisierungen	7
1.3.3. Vergleich, Abschätzung und Verallgemeinerung der Modelle	9
1.3.4. Arten der zu untersuchenden Objekte und die Aufgaben der Deformationsuntersuchung	10
2. AUSWERTUNG VON MESSUNGEN IN GEODÄTISCHEN NETZEN SOWIE KONTINUIERLICHER MESSUNGEN MIT BESTIMMUNG UND ANALYSE DER VERSCHIEBUNGEN	12
2.1. Bestimmung der Verschiebungen nach getrennter Auswertung der einzelnen Beobachtungszeitpunkte mit nachfolgendem Vergleich und Interpretation.....	12
2.1.1. Kongruenztest und S-Transformation	13
2.1.2. Modellierung der Verschiebungsparameter von Einzelpunkten und Punktgruppen	16
2.1.3. Polynomiale Deformationsmodelle.....	18
2.1.4. Strainanalyse.....	20
2.2. Gemeinsame Auswertung und Bestimmung der Verschiebungen aus Wiederholungsbeobachtungen in mehreren diskreten Zeitabständen	20
2.2.1. Approximation bei gemeinsamer Auswertung von mehr als zwei Beobachtungszeitpunkten.....	20
2.3. Auswertetechniken bei permanenter Überwachung.....	24
2.3.1. Samplingtheorem und Filterung der Daten	24
2.3.2. Autokovarianzfunktion	25
2.3.3. Powerspektrum	25
2.3.4. Kreuzkovarianzfunktion.....	26
2.3.5. Zeitdiskrete Fouriertransformation (ZDFT).....	27
2.3.6. Diskrete Fouriertransformation (DFT).....	28
2.3.7. Zweiseitige z-Transformation (ZT).....	29
2.3.8. Kalman - Filtertechnik	29
2.3.9. Vergleich von Laplace- und z-Transformation	31
3. INTEGRIERTE LÖSUNG FÜR DEFORMATIONSAUFGABEN	32
3.1. Voraussetzungen und Lösungsweg.....	32
3.2. Diskretisierung des Kontinuums	34
3.3. Übertragung der nachgewiesenen Verschiebungseigenschaften auf den Knoten der Diskretisierung.....	35
3.3.1. Voraussetzungen	35
3.3.2. Ebene Koordinatentransformation	36
3.3.3. Ebene bilineare Transformation für ein 4 Knoten Element als Abbildungsfunktion.....	37
3.3.4. Ebene affine Transformation für ein 3 Knoten Element als Abbildungsfunktion	39
3.3.5. Die Gewichtungssproblematik.....	43
3.3.6. Ableitung der äußeren Kräfte aus den Verschiebungen - Inverse der FE Aufgabe.....	43
4. VERALLGEMEINERTE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DER VARIATIONSRECHNUNG, DER AUSGLEICHUNGSRECHNUNG UND DEN DEFORMATIONSENTSUCHUNGEN	46

4.1. Vorbemerkungen	46
4.2. Allgemeine Variationsprinzipien und Modelle zur Lösung von Aufgaben der Mechanik	46
4.2.1. Theoretische Grundlagen	46
4.2.2. Anwendung der Variationsmethoden	48
4.3. Allgemeines mathematisches Ausgleichungsmodell der Methode der Kleinsten Quadrate	55
4.3.1. Wesentliches	55
4.3.2. Stochastisches Ausgleichungsmodell	55
4.3.3. Das funktionale Modell	57
4.3.4. Allgemeinfall der Ausgleichung korrelierter Beobachtungen	60
4.4. Anwendung der Methode der Kleinsten Quadrate zur Lösung von Variationsaufgaben in der Mechanik	65
4.4.1. Analogie zwischen den allgemeinen Funktionalen beider Lagrange'schen Formulierungen	65
4.4.2. Bestimmung der Variationsunbekannten mit der MKQ	66
4.4.3. Kombinierte Lösungen	66
4.4.4. Quasi-statische Formulierung	69
4.4.5. Dynamische Formulierung	72
5. GEOTECHNISCHES INFORMATIONSSYSTEM UND ANWENDUNGSBEISPIELE	74
5.1. Geotechnisches Informationssystem	74
5.2. Beispiele zur Deformationsuntersuchung	76
5.2.1. Talsperren	76
5.2.2. Brücken	78
5.2.3. Beweissicherung	90
5.2.4. Rutschungen	95
6. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSFOLGERUNGEN	100
7. LITERATUR	101
SYMBOLVERZEICHNIS	106
ABBILDUNGSVERZEICHNIS	107
TABELLENVERZEICHNIS	107
DANKSAGUNG	107
LEBENS LAUF	109

1. EINFÜHRUNG

1.1. Allgemeines über Deformationsuntersuchungen

Allgemein versteht man unter dem Begriff Deformation Veränderungen an Bauwerken und ihrer Umgebung, die während ihres Baus und ihrer Existenz auftreten und ihre Stabilität beeinträchtigen, sowie auch Veränderungen, die das Gelände, die Erdkruste und andere physikalische Objekte betreffen. Dieser komplexe Themenbereich beschäftigt die Geodäten seit mehr als 70 Jahren. Zum Gegenstand intensiver Untersuchungen und somit zu einem breiten und wichtigen Arbeitsfeld in der Geodäsie entwickelten sich die Deformationsuntersuchungen allerdings erst in den letzten dreißig Jahren.

Am Anfang konzentrierten sich die Untersuchungen von diskreten Punkten auf die geodätischen Netze und auf die geometrische Bestimmung der Verschiebungen mit Genauigkeitsabschätzung. Dem folgte die Erforschung und Bestimmung der Gesetzmäßigkeiten und Dynamik der Verschiebungen sowie das Einbeziehen der physikalischen Eigenschaften der Objekte in die Interpretation. Hierfür ist die Zusammenarbeit der Geodäten mit anderen Disziplinen nicht nur gefragt, sie ist unverzichtbar. Als Ergebnis der bisherigen Arbeiten sind eine Reihe von Methoden und Modellen sowie Software und Systeme, zur Untersuchung, Analyse und Interpretation von Deformationen entwickelt und angewendet worden. Den Deformationsuntersuchungen wurden zahlreiche Vorträge, Artikel, Studien - Dissertationen und einzelne Bücher gewidmet. Seit 1975 haben neun Internationalen- FIG Symposien zum Thema Deformationsuntersuchungen stattgefunden. Ein Ad Hoc Komitee über Methoden zur Deformationsanalyse wurde gegründet und bestand über mehrere Jahre. Weiterhin wurde in der Arbeitsgruppe 6.1 der FIG ein Ad Hoc Komitee zur Klassifizierung der Deformationsmodellen konstituiert (Pfeufer u.a. 1993, 1994).

Als Gegenstand der aktuellen Deformationsuntersuchungen ist eine möglichst flexible, genaue und vollständige Messung mit Bestimmung der Verschiebungen bei Anwendung gegenwärtiger Mess- und Auswertetechniken zu sehen. Dazu zählt die Ermittlung der stabil gebliebenen Punkte und der Verschiebung der übrigen Netz- und Objektpunkte mittels neuester Analyseverfahren, sowie die gemeinsame Auswertung von zwei und mehreren Beobachtungszeitpunkten, gefolgt von der Interpretation der Verschiebungen mittels statistischer Methoden und der Bereitstellung der gewonnenen Information der Nachbardisziplinen.

Das Erarbeiten und verifizieren von Deformationsmodellen und deren rechnerische Lösung, welche die Realität möglichst genau beschreiben und in einer weitreichenden Komplexität die tatsächlichen Bedingungen, die das zu untersuchende Objekt beeinflussen, wie einwirkenden Kräfte und ihre Veränderungen, die Spannungen, Deformationen, und die geodätischen Messergebnisse geschlossen in einer **integrierten** Form vereinigt, ist eine der wichtigsten Aufgaben der Deformationsuntersuchungen.

1.2. Motivation und Zielsetzung

Die vorliegende Dissertation hat das Ziel:

- Mess-, Auswerte-, Analyse-, und Interpretationsmethoden, sowie Modelle bei Deformationsuntersuchungen, in einer möglichst vollständigen Systematisierung darzulegen.
- Möglichst genau und naturgemäß die Deformationsproblematik in ihrer Komplexität zu betrachten (Messungen, Auswertungen, Analyse, Approximation, und Interpretation mit statistischen Methoden).
- Eine Lösung vorzuschlagen, die in einem integrierten Lösungsansatz die wichtigsten Beziehungen darstellt und der physikalischen Realität entspricht. Das Modell soll sich auch in das allgemein akzeptierte naturwissenschaftliche, mechanik- und bautechnikbezogene Verständnis einfügen und den dort definierten Voraussetzungen und Normen entsprechen. An Hand von verschiedenen Arten von Untersuchungsobjekten soll dies überprüft werden.
- Die verallgemeinerten Beziehungen der Variationsmethoden der Mechanik dem Allgemeinfeld der Ausgleichsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate (MKQ) gegenüberzustellen und die Lösungen nach MKQ auf die Variationsmodelle anzuwenden.
- Für die geodätisch gewonnenen, sowie für andere objektbezogene Informationen, die Struktur eines digitalen Systems zur Verwaltung und Bereitstellung, vorzuschlagen (Geotechnisches – Informationssystem).

1.3. Übersicht über Methoden und Modelle zur Bestimmung, Analyse und Interpretation von Deformationen - Vergleich und Abschätzung

1.3.1. Vorbemerkungen

Die Deformationen - geometrische Veränderungen, die an den Ingenieurobjekten auftreten, können mit den Verschiebungen des gesamten Objekts oder einzelner Teile, mit Neigung, Biegung, Verwindung, Stauchung, Dehnung und entsprechend auftretenden Spannungen verbunden sein. Sie sind Ergebnis der Auswirkung von verschiedenen Faktoren (Kräften), die permanent, periodisch, regel- oder unregelmäßig angreifen. Folglich sind die Verschiebungen, die direkt oder indirekt von Geodäten ermittelt werden, durch diese Faktoren verursacht. Das heißt, die Verbindung zwischen den Faktoren (Kräften), den Spannungen, den Deformationen, den Verschiebungen und der Zeit ist immer vorhanden und sollte bei der Modellierung nicht unbewusst vernachlässigt werden. Offenbar ist es auch erforderlich, wie später bewiesen wird, die Problematik der Deformationsuntersuchungen als ein dynamisches System zu betrachten. Das bedeutet, dass man von den genannten allgemeinen Beziehungen einschließlich der Zeit ausgehen sollte, und darauf basierend, stufenweise oder direkt die Zusammenhänge zwischen den teilnehmenden Größen feststellt. Diese Betrachtungsweise hätte auch einen verträglichen abstraktionsgrad. Folglich sollte hier die geodätische Problematik als ein integrierter Teil des gesamten Komplexes von Problemen bei Deformationsuntersuchungen betrachtet werden. Das ist besonders wichtig bei der Interpretation der Ergebnisse der geodätischen Messungen und Auswertungen. Dies soll als Ausgangspunkt auch bei der Definition geodätischer Begriffe in Bezug auf Deformationsuntersuchungen dienen. Somit können bei fachübergreifenden Fragestellungen, Missverständnisse, Täuschungen und Falschinterpretationen vermieden werden.

1.3.2. Übersicht über existierende Lösungen und Systematisierungen

Wie schon in Abschnitt 1.1. erwähnt, sind Geodäten sehr aktiv an der Lösung von Aufgaben aus dem Bereich der Deformationserfassung und Interpretation beteiligt. In der hier behandelten Literatur, was nicht den Anspruch einer weltweiten Studie erhebt, findet man ein breites Spektrum der Problemstellungen und Lösungsansätze sowie von Systematisierungen bei verschiedenen Ausgangsannahmen. Insoweit kann man davon ausgehen, dass die bedeutsamen und charakteristischen Beiträge hier ihren Platz gefunden haben.

Konzentriert man sich nur auf die komplexen interdisziplinären Lösungen, so dürfen die folgenden nicht unerwähnt bleiben.

In dem „Generalised dynamic models with stresses and deformations“ sind Messung, Ausgleichung, Analyse und Interpretation aus geodätischer Sicht zusammen mit den physikalischen Eigenschaften und Lösungen aus der Mechanik behandelt und zusammengefasst worden. (Chrzanowski / Welsch, (Eds), 1988).

Die Theorie der Funktionale des Verschiebungsfeldes, das sind Translation, Rotation und Deformation sowie Dilatation, Scherung, extremale Dilatation, reine Dilatation und extremale Scherdilatation mit zugehörigen Richtungen, ihre Fehlertheorie und Schätzbarkeit, wird für den zwei und dreidimensionalen Fall verallgemeinert (Zaiser 1984, Kersting 1992).

Die bisher angewandte Herangehensweise der meisten Autoren beruht auf der Bestimmung der Verschiebungen aus geodätischen Messungen und dem Vergleich mit den berechneten Verschiebungen nach der Finite Elemente Methode. Dabei wird kein Übergang geschaffen, es wird lediglich die eine Methode zur Kalibrierung der anderen verwendet (Chrzanowski, Chen 1990). Dabei sprechen diese Autoren von einem geometrischen Modell als Bestandteil der Geodäsie und einem physikalischen Modell bestehend aus Gesetzmäßigkeiten der Elastizitätstheorie und der Bodenmechanik. Boljen vergleicht in seiner Arbeit Koordinaten, erhalten aus der Kräfte - Verschiebungsrelation eines bodenmechanischen Modells mit denen aus geodätischen Messungen (Boljen 1983).

In Heunecke ist bei dynamischen Fragestellungen die Systemidentifikation mittels adaptive Kalman-Filterung als Schätzaufgabe aufzufassen, bei der als Unbekannte in der Aufgabenstellung nicht nur die Objektverschiebungen, sondern auch Teile oder alle zur Modellierung des Deformationsverhaltens verwendeten Materialparameter und/ oder Einflussgrößen betrachtet werden (Heunecke 1995).

Bei Untersuchungen von Teskey werden die Materialparameter einzeln in einer Ausgleichung nach der Methode der Kleinsten Quadrate als Unbekannte eingeführt und berechnet (Teskey 1988).

Wichtig bei allen Betrachtungen ist aus geodätischer Sicht, dass die Stochastik immer mitgeführt wird. Dies erlaubt im Vergleich zu den Nachbardisziplinen auch eine Beurteilung der Qualität.

Abhängig davon, welche nichtgeodätische Theorien zugrunde gelegt wird z. B. die der Mechanik, Bodenmechanik, Elastizitätstheorie, Systemtheorie, Fuzzy Logik, neuronale Netze, erhält man auch bei den grundphysikalischen Zusammenhängen gleiche, aber im Detail, sowie bei den verwendeten Begriffe und der Schwerpunktorientierung doch unterschiedliche Formulierungen.

Beziehungen zwischen elastomechanischen Systemen und der Ausgleichsrechnung werden in (Linkwitz 1963 Gründig 1976, Bahndorf 1991, Singer 1995, Ströbel 1997) beschrieben.

Einen weiteren Schwerpunkt bildet die Stufe der Modellidealisation. Die Unterschiede zwischen der Definition des ein-, zwei- oder dreidimensionalen Falles sind in ihrer Komplexität und dem daraus sich ergebenden Aufwand nicht unerheblich.

Weitere wichtige Fragen für die Modellbildung sind die Größe und Art des zu modellierenden Objektes. In dieser Hinsicht kann man zwei Gruppen unterscheiden :

- Die vom Menschen geschaffenen, künstlichen Ingenieurobjekte.

Dabei verfügt man über ziemlich genaue Informationen der Materialeigenschaften und über die Methoden des Bauingenieurwesens.

Einen wesentlichen Teil dieser Objekte bilden die „Einmaligen Ingenieurobjekte“. Das sind z.B. Fernsehtürme, Stadien, Brücken, Tunnel, Atomkraftwerke. Bei dieser Art von Bauwerken ist der Überwachungs- und Interpretationsaufwand sehr hoch. Dies ist begründet in den konstruktiven Besonderheit, den Baukosten und der Bedeutung dieser Ingenieurobjekte für die Gesellschaft. Dadurch zeichnen sich unterscheidet auch in den Methoden der Überwachung aus - sehr oft werden hier permanente Überwachungen angewandt.

Auch die Beweissicherung ist ein Bereich, der in unserer modernen Gesellschaft immer mehr an Bedeutung gewinnt. Beispiele hierzu sind in Kap. 5.2.3 sowie die Untersuchungen beim Bau der Verlängerung der Stadtautobahn A-100 (Preez 1999) und der Grundwasserabsenkung bei der Modernisierung der Staatsbibliothek - Unter den Linden in Berlin (Stolle 2000), zu finden. Der Unterschied zu den anderen Arten besteht darin, dass die Ergebnisse meist als Gutachten auf die sich rechtliche Entscheidungen basieren verwendet werden, wobei eine Schadensdokumentation und nicht das Abwenden einer unmittelbaren Gefahr in Vordergrund steht. In Zukunft ist mit einer Zunahme dieser Art Überwachungsaufgaben zu rechnen.

- Beschreibung von Objekten, die Teile der geologischen Erdoberfläche und der Erdkruste sind (Kersting 1992, Arnet 1996). Insbesondere soll hier auf die verschiedenen Dimensionen von Hangrutschungen, Abrasion, Erdkrustenbewegungen, Erbenen und anderen aufmerksam gemacht werden. Diese Art von Deformationen zeichnen sich durch Besonderheiten aus die weniger im Relativen sondern mehr im Absoluten liegen. Dies muss bei der Erstellung des Überwachungsplanes sowie bei der Auswahl der Messmethoden gezielt berücksichtigt werden.

In den letzten Jahren wurden von verschiedenen Seiten Klassifizierungen vorgeschlagen. Davon werden nur einige genannt, die für bestimmte Richtungen(Schulen) repräsentativ sind.

Anfang der 80er Jahre wurde eine Systematisierung vorgeschlagen, die zwischen statische, kinematische und dynamische Modelle unterscheidet (Pelzer , Niemeier1980; Boljen 1984). Weiter hat man sich auf geometrische und physikalische Analyseverfahren konzentriert und entsprechende Methoden entwickelt (Pfeufer et all. 1993, 1994, Chrzanowski 1996, Chen 1996)

Konventionelle- und nichtkonventionelle Methoden zur Deformationsuntersuchung wurden diskutiert (Linkwitz 1994) . Hier werden die Aufgaben und die Ziele der Deformationsmessungen, die klassischen Methoden, gegenwärtige Trend- und Analysemethoden, sowie Multisensormethoden betrachtet und weitreichende Verallgemeinerung gemacht.

Eine Übersicht bekannter Fragestellungen zur Klassifizierung von Deformationsmodellen wird von Heine gegeben (Heine 1999). Hier wird ausgeführt, dass die Deformationsuntersuchungen als Spezialfall der Systemtheorie aufzufassen sind und daher mittels der von der Systemtechnik bereitgestellten Verfahren und Methoden unter Beachtung

der fachspezifischen Bedingungen und Anforderungen zu behandeln sind. Die Theorie der neuronalen Netze wird bezüglich einer Anwendbarkeit für geodätische Aufgabenstellungen untersucht.

1.3.3. Vergleich, Abschätzung und Verallgemeinerung der Modelle

Nicht ganz exakt ist der Begriff physikalische Modelle eingeführt worden, da es sich bei der komplexen Modellierung immer um physikalische Größen handelt. Eigentlich sind damit die dynamischen Modelle gemeint.

Im „Final Report of the Ad-Hoc Komitee of the FIG Working Group 6.1“ ist eine Klassifizierung der Deformationsmodelle (Abb. 1.1) vorgeschlagen worden (Welsch, Heunecke 1999). Einige Bemerkungen hierzu werden in Kapitel 4 gegeben.

Eine anderer Vorschlag zur Klassifizierung wird von Milev gemacht (Milev 1999a). Entsprechend dieser Systematisierung wird unterschieden zwischen :

- **Verallgemeinerte Modelle** - Dynamische Modelle (Prozesse), die in einem Komplex die Ursache - Objekt - Folge integrieren. Das heißt, sie integrieren Kräfte (Faktoren), Verschiebungen (von geodätischen Messungen und Auswertungen bestimmt), Deformationen und Spannungen - für die einzelnen Objektpunkte und für das gesamte Objekt. Zudem erfolgt noch eine weitere Beurteilung der einzelnen Änderungs- und Verformungsarten (Translationen, Rotationen, Biegungen, Verwindungen u.s.w.) sowie auch die Berücksichtigung des Faktors Zeit.
- **Spezialisierte (Sonder-) Modelle** - Das sind Sonderfälle der Verallgemeinerten Modelle (geometrische, quasi-statische, kinematische, halbdynamische), die eng mit dem im Einzelfall untersuchten Objektarten verbunden sind, und bei denen es ausreicht bzw. auch nur möglich ist, bestimmte Elemente des Dynamischen Modells festzustellen. Hier ist man um die direkte Bestimmung von Verschiebungen, Spannungen und Deformationen aus unmittelbar gemessenen Größen bemüht.

Letztendlich sind die für die Beurteilung der Standsicherheit der untersuchten Objekte relevanten Parameter vollständig, oder abhängig vom Abstraktionsgrad teilweise, in den Modellen beider Klassifizierungsvorschläge enthalten.

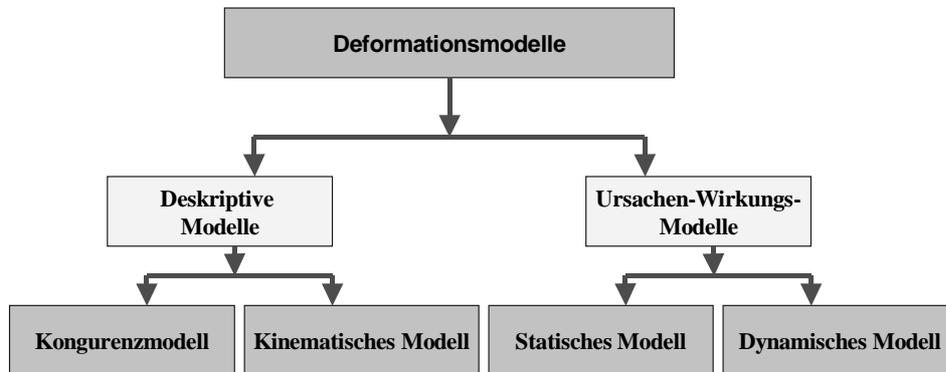


Abb. 1.1: Hierarchie der Modelle bei der geodätischen Deformationsanalyse (Heunecke, Welsch 1999)

1.3.4. Arten der zu untersuchenden Objekte und die Aufgaben der Deformationsuntersuchung

Typische Arten der auf Deformation zu untersuchenden Objekte sind:

- Untersuchung von Deformationen an Ingenieurobjekten (Bauten) und ihre Umgebung;
- Untersuchung von Rutschungen, Abrasion, Erosion, Absenkungen, potentielle Lawinenfelder und Eisschollenbewegungen;
- Erdkrustenbewegungen – Verschiebungen der einzelnen Platten (Blöcke), Verwerfungszonen, technogene Bewegungen beim Abbau von Bodenschätzen;
- Effekte katastrophentypischer geodynamischer Prozesse wie Erdbeben und Vulkanausbrüche auf umliegende Bauwerke und auf das Gelände.

Die zu lösenden Aufgaben bei Deformationsuntersuchungen, sind mit den festzustellenden Zusammenhängen zwischen den bestimmenden Elementen und dem entsprechenden Modell verbunden. Sie können wie folgt verallgemeinert werden:

- Bestimmung nur der eingetretenen Verschiebungen der Punkte, zwischen zwei oder mehreren Beobachtungszeitpunkten. Das grundlegende Problem ist hier, die Feststellung der stabil gebliebenen und der Signifikanz der Verschiebungen der übrigen Netz- und Objektpunkte .
- Anwendung geodätisch bestimmter Verschiebungen zusammen mit den Trendparametern, einschließlich Geschwindigkeit und Beschleunigung in den einzelnen Punkten des zu untersuchenden Objekts. Der Zusammenhang besteht hier zwischen den Verschiebungen, den Änderungen der Faktoren (Kräfte) und der Zeit. Wenn keine Änderungen in den Faktoren zwischen den Beobachtungszeitpunkten eintreten, wird die Lösung auf die Bestimmung von Geschwindigkeit und Beschleunigung der Verschiebungen reduziert. In diesem Fall ist ein kinematisches Modell vorhanden.
- Anwendung der geodätisch bestimmten Verschiebungen zur Bestimmung der Deformationen und Spannungen. Hier ist es notwendig, die Konstanten Querkontraktionszahl und Steifigkeitsmodul als physikalische Eigenschaften des zu untersuchenden Objekts zu kennen.
- Festlegung der Zusammenhänge zwischen den Trendparametern, den Deformationen, den Spannungen, der Zeit, der Translation, Rotation und anderen Einflussgrößen.

Die zuvor definierten Objektarten, Aufgaben der Deformationsuntersuchungen und Modelle stehen im Zusammenhang der näher erläutert wird.

Im Unterschied zu früheren Untersuchungen, als rein geometrische Modelle betrachtet und angewendet wurden, ist besonders in den letzten 5 Jahren, in Richtung der Aufstellung von dynamischen Modellen zu erkennen. Aus der obigen Systematisierung ist es ersichtlich, dass es nicht immer angemessen ist, dynamischen Modelle anzuwenden. Die jeweiligen Aufgaben sollten im Vorfeld analysiert werden und die Herangehensweise dem zu untersuchenden Objekt und den vorliegenden Bedingungen angepasst werden. Auf dieser Weise lassen sich die Probleme der Deformationsuntersuchungen zuverlässig und wirtschaftlich lösen.

Es soll aber nochmals betont werden, dass die Entwicklung und Anwendung von **integrierten** Lösungsansätze die grundlegende Aufgabe der Deformationsuntersuchungen bleibt. Das ist besonders wichtig, wenn die Komplexität der Deformationsuntersuchungen verstanden werden soll und somit die Notwendigkeit einer engen interdisziplinären Zusammenarbeit der Geodäten mit anderen Fachdisziplinen sowie die Verschmelzung verschiedener Lösungsverfahren (z.B. aus der Mechanik und Geodäsie) angebracht erscheint.

2. Auswertung von Messungen in geodätischen Netzen sowie kontinuierlicher Messungen mit Bestimmung und Analyse der Verschiebungen

Für die Durchführung und Auswertung von Deformationsmessungen sind nahezu alle den Geodäten bekannten Techniken anwendbar. Um die bestmöglichen zu finden, spielt an erster Stelle die Erfahrung eine Rolle, aber auch die Art des untersuchten Objektes schließt die eine oder andere Methode schon im Vorfeld der Planung aus. Für die Erfassung im kleinmaßstäbigen Bereich, wie z.B. bei Erdplattenbewegungen, großen Verwerfungen (San Andreas Spalte) oder bei der Erforschung und der Auswirkung von Erdbeben auf die Erdoberfläche, bei denen große Verschiebungen erwartet werden und nicht so hohe Genauigkeit gefordert ist, eignen sich durchaus auch Landesnetze. Bei der Überwachung von Ingenieurobjekten wie Brücken, Talsperren, Kraftwerken, Fernsehtürmen, Stadien, Atomkraftwerken u.a., werden für die zeitdiskreten Messungen Streckennetze, Alignements, Richtungsnetze, Richtungs- und Streckennetze, Höhennetze (Feinnivellement) und GPS-Netze angelegt. Die Photogrammetrischen Verfahren bieten die Möglichkeit, Momentzustände von schnell verlaufenden Deformationsprozessen mit großer Frequenz zeitdiskret zu erfassen und später beliebige charakteristische Punkte für einen Vergleich und für die Interpretation auszuwählen. Für die permanente Überwachungen kommen Methoden der Sensorik in Frage (Schlemmer 1998). Hybride Beobachtungen, liegen bei Kombination der obigen Verfahren vor (siehe dazu Kap. 5). Ein typisches Beispiel für diese Kombination, die eng mit einer Analyse der Einflussgrößen verbunden ist, worauf die geforderte Genauigkeit um mehrfache verfälscht werden kann, ist in Schwarz (Schwarz 1998) anhand der Justiermessungen beim Deutschen Elektronen Synchrotron (DESY) vorgestellt worden.

Zu jeder dieser Überwachungsarten sind numerische und statistische Auswerte- und Interpretationsmethoden entwickelt worden, auf die hier näher eingegangen wird.

2.1. Bestimmung der Verschiebungen nach getrennter Auswertung der einzelnen Beobachtungszeitpunkte mit nachfolgendem Vergleich und Interpretation

Die ermittelten Verschiebungen von Objektpunkten in Bezug auf ein übergeordnetes stabiles System enthalten alle Deformationen eines Objektes, sowohl die Anteile, die auf die Starrkörperbewegung des Objektes zurück zu führen sind, als auch die Anteile, die auf die Verformung des Objektes selbst zurückgehen.

Um nun das Deformationsverhalten des Objektes vollständig beschreiben zu können, müssen unterschiedliche Verfahren angewendet bzw. kombiniert werden. Die Methode der Kleinsten Quadrate wird im allgemeinen für die Parameterschätzung verwendet.

Die Hauptaufgabe bei der Bestimmung von absoluten Deformationen ist die Identifizierung von instabilen Referenzpunkten. Dies hat zwei verschiedene Herangehensweisen hervorgebracht. Eine Methode basiert auf dem Kongruenztest (Pelzer 1974, Gründig 1985a). Die andere Methode beruht auf der Definition des Datums, welches fest zu den instabilen Referenzpunkten ist (Chen 1983, Chrzanowski 1986). Beide führen zu vergleichbaren Ergebnissen. Somit kann die Problematik der Identifizierung von instabilen Referenzpunkten als gelöst betrachtet werden.

Die Analyse und Bestimmung relativer Deformationen ist komplizierter. Deformationsvektoren und der Trend der Deformation sowie die Ermittlung instabiler

Referenzpunkte, können nach einer iterativen Transformation ermittelt werden (Caspary, Chen, König 1983).

Es ist möglich, den deformierbaren Körper in kleinere Elemente, in denen ein lineares Deformationsverhalten vorausgesetzt wird, zu teilen (Welsch 1983). Der Deformationstrend kann aus den Differenzen in den Deformationsparametern (Strains) der einzelnen Elemente abgeleitet werden.

Nach Prescott und Chrzanowski kann der Deformationstrend durch die Analyse der Beobachtungen bestimmter Zeitreihen ermittelt werden (Prescott 1981, Chrzanowski 1989). Es gibt Vorschläge, in denen zwischen zwei Erfassungszeitpunkten ein lineares Deformationsverhalten vorausgesetzt und die Verschiebung für jeden gemessenen Punkt abgeschätzt wird (Papo, Perlmutter 1983).

Im allgemeinen wird ein Deformationsmodell ausgewählt, das ausgehend vom Deformationstrend, den aktuellen geometrischen Zustand des Objektes beschreibt.

Allgemein wird das vollständige Verhalten eines beliebigen Punktes eines dreidimensionalen Körpers durch 9 Deformationsparameter (6 Strainkomponenten und 3 differentielle Rotationen) beschrieben (FIG). Diese Parameter können bei bekannten Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen und bei bekannter, das Deformationsverhalten des Objektes beschreibende Verschiebungsfunktion berechnet werden. Bei der Summierung der Komponenten der relativen Starrkörperbewegung zwischen den Elementen lassen sich existierende Diskontinuitäten bestimmen.

Dieses Vorgehen wurde verfeinert und generalisiert (Chrzanowski 1982, Chen 1983). Das Hauptanliegen der geometrischen Analyse ist es, ein Deformationsmodell zu finden, das auf einer Verschiebungsfunktion basiert, welche die Verschiebung in Raum und Zeit beschreibt.

In der Praxis umfassen Deformationsmessungen nur diskrete Punkte. Die Funktion, die das Verschiebungsfeld beschreibt, muss durch ein Modell approximiert werden, welches sich bestmöglichst den Beobachtungsdaten anpasst.

Wenn keine a priori Informationen (Deformationstrend oder ein vorgegebenes Modell) verfügbar sind, kann ein Polynom ausgesucht werden, dessen Parameter auf Signifikanz getestet und gegebenenfalls reduziert werden (Chrzanowski 1983, Chen 1983). Aber auch robuste Schätzungsverfahren, die weniger empfindlich gegen Modellfehler sind, wurden vorgeschlagen (Caspary 1987).

2.1.1. Kongruenztest und S-Transformation

Für ein zweistufiges Netz mit Stütz- und Objektpunkten $\mathbf{X}_{s,i}$ und $\mathbf{X}_{o,i}$ und den beiden Messzeitpunkten i und j ist zur Überprüfung der Stabilität der Stützpunkte die folgende lineare Hypothese aufzustellen (Pelzer 1971, Chrzanowski 1981, Chrzanowski, Chen 1982, Heck 1982)

$$H_0 : E\{x_{s,i}\} = E\{x_{s,j}\} \quad (2.1.1)$$

Unter Einbeziehung dieser Hypothese wird eine gemeinsame Ausgleichung der Beobachtungen $\mathbf{l}_i, \mathbf{l}_j$ beider Messungszeitpunkte durchgeführt. Mit den Jacobimatrizen $\mathbf{A}_{s,i}, \mathbf{A}_{s,j}, \mathbf{A}_{o,i}$ und $\mathbf{A}_{o,j}$ entstehen die folgenden Fehlergleichungen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}_i \\ \mathbf{l}_j \end{pmatrix} + \mathbf{v}_H = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{s,i} & \mathbf{A}_{o,i} & 0 \\ \mathbf{A}_{s,j} & 0 & \mathbf{A}_{o,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{s,ij} \\ \bar{\mathbf{x}}_{o,i} \\ \bar{\mathbf{x}}_{o,j} \end{pmatrix} . \quad (2.1.2)$$

In dieser Ausgleichung werden die Stützpunktkoordinaten nur einmal, die Objektpunktkoordinaten aber getrennt nach diskreten Messzeitpunkten aufgeführt. Der Kongruenztest besteht nun aus einem Vergleich der Verbesserungsquadratsumme Ω_H aus obiger Ausgleichung

$$\Omega_H = \mathbf{v}_H^T \begin{pmatrix} \mathbf{p}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{p}_j \end{pmatrix} \mathbf{v}_H \quad (2.1.3)$$

mit der gemeinsamen Verbesserungsquadratsumme aus den Ausgleichungen der Einzelepochen

$$\Omega_o = \Omega_{oi} + \Omega_{oj} . \quad (2.1.4)$$

$f = r_i + r_j$ Freiheitsgrad beider Einzelausgleichungen

f_H Freiheitsgrad der gemeinsamen Ausgleichung

$h = f_H - f$ Differenz beider Freiheitsgrade

Die Teststatistik ist gegeben durch die F-verteilte Größe (Niemeier 1979)

$$T = \frac{(\Omega_H - \Omega_o) / h}{\Omega_o / f} \quad (2.1.5)$$

Ist $T \leq F_{h,f,1-\alpha}$ dann wird die Nullhypothese mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α (im allgemeinen $\alpha=0,05$) angenommen. Kann die Nullhypothese nicht angenommen werden, entscheidet man sich für die Annahme der Alternativhypothese: ‘mindestens ein Stützpunkt ist verschoben. Jetzt wird nacheinander versuchsweise jeweils ein Stützpunkt zu den Objektpunkten gezählt. Dann wird eine neue Gesamtausgleichung durchgeführt. Mit diesem

Verfahren wird der Punkt gesucht, der den größten Beitrag zur Verbesserungsquadratsumme der Gesamtausgleichung leistet. Ist dieser Punkt gefunden, wird dieser dauerhaft zu den Objektpunkten gezählt. Nun wird der Test erneut durchgeführt. Kann die Nullhypothese immer noch nicht angenommen werden, wird auf die gleiche Weise solange nach verschobenen Stützpunkten gesucht, bis die Nullhypothese angenommen werden kann und alle verschobenen Stützpunkte identifiziert sind.

Vorraussetzung für diesen Hypothesentest ist, dass die zu vergleichenden Netze im selben Datum vorliegen. Um dies zu realisieren gibt es verschiedene Möglichkeiten.

- Festlegen eines Datums über Festpunkte
- Helmert-Transformation in der Ebene (minimale Restklaffungen)
- S-Transformation

Als effektivste von allen kann das Verfahren über S-Transformation betrachtet werden (Gründig u.a. 1985b, Niemeier 1985, Chrzanowski;Chen 1986, Caspary 1987). Gegeben ist ein Koordinatenvektor des Datums i . Ziel ist es diesen Koordinatenvektor in das Datum j zu transformieren. Dafür lassen sich die linearen Transformationsgleichungen:

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{S}_j \mathbf{x}_i \quad (2.1.6)$$

$$\mathbf{Q}_{xx_j} = \mathbf{S}_j \mathbf{Q}_{xx_i} \mathbf{S}_j^T \quad (2.1.7)$$

aufstellen. Die Transformationsmatrix ist

$$\mathbf{S}_j = \mathbf{E} - \mathbf{G} \left(\mathbf{G}^T \begin{array}{c|c} \mathbf{E}_j & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{G} \end{array} \right)^{-1} \mathbf{G}^T \begin{array}{c|c} \mathbf{E}_j & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \quad (2.1.8)$$

mit \mathbf{E} als Einheitsmatrix und \mathbf{G} als Matrix, die die Helmertbedingungen für alle Punkte enthält.

Über die Matrix \mathbf{E}_j kann eine Auswahl der Punkte, die transformiert werden sollen, getroffen werden. Mit dieser Transformation, angewandt auf die ausgeglichenen Koordinaten \mathbf{x}_i , \mathbf{x}_j und deren Kofaktorenmatrizen \mathbf{Q}_{xx_i} und \mathbf{Q}_{xx_j} , kann der Kongruenztest durchgeführt werden. Je nach Ausgang des Tests können wieder über die Matrix \mathbf{E}_j , Punkte aus der Stützpunktgruppe entfernt oder hinzugefügt werden. Zur Durchführung eines erneuten Tests ist keine Ausgleichung notwendig. Die Transformation wird erneut ausgeführt und ein weiterer Test wird mit der neuen Stützpunktgruppe durchgeführt (Gründig u.a. 1985a).

2.1.2. Modellierung der Verschiebungsparameter von Einzelpunkten und Punktgruppen

Eine Möglichkeit zur Vereinfachung der geometrischen Deformationsanalyse ist durch ein allgemeineres gehaltenes mathematisches Modell gegeben (Gründig u.a.1985). Dabei ist es sinnvoll ein Analysesystem zu benutzen, das die Probleme der Datenverwaltung im Rahmen eines breit angelegten Konzeptes allgemein löst (Milev, Gründig 1994).

Ausgehend von der Formulierung der Hypothese: „ Die Koordinaten gleicher Punkte in verschiedenen Epochen stehen in Beziehung zueinander“, werden Bedingungen zwischen den zu verbessernden Koordinaten formuliert und getestet.

Der Beobachtungsvektor setzt sich aus den Punktkoordinaten der einzelnen Epochen zusammen. Formuliert man dabei die Identität der Koordinaten gleicher Punkte aus zwei Epochen als Bedingung, so entsteht folgende Bedingungsgleichungsmatrix:

$$\mathbf{B}^T = [\mathbf{E} - \mathbf{E}] \quad (2.1.9)$$

Durch Lösung des Bedingungsgleichungssystems unter Berücksichtigung der Varianz - Kovarianzmatrizen der Koordinaten der Einzelepochen werden Testgrößen zur Beurteilung verschiedener Hypothesen bestimmt. (Gründig u.a. 1985a)

Die nach der Ausgleichung erhaltene Standardabweichung der Gewichtseinheit σ_0^2 des gesamten Systems ist unabhängig von den Schätzungen aus den Ausgleichungen der einzelnen Epochen σ_{ij}^2 und dient zur Bildung der Testgröße.

Die Überprüfung der Nullhypothese - es besteht eine Identität beider Netze erfolgt zuerst in einem Globaltest. Sie wird verworfen, wenn die Testgröße $\frac{\sigma_0^2}{\sigma_{ij}^2}$ den Grenzwert aus der Fisher

- Verteilung , bei gewähltem Signifikanzniveau und vorliegender Redundanz, überschreitet. Generell kann man die Systemgleichungen des Deformationsmodells folgendermaßen definieren:

$$\mathbf{B}^T (\mathbf{x} + \mathbf{v}) + \mathbf{C}\mathbf{g} = \mathbf{w} \quad (2.1.10)$$

Die unbekanntenen Deformationsparameter sind im Vektor \mathbf{g} enthalten und \mathbf{C} ist die dazugehörige Matrix der Funktionsparameter. Im Vektor \mathbf{v} stehen die Verbesserungen der Pseudobeobachtungen \mathbf{x} und \mathbf{w} ist der Vektor der Widersprüche der Systemgleichungen (2.1.10).

Man kann es auch als ein Ausgleichungsmodell mit Bedingungen zwischen den Beobachtungen und den unbekanntenen Parametern bezeichnen. Man erhält für die Bestimmung der unbekanntenen Parameter:

$$\mathbf{g} = \left(\mathbf{C}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C} \right)^{-1} \mathbf{C}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{w} \quad (2.1.11)$$

Hier ist \mathbf{Q}_{xx} die Varianz-Kovarianz Matrix der Koordinaten aus den einzelnen Epochenausgleichungen mit Originalbeobachtungen welche durch S-Transformation auf das gemeinsame Datum transformiert werden (Gründig u.a. 1985a). In Abhängigkeit von den

untersuchten Deformationsparametern enthält \mathbf{g} Verschiebungen, Rotationen oder Maßstabsänderungen für beliebige Gruppendefinitionen von Punkten. (2.1.13)

Vorgeschlagen werden zwei Untersuchungskonzepte:

- Einzelpunktverschiebung in x, y, z

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}} \right\} \text{Punkt } k \quad \mathbf{g}_k = \begin{bmatrix} g_{xk} \\ g_{yk} \\ g_{zk} \end{bmatrix} \quad (2.1.12)$$

- Verschiebung, Rotation und Maßstabsfaktor für die Gruppe l von Punkten bezogen auf die Koordinaten x, y

$$\mathbf{C}_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & x_{l_1} & -y_{l_1} \\ 0 & 1 & y_{l_1} & x_{l_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & x_{l_n} & -y_{l_n} \\ 0 & 1 & y_{l_n} & x_{l_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & x_{l_1} & -y_{l_1} \\ 0 & 1 & y_{l_1} & x_{l_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & x_{l_n} & -y_{l_n} \\ 0 & 1 & y_{l_n} & x_{l_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}} \right\} \text{Gruppe } l \quad \mathbf{g}_l = \begin{bmatrix} g_{xl} \\ g_{yl} \\ g_{\theta} \\ g_{scl} \end{bmatrix} \quad (2.1.13)$$

Mit der verallgemeinerten Form (2.1.10) ist es möglich unterschiedlich detaillierte Deformationsmodelle zu definieren.

Die durch die angesetzten Deformationsparameter bewirkte Veränderung der Varianz der Gewichtseinheit $\hat{\sigma}_{0g}^2$ ergibt sich zu:

$$\hat{\sigma}_{0g}^2 = \frac{\mathbf{g}^T \left(\mathbf{C}^T \left(\mathbf{B}^T \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{C} \right) \mathbf{g}}{m_g} \quad (2.1.14)$$

erhalten. m_g ist die Anzahl der Parameter. Wenn die Testgröße

$$T = \frac{\hat{\sigma}_{0g}^2}{\hat{\sigma}_{0ij}^2} \text{ den Grenzwert des Fisher-Tests } F_{1-\alpha, r_i+r_j, m_s} \text{ überschreitet, wobei } r_i + r_j \text{ die}$$

Summe der Redundanzen aus den Einzelausgleichungen, und $1 - \alpha$ das Signifikanzniveau sind, so werden die Deformationsparameter als signifikant angenommen. Das Ablaufdiagramm einer Deformationsanalyse mittels S- Transformation ist in Abb. 2.1 gegeben.

2.1.3. Polynomiale Deformationsmodelle

Polynomiale Modelle können zur Approximation des Verschiebungsfeldes angesetzt werden. In einem polynominalen Modell ist der Beitrag eines Punktes an folgender Beziehung zu erkennen (Niemeier 1988 / Schnädelbach, (Eds), Reinking 1994):

$$\begin{aligned} dx &= a_0 + a_1x_i + a_2y_i + a_3x_i^2 + a_4x_iy_i + a_5y_i^2 + \dots \\ dy &= b_0 + b_1x_i + b_2y_i + b_3x_i^2 + b_4x_iy_i + b_5y_i^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

In vielen Fällen ist es von Vorteil das Modell auf eine bekannte mathematische Funktion zu erweitern und ihre Parameter auf Signifikanz zu testen. Oft ist es so, dass die Erwartungen für die Tendenz der Änderungen eines Objektes die zu testende Funktion definieren (Durchbiegung einer Brücke oder Staumauer, Gleitfläche einer Rutschung). Sinnvoll erscheinen diese Untersuchungen nach einem zuvor durchgeführten Einzelpunkttest, um somit nur die statistisch gesicherten Verschiebungen an den Funktionstest weiterzuleiten. Weiterhin ist es von Bedeutung diese Erweiterung objektbezogen und nicht global durchzuführen. Dabei werden die Hauptbewegungen mit der Richtung der Koordinatenachsen übereinstimmen. Die Koordinaten, Koordinatendifferenzen und die Kovarianzmatrizen werden in dieses lokale System transformiert. Dort stellen die zu testenden Verschiebungen nach der Transformation, Abweichungen, wie in einem Allignement dar.

Nun sind die in der ausgewählten Funktion enthaltenen Parameter zu bestimmen.

Es wird eine vermittelnde Ausgleichung durchgeführt in welcher die beobachteten Koordinatendifferenzen als Funktion der unbekanntenen Funktionskoeffizienten eingehen. Diese werden mit ihrer Standardabweichung nach der Ausgleichung statistischen Tests unterzogen. Die Anwendung verschiedener polynominaler Funktionen zur Beschreibung der Systematik von Punktgruppenverschiebungen nach einer Transformation in das Hauptachssystem einer Staumauer ist in Nitschke (Nitschke 1996) beschrieben und anhand des Beispiels in Kap.5.2.1 dargestellt.

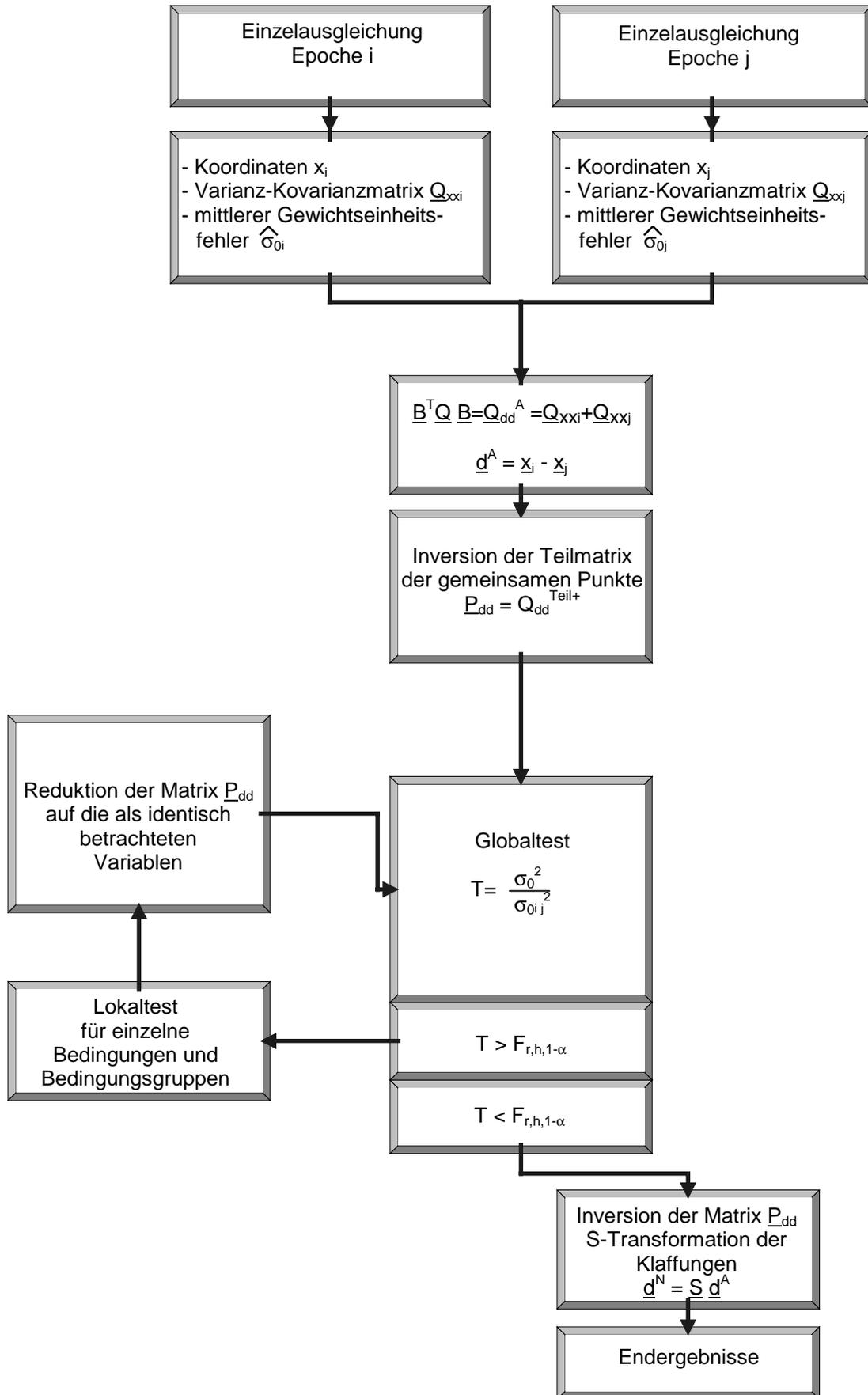


Abb. 2.1 Ablauf der Deformationsanalyse mit S-Transformation(Gründig u.a.1985)

2.1.4. Strainanalyse

Bei Welsch wird vorgeschlagen die Deformation eines Dreiecks des Überwachungsnetzes, dessen Eckpunktkoordinaten den momentanen gemessenen Punktezustand zu zwei Messzeitpunkten repräsentieren, durch eine Affintransformation zu beschreiben. Die Ortsänderung lässt sich in eine Starkörperbewegung und in einen rotatorischen Anteil zerlegen. Bei einer Abstrahierung vom translatorischen Anteil wird ersichtlich, dass die affine Verformung sich in Dehnung (Stauchung) und Scherung in den Koordinatenrichtungen ausdrücken lässt. (Welsch 1989)

2.2. Gemeinsame Auswertung und Bestimmung der Verschiebungen aus Wiederholungsbeobachtungen in mehreren diskreten Zeitabständen

2.2.1. Approximation bei gemeinsamer Auswertung von mehr als zwei Beobachtungszeitpunkten

Wenn man über mehrere Beobachtungszeitpunkte verfügt, können sie für die gemeinsame Herleitung der Funktion des Verschiebungsfeldes benutzt werden. Der Zustandsvektor eines Punktes \mathbf{x} kann als eine allgemeine Funktion der Einflussgrößen betrachtet werden. Als Ausgleichungsansatz kann das multivariante lineare Gaus-Markov-Modell verwendet werden (Wolf 1986, Koch 1980):

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (2.2.1)$$

wobei in \mathbf{l} alle Beobachtungsvektoren \mathbf{l}_j ($j = 1, 2, \dots, w$ - Beobachtungszeitpunkte) mit entsprechenden Kovarianzmatrizen \mathbf{Q}_{lj} ,

\mathbf{v} alle Vektoren der Verbesserungen \mathbf{v}_j ,

\mathbf{A} alle einzelnen Konfigurationsmatrizen \mathbf{A}_{kj} , ($k = 1, 2, \dots, w$),

\mathbf{x} alle Vektoren der unbekannt Parameter \mathbf{x}_j beinhaltet, sind.

Die Gesamtzahl der Beobachtungen n und der Unbekannten u ist als Summe der einzelnen n_j bzw. u_j Beobachtungszeitpunkten zu errechnen.

Für die unbekannt Parameter \mathbf{x} , die aus einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen bestimmt wurden, erhält man gemäss Milev (1986):

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \right)^+ \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} \quad (2.2.2)$$

wobei \mathbf{Q}_l die Gesamtkovarianzmatrix ist und die einzelnen Kovarianzmatrizen \mathbf{Q}_{lj} beinhaltet. In (2.2.2) ist zugelassen, dass es Korrelationen zwischen den Beobachtungen aus den einzelnen Beobachtungszeitpunkten gibt.

Die Änderungen der Koordinaten und der Einflussgrößen können in einer Zeitreihe als stochastische Variablen betrachtet werden.

Für alle Beobachtungszeitpunkte unter der Voraussetzung, dass jeweils die gleichen unbekannt Parameter \mathbf{b} eingesetzt werden, ergibt sich :

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{F} \mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2.3)$$

mit

$\delta \mathbf{x}$: Änderung der Koordinaten der Kontrollpunkte

\mathbf{F} : Matrix der partielle Ableitungen nach den Einflussgrößen-> determi-

\mathbf{b} : Vektor der gesuchten Parameter -> nistischer Anteil

$\boldsymbol{\varepsilon}$: Stochastischer Anteil

Aufgrund der Forderung

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{Q}_x^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} = \min$$

können in einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen die gesuchten Parameter \mathbf{b} berechnet werden:

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{F}^T \mathbf{Q}_{\delta \mathbf{x}}^{-1} \mathbf{F} \right)^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{Q}_{\delta \mathbf{x}}^{-1} \delta \mathbf{x} = \mathbf{D}_x \delta \mathbf{x} \quad (2.2.4)$$

Berücksichtigt man (2.2.2), so ergibt sich:

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{F}^T \mathbf{Q}_{\delta \mathbf{x}}^{-1} \mathbf{F} \right)^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{Q}_{\delta \mathbf{x}}^{-1} \left(\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \right)^+ \mathbf{A} \mathbf{Q}_l^{-1} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{D} \boldsymbol{\delta} \quad (2.2.5)$$

Nach Bildung eines gemeinsamen Vektors der gesuchten Parameter \mathbf{b}_j , d.h. einer gemeinsamen Auswertung der Messungen aller Beobachtungszeitpunkten, unter der Annahme daß kleine Unterschiede zwischen den einzelnen \mathbf{b}_j zulässig sind, ist:

$$\mathbf{b} = \mathbf{D} \mathbf{x} \quad (2.2.6)$$

oder:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} & \cdot & \cdot & \mathbf{D}_{1w} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} & \cdot & \cdot & \mathbf{D}_{2w} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{D}_{w1} & \mathbf{D}_{w2} & \cdot & \cdot & \mathbf{D}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_1 \\ \delta \mathbf{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta \mathbf{x}_w \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

In (2.2.7) ist sowohl die Korrelation zwischen den einzelnen Beobachtungszeitpunkten als auch den einzelnen Parametern berücksichtigt.

Unter der Annahme, dass solche Korrelationen vernachlässigbar sind (d. h. $\mathbf{D}_{kj} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_{kj} = \mathbf{0}$) wird die Ausgleichung in Teilausgleichungen der einzelnen Beobachtungszeitpunkte zerlegt. Ersetzen von (2.2.2) in (2.2.7) ergibt :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{D}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\mathbf{A}_{11}^T \mathbf{Q}_{\delta}^{-1} \mathbf{A}_{11} \right)^+ \mathbf{A}_{11}^T \mathbf{Q}_{\delta}^{-1} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \left(\mathbf{A}_{22}^T \mathbf{Q}_{\delta}^{-1} \mathbf{A}_{22} \right)^+ \mathbf{A}_{22}^T \mathbf{Q}_{\delta}^{-1} \boldsymbol{\delta}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(\mathbf{A}_{ww}^T \mathbf{Q}_{\delta}^{-1} \mathbf{A}_{ww} \right)^+ \mathbf{A}_{ww}^T \mathbf{Q}_{\delta}^{-1} \boldsymbol{\delta}_w \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b}_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{22} & \cdot & \cdot & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \mathbf{G}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{\delta}_w \end{bmatrix}$$

Hier sind $\boldsymbol{\delta}_j$ die Differenzen der Beobachtungen.

Wenn keine Unterschiede zwischen den einzelnen \mathbf{b}_j aus (2.2.8) auftreten, sollten sie gleich \mathbf{b} aus (5.2.5) sein zu prüfen wäre die Erfüllung folgender Kriterien:

$$F_f = \frac{\Omega_0}{\Omega_1} \quad \text{mit} \quad \Omega_0 = \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_{\delta x} \mathbf{v} \quad \text{und} \quad \Omega_1 = \sum_{j=1}^{w-1} \Omega_j \quad (2.2.9)$$

mit den entsprechenden Freiheitsgraden:

$$\begin{aligned} F_f &= \left[u - 3(w-1); \quad 3(w-2) \quad 12 \right] \\ \Omega_0 &= u - 3 \cdot 12 \\ \Omega_1 &= u - 3(w-1)12 \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

F_f folgt einer Fisher - Verteilung. Der Grenzwert F_r für das Kriterium wird berechnet oder entsprechend aus statistischen Tabellen entnommen. Wenn die Hypothese

$$P(F_f \geq F_r / H_0) = \alpha \quad (2.2.11)$$

nicht verworfen wird (α - Signifikanzniveau), kann angenommen werden, dass keine Unterschiede in den Parametern \mathbf{b} ermittelt nach (2.2.4) und (2.2.8), festzustellen sind. Dadurch können die Parameter des Verschiebungsfeldes des untersuchten Objekts mittels

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{D} \mathbf{x}^{w+k} \quad (2.2.12)$$

modelliert werden. Hier ist $w + k$ die Anzahl der Beobachtungszeitpunkte, die modelliert werden sollen und \mathbf{b}_m der Vektor der Modellparameter.

Die Gleichung (2.2.12) zeigt, wie sich diese Parameter verändern werden, wenn es keine Störungen zufälligen Charakters gibt und keine Messfehler auftreten.

Ein Vektor δ der Abschätzungen sei wie folgt definiert:

$$\delta = \mathbf{b} - \mathbf{b}_M \quad (2.2.13)$$

und zeigt die Abweichungen vom Modell an. Er stellt den Unterschied zwischen den tatsächlichen Werten \mathbf{b}_j , die durch die Messungen bestimmt wurden, und den Modellwerten dar.

Für die Approximation der Punktverschiebungen ist ein lineares Modell angenommen worden. Es können aber auch andere Modelle als zugrundegelegt werden. Das Modell, das am besten die Bewegung des untersuchten Objekts approximiert wird gewählt, aufgrund der Abschätzungen der Übereinstimmung zwischen den tatsächlichen Werten \mathbf{b}_j und den modellierten \mathbf{b}_m . Die Abschätzung erfolgt durch die empirische Varianz S^2 der Gewichtseinheit:

$$S^2 = \frac{\delta^T \mathbf{Q}_b^{-1} \delta}{3n - 12} \quad (2.2.14)$$

und durch den mehrdimensionalen Korrelationskoeffizienten R^2 (Pelzer 1982):

$$R^2 = 1 - \frac{\delta^T \mathbf{Q}_b^{-1} \delta}{(\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})^T \mathbf{Q}_b^{-1} (\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}})} \quad (2.2.15)$$

Die Gültigkeit von R wird durch das F - Kriterium geprüft. Das Modell, das den kleinsten S^2 und den höchstens R^2 - Wert aufweist, wird als am besten geeignet zur Approximation der Parameter des Verschiebungsfeldes angesehen.

2.3. Auswertetechniken bei permanenter Überwachung

Bei automatisierten Messverfahren fällt in der Regel eine große Anzahl von zeitlich eindeutig zuzuordnenden Messwerten mit konstanter Abtastrate an. Eine vielfach einfachere Darstellung solcher Zeitreihen gelingt im Frequenzbereich. Das Datenmaterial lässt sich dabei in aller Regel durch FOURIER als Summe von harmonischen Schwingungen darstellen.

Die Verarbeitung von Sensordaten, die Eliminierung von Störanteilen, die Darstellung im Frequenzbereich sowie Ansätze zur Analyse von Zeitreihen werden hier vorgestellt und im Kapitel 4 anhand eines Beispiels erläutert.

2.3.1. Samplingtheorem und Filterung der Daten

Sensorsignale enthalten meist hochfrequente Störanteile in den Daten. Um das sogenannte Signal-Rausch-Verhältnis zu verbessern, empfiehlt es sich, nicht benötigte Frequenzen herauszufiltern. Bewährte Verfahren sind das Hochpassfilter, das Tiefpassfilter und das Bandpassfilter, welche bisher vorrangig im Bereich der Nachrichtentechnik eingesetzt wurden.

- Tiefpass-Filterungen sind erwünscht, wenn niederfrequente Signale von vorwiegend hochfrequentem Rauschen befreit werden sollen. Diese Art der Filterung ist stets gleichbedeutend mit einer Glättung der beobachteten Funktion. Beispiele:
 - gleitende Mittelwerte,
 - Glättung durch Trägheit der Messgeräte.
- Hochpassfilterungen eignen sich zur Elimination langsamer Veränderungen in den Daten, wie beispielsweise Trends bei der Berechnung von Autokorrelationen. Beispiele:
 - Hochpassfilterung mit Hilfe gleitender Mittel (komplementär zum entsprechenden Tiefpassfilter),
 - Differenzenfilter.
- Bandpassfilterungen nehmen die wichtigste Position bei der Untersuchung geophysikalischer und meteorologischer Vorgänge ein. Ziel ist das Herauspräparieren von Periodizitäten aus dem Datenmaterial, bei dem eine Frequenzabhängigkeit des beobachteten Vorgangs studiert werden soll. Angestrebt wird ein Maximum bei einer bestimmten Frequenz. Beispiele:
 - Tiefpass- und anschließende Hochpassfilterung,
 - Subtraktion zweier verschiedener Tiefpassfilterungen,
 - Kreuzkorrelationsfilterung,
 - harmonischer Bandfiltersatz.

Das jeweils optimale Filter ist gefunden, wenn die Differenz bzw. die mittlere quadratische Abweichung aus der gefilterten Funktion und einem interessierenden Signal zu einem Minimum wird.

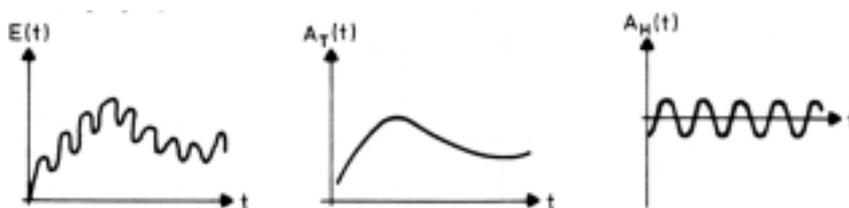


Abb. 2.3: links: Sensorsignal, Mitte: nach Tiefpassfilterung, rechts: nach Hochpassfilterung

Damit durch die Filterung kein Informationsverlust entsteht, ist das Abtast- oder auch Samplingtheorem nach Nyquist und Shannon zu beachten: „Bei der Zeitdiskretisierung eines Signals geht keine Information verloren, wenn die Abtastfrequenz mehr als doppelt so groß ist wie die höchste im Signal vorkommende Frequenz“ (2.3.1).

$$2 \cdot f_{\max} < f_{abt} \quad (2.3.1)$$

2.3.2. Autokotvarianzfunktion

Bei ingenieurgeodätischen Messgrößen liegt fast immer eine stetige Funktion der Zeit vor, die an diskreten Stellen abgetastet wird. Liegt die Abtastrate zweier Messungen zu dicht beieinander, sind die Ergebnisse der Messungen korreliert, da sich die meist physikalischen Messgrößen nicht so schnell ändern. Eine Überprüfung mittels Autokorrelationsfunktion wird notwendig, da dies Auswirkung auf die Anzahl der Freiheitsgrade und damit auf die statistische Analyse hat.

Kontinuierliche Zeitreihen können durch ihren Erwartungswert μ und ihre Varianz σ^2 beschrieben werden. Bei diskreten Zeitreihen lassen sich der Mittelwert \bar{x} und die empirische Varianz s^2 als Schätzwerte für μ und σ^2 berechnen (TAUBENHEIM 1969).

Für beide Zeitreihen lässt sich als weitere wichtige Eigenschaft die Erhaltenstendenz des Prozesses, $C(\tau)$ bzw. $C(k)$, bestimmen. Mit $C(0) = \sigma^2$ bzw. $C(0) = s^2$ ist die Varianz direkt aus der Autokovarianzfunktion abzulesen. Die Berechnung der Korrelationskoeffizienten ergibt sich durch die Autokorrelationsfunktion mit

$$K(k) = \frac{C(k)}{C(0)} \quad (2.3.2)$$

Sind in der Autokovarianzfunktion eine oder mehrere dominante Frequenzen erkennbar, spricht man hier von einem Prozess mit farbigem Rauschen. Sind keine dominanten Frequenzen enthalten, liegt ein Prozess mit weißem Rauschen vor.

Treten Korrelationen zwischen den Beobachtungen auf, berechnet sich die Varianz des Mittels aus dem Quotienten der Varianz des Einzelwertes und der Anzahl der Messwerte, multipliziert mit einer äquivalenten Erhaltungszahl. Sie gibt an, „bei wie vielen aufeinanderfolgenden Messwerten die Größe $x(t)$ praktisch einen gleichen Wert behält“ (TAUBENHEIM 1969). Dadurch wird die Zahl der Freiheitsgrade mit Auswirkungen auf die statistischen Testverfahren reduziert.

2.3.3. Powerspektrum

Durch die FOURIER-Transformation erfolgt die Darstellung vom Zeitbereich in den Frequenzbereich. Sie ermöglicht die Untersuchung des Datenmaterials auf vorhandene Periodizitäten, die oftmals nicht sofort erkennbar sind.

Die Frequenzfunktion $P(f)$ berechnet sich aus der Zeitfunktion $C(\tau)$:

$$P(f) = 4 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau \quad f \dots \text{Frequenz} = \frac{1}{T} \quad (2.3.3)$$

Das Ergebnis dieser FOURIER-Cosinus-Transformation ist das Powerspektrum $P(f)$. Energiespektrum, Leistungsspektrum oder Energiedichtefunktion sind die in der Literatur ebenfalls geläufige Begriffe. Wegen der begrenzten Abtastrate Δt können höherfrequente Anteile des Prozesses nicht erfasst werden. Es ergibt sich eine Grenzfrequenz, die NYQUIST-Frequenz, bis zu der eine Berechnung möglich ist (\surd Samplingtheorem):

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t}$$

Die Amplituden A_i des Powerspektrums lassen sich annähernd zu einer bestimmten Frequenz f_i berechnen:

$$A_i = \sqrt{P(i) \cdot \frac{1}{m\Delta t}} \quad (2.3.4)$$

2.3.4. Kreuzkovarianzfunktion

Die Kreuzkovarianzfunktion ist ein Maß für die Ähnlichkeit zweier Zeitreihen $x(t)$ und $z(t)$. Betrachtet man die Zeitreihe $x(t)$ als Eingangsgröße und die Zeitreihe $z(t)$ als Ausgangsgröße, wird der Zusammenhang zwischen gemessener Einflussgröße und Deformationsgröße schnell klar. Mit N Messungen einer Abtastrate Δt über die Stichprobenlänge $T = N \cdot \Delta t$ folgen für diskrete Verschiebungsschritte $\tau = k \cdot \Delta t$ die Schätzwerte für $C_{xy}(\tau)$.

$$C_{xz}(\tau) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} [x_i - \bar{x}] \cdot [z_{i+k} - \bar{z}] \quad (2.3.5)$$

Unter Berücksichtigung der Varianzen $C_x(0)$ und $C_z(0)$ der Beobachtungen $x(t)$ und $z(t)$, erhält man die normierte Kreuzkovarianzfunktion = Kreuzkorrelationsfunktion.

$$K_{xz}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_x(0) \cdot C_z(0)}} \quad (2.3.6)$$

Der Korrelationskoeffizient schwankt zwischen den Grenzwerten $-1 \leq K_{xz}(\tau) \leq +1$. Ein positives Vorzeichen bedeutet dabei ein zeitliches Nachlaufen der Ausgangsgröße gegenüber der Eingangsgröße. Dieser Fall ist bei Deformationsprozessen die Regel. Aus der Phasenverschiebung lässt sich die Zeitverschiebung somit direkt bestimmen.

Die Aussagefähigkeit einer solchen Funktion wird von Kuhlmann untersucht (Kuhlmann 1996).

2.3.5. Zeitdiskrete Fouriertransformation (ZDFT)

Die zeitdiskrete Fouriertransformation liefert die periodischen frequenzkontinuierlichen Spektren von Zahlenfolgen bzw. von abgetasteten Größen. (Marko 1982)

a) zeitdiskrete Fouriertransformation abgetasteter Größen:

Definition der ZDFT:

$$\underline{U}_\delta(j\omega) := \mathfrak{F}\{u_\delta(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) * e^{-jk\omega T} \quad (2.3.7)$$

Das Spektrum $\underline{U}_\delta(j\omega)$ ist frequenzperiodisch und wiederholt sich im Abstand $f_T = \frac{1}{T}$

$$\underline{U}_\delta(j\omega) = \underline{U}_\delta(j(\omega + l * \omega_T)) \quad \text{mit} \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T} \quad l = \text{Ganzzahl} \quad (2.3.8)$$

Inverse zeitdiskrete Fouriertransformation:

Definition der IZDFT:

$$u(kT) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_T}{2}}^{+\frac{\omega_T}{2}} \underline{U}_\delta(j\omega) * e^{j\omega kT} d\omega \quad (2.3.9)$$

$$\text{und} \quad u_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) * \delta(t - kT)$$

b) zeitdiskrete Fouriertransformation von Zahlenfolgen:

Definition der ZDFT:

$$\underline{U}(j\Omega) := \mathfrak{F}\{u(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) * e^{-jk\Omega}$$

$$\text{mit } T = 1, f_T = 1, \omega_T = \frac{2\pi}{f_T} = 2\pi, \Omega = 2\pi \frac{\omega}{\omega_T} = 2\pi \frac{f}{f_T} \quad (2.3.10)$$

Die Fouriertransformierte $\underline{U}(j\Omega)$ ist frequenzperiodisch und existiert für jedes Ω :

$$\underline{U}(j\Omega) = \underline{U}[j(\Omega + m * 2\pi)], \quad m = \text{Ganzzahl}$$

Inverse zeitdiskrete Fouriertransformation:

Definition der IZDFT:

$$u(k) := \mathcal{S}^{-1}\{\underline{U}(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underline{U}(j\Omega) * e^{jk\Omega} d\Omega \quad (2.3.11)$$

Eigenschaften:

- formal entsprechen viele Eigenschaften der ZDFT von Zahlenfolgen weitgehend den Eigenschaften der Fouriertransformation für zeitkontinuierliche Größen
- speziell gilt bei der ZDFT aber
 - die Spektren bei der ZDFT von Zahlenfolgen sind periodisch
 - die „gewöhnliche“ Faltung geht in eine „Summenfaltung“ über

es gilt:

$$W(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) * v(n-k) = u(n) * v(n) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{W}(j\Omega) = \underline{U}(j\Omega) * \underline{V}(j\Omega) \quad (2.3.12)$$

$$\bullet \text{ AKF: } r_{uu}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) * u(n+k) \quad \longleftrightarrow \quad |\underline{U}(j\Omega)|^2 \quad (2.3.13)$$

$$\bullet \text{ KKF: } r_{uv}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) * v(n+k) \quad \longleftrightarrow \quad \underline{U}_{\delta}(j\Omega) \underline{V}(j\Omega) \quad (2.3.14)$$

- Parseval-Theorem:

$$\text{Energie} = W_u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u(k))^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\underline{U}(j\Omega)|^2 d\Omega \quad (2.3.15)$$

2.3.6. Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Im Unterschied zur ZDFT, welche ein frequenzkontinuierliches Spektrum ermittelt, erhält man mit der DFT ein diskretes Spektrum einer Folge $u(n)$ (z.B. Datenfolge), d.h. nur noch endlich viele Stützstellen des Spektrums $\underline{U}(j\Omega)$. Aus diesem Sachverhalt resultiert die Bedeutung der DFT bei Digitalrechneranwendungen. (Bracewell, 1987)

Definition der DFT:

$$\underline{U}(jn\Delta\Omega) := \sum_{k=0}^{N-1} u(k) * e^{-jkn*\Delta\Omega} \quad (2.3.16)$$

mit N = Anzahl der Stützstellen im Abstand $\Delta\Omega$, $\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Inverse DFT:

Definition der IDFT:

$$u(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underline{U}(jn\Delta\Omega) * e^{jkn*\Delta\Omega} \quad (2.3.17)$$

mit $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Zu N Stützstellen z.B. N Daten erhält man bei der DFT nur noch N Spektralwerte. Bei sehr umfangreichen Datenfolgen (z.B. $N = 1000$) ist die Ermittlung der Spektralwerte rechen- bzw. zeitintensiv. Um bei gleichem Ergebnis die Rechenzeit zu vermindern, werden an Stelle der Definitionsbeziehung der DFT mit Vorteil FFT-Algorithmen (FFT = Fast Fourier Transform = schnelle Fouriertransformation) angewandt.

2.3.7. Zweiseitige z-Transformation (ZT)

Die z-Transformation ermöglicht die Beschreibung diskreter linearer Filter (ähnlich wie die Laplace-Transformation bei kontinuierlichen linearen Filtern) (Jury 1964). Ebenso stellt die z-Transformation eine Erweiterung der Fouriertransformation von Zahlenfolgen dar.

Definition der ZT:

$$\underline{U}(z) := Z\{u(kT)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) * z^{-k} \quad (2.3.18)$$

$$\text{bzw.} \quad \underline{U}(z) := Z\{u(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) * z^{-k}, \quad T = 1$$

mit $\underline{U}(z) = \text{Polynom}$
 $z = \text{Re}\{z\} + j*\text{Im}\{z\}$

Inverse z-Transformation:

Definition der IZT:

$$u(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \underline{U}(z) * z^{n-1} dz \quad (2.3.19)$$

Der Integrationspfad C muss, laut „Funktionentheorie“, singuläre Punkte von $\underline{U}(z)$ einschließen.

2.3.8. Kalman - Filtertechnik

Die Kalman-Filtertechnik stammt aus dem Bereich der Regelungstechnik. Ziel ist es dort, aktuelle Prozesszustände an Sollzustände anzunähern. Bei der Kombination von Daten verschiedener Sensoren, aus denen eine Vielzahl von Zielparametern abgeleitet werden kann, ist der Kalman-Filter bei der Interpretation eine gute Alternative. Anders als in der Regelungstechnik, wo Prozesse an Sollzustände anzupassen sind, wird in der Messtechnik dieses Ausgleichungsproblem iterativ so lange durchgeführt, bis die Abweichungen zwischen dem Modell (Systemmatrizen) und den gemessenen Zuständen (beobachtete Deformationen) zu einem Minimum werden. Mit den so ermittelten Systemmatrizen liegt dann ein zufriedenstellendes mathematisches Bauwerksmodell vor.

Liegen für das zu überwachende Objekt Kenntnisse über Ursache und Wirkung von Deformationsprozessen vor, können sie als Grundlage für ein qualitatives Modell dienen. Das Aufstellen eines Systems von Differentialgleichungen führt zu einer Systemgleichung. Diese mathematische Formulierung beschreibt das System theoretisch. Eine empirische Beschreibung erfolgt durch die messtechnische Überwachung, die Messgleichung.

Sind die Vorkenntnisse falsch oder unzureichend, führt dies zu Unverträglichkeiten zwischen Theorie und Empirie. Ziel ist es, das durch die Systemgleichung definierte Übertragungsverhalten mit Hilfe der Messgleichung zu kontrollieren.

Ein Hilfsmittel zur mathematisch-statistischen Systemidentifikation ist der KALMAN-Filter. Dabei werden die Übertragungseigenschaften des Systems, die durch Differentialgleichungen beschrieben werden in ein Vektordifferentialgleichungssystem 1. Ordnung umgewandelt mit den Unbekannten $x(t)$ = geodätisch beobachtbare Größen. Die Änderung der Unbekannten wird durch folgendes allgemeines Gleichungssystem beschrieben (Welsch 1998):

$$\dot{x}(t) = Tx(t) + Bu(t) + Cw(t) \quad (2.3.20)$$

T... Transitionsmatrix

B... Stellgrößenmatrix

C... Störgrößenmatrix

Durch die bekannte Messgleichung $l(t) = Ax(t)$ erfolgt die Verknüpfung mit der Systemgleichung. Zusammen stellen die Gleichungen den KALMAN-Filteransatz dar. Für diskrete Zeitpunkte lassen sich die Gleichungen folgendermaßen definieren:

- Systemgleichung: $\tilde{x}_{k+1} = T_{k+1,k}x_k + B_{k+1,k}u_k + C_{k+1,k}w_k \quad (2.3.21)$

- Messgleichung: $l_{k+1} = A_{k+1}x_{k+1} \quad (2.3.22)$

Auf die Angabe der Kofaktorenmatrizen wird verzichtet, da hier nur der Ansatz des Kalman-Filters verdeutlicht werden soll.

Unverträglichkeiten von Theorie und Empirie lassen sich durch die Differenz aus Systemgleichung und beobachteten geometrischen Verhältnissen aufdecken:

$$d_{k+1} = l_{k+1} - A_{k+1}\tilde{x}_{k+1} \quad (2.3.23)$$

Mit der Verstärkungsmatrix K und dem Differenzvektor erfolgt die Aufdatierung des Zustandsvektors, welcher die neuen Verhältnisse wiedergibt:

$$x_{k+1} = \tilde{x}_{k+1} + K_{k+1}d_{k+1} \quad (2.3.24)$$

Das größte Problem der Systemidentifikation bereitet die Formulierung der Transitions-, Stellgrößen- und Störgrößenmatrizen. Für diese Matrizen ist die Kenntnis der Materialparameter notwendig, die in vielen Fällen nicht hinreichend bekannt sind. Das Ziel muss sein, die Systemmatrizen für spezielle Anwendungen allgemeingültig anzugeben, was jedoch gute Kenntnisse über das Objekt voraussetzt.

Der Vorteil des Kalman-Filters liegt in seiner Echtzeitfähigkeit und in der Rekursivität. Um den gegenwärtigen Zustand zu bestimmen, werden nur der bis dahin geschätzte Zustand und die gegenwärtigen Beobachtungen mit ihren Kovarianzmatrizen benötigt. Bis zu diesem

Zeitpunkt erfolgte Beobachtungen werden implizit in der Fortschreibung der Kovarianzmatrizen und Parameter berücksichtigt. Funktionale und stochastische Parameter werden in einem konsistenten Modell beschrieben.

Das Problem der Trennung von Signal und Rauschen kann nicht immer befriedigend gelöst werden. Dazu variieren die funktionalen und stochastischen Parameter eines Messprozesses zu schnell. Dennoch ist der Kalman-Filter als ein wesentliches Hilfsmittel zur Auswertung kinematischer Messungen gut geeignet. Er allein reicht jedoch nicht aus, um den stetig steigenden Anforderungen gerecht zu werden. Erst im Zusammenhang mit anderen Algorithmen wird eine Lösung der aktuellen Aufgaben möglich.

Als wichtigste Eigenschaften des Kalman-Filters können festgehalten werden:

- die Fortschreibung der Kovarianzmatrix,
- die Kombinierbarkeit der Daten verschiedener Sensoren sowie
- seine Echtzeitfähigkeit.

Bedingt durch redundante Beobachtungen erhält die Ausgleichsrechnung auch in der Sensorik wieder ihre alte Bedeutung. Die Verwendung redundanter Sensoren wird aus Gründen der besseren Rauschunterdrückung und der größeren Zuverlässigkeit und Genauigkeit unverzichtbar sein. Als Ergebnis erhält man das wichtige Nebenprodukt, die Systemmatrizen, deren Parameter das Bauwerk auf mathematische Weise beschreiben. Eine exemplarische Anwendung des Filteransatzes in seiner Realisierung als *Hannoverahnisches - Filter* ist in Gülal zu finden (Gülal 1997).

2.3.9. Vergleich von Laplace- und z-Transformation

Durch Variablensubstitution gemäß der Vorschrift $z = e^{sT}$ geht die zweiseitige diskrete Laplace-Transformation (Rainville 1963, Marko 1982)

$$L\{u_{\delta}(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(kT) * e^{-skT} \quad (2.3.25)$$

in die zweiseitige z-Transformation (2.3.18) über.

Geometrische Deutung:

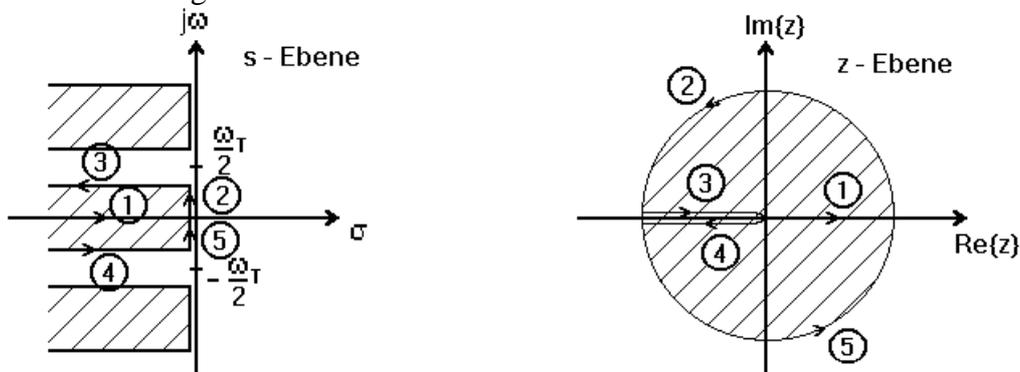


Abb. 2.3: Zweistufige z-Transformation

Es gilt:

$$\underline{U}(z)|_{z=re^{j\Omega}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) r^{-k} e^{-jk\Omega} = \mathfrak{S}\{u(k) r^{-k}\} \quad (2.3.26)$$

Für $r = 1$ ($\hat{=}$ Einheitskreis) folgt:

$$\underline{U}(z)|_{z=re^{j\Omega}} = \underline{U}(e^{j\Omega}) = \mathfrak{S}\{u(k)\} \quad (2.3.27)$$

sofern die z-Transformierte auf dem Einheitskreis (d.h. $z = e^{j\Omega}$) existiert.

Frequenzgang:

$$\underline{U}(j\Omega) = \mathfrak{S}\{u(k)\} = \underline{U}(e^{j\Omega}) = \underline{U}(z)|_{z=e^{j\Omega}} \quad (2.3.28)$$

3. Integrierte Lösung für Deformationsaufgaben

3.1. Voraussetzungen und Lösungsweg

Wie bereits aus Abschnitt 2 ersichtlich, sind die Untersuchungen von Deformationen einer großen Anzahl von Objekten mit integrierten Lösungswegen verbunden. Das betrifft besonders Ingenieurobjekte, bei denen die Relationen: einwirkende Kräfte - Objekt - Verschiebungen - Deformationen – relativ eindeutig sind. Von besonderer Bedeutung ist es hier, Lösungen zu finden, die die vorhandenen Bedingungen, Konstruktionsbesonderheiten, und die technischen Erfassungsoptionen möglichst genau berücksichtigen. Weiter ist es wichtig, dass man das Objekt vollständig untersucht, um deformierbare Flächen, einwirkende Kräfte und Spannungen zu bestimmen und zu interpretieren.

Des weiteren ist wichtig:

- das Vorhandensein von einem homogenen, deformierbaren Medium für das z.B. die Elastizitätstheorie gültig ist
- die Möglichkeit geodätisch markierte diskrete Punkte auf dem Objekt zu bestimmen und zu kontrollieren, die für das Objekt repräsentativ sind
- die Möglichkeiten für eine weitere Diskretisierung sollten gegeben sein
- die Ergebnisse sollten so Informationsreich sein das eine vollständige Abschätzung des Zustands, der Änderungen und der Gefahr für die Stabilität und Sicherheit des Objekts erhalten werden kann.
- die stochastischen Eigenschaften, die durch geodätische Methoden bestimmt worden sind, sollten weiter auf die bautechnischen Elemente übertragen werden
- die schon existierenden und gut bewährten Teillösungen in der Geodäsie, Photogrammetrie, Mathematik u. s. w., wie z. B. Transformationen sollten hier einbezogen werden.
- die Aufgabe möglich komplex- und interdisziplinär zu betrachten

Die Beziehungen zwischen den einwirkenden Kräften, Spannungen, Deformationen und Verschiebungen im Kontinuum und an den Ingenieurbauten stellen den Allgemeinfall der Deformationsuntersuchung dar. Anhand geodätischer Messungen werden Koordinaten und Verschiebungen ausgewählter Punkte am untersuchten Objekt mit ihren stochastischen

Eigenschaften erhalten. Weiter können sie für die Untersuchung des Spannungs- und Verzerrungszustandes verwendet werden. Zur Lösung dieser Aufgaben können unterschiedlich existierende oder neue Lösungsstrategien angewandt werden. Von großer Bedeutung ist die Berücksichtigung der Eigenschaften sowie der Stochastik der geodätisch bestimmten Größen.

Da sich alle Abbildungen mit der Frage der Verzerrung beschäftigen, erscheint es sinnvoll, die Verzerrungen eines Körpers mit der Suche nach einer geeigneten Abbildungsfunktion zu verknüpfen. Dabei steigt mit der Inhomogenität der Verzerrungen die Komplexität der Abbildung. Die in der Geodäsie vorhandenen mathematischen Lösungswege, die ihre Stärken bewiesen haben, wie z.B. Transformationen, können effektiv bei der Untersuchung der Kontinuumänderung eingesetzt werden. Sie erlauben eine schnelle und effiziente Lösung der Aufgabe. Als Voraussetzung dafür gelten die Kenntnis der Verschiebungsvektoren der auf gemeinsame Deformationsparameter untersuchten Objektpunkte zweier diskreter Zustände.

Zur Beschreibung der Verzerrungen unter Berücksichtigung der elastischen Eigenschaften des Objekts soll im folgenden ein Lösungsweg entwickelt werden.

Eine auf dem Objekt definierte Fläche soll so verformt werden, dass die ausgewählten Objektpunkte ihre signifikante Verschiebung vom Gleichgewichtszustand A in den Gleichgewichtszustand B durchführen. Dies soll unter Einhaltung der Nachbarschaftsbeziehungen (geometrische Verträglichkeit) und der Randbedingungen erfolgen. Somit wird das Problem der zweidimensionalen Deformation zum Problem der Abbildung einer Fläche in eine andere. Diese kann einer Delauney Diskretisierung unterzogen werden, in dem die Objektpunkte die Dreiecksknoten mit bekannter Verschiebung darstellen. Diese Dreiecke können einer erneuten Diskretisierung unterzogen werden. Dabei werden die Objektpunkte als die, eine vorgeschriebene Verschiebung durchführen, betrachtet und die Neupunkte sind die Knotenpunkte aus der zweiten Diskretisierung.

Die Dreiecke sind nicht unabhängig voneinander. Ändern sich die Koordinaten eines oder mehrerer Dreieckspunkte, so hat das direkt eine Änderung der Koordinaten angrenzender Dreiecke zur Folge.

Durch eine Dreiecksvermaschung über die Punkte, deren Verschiebung unbekannt ist, werden die Verschiebungen der Stützpunkte auf die unbekannt Punkte verteilt. Dabei gelten für die Dreiecksseiten Bedingungen. Diese Bedingungen können z.B. eine gewichtete Maßstabsänderung der Dreiecksseiten sein. Die Gewichtung kann anhand der Fläche der Dreiecke erfolgen. Durch die Dreiecksvermaschung sollen nun die bekannten Verschiebungen der Stützpunkte, entsprechend den Bedingungen, die Verschiebung, der in die Dreiecksvermaschung einbezogenen Objektpunkte bewirken. Damit ist die Abbildungsvorschrift für alle Punkte definiert.

Da sich viele feste Stoffe elastisch verhalten, ist es möglich, den Übergang von den bekannten Dreiecksseiten im gedehnten und ungedehnten Zustand auf die Verzerrungen, mit Anwendung des Hookschen Gesetzes, zu beschreiben. Die berechneten Verzerrungen für jedes Element lassen sich über das Stoffgesetz in Spannungen umrechnen, die bei Berücksichtigung der diskreten Flächen auf die darauf wirkenden Kräfte schließen lassen. Die Auswertemethode lässt sich bis zum Erreichen einer gewissen Grenzspannung anwenden. Nach deren Überschreitung kommt es zu Brüchen, zum Fließen und zu plastischen Deformationen, dabei reagiert das Medium nicht mehr homogen elastisch.

3.2. Diskretisierung des Kontinuums

Rechenaufwand und Diskretisierungsgrad können durch die Maschenvorgabe gesteuert werden. Für die Diskretisierung kommen zwei mögliche Herangehensweisen in Betracht. Für die nachfolgende Ausführung definieren wir sie als einstufige und zweistufige Lösung.

Bei der einstufigen Lösung wird ein reguläres Netz generiert, das parallel zu den beiden Koordinatenachsen entwickelt wird. Dabei ist die Möglichkeit gegeben in X und Y unterschiedliche Maschenabstände zu definieren. Das Ganze wird durch ein Polygon begrenzt das die äußersten Objektpunkte verbindet. Die Extrapolation außerhalb des Polygons wäre unerwünscht da sie fehlerhafte Ergebnisse liefert. Das rechtwinklige Netz kann auch unter einem bestimmten Winkel zu den Koordinatenachsen gedreht werden.

Zweite Ausführungsmöglichkeit der Vernetzung bei der einstufigen Lösung ist ein Radialnetz mit Zentrum im Schwerpunkt des Objektpunktnetzes. In der Geodäsie so auch im Sinne der Diskretisierung ist der Begriff Netz als geometrische Verknüpfung von Knoten und Kanten zu verstehen. Dabei ist auch die schon genannte Randdefinition einzuhalten.

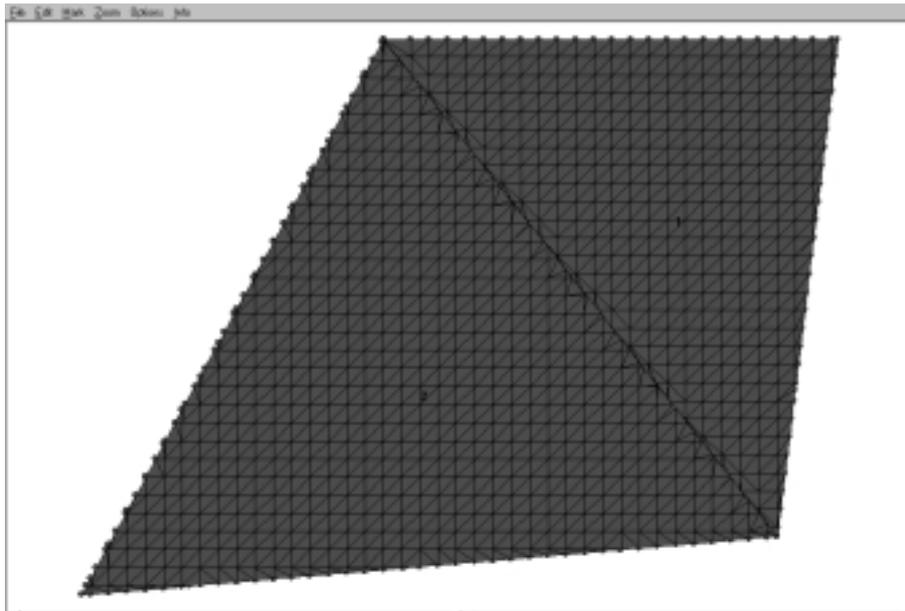


Abb. 3.1 Zweistufige Diskretisierung

Bei der zweistufigen Generierung werden die Objektpunkte zu Dreiecken vermascht, so dass z.B. eine Delauney Triangulation entsteht. Als weiterer Schritt folgt die Unterteilung dieser „Makrodreiecke“ nach der in der einstufigen Generierung genannten Methode (Abb. 3.1). Die Bildung des regulären Netzes erfolgt parallel zu einer der Dreiecksseiten oder gedreht unter einem bestimmten Winkel. Beim Radialnetz befindet sich das Zentrum im übergeordneten Dreiecksschwerpunkt, was den Vorteil hat, dass man diesem charakteristischen Punkt auch zusätzliche Eigenschaften zuordnen kann, z.B. der Strainellipsen (Welsch 1983).

Die so entstandenen finiten Vierecke aus den Maschen werden durch Diagonalverbindung in Dreiecke unterteilt. Damit ist die Diskretisierung abgeschlossen. Die Strainparameter benachbarter Dreiecke sind stark korreliert, da von den vier Punkten, aus deren

Verschiebungen sie abgeleitet werden, zwei in die Berechnung beider eingehen. Dies wird in der nachfolgenden Ausgleichung berücksichtigt (Kersting 1992).

Empfehlenswert ist es den Diskretisierungsprozess interaktiv zu beeinflussen, um bestimmte Bedingungen einzuhalten, die für die nachfolgenden Algorithmen von Bedeutung sind.

An erster Stelle dürfen sich keine „entarteten“ Drei- oder Vierecke bilden, deren Fläche in etwa 0 ist.

Dreiecke mit extrem spitzen Winkeln könnten nach der Deformation leicht in eine Linie übergehen oder sich spiegeln, beides ist für die Abbildungsvorschrift nicht zulässig.

Die Diskretisierung sollte sich im Falle der Gewinnung neuer Erkenntnisse zur Struktur des untersuchten Körpers flexibel ändern lassen, wie z.B. über signifikanten Inhomogenitäten, um dadurch einer Veränderung der Diskretisierungsbedingungen Rechnung zu tragen.

3.3. Übertragung der nachgewiesenen Verschiebungseigenschaften auf den Knoten der Diskretisierung

3.3.1. Voraussetzungen

Ziel sei eine geeignete Übertragungsfunktion zu finden, die den Übergang zwischen zwei Gleichgewichtszuständen, von unverformten zum verformten Objekt, beschreibt.

Wenn ein Objekt deformiert wird, setzt es den verursachenden Kräften mit zunehmender Dehnung zunehmenden Widerstand entgegen. Das hat zur Folge, dass die Punkte des Objektes die Lage einnehmen werden, in der die Dehnungen minimal sind. Das heißt, die Verformungsenergie minimal ist. Das gilt natürlich nur so lange, wie das Material nicht übermäßig belastet wird, was sonst eine Zerstörung des Objektes zur Folge hätte. Das bedeutet, dass die Quadratsumme der Differenzen der als Beobachtungen eingeführten Strecken zwischen den Punkten mit gemessenen Verschiebungen und dieser aus der zusätzlichen Diskretisierung in beiden Beobachtungszeitpunkten möglichst minimal sein sollte. Die Gewichtsmatrix P wird gebildet aus den Reziproken des Quadrates der Seitenlängen der Elemente aus Diskretisierung des Objektes aus den ersten Beobachtungszeitpunkt.

$$\sum W_F = \sum P \cdot \Delta s^2 = \min \quad (3.3.1)$$

Eine andere Definition ergibt sich unter der Annahme, dass die Verformungsenergie einer Fläche proportional zu dem Produkt aus der Fläche und dem Quadrat der Maßstabsänderung ist. Dies soll unabhängig von der Form der Fläche sein.

$$W_F \cong F \cdot \Delta m^2 \quad (3.3.2)$$

Der Ausdruck (3.3.2) stellt die innere Energiedichte dar.

Die Zielfunktion lautet: Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte aller Dreiecke so, dass die Summe der Verformungsenergie minimal wird (Gielsdorf, Gründig 1997).

$$\sum W_F = \sum F \cdot \Delta m^2 = \min \quad (3.3.3)$$

Die Zielfunktion der Methode der kleinsten Quadrate lautet:

$$\sum p \cdot v^2 = \min \quad (3.3.4)$$

daraus folgt, die Gesamtfläche befindet sich genau dann im Zustand der geringsten Verformungsenergie wenn die Quadratsumme der Maßstabsänderungen multipliziert mit der jeweiligen Fläche des Einzelements minimal ist. Im funktionalen Modell der Ausgleichung werden daher Maßstäbe als Beobachtungen eingeführt und mit der Fläche des Elementes gewichtet.

Bei der allgemeinen Deformation eines zweidimensionalen Elements kommt es zu drei Maßstabsänderungen:

Maßstabsänderung in x-Richtung
 Maßstabsänderung in y-Richtung
 Scherung zwischen x- und y-Achse

Um die Scherung zwischen x- und y-Achse ebenfalls direkt als Maßstabsänderung betrachten zu können, wird dies aus der Formel für einen Kreisbogen erhalten.

$$b = r\alpha \quad (3.3.5)$$

b Bogenlänge
 α Zentriwinkel
 r Radius

Daraus folgt:

$$\Delta m = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \quad (3.3.6)$$

3.3.2. Ebene Koordinatentransformation

Von den im zweidimensionalen Fall möglichen 4-, 5 und 6- Parameter-Transformationen werden wir uns nur mit der letzten näher beschäftigen. Die 4 Parameter-Transformation beinhaltet 2 Translationen, 1 Rotation und 1 Maßstab. Bei Vernachlässigung des Maßstabs, wird wie bereits im Abschnitt 2 behandelt nur eine Starrkörperbewegungen beschrieben. Die 5 Parameter-Transformation würde eine Starrkörperbewegung eines zweiteiligen Körpers beschreiben, bei dem zusätzlich noch ein Auf- oder Auseinanderdriften beider Teile stattfindet. Als Beispiel können wir zwei Blöcke eines Massives betrachten die durch ein Spalt getrennt sind. Für die Beschreibung von Bewegungen unterschiedlicher Größenordnung, die innerhalb eines Kontinuums stattfinden und unumgänglich zu Verzerrungen respektive Spannungen führen, ist im zweidimensionalen Fall die durch 6 Parametern beschriebene auch ebene Affintransformation, geeignet. Sie erlaubt außer der Modellierung unterschiedlicher

Maßstäbe in den beiden Achsrichtungen des lokalen Systems auch eine Abweichung vom rechten Winkel den sie miteinander bilden.

Ziel der Transformation ist die Übertragung (Abbildung) der identisch bezeichneten Objektpunkte vom Zustand im Beobachtungszeitpunkt *I* in den Zustand Beobachtungszeitpunkt *II*. Da in der Regel über mehr als drei identisch bezeichnete Punkte in beiden Zeitpunkten verfügt wird, liegt ein Ausgleichsproblem vor.

3.3.3. Ebene bilineare Transformation für ein 4 Knoten Element als Abbildungsfunktion.

Gegeben sei ein viereckiges Einzelelement.

Eine Transformation der Form

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

auch bekannt als Möbius Transformation (Thomas 1979), hat folgende Eigenschaften:

- f kann als Kombination einer endlichen Anzahl von Rotationen, Translationen, Skalierungen und Inversionen betrachtet werden.
- f bildet eine verformte komplexe Fläche in sich selbst
- f bildet Kreise und Linien in Kreise und Linien ab.
- f ist konform

Zur Herleitung der Verschiebungs- Interpolationsmatrix wird auf die Knotenpunktverschiebungen zurückgegriffen die sich durch $\xi(x, y)$ und $\eta(x, y)$ ausdrücken lassen. Der funktionale Zusammenhang zwischen den Verschiebungen ξ, η und den Koordinaten x, y sei durch eine bilineare Transformation der Form

$$\begin{aligned}\xi &= a_{01} + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}xy \\ \eta &= a_{02} + a_{12}x + a_{22}y + a_{32}xy\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

gegeben (Kraus 1994).

Die unbekannt Koeffizienten $a_{01} \dots a_{23}$ lassen sich durch die unbekannt Knotenpunktverschiebungen $\xi_{1 \dots 4}$ und $\eta_{1 \dots 4}$ ausdrücken.

Mit

$$\xi = [\xi_1 \dots \xi_4 : \eta_1 \dots \eta_4] \quad (3.3.8)$$

kann (3.3.7) in Matrizenform wie folgt aussehen:

$$\begin{bmatrix} \xi(x, y) \\ \eta(x, y) \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi} \mathbf{a} \quad (3.3.9)$$

Hier ist

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi} & \\ & \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi} = [1 \quad x \quad y \quad xy] \quad (3.3.10)$$

und $\mathbf{a}^T = [a_{01} \quad a_{11} \quad a_{21} \quad a_{31} : a_{02} \quad a_{12} \quad a_{22} \quad a_{32}]$.

Gleichung (3.3.9) wird für alle Knotenpunkte angesetzt, daher ergibt sich unter Berücksichtigung von (3.3.8):

$$\xi = \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (3.3.11)$$

Hier ist

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \\ & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Wenn (3.3.11) nach \mathbf{a} aufgelöst wird und das Ergebnis in (3.3.9) eingesetzt wird, ergibt sich

$$\mathbf{H} = \mathbf{\Phi} \mathbf{A}^{-1} \quad (3.3.12)$$

als Verschiebungs– Interpolationsmatrix bezeichnet.

Die Verzerrungs– Verschiebungsmatrix kann nun direkt aus (3.3.12) gewonnen werden. Unter der Voraussetzung, dass für den ebenen Spannungszustand die Verzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}] \quad (3.3.13)$$

sich aus (3.3.7) nach Differenzierung nach x und entsprechend nach y ergeben und das die Elemente in \mathbf{A}^{-1} von x, y unabhängig sind, ist sie entsprechend

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} \mathbf{A}^{-1} \quad (3.3.14)$$

mit

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \quad (3.3.15)$$

Den generalisierten Spannungsvektor ergibt sich aus:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.3.16)$$

wobei \mathbf{C} eine generalisierte Elastizitätsmatrix ist.

3.3.4. Ebene affine Transformation für ein 3 Knoten Element als Abbildungsfunktion

Eine Transformation der Art:

$$w = f(z) = z_0 + \left(\frac{a+b}{c+d} \right) z$$

wird affine Transformation genannt (Thomas 1979) und hat folgende Eigenschaften:

- f kann als Kombination einer endlichen Anzahl von Rotationen, Translationen, Skalierungen betrachtet werden.
- f ist parallel- und teilverhältnistreu
- f ist konform

und Einschränkungen:

- Das Dreieck darf nicht gespiegelt werden
- Die Fläche des Dreieckes darf nicht null sein.

Wichtig für das Ausgleichungsmodell ist die Beziehung zwischen den Transformationsparametern und den unbekanntenen Koordinaten der Dreiecksknoten.

Jedes Dreieck kann durch eine 6-Parameter(affine) Transformation eindeutig auf ein anderes abgebildet werden. Der Ansatz lautet (Kraus 1994):

$$\begin{aligned} \xi &= a_{01} + a_{11}x + a_{21}y \\ \eta &= a_{02} + a_{12}x + a_{22}y \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Die Transformationsmatrix beinhaltet dabei die Information über die Maßstabsänderungen in x- und y-Richtung sowie die Scherung zwischen den Koordinatenachsen.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_x \cdot m_x & \sin \varphi_x \cdot m_x \\ \cos \varphi_y \cdot m_y & \sin \varphi_y \cdot m_y \end{pmatrix} \quad (3.3.18)$$

Die Formeln für die Maßstäbe in x und y ergeben sich aus dem trigonometrischen Pythagoras:

$$m_x = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} \quad (3.3.19)$$

$$m_y = \sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2}$$

Den Winkel zwischen x - und y -Achse kann man mit Hilfe eines Additionstheorems berechnen. Das Additionstheorem lautet:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (3.3.20)$$

Aus dem Aufbau der Matrix A folgt:

$$a_{11} \cdot a_{12} = m_x m_y \cdot \cos \varphi_x \cos \varphi_y$$

$$a_{21} \cdot a_{22} = m_x m_y \cdot \sin \varphi_x \sin \varphi_y$$

$$a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} = \underbrace{m_x m_y}_{\approx 1} \cdot \underbrace{(\cos \varphi_x \cos \varphi_y + \sin \varphi_x \sin \varphi_y)}_{\cos(\varphi_x - \varphi_y)} \quad (3.3.21)$$

$$\cos(\varphi_x - \varphi_y) = a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22}$$

Der Scherungswinkel ε errechnet sich wie folgt:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} + \varphi_x - \varphi_y \quad (3.3.22)$$

entsprechend

$$\sin \varepsilon = \cos(\varphi_x - \varphi_y) \quad (3.3.23)$$

Aufgrund der Tatsache, dass ε ein sehr kleiner Winkel ist kann geschrieben werden

$$\varepsilon \approx \sin \varepsilon = a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} \quad (3.3.24)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m_x}{\partial x_1} &= \frac{a_{11} \cdot (y_2 - y_3) + a_{21} \cdot (x_3 - x_2)}{m_x \cdot \det \mathbf{A}} \\
\frac{\partial m_x}{\partial x_2} &= \frac{a_{11} \cdot (y_3 - y_1) + a_{21} \cdot (x_1 - x_3)}{m_x \cdot \det \mathbf{A}} \\
\frac{\partial m_x}{\partial x_3} &= \frac{a_{11} \cdot (y_1 - y_2) + a_{21} \cdot (x_2 - x_1)}{m_x \cdot \det \mathbf{A}}
\end{aligned} \tag{3.3.28}$$

Für die Maßstabgleichung der y-Achse ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m_y}{\partial y_1} &= \frac{a_{12} \cdot (y_2 - y_3) + a_{22} \cdot (x_3 - x_2)}{m_y \cdot \det \mathbf{A}} \\
\frac{\partial m_y}{\partial y_2} &= \frac{a_{12} \cdot (y_3 - y_1) + a_{22} \cdot (x_1 - x_3)}{m_y \cdot \det \mathbf{A}} \\
\frac{\partial m_y}{\partial y_3} &= \frac{a_{12} \cdot (y_1 - y_2) + a_{22} \cdot (x_2 - x_1)}{m_y \cdot \det \mathbf{A}}
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

Für die Scherungsgleichung entsprechend:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} &= \frac{a_{12} \cdot (y_2 - y_3) + a_{22} \cdot (x_3 - x_2)}{\det \mathbf{A}} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1} &= \frac{a_{11} \cdot (y_2 - y_3) + a_{21} \cdot (x_3 - x_2)}{\det \mathbf{A}} \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} &= \frac{a_{12} \cdot (y_3 - y_1) + a_{22} \cdot (x_1 - x_3)}{\det \mathbf{A}} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2} &= \frac{a_{11} \cdot (y_3 - y_1) + a_{21} \cdot (x_1 - x_3)}{\det \mathbf{A}} \\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} &= \frac{a_{12} \cdot (y_1 - y_2) + a_{22} \cdot (x_2 - x_1)}{\det \mathbf{A}} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3} &= \frac{a_{11} \cdot (y_1 - y_2) + a_{21} \cdot (x_2 - x_1)}{\det \mathbf{A}}
\end{aligned}$$

(3.3.30)

Die gesuchten Koordinaten der Knotenpunkte können, unter Einhaltung der vorgegebenen gemessenen Verschiebungen, durch eine Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen bestimmt werden. Es können auch zusätzliche Bedingungen eingeführt werden, wie Parallelitäts- und Geradenbedingungen, welche die Modellierung zusätzlicher Informationen erlauben.

3.3.5. Die Gewichtungproblematik

Die Gewichtung bei der Ausgleichung von Maßstabsbeobachtungen erfolgt nach der Fläche des entsprechenden Dreiecks oder proportional zum Quadrat seiner Seitenlängen (Strecken).

Wichtig für die korrekte Modellierung des diskretisierten Objektes sind die Randbedingungen. Falls das nicht geschieht, treten Extrapolationseffekte auf und das Modell ist fehlerhaft.

Ersichtlich aus dem Beispiel in 5.2.3 ist, dass das flächengewichtete Modell ein homogenes Medium besser repräsentiert. Als Erklärung dafür dient die Tatsache, dass der Interpolationsvorgang in der zweiten Ableitung stattfindet was auch für eine Glättung sorgt. Bei bekannten Materialeigenschaften können über Gleichung (3.3.38) die Hauptspannungskomponenten für jedes diskrete Dreieck bestimmt werden und daraus auch die **Kraftänderungen** zwischen beiden Gleichgewichtszustände.

Falls die Initialkräfte- und Spannungen für die erste Analyse bekannt sind können danach auch die absoluten Werte ermittelt werden. Mit zusätzlicher Einführung des Zeitfaktors in das Modell würde dies einer dynamischen Modellierung entsprechen die das Ergebnis einer integrierten Lösung ist.

Die Verwaltung dieser fachübergreifenden Detailinformationen lässt sich praktisch nur im Rahmen einer objektbezogenen Informationsdatenbank bewältigen (Siehe dazu Kap. 5.1).

3.3.6. Ableitung der äußeren Kräfte aus den Verschiebungen - Inverse der FE Aufgabe

Für den Zusammenhang zwischen einwirkenden Kräften und der Verschiebung jedes diskreten Knoten des untersuchten Objektes, unter Berücksichtigung der Materialeigenschaften, steht in der Mechanik die Kraft - Verschiebungs Relation zur Verfügung.

$$\mathbf{Kd} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.3.31)$$

Dabei ist \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix, \mathbf{f} sind die Knotenkräfte und \mathbf{d} die Knotenpunktverschiebungen.

In Abhängigkeit davon, welche dieser Größen gegeben sind, erhält man drei Aufgabenstellungen die zu lösen sind (Boljen 1983):

1. Gegeben sind die auf den Knoten angreifenden Kräfte und die entsprechenden Parameter der Steifigkeitsmatrix. Gesucht werden die Verschiebungen der Knotenpunkte. Diese Aufgabenstellung entspricht der Lösungsstrategie der Finiten Elementen Methode.

$$\mathbf{d} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \quad (3.3.32)$$

2. Gegeben sind die Knotenpunktverschiebungen und die entsprechenden Parameter der Steifigkeitsmatrix. Gesucht werden die auf den Knoten angreifenden Kräfte. Diese Aufgabenstellung entspricht der Lösungsstrategie die in dieser Arbeit in 3.3 vorgeschlagen wird und als Inverse der Finiten Elementen Methode bezeichnet werden könnte.

$$\mathbf{f} = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{d} \quad (3.3.33)$$

3. Gegeben sind die Knotenpunktverschiebungen und die auf den Knoten angreifenden Kräfte. Gesucht werden die entsprechenden Parameter der Steifigkeitsmatrix. Diese Aufgabenstellung ermöglicht bei zuverlässiger Kenntnis der Ausgangsgrößen, Materialschwächen im Objekt auffindig zu machen.

Diese Gleichungen gelten für jedes aus den Knotenpunkten gebildete Element. Ist das Element ein herausgelöster Teil eines Objektes, welches sich aus vielen einzelnen Elementen zusammensetzt, dann müssen noch zusätzlich Knotenkräfte \underline{q} vorgesehen werden, um das gestörte Gleichgewicht wieder herzustellen. Das ist notwendig, da benachbarte Elemente gleiche Knoten haben und sich deshalb gegenseitig beeinflussen. Damit ist auch gleichzeitig die Bedingung gegeben, dass gleiche Knotenpunkte benachbarter Elemente die gleiche Verschiebung aufweisen müssen, da sonst das Zusammensetzen der einzelnen Elemente nicht klaffungsfrei erfolgen kann. Dem ist in der hier vorgeschlagenen Lösung Rechnung getragen worden.

$$\underline{q} = \mathbf{K}\mathbf{a} + \underline{f} \quad (3.3.34)$$

Durch \underline{f} wird die auf das Element einwirkende Belastung auf die Knotenpunkte diskretisiert. Mit diesem Deformationsmodell ist eine relativ einfache Beschreibung des Deformationsvorganges unter Einbeziehung der wirkenden Kräfte möglich. Zu bestimmten Verschiebungen von diskreten Punkten des Objektes existiert eine entsprechende, über die Materialparameter mit der Verschiebung im Zusammenhang stehende Kraft, die diese Deformation hervorruft. Besteht das Untersuchungsobjekt aus einem Material, dessen physikalische Eigenschaften bekannt sind, ist dieses numerisch leicht zu bearbeitende Deformationsmodell anwendbar (Boljen 1983, Chrzanowski u.a 1983; Gründig, Milev 1996, 1999b).

Das Dirichletsche Variationsprinzip besagt, dass von allen möglichen Verschiebungs-Verzerrungszuständen der exakte Zustand, für den der zugehörige Schnittkraftzustand ein Gleichgewichtszustand ist, die potentielle Energie zu einem Minimalwert macht. (Knothe 1999)

$$\Pi^{(D)} = \Pi_i - \Pi_a = \min$$

Dabei beschreibt:

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_B \left[\underline{\varepsilon} - \underline{\bar{\varepsilon}}_T \right]^T C \left[\underline{\varepsilon} - \underline{\bar{\varepsilon}}_T \right] dB = \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dB \quad (3.3.35)$$

das innere Potential und

$$\Pi_a = \int_B u^T \bar{p} \cdot dB + \int_{R_\sigma} u_r^T \bar{\sigma}_R \cdot dR \quad (3.3.36)$$

das Potential der äußeren Kräfte.

Nach dem Elastizitätsgesetz ergibt sich für die Spannung:

$$\sigma = C \left[\varepsilon - \bar{\varepsilon}_T \right] \quad (3.3.37)$$

Hier sind $\bar{\varepsilon}_T$ die Initialverzerrungen.

Diese Herangehensweise kann als eine Näherungslösung der inversen Aufgabe der Finiten Elemente betrachtet werden und erlaubt eine effektive Beurteilung des Spannungs- und Verformungszustandes von Ingenieurobjekten in der Phase nach ihrer Inbetriebnahme. Der schematische Ablauf der Methode ist in Abb. 3.2 gegeben. Die so berechneten Kräfte- und Spannungsänderungen können mit entsprechenden Grenzwerten verglichen werden und helfen somit beim Treffen von Entscheidungen, die dem sicheren Betrieb dienen.

Mechanisches Modell

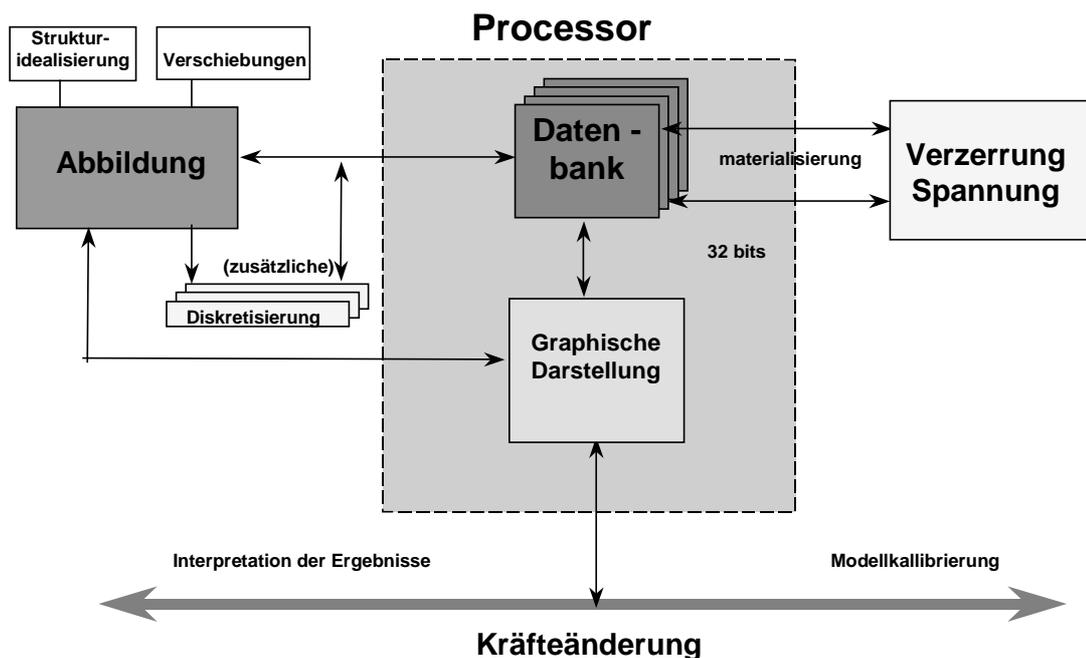


Abb.: 3.2 Integrierte Lösung des Dynamischen Modells (Milev I., Gründig 1999b)

4. Verallgemeinerte Beziehungen zwischen der Variationsrechnung, der Ausgleichsrechnung und den Deformationsuntersuchungen

4.1. Vorbemerkungen

Für Problemstellungen in der Struktur- und Festkörpermechanik wurden die Prinzipien der virtuellen Verschiebungen, oder Forderung nach Stationarität der gesamten potentiellen Energie angesetzt.

Die Lösungen basieren auf Bildung und der Anwendung der Lagrangeschen Funktion. Diese führen zum allgemeinen Fall. In einer Reihe von Sondermodellen werden Vereinfachungen verwendet, die nicht direkt vom allgemeinen Fall abgeleitet werden.

Von besonderem Interesse ist es, die Aufgabe zu definieren und zu lösen, welche Lösungsstrategien, Möglichkeiten und Vorteile der MKQ für die Behandlung der Probleme der Mechanik effektiv anwendet. Grundlage hierfür bietet der allgemeine Fall der Ausgleichung korrelierter Beobachtungen. Dafür ist es notwendig, einem eigenen dazu entwickelten Lösungsweg zu folgen für welchen entsprechende Formeln der Verbesserungen, Unbekannten und Korrelaten mit entsprechender Genauigkeitsabschätzung der Unbekannten und funktionalen Zusammenhang der ausgeglichenen Größen, abgeleitet und zusammengestellt werden. Insbesondere wird die Lagrangesche Funktion mit zwei Multiplikatoren (Korrelaten) angesetzt und interpretiert.

Bewiesen wird dass bei den allgemeinen Fällen der Variations- und Ausgleichsrechnung von den gleichen Voraussetzungen, nämlich von der Lagrangesche Funktion und der Suche eines Extremums auszugehen ist. Weiter ist es von besonderer Bedeutung eine exakte äußere und inhaltliche Analogie zwischen den Funktionalen beider Formulierungen zu finden, d.h. zwischen den entsprechenden Variablen und Konstanten, dargestellt in Vektoren und Matrizen. Damit wird es leichter sein die Analogie nachzuweisen.

4.2. Allgemeine Variationsprinzipien und Modelle zur Lösung von Aufgaben der Mechanik

4.2.1. Theoretische Grundlagen

Die Berechnung von Variationen ist ein Zweig der Mathematik, bei dem die stationären Eigenschaften einer Funktion die aus Funktionen besteht, genannt Funktional untersucht werden. Dabei ist Gegenstand der Berechnung nicht das Finden eines fixierten Extremalwertes einer endlichen Funktion von Variablen, sondern aus einer Gruppe möglicher Funktionen diejenige zu ermitteln, bei der das Funktional stationär bleibt.

Die Berechnung der Variation hat ein breites Spektrum von Anwendungen in der mathematischen Physik. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass ein physikalisches System sich oft so verhält, dass die Art des Zustandes, in dem es sich befindet, einen stationären Wert darstellt. Beispiel hierfür ist das Fermatsche Prinzip in der Optik, das besagt, dass ein Lichtstrahl zwischen zwei Punkten den Weg der kürzesten Durchlaufzeit wählt. Daraus folgt automatisch, dass sich der Lichtstrahl in einem homogenen Medium geradlinig ausbreitet.

Das erste grundlegende Prinzip, das den Zustand eines Teilsystems im statischem Gleichgewicht unter der Einwirkung äußerer und innerer Kräfte beschreibt, und als Basis der Variationsformulierung gilt, ist das der virtuellen Arbeit.

$$\delta'W = 0 \quad (4.2.1)$$

Wenn alle oben genannten Kräfte von einer potentiellen Funktion U abgeleitet werden, die eine Funktion der Koordinaten der Elemente des Systems darstellt, so dass:

$$\delta'W = -\delta U \quad (4.2.2)$$

gilt, führt das Prinzip der virtuellen Arbeit zum Prinzip der stationären potentiellen Energie U .

Die obige Formulierung kann zu einem dynamischen Problem eines Systems aus Elementen, hin zu zeitabhängig angesetzten Kräften und geometrischen Bedingungen erweitert werden. Unter Anwendung des d'Alembertschen Prinzips, das besagt, dass ein System in Gleichgewicht ist, wenn die inneren Kräfte einbezogen werden, kann das Prinzip der virtuellen Arbeit das dynamische Problem in ein der Statik sehr naheliegendes umwandeln (Sommerfeld 1978). Dies geschieht, indem die Anteile, die die virtuelle Arbeit der Inertialkräfte repräsentieren, herangezogen werden. Das so gewonnene Prinzip wird unter Berücksichtigung der Zeit t zwischen zwei Zeitpunkten $t = t_1$ und $t = t_2$ integriert. Durch Teilintegration und unter Anwendung der Konvention, dass die virtuellen Verschiebungen bei der Grenzwertbildung verschwinden, erhalten wir folgende Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit für ein dynamisches Problem:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta'W dt = 0 \quad (4.2.3)$$

darin ist T die kinematische Energie des Systems.

Unter der Annahme, dass die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen des Systems sich aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit ableiten lassen, ist ersichtlich, dass dieses Prinzip sehr nützlich für die Gewinnung der Bewegungsgleichungen eines Systems aus Teilen mit geometrischen Zwang (Zwangsbedingungen) ist.

Wenn für weitere Behandlungen sichergestellt ist, dass alle inneren und äußeren Kräfte aus einer potentiellen Funktion U abgeleitet werden, die wie in (4.2.3) definiert ist und eine Funktion der Koordinaten und der Zeit darstellt, ergibt sich das Hamiltonsche Prinzip, das besagt:

Unter allen zulässigen Konfigurationen des Systems, ist die aktuelle Bewegung der Menge

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt \quad (4.2.4)$$

stationär, wenn die Konfiguration des Systems in den Grenzen $t = t_1$ und $t = t_2$ vorgeschrieben ist. Die mathematische Forderung der Stationarität ist :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (4.2.5)$$

wobei $L = T - U$ die Lagrangesche Funktion des Systems ist. Die Legendre-Transformation erlaubt den Übergang zu einem äquivalenten Prinzip und reduziert die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen in kanonische.

Die Transformationen des Hamiltonischen Prinzips wurden intensiv untersucht und darauf basierend die Theorie der kanonischen Transformation entwickelt.

Die logische Herangehensweise bei der Definition der Variationsprinzipien kann wie folgt definiert werden:

Wir gehen von einem festen Körper aus, der sich unter der Einwirkung von Kräften bei Einhaltung mechanischer und geometrischer Randbedingungen im Gleichgewicht befindet. Zuerst wird das Prinzip der virtuellen Arbeit angewandt. Es ist äquivalent zu den Gleichgewichtsgleichungen und den mechanischen Randbedingungen des festen Körpers, und ist Teil der finiten Verschiebungstheorie, die eine Linearisierung der Gleichungen zulässig macht. Somit erhält man das Prinzip der virtuellen Ergänzungsarbeit. Bekannt, ist dass die Prinzipien der virtuellen Arbeit und der virtuellen Ergänzungsarbeit invariant bezüglich Koordinatentransformationen und unabhängig von der Verzerrungs-Spannungsbeziehung des Materials sind.

Wenn sicher gestellt ist, dass eine Verzerrungsenergiefunktion existiert und wenn die Summe der einwirkenden Kräfte während des Variierens der Verschiebungen unverändert bleibt, führt das Prinzip der virtuellen Arbeit zu dem Prinzip von Dericlet, des Minimums der potentiellen Energie.

Generell führt das Prinzip der virtuellen Ergänzungsarbeit zur Definition des Prinzips des Minimums der Ergänzungsenergie bei vorhandener Verzerrungs-Spannungsbeziehung, die die Existenz einer Ergänzungsenergiefunktion gewährleistet und die geometrischen Randbedingungen im Laufe der Variation der Spannungen beibehält. Das Prinzip des Minimums der Ergänzungsenergie wird bei Einführung der Lagrangeschen Multiplikatoren verallgemeinert und liefert das von Helinger-Reissner oder dies des Minimums der potentiellen Energie.

Ersichtlich ist, dass beide Formulierungen des Variationsprinzips reziprok und äquivalent sind solange die finite Verschiebungstheorie der Elastizität gilt.

Die finiten Verschiebungstheorie der Elastizität und das Prinzip der virtuellen Arbeit führen zu der Einführung des Prinzips der Stationarität der potentiellen Energie, bei Existenz der Verzerrungsenergiefunktion des Körpers und potentieller Funktion der äußeren Kräfte.

4.2.2. Anwendung der Variationsmethoden

4.2.2.1. Einführung

Für die verschiebungsbezogenen Finiten - Elemente wird für die Feldfunktion Vollständigkeit und Kompatibilität gefordert. Wenn diese Bedingungen erfüllt, sind konvergiert die berechnete Näherungslösung monoton auf die exakte Lösung zu. Die

Bedingung der Vollständigkeit wird relativ leicht erfüllt. Das gleiche gilt auch für die Verträglichkeit oder Kompatibilität – so im Beispiel des ebenen Spannungs- und Verzerrungszustandes, sowie bei der Behandlung von 3D- Körpern wie Staudämmen. Für Biegeungsprobleme, oder insbesondere bei Berechnung von Schalen ist die Kontinuität der ersten Verschiebungsableitung längs der Grenzen schwer zu erreichen.

Bei komplexen Fällen werden unterschiedliche Elemente für das Idealisieren verschiedener Bereiche der Struktur verwendet, was die Erfüllung der Kompatibilität unmöglich macht.

Dennoch wird ein Ergebnis erreicht.

Die Schwierigkeit, für gewisse Problematiken kompatible und rechnergerechte verschiebungsbezogene Elemente zu konstruieren und die unterschiedlichen Variationsmethoden, begründen die Entstehung zahlreicher Modelle.

4.2.2.2. Inkompatible Modelle

Das sind die Modelle, bei denen die Verschiebungen oder ihre Ableitungen zwischen den Elementen in einem gewissen Maße nicht kontinuierlich sind. Damit werden die Kompatibilitätsbedingungen, die beinhalten, dass die Verschiebungen in den Elementen und in den Elementrändern kontinuierlich sein müssen, nicht befriedigt. Man erhält aber dennoch befriedigende Rechenergebnisse mit der Methode der Finten Elemente. Der Einfluss der Inkompatibilität hat aber eine Bedeutung. Wenn bei einer Finite Elemente Berechnung mit inkompatiblen Elementen die Bedingungen des Ritzischen Verfahrens nicht erfüllt werden, ist die näherungsweise ermittelte gesamte potentielle Energie notwendigerweise nicht eine obere Schranke für die exakte gesamte potentielle Energie des Systems. Infolgedessen ist die monotone Konvergenz nicht sichergestellt. Wenn deshalb die monotone Konvergenz der Berechnung als Ziel aufgegeben werden muss, dann sind Bedingungen aufzustellen, die wenigstens eine nichtmonotone Konvergenz sicherstellen. Dafür sollten gewisse Bedingungen stets erfüllt sein. Eine davon ist die Vollständigkeit des Elements. Mit der Verkleinerung und Vermehrung der Elemente, soll sich jedes Element einem konstanten Verzerrungszustand nähern. Um das Problem zu lösen, ist es notwendig eine Gruppierung der inkompatiblen Elemente durchzuführen. Dies stellt eine weitere Bedingung dar, die zu fordern ist. Es sollte aber auch geprüft werden, ob die Gruppierung vollständig ist.

4.2.2.3. Gemischte und hybride Modelle

Diese Modelle stützen sich auf die Theorie der virtuellen Verschiebungen oder Stationarität der gesamten potentiellen Energie Π . Bei der Formulierung dieser Modelle wird von der Voraussetzung ausgegangen, dass die Verschiebungen die einzigen Lösungsvariablen sind und dass sie die Verschiebungsrandbedingungen und näherungsweise die Bedingungen zwischen den Elementen erfüllen müssen. Wenn die Verschiebungen schon berechnet worden sind, gewinnt man direkt die anderen Variablen, wie die Verzerrungen und Spannungen. Hier können die Verschiebungen aus 3.3.22 eingesetzt werden und eine Befriedigende Näherungslösung liefern.

Der verschiebungsbezogene Finite Elemente Lösungsweg kann wie folgt formuliert werden (Bathe 1986):

- Verwendung der gesamten potentielle Energie

$$\Pi^{(D)} = \Pi_i - \Pi_a \quad (4.2.6)$$

Darin ist

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_B \left[\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \right]^T \mathbf{C} \left[\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_T \right] dB = \int_B \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dB \quad (4.2.7)$$

das innere Potential und

$$\Pi_a = \int_B \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \cdot dB + \int_{R_\sigma} \mathbf{u}_r^T \bar{\mathbf{q}}_R \cdot dR \quad (4.2.8)$$

das Potential der äußeren Kräfte.

- Die Forderung nach Stationarität von Π hinsichtlich der Verschiebungen führt zu den Gleichgewichtsbedingungen :

$$\int_B \partial \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} dB = \int_B \partial \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} \cdot dB + \int_{R_\sigma} \partial \mathbf{u}_r^T \bar{\mathbf{q}}_R \cdot dR \quad (4.2.9)$$

- Die Differentialgleichungen des Gleichgewichts und die Spannungsbedingungen werden bei zunehmender Zahl von Elementen im Grenzfall erfüllt.
- Die Verzerrungs-Verschiebungs-Kompatibilitätsbedingungen und die Verschiebungsrandbedingungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (4.2.10)$$

$$\mathbf{U}_a - \mathbf{U}^P = \mathbf{0} \quad (4.2.11)$$

werden exakt erfüllt. Hier sind:

\mathbf{U}^P - die vorgeschriebenen Verschiebungen,

\mathbf{U}_a - Verschiebungskomponenten von \mathbf{U} .

Die Voraussetzung für die Stationarität ist die Kompatibilität (4.2.10) und es resultiert bei Erfüllung von (4.2.11) das Gleichgewicht.

Die hier dargestellte verschiebungsbezogene Finite-Elemente-Methode wird gewöhnlich in der Praxis eingesetzt. Andere Verfahren sind auch erfolgreich angewandt worden. Diese werden hier kurz präsentiert.

- Stationarität der Ergänzungsenergie

Eines dieser Verfahren beruht auf der Forderung nach Stationarität der gesamten Ergänzungsenergie.

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \int_B \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\tau} dB - \int_{R_\sigma} \partial u_r^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}_R \cdot dR \quad (4.2.12)$$

Der Übergang von der gesamten potentiellen Energie zur Ergänzungsenergie wird über die Legendre – Transformation erreicht. Dabei resultiert für die Ergänzungsenergie die Suche des Maximums. Das Flächenintegral wird über eine passende Oberfläche R gebildet, mit der Forderung zusätzlich Randbedingungen aufzuerlegen. Dafür drückt man die Spannungskomponenten und die entsprechenden Oberflächenlasten durch die unbekannt Parameter aus. Gleichzeitig müssen die Spannungsfunktionen die Kontinuität der Spannungen zwischen den Elementen sowie die differentiellen Gleichgewichtsbedingungen und die Spannungsrandbedingungen erfüllen. Die Forderung nach Stationarität von Π^* hinsichtlich der Spannungsparameter ergibt:

$$\int_B \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\tau} dB = \int_{R_\sigma} \partial u_r^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}_R \cdot dR \quad (4.2.13)$$

mit

- Spannungsgleichgewichtsbedingungen

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \text{Rot Rot } \bar{\boldsymbol{\phi}} \quad (4.2.13.1)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_r - k = 0 \quad (4.2.13.2)$$

Die Voraussetzung für die Stationarität ist das Gleichgewicht (4.2.13.1) und es resultiert bei Erfüllung von (4.2.13.2) die Kompatibilität.

Es ist ersichtlich dass einige Bedingungen exakt befriedigt werden, aber die Verzerrungs-Verschiebungs-Kompatibilitätsbedingungen und die geometrischen Randbedingungen sind nur erfüllt, wenn (4.2.13) für jede beliebige Variation der Spannungen, die Spannungsbedingungen erfüllt ist. Die Stationarität der Ergänzungsenergie hat sich in der Praxis nicht durchgesetzt, da das Aufstellen der Spannungsfunktion $\bar{\boldsymbol{\phi}}$, sich als schwierig erweist.

3.2.2.4. Gemischte Variationsformulierungen

Das sind Formulierungen, die durch Erweiterung des Prinzips der Stationarität der gesamten potentiellen Energie oder der gesamten Ergänzungsenergie entstehen. Sie ermöglichen es, die Bedingungen abzuschwächen, die die Lösungsvariablen erfüllen müssen und die Zahl und Art der Lösungsvariablen zu erhöhen, die nun gleichzeitig Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen sein können. Es wird von den Formulierungen (4.2.6) bis (4.2.11) ausgegangen. Die Bedingungen für die angenommenen Verschiebungsvariationen aus (4.2.10) und (4.2.11) können abgeschwächt werden, sofern sie mit Lagrange'schen Multiplikatoren in Π aufgenommen werden. Das allgemein verwendbare Funktional lautet:

$$\Pi_1 = \Pi + \int_B \lambda_\varepsilon^T (\varepsilon - BU) dB + \int_{R_u} \lambda_u^T (U_a - U^P) dR \quad (4.2.14)$$

wobei λ_ε und λ_u Lagrangesche Multiplikatoren, U^P die vorgeschriebenen Verschiebungen am Rand, und R die gesamte Oberfläche sind. λ_ε und λ_u lassen sich auf Spannungen und Kräfte zurückführen. Dann kann für (4.2.14) geschrieben werden:

$$\Pi_1 = \Pi - \int_B \tau^T (\varepsilon - BU) dB + \int_{R_u} P_R (U_a - U^P) dR \quad (4.2.15)$$

Diese Variationsformulierung kann als Verallgemeinerung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen angesehen werden. Die Verschiebungsrandbedingungen und die Verzerrungskompatibilitätsbedingungen sind hier abgeschwächt worden. Alle unbekanntes Verschiebungen, Verzerrungen, Spannungen und Randkräfte variieren. Dieses Prinzip ist eine wertvolle und sehr allgemeingültige Beschreibung der statischen und kinematischen Bedingungen des betrachteten Körpers. Wenn man Stationarität bezüglich jeder einzelnen unbekanntes Variablen verlangt, liefert die Beziehung (4.2.15) das Materialgesetz:

$$\tau = C \varepsilon \quad (4.2.16)$$

die Kompatibilitätsbedingungen (Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen):

$$\varepsilon = BU \quad (4.2.17)$$

und die Gleichgewichtsbedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x^B &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y^B &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z^B &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

für die Volumen B_V . Für die Ränder des Körpers fallen die vorgeschriebenen Verschiebungs- bzw. Kräftebedingungen auf R_u und R_f an; die Reaktionen auf R_u sind gleich den Lagrangeschen Multiplikatoren.

Die Lösung (4.2.15) ist eine sehr allgemeine „gemischte“ Variationsformulierung und daraus können bei bestimmten Beschränkungen verschiedene Sonderlösungsverfahren abgeleitet werden. Das sind z. B. die Formulierungen (4.2.6) bis (4.2.11) und ebenso (4.2.12), die spannungsbezogen ist. Die angenommenen Lösungsvariablen müssen in einer Berechnung mit finiten Elementen geeignete Kontinuitäts-, Kompatibilität und/oder

Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Bei der Lösung wären aneinandergrenzende Elemente miteinander zu verkoppeln. Die algebraischen Gleichungen, die das gesamte System beherrschen, enthalten als Unbekannte alle Lösungsvariablen, die im Funktional variiert werden. Im allgemeinsten Fall sind alle Feldgrößen – Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen in dem Lösungsvektor der Unbekannten enthalten.

Diese Überlegungen können auch auf die Formulierungen (4.2.12) bis (4.2.13.2) angewandt werden, was zu einem erweiterten Ergänzungspotential in der Form:

$$\Pi_1^* = \Pi^* + \int_B \mu_1^T (\sigma - \text{Rot Rot } \bar{\phi}) dB + \int_{R_u} \mu_2^T (k - \sigma \text{ Rot Rot } \bar{\phi}) dR \quad (4.2.19)$$

führt.

In (4.2.19) ist $\text{Rot Rot } \bar{\phi}$ die ausgewählte Spannungsfunktion.

4.2.2.5. Hybride Formulierungen

Das sind Formulierungen, die auch Multifelddarstellungen der Lösung benutzen, in dem einige Variablen auf der Elementenebene vor ihre Gruppierung eliminiert werden. Die Lösungsvariablen werden von Element zu Element im allgemeinen nicht kontinuierlich sein. Hier gibt es bei der Lösungswegformulierung auch eine große Zahl von Möglichkeiten. Eine davon ist z.B. die hybride Spannungsmethode (Pian 1971). Hierbei werden die Verschiebungen auf den Element-Rändern so angenommen, dass die Verschiebungskompatibilität zwischen den Elementen gewährleistet ist. Es werden auch innere Spannungsvariationen angenommen, die die Differentialgleichung des Gleichgewichts befriedigen. Hier werden die Spannungsparameter eliminiert. So werden viele von den rechen-technischen Vereinfachungen der verschiebungsbezogenen Formulierung bewahrt. Das Element, das nach der hybriden Spannungsmethode formuliert wurde, kann direkt in ein Rechenprogramm eingebaut werden, das zur Auflösung nach den unbekanntenen Knotenpunktverschiebungen geschrieben wurde.

In der hybriden Spannungsmethode werden die grundlegenden Annahmen für die Elementspannungen

$$\tau = P\beta \quad (4.2.20)$$

und für die Verschiebungen auf dem Elementrand

$$u^R = H^R U \quad (4.2.21)$$

verwendet. Die Matrix P enthält die Polynomterme der generalisierten Spannungsparameter, die im Vektor β zusammengefasst sind; die Matrix H^R in (4.2.21) interpoliert die Randverschiebungen des Elements.

Aus Gleichungen (4.2.20) und (4.2.21) eingesetzt in (4.2.12) erhält man für ein individuelles Element die Ergänzungsenergie:

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \beta^T \left\{ \int_B P^T C^{-1} P dB \right\} \beta - \beta^T \left\{ \int_R \sigma_R H^R dR \right\} U \quad (4.2.22)$$

wobei σ_R die Oberflächenspannungen des Elements interpoliert und aus P erhalten sind, indem man die Koordinaten einsetzt, die den betrachteten Oberflächen entsprechen. Aus den Stationaritätsbedingungen $\delta\Pi^* = 0$ hinsichtlich der Spannungsparameter folgt:

$$E\beta = GU \quad (4.2.23)$$

wo
$$E = \int_B \sigma_R^T C^{-1} P dB \quad (4.2.24)$$

und
$$G = \int_B \sigma_R H^R dR \quad (4.2.25)$$

Daher ergibt sich:
$$\beta = E^{-1}GU \quad (4.2.2527)$$

Für (4.2.21) erhält man:

$$\Pi^* = -\frac{1}{2}U^T G^T E^{-1}GU \quad (4.2.26)$$

so dass:

$$K = G^T E^{-1}G \quad (4.2.27)$$

Die Wahl der passenden Spannungsfunktionen ist von besonderer Bedeutung für die tatsächliche Anwendung der hybriden Spannungsmethode. Die Zahl der Funktionen muss groß genug sein, damit die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden und ihre Art muss so sein, dass die wichtigen Spannungsvariationen dargestellt werden können (Bathe 1986).

4.3. Allgemeines mathematisches Ausgleichungsmodell der Methode der Kleinsten Quadrate

4.3.1. Wesentliches

Bei der Lösung geodätischer Ausgleichungsaufgaben nach der Methode der Kleinsten Quadrate unterscheiden man zwischen gemessenen, gesuchten und gegebenen Größen. Zwischen diesen Größen bestehen stochastische und funktionale Abhängigkeiten. Das mathematische Modell der Ausgleichung hat das Ziel der bestmöglichen Erschließung und Beschreibung dieser Abhängigkeiten. Es ist möglich, in die Ausgleichung Messungen nicht geodätischer Herkunft z.B. geotechnischer Herkunft, einfließen zu lassen.

4.3.2. Stochastisches Ausgleichungsmodell

Die Eigenschaften der Beobachtungen aus Sicht der Wahrscheinlichkeitstheorie sind Gegenstand des stochastischen Modells. Dabei gelten bestimmte Voraussetzungen, die üblicherweise bei geodätischen Beobachtungen angenommen werden – es handelt sich um durchführbare Messungen stochastischer Variablen, deren Mittelwert $M(l)$ im Grenzfall mit dem wahren L_i übereinstimmt und die der Normalverteilung unterliegen.

Die zu einem bestimmten Zeitpunkt t gemessenen n Größen mit \mathbf{l}_i ($i=1\dots n$), können als ein zufälliger Vektor aufgefasst werden

$$\mathbf{l}^T = [l_1, l_2, \dots, l_n] \quad (4.3.1)$$

dessen Komponenten normalverteilt sind. Zwischen den einzelnen oder allen Elementen können stochastische Relationen bestehen (Korrelation). Der Vektor ist dann n dimensional, normalverteilt mit einer Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(\mathbf{l}) = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{k}_l^{-1})}{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{l}-\bar{\mathbf{l}})^T \mathbf{k}_l (\mathbf{l}-\bar{\mathbf{l}})} \quad (4.3.2)$$

Hier sind $\bar{\mathbf{l}}$ die Erwartungswerte des Vektors \mathbf{l}

$$\bar{\mathbf{l}} = M(\mathbf{l}) \quad , \quad (4.3.3)$$

dessen Varianz-Kovarianzmatrix folgende ist

$$\mathbf{K}_l = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{n1}\sigma_1\sigma_n & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}. \quad (4.3.4)$$

Bezogen auf die Ausgleichung steht die Matrix \mathbf{K}_l in Relation mit der Gewichtsmatrix \mathbf{P} und der Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_l , im weiteren Korrelationsmatrix genannt.

$$\mathbf{Q}_l = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_l \frac{1}{\sigma^2} = \mathbf{P}^{-1} \quad (4.3.5)$$

$$q_{ii} = \frac{1}{p_i} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2}$$

$$q_{ij} = \frac{1}{p_i} = \frac{\rho_{ij}}{\sqrt{p_i p_j}} = \frac{\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}{\sigma^2}$$

$$\sigma_i^2 = M(l_i - l_{0i})^2$$

$$\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j = M[(l_i - l_{0i})(l_j - l_{0j})].$$

In (4.3.4) und (4.3.5) werden folgende Bezeichnungen verwendet:

p_i, p_j	Gewichte der Beobachtungen	l_i, l_j
q_i, q_j	Gewichtskoeffizienten	
ρ_i, ρ_j	Korrelationskoeffizienten zwischen	l_i, l_j
σ_i, σ_j	Standardabweichungen der Beobachtungen	l_i, l_j
l_{0i}, l_{0j}	Mittelwerte der Beobachtungen	l_i, l_j
σ	Standardabweichung der Gewichtseinheit.	

Von Bedeutung ist die normierte Korrelationsmatrix \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} . \quad (4.3.6)$$

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte kann man schreiben:

$$f(l) = \sqrt{\frac{\det(P)}{(2\pi\sigma^2)^n}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{l}-\bar{\mathbf{l}})^T \mathbf{P}(\mathbf{l}-\bar{\mathbf{l}})} \quad (4.3.7)$$

So ist das stochastische Modell vollständig definiert. Meist sind die Parameter σ , $P(Q)$ und $\bar{\mathbf{l}}$ nicht bekannt. Dabei ist $\bar{\mathbf{l}}$ nicht mal notwendig für die Auswertung der Beobachtungen, σ ist notwendig, um die statistische Hypothese z.B. die der Punktverschiebung, zu prüfen. Die Elemente der Gewichtsmatrix P resp. Q könnten nach (4.3.5) bestimmt werden oder aus Testmessungen abgeleitet werden. Die Voraussetzung der Normalverteilung ist wegen der geringen Anzahl Messungen schwer überprüfbar.

4.3.3. Das funktionale Modell

Als Gegenstand des funktionalen Modells gelten die Beziehungen zwischen den gemessenen und den gesuchten Größen. Die Messungen finden meist innerhalb eines Netzes statt, dessen Punktposition bzw. Änderung über m Elemente eindeutig bestimmt werden. Um eine Lösung zu erhalten, muss die Anzahl der Messungen n größer oder gleich m sein. Wenn $n > m$ ist, handelt es sich um eine Ausgleichungsaufgabe.

Bei jeder Ausgleichungsproblematik nach der Methode der Kleinsten Quadraten existieren drei Arten von Größen:

- n beobachtete Größen L
- m gesuchte Größen X
- p Ausgangsgrößen d

Zwischen diesen drei Arten von Größen existieren r Relationen der Art:

$$f_r(X_1, X_2, \dots, X_m, L_1, L_2, \dots, L_n, d_1, d_2, \dots, d_p) = 0, \quad (4.3.8)$$

bei $r > m$.

Die Abschätzungen X_{0j} ($j = 1, 2, \dots, m$) der gesuchten Parameter X_j , die sich aus der Ausgleichung ergeben, sind auch stochastische Größen. Sie sind nicht verschoben und haben eine minimale Dispersion. Detailliert geschrieben ergibt sich:

$$\begin{aligned} M(X_1) &= X_{01}, M(X_2) = X_{02}, \dots, M(X_m) = X_{0m} \\ D(x_1) &= \min, D(x_2) = \min, \dots, D(x_m) = \min \\ M(m_{x_1}^2) &= \sigma_{x_1}^2, M(m_{x_2}^2) = \sigma_{x_2}^2, \dots, M(m_{x_m}^2) = \sigma_{x_m}^2 \\ M(\mu^2) &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Wobei mit D die Dispersion bezeichnet worden ist.

Werden in (4.3.8) statt der wahren die gemessenen Werte eingesetzt, die entsprechend Verbesserungen erhalten, und für die gesuchten Größen die entsprechenden Abschätzungen bei konstant bleibenden gegebenen Größen sind, erhalten wir:

$$f_r(X_1^0 + x_1, X_2^0 + x_2, \dots, l_1^0 + \Delta l_1 + v_1, l_2^0 + \Delta l_2 + v_2, \dots, d_1, \dots, d_p) = 0 \quad (4.3.10)$$

Hier sind für die Abschätzungen und für die gemessenen Größen Näherungswerte eingeführt worden. Die Reihenentwicklung nach Taylor aus (4.3.10) führt zu folgenden Gleichungen (Milev 1978):

$$\begin{aligned} t_{11}v_1 + t_{12}v_2 + \dots + t_{1n}v_n + a_1x + b_1y + \dots + w_1 &= 0 \\ t_{21}v_1 + t_{22}v_2 + \dots + t_{2n}v_n + a_2x + b_2y + \dots + w_2 &= 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ t_{r1}v_1 + t_{r2}v_2 + \dots + t_{rn}v_n + a_r x + b_r y + \dots + w_r &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

darin sind

$$\begin{aligned} t_{1i} &= \frac{\partial f_1}{\partial l_i}, t_{2i} = \frac{\partial f_2}{\partial l_i}, \dots \dots \dots \\ a_i &= \frac{\partial f_i}{\partial X_1^0}, b_i = \frac{\partial f_i}{\partial X_2^0}, \dots \dots \dots \\ w_1 &= t_1^0 + t_{11}\Delta l_1 + t_{12}\Delta l_2 + \dots + t_{1n}\Delta l_n \\ w_2 &= t_2^0 + t_{21}\Delta l_1 + t_{22}\Delta l_2 + \dots + t_{2n}\Delta l_n \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ w_r &= t_r^0 + t_{r1}\Delta l_1 + t_{r2}\Delta l_2 + \dots + t_{rn}\Delta l_n \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

$$t_1^0 = f_r(X_1^0, X_2^0, \dots, X_m^0; l_1^0, l_2^0, \dots, l_n^0; d_1, d_2, \dots, d_p)$$

.....

$$t_r^0 = f_r(X_1^0, X_2^0, \dots, X_m^0; l_1^0, l_2^0, \dots, l_n^0; d_1, d_2, \dots, d_p).$$

Bei

$$\mathbf{w} = \mathbf{B}^T \Delta \mathbf{l} + \mathbf{c} \quad (4.3.13)$$

$r1 \quad m \quad n1 \quad r1$

und

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{r1} & t_{r2} & \dots & t_{rn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \dots & e_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & e_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_r & b_r & \dots & e_r \end{bmatrix}$$

kann (4.3.11) in folgender Form zusammengefasst werden

$$\mathbf{B}^T \mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{w} = \mathbf{O} \quad (4.3.14)$$

$rn \quad n1 \quad rm \quad m1 \quad r1 \quad r1$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{x} + \mathbf{d} = \mathbf{O}$$

$km \quad m1 \quad k1 \quad k1$

wobei

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{km} \end{bmatrix} \quad (4.3.15)$$

$$n > r + k - m > 0$$

und $k < m$

$$r > m$$

In (4.3.14) wurden zu den Beziehungen in (4.3.11) noch k zusätzliche Bedingungen zwischen den Unbekannten eingeführt. Das können Ausgangselemente, Koordinaten, eine Basis, oder Richtungswinkel von geodätischen Netzen sein, mit denen die Singularität der Lösung behoben wird. Es kann sich auch um Bedingungen, wie vorgegebene Abstände und Geometrie, die beibehalten werden soll handeln.

4.3.4. Allgemeinfeld der Ausgleichung korrelierter Beobachtungen

Die Bedingung des Minimums bei der Methode der Kleinsten Quadrate für die Ausgleichung der Beobachtungen ist

$$\mathbf{v}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{v} = \min \quad (4.3.16)$$

Dies ist von Legendre und Gauß im letzten Jahrhundert folgendermaßen begründet worden. Bei der Ausgleichung sind mehr gemessene Größen als gesuchte Unbekannte und Bedingungen vorhanden. Die gesuchten Größen können nach verschiedenen Kombinationen berechnet werden. Sie unterscheiden sich durch die ermittelten Widersprüche. Das bedeutet, dass an den gemessenen Größen Verbesserungen angebracht werden, um die Widersprüche zu beseitigen. Aus allen Lösungen, mit den die Verbesserungen bestimmt werden, um die eindeutige Lösung zu bekommen, ist die Bedingung (4.3.16) diejenige, welche zu genauesten Werten für die ausgeglichenen Größen führt.

Bei Vorhandensein zusätzlicher Bedingungen wird bei der Suche des Minimums, die Funktion von Lagrange verwendet, in der die Lagrangeschen Multiplikatoren oder in der Geodäsie Korrelaten genannt, auftauchen.

So hat die Funktion von Lagrange im Allgemeinfeld, das ist die Ausgleichung bedingter Beobachtungen mit Unbekannten und zusätzlichen Bedingungen zwischen den Unbekannten, die Form:

$$\Phi = \underset{11}{\mathbf{v}^T} \underset{1n}{\mathbf{Q}_l^{-1}} \underset{nn}{\mathbf{v}} - \underset{n1}{2\mathbf{k}_1^T} \left[\underset{1r}{\mathbf{B}^T} \underset{rn}{\mathbf{v}} + \underset{n1}{\mathbf{A}} \underset{rm}{\mathbf{x}} + \underset{m1}{\mathbf{w}} \right] - \underset{1k}{2\mathbf{k}_2^T} \left[\underset{km}{\mathbf{G}^T} \underset{m1}{\mathbf{x}} + \underset{k1}{\mathbf{d}} \right] \quad (4.3.17)$$

Die ersten Ableitungen, gleich null gesetzt und unter Beachtung der Eigenschaft dass eine Zahl und ihr transponierter Wert gleich sind, ergeben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial v} &= 2v^T Q_l^{-1} dv - 2k_1^T B^T dv = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -2k_1^T A dx - 2k_2^T G^T dx = 0\end{aligned}\tag{4.3.18}$$

und daraus folgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^T \mathbf{Q}_l^{-1} - \mathbf{k}_1^T \mathbf{B}^T &= 0 \\ \mathbf{A}^T \mathbf{k}_1 - \mathbf{G} \mathbf{k}_2 &= 0\end{aligned}\tag{4.3.19}$$

für die Verbesserungen ergibt sich:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}_l \mathbf{B} \mathbf{k}_1\tag{4.3.20}$$

Wenn man zum System (4.3.14) die zweite Gleichung aus (4.3.19) addiert und die Gleichung aus (4.3.20) berücksichtigt, resultiert daraus das Hauptsystem zur Bestimmung der Unbekannten im Allgemeinfall der Ausgleichung.

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l \mathbf{B} \mathbf{k}_1 + \mathbf{A} \mathbf{x} &+ \mathbf{B}^T \mathbf{l} = 0 \\ \mathbf{A}^T \mathbf{k}_1 + \mathbf{G} \mathbf{k}_2 &= 0 \\ \mathbf{G}^T \mathbf{x} &+ \mathbf{d} = 0\end{aligned}\tag{4.3.21}$$

Nach sequentieller Elimination können die Korrelaten, die gesuchten Größen und die Verbesserungen bestimmen werden. Entsprechend sind die Formeln für:

- Korrelaten

Die ersten Gleichung aus (4.3.21) löst man nach \mathbf{k}_1 auf :

$$\mathbf{k}_1 = -\mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{l}\tag{4.3.22}$$

dies setzt man in die zweite Gleichung von (4.3.21) ein und erhält:

$$-\mathbf{A}^T \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{l} + \mathbf{G} \mathbf{k}_2 = 0\tag{4.3.23}$$

oder

$$\begin{aligned}\mathbf{G}\mathbf{k}_2 - \mathbf{N}_2\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{l} &= 0 \\ \mathbf{G}^T\mathbf{x} + \mathbf{d} &= 0.\end{aligned}\tag{4.3.24}$$

Die erste Gleichung aus (4.3.24) wird mit

$$\mathbf{G}^T\mathbf{N}_2^{-1}$$

multipliziert und so erhält man:

$$\mathbf{G}^T\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{G}\mathbf{k}_2 - \mathbf{G}^T\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{x} - \mathbf{G}^T\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{l} = 0 \quad . \tag{4.3.25}$$

Durch Addition mit der zweiten Gleichung aus (4.3.24) und gewissen Umformungen erhält man \mathbf{k}_2 :

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{N}_3^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{l} - \mathbf{N}_3^{-1}\mathbf{d} \tag{4.3.26}$$

- gesuchte Größen

Nachdem man (4.3.26) in die erste Gleichung von (4.3.24) einsetzt, erhält man nach Umformungen für \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}_2^{-1}[\mathbf{G}\mathbf{N}_3^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{B}^T - \mathbf{A}^T\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{B}^T]\mathbf{l} - \mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{G}\mathbf{N}_3^{-1}\mathbf{d} \tag{4.3.27}$$

Durch Einsetzen von \mathbf{x} aus (4.3.27) in (4.3.22) erhält man für \mathbf{k}_1 :

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= [\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}_2^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{B}^T - \mathbf{G}\mathbf{N}_3^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{B}^T) + \mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{B}^T]\mathbf{l} + \\ &+ \mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{G}\mathbf{N}_3^{-1}\mathbf{d}\end{aligned}\tag{4.3.28}$$

- Verbesserungen

Entsprechend erhält man für die Verbesserungen aus (4.3.20) durch Einsetzen von \mathbf{k}_1 aus (4.3.28):

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{Q}_l\mathbf{B}\mathbf{N}_1^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{B}^T - \mathbf{A}\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{G}\mathbf{N}_3^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}^T)\mathbf{l} + \\ &+ \mathbf{N}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{N}_2^{-1}\mathbf{G}\mathbf{N}_3^{-1}\mathbf{d}\end{aligned}\tag{4.3.29}$$

Hier sind zusammenfassende Bezeichnungen wie folgt eingeführt worden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_1 &= \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l \mathbf{B} \\
&\quad rr \\
\mathbf{N}_2 &= \mathbf{A}^T \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A} \\
&\quad mm \\
\mathbf{N}_3 &= \mathbf{G}^T \mathbf{N}_2^{-1} \mathbf{G} \\
&\quad kk
\end{aligned} \tag{4.3.30}$$

Für die Funktion ausgeglichener Größen kann geschrieben werden:

$$F_i = F_i(l_1 + v_1, l_2 + v_2, \dots, l_n + v_n; x_1, x_2, \dots, x_m) \tag{4.3.31}$$

Die Taylorische Entwicklung von F_i , wobei mit $\mathbf{f}_{1i}, \mathbf{f}_{2i}$ die Vektoren der partiellen Ableitungen bezeichnet werden, führt zu:

$$\begin{aligned}
F_i &= \mathbf{f}_{1i}^T (\mathbf{1} + \mathbf{v}) + \mathbf{f}_{2i}^T \mathbf{x} \\
F_i &= \mathbf{f}_{1i}^T (\mathbf{E} + \mathbf{H}) \mathbf{1} + \mathbf{f}_{1i}^T \mathbf{H}_1 \mathbf{d} + \mathbf{f}_{2i}^T \mathbf{D} \mathbf{1} + \mathbf{f}_{2i}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{d} \\
F_i &= \left[\mathbf{f}_{1i}^T (\mathbf{E} + \mathbf{H}) + \mathbf{f}_{2i}^T \mathbf{D} \right] \mathbf{1} + \left(\mathbf{f}_{1i}^T \mathbf{H}_1 + \mathbf{f}_{2i}^T \mathbf{D}_1 \right) \mathbf{d} \\
F_i &= \mathbf{R}_i^T \mathbf{1} + \mathbf{C}_i^T \mathbf{d}
\end{aligned} \tag{4.3.32}$$

Für das reziproke Gewicht $1/P_{F_i}$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P_{F_i}} &= \mathbf{R}_i^T \mathbf{Q}_l \mathbf{R}_i = \left[\mathbf{f}_{1i}^T (\mathbf{E} + \mathbf{H}) + \mathbf{f}_{2i}^T \mathbf{D} \right] \mathbf{Q}_l \left[(\mathbf{H}^T + \mathbf{E}) \mathbf{f}_{1i}^T + \mathbf{D}^T \mathbf{f}_{2i}^T \right] = \\
&= \left[\mathbf{f}_{1i}^T \mathbf{f}_{2i}^T \right] \begin{bmatrix} \mathbf{E} + \mathbf{H} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{Q}_l \begin{bmatrix} \mathbf{E} + \mathbf{H}^T \\ \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1i} \\ \mathbf{f}_{2i} \end{bmatrix} = \\
&= \left[\mathbf{f}_{1i}^T \mathbf{f}_{2i}^T \right] \begin{bmatrix} (\mathbf{E} + \mathbf{H}) \mathbf{Q}_l (\mathbf{E} + \mathbf{H}^T) & (\mathbf{E} + \mathbf{H}) \mathbf{Q}_l \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} \mathbf{Q}_l (\mathbf{E} + \mathbf{H}^T) & \mathbf{D} \mathbf{Q}_l \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1i} \\ \mathbf{f}_{2i} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.3.33}$$

oder

$$\frac{1}{P_{F_i}} = \left[\mathbf{f}_{1i}^T \mathbf{f}_{2i}^T \right] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{l+v} & \mathbf{Q}_{l+v,x} \\ \mathbf{Q}_{x,l+v} & \mathbf{Q}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1i} \\ \mathbf{f}_{2i} \end{bmatrix} \tag{4.3.34}$$

Für die einzelnen Teilkorrelationsmatrizen aus (4.3.34) erhält man gemäß (4.3.33), (4.3.28), (4.3.29), (4.3.30):

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{l+v} &= \mathbf{Q}_l - \mathbf{Q}_v \\
\mathbf{Q}_v &= \mathbf{Q}_l \mathbf{B} \mathbf{N}_1^{-1} \left(\mathbf{E} - \mathbf{A} \mathbf{N}_2^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{N}_1^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{N}_2^{-1} \mathbf{G} \mathbf{N}_3^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{N}_2^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{N}_1^{-1} \right) \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l \\
\mathbf{Q}_{l+v,x} &= \mathbf{Q}_{lx} \\
\mathbf{Q}_{v,x} &= 0 \\
\mathbf{Q}_{l,x} &= \mathbf{Q}_l \mathbf{B} \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A} \mathbf{N}_2^{-1} \left(\mathbf{G} \mathbf{N}_3^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{N}_2^{-1} - \mathbf{E} \right) \\
\mathbf{Q}_x &= \mathbf{N}_2^{-1} - \mathbf{N}_2^{-1} \mathbf{G} \mathbf{N}_3^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{N}_2^{-1}
\end{aligned} \tag{4.3.35}$$

Daraus folgt für die reziproke Gewichtsmatrix:

$$\frac{1}{P_F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1i}^T & \mathbf{f}_{2i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_l - \mathbf{Q}_v & \mathbf{Q}_{l,x} \\ \mathbf{Q}_{x,l} & \mathbf{Q}_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1i} \\ \mathbf{f}_{2i} \end{bmatrix} \tag{4.3.36}$$

Für die Elemente die nicht auf der Diagonalen der Korrelationsmatrix stehen, die Kofaktoren Q_F folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_{F_i F_j}}{\sqrt{\mathbf{P}_{F_i} \mathbf{P}_{F_j}}} &= \mathbf{R}_i^T \mathbf{Q}_l \mathbf{R}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1i}^T & \mathbf{f}_{2i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_l - \mathbf{Q}_v & \mathbf{Q}_{l,x} \\ \mathbf{Q}_{x,l} & \mathbf{Q}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{1i} \\ \mathbf{f}_{2i} \end{bmatrix} \\
i &= 1, 2, \dots, \omega
\end{aligned} \tag{4.3.37}$$

Entsprechend kann für die mittleren Fehler der Gewichtseinheit μ und der Unbekannten m_{x_i} unter den Voraussetzungen in (4.3.9) geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\mu &= \sqrt{\frac{1}{r+k-m} \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{v}} \\
m_{x_i} &= \mu \sqrt{\mathbf{q}_{ii}}
\end{aligned} \tag{4.3.38}$$

\mathbf{q}_{ii} sind die Diagonalelemente der Matrix \mathbf{Q}_x

4.4. Anwendung der Methode der Kleinsten Quadrate zur Lösung von Variationsaufgaben in der Mechanik

4.4.1. Analogie zwischen den allgemeinen Funktionalen beider Lagrange'schen Formulierungen

In 4.2. und 4.3. werden die entsprechenden allgemeinen Fälle der Variationsrechnung und Ausgleichsrechnung formuliert. In beiden Fällen geht man von den gleichen Voraussetzungen aus – Suche eines Extremums mittels Lagrange'sche Funktion. Wie schon in 4.1 bemerkt wurde, ist es weiter von besonderer Bedeutung eine exakte Analogie zwischen den Funktionalen beider Formulierungen zu finden, nämlich Analogien der entsprechenden Variablen - Vektoren und Matrizen. Damit wird es leichter sein, das Ergebnis der in 4.1 gestellten Aufgabe – Variationsformulierung in der Mechanik auf der Grundlage der MKQ zu erhalten.

Es sollen die entsprechenden Funktionale aus (4.2.14) und (4.3.17) zum besseren Vergleich nochmals aufgeführt werden:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Pi + \int_B \lambda_{\varepsilon}^T (\varepsilon - BU) dB + \int_{R_u} \lambda_u^T (U_a - U^p) dR \\ \Phi &= \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{v} - 2\mathbf{k}_1^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{w} \\ r_n \quad n1 \quad r_m \quad m1 \quad r1 \end{bmatrix} - 2\mathbf{k}_2^T \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T \mathbf{v} + \mathbf{d} \\ 1k \quad km \quad m1 \quad k1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nach dem äußeren kann nun auch der inhaltliche Vergleich gemacht werden:

Π entspricht der Forderung $\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}$. Der Ausdruck $\varepsilon - BU$ der die geometrische Kompatibilitätsbedingung darstellt korrespondiert mit Beziehung $Bv + Ax + w$. Die Verschiebungsbedingungen $U_a - U^p = 0$ entsprechen den Zusatzbedingungen $Gx + d$. Die Vektoren λ_1 bzw. λ_2 der Lagrange'schen Multiplikatoren entsprechen den Korrelatenvektoren k_1 und k_2 , die in der Mechanik die Bedingungen abschwächen und auf Kräfte und entsprechende Spannungen zurückzuführen sind.

Die Verschiebungen und damit die Verzerrungen ε werden variiert und erhalten entsprechende Verbesserungen v . Für die unbekanntes Verschiebungen U_a wurden schon gute Näherungswerte durch die in Kap. 2 beschriebene Herangehensweise erhalten. Diese werden in den Vektor der Unbekannten x eingesetzt, wobei die vorgeschriebenen Verschiebungen U^p , die im statistischen Test als signifikant erkannt und aus den Messungen direkt erhalten wurden, den Größen d entsprechen.

Die Genauigkeitsabschätzungen für die gesuchten mechnischen Größen werden nach (4.3.38) bestimmt.

Die Zuordnung der Variablen beider Berechnungsmethoden ist in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt:

Größen	Variationsmethode	Ausgleichung
gegeben	Geodätisch gemessene Verschiebungen (U), Materialeigenschaften	Ausgangsgrößen des Netzes (Koordinaten, Richtungswinkel)
gemessen	Näherungsverschiebungen (U') - berechnet nach der Methode in 3.3.5.	d Basisstrecke Richtungen, Strecken, Höhenunterschiede (l)
gesucht	Deformationen (ε, γ) Spannungen (δ, τ) Äußere Kräfte P Multiplikatoren λ_1, λ_2	Koordinaten, Verschiebungen (x, u) Korrelaten (k_1, k_2)

4.4.2. Bestimmung der Variationsunbekannten mit der MKQ

Verwendet wird die Diskretisierung aus Kap 3.2.7. Da wir von n Elementen mit m freien Knoten ausgehen ist Redundanz vorhanden, die eine Lösung nach der Methode der Kleinsten Quadrate ermöglicht.

Auf Grund der schon festgestellten Analogie zwischen den einzelnen gesuchten Größen in beiden Funktionalen, kann man die entsprechenden Formeln aus 3.3. verwenden.

Damit wird in der allgemeinen Form die Bestimmung der Variationsunbekannten realisiert. In diesem Fall bedeutet das :

Für die Bestimmung von ε wird die Formel (4.3.29) benutzt, für U_a – (4.3.27) respektive (4.3.27a), für λ_1 – (4.3.28) und für λ_2 – (4.3.26). Nach den Formeln (4.3.33) bis (4.3.38) können die Genauigkeit der zu bestimmenden Funktionen und Unbekannten erhalten werden. Bei Bedarf kann hier die Verbesserung v als Funktion der Unbekannten x ausgedrückt werden und dadurch wird k_1 eliminiert.

4.4.3. Kombinierte Lösungen

Da sich die folgende Betrachtung auf den allgemeinen dreidimensionalen Fall bezieht und die bislang verwendete Matrizen – Notation zu umfangreichen Darstellungsformen der mathematischen Beziehungen führen würden, ist die kompakte kartesische Tensor-Form nach (Horak 1969) gewählt worden. Im Vorfeld werden dazu einige Erläuterungen gegeben.

Größen	Erläuterung
$r^{(0)} = r^{(0)}(x^1, x^2, x^3)$	Positionsvektor des Punktes P zum Zeitpunkt $t = t_0$
$r^{(i)} = r^{(i)}(x^1, x^2, x^3)$	Positionsvektor des Punktes P zum Zeitpunkt $t = t_i$
$i_\lambda = \frac{\partial r^{(0)}}{\partial x^\lambda} = r_{,\lambda}^{(0)}$	Basisvektor des Koordinatensystems bei $\lambda = 1, 2, 3$
$\delta_{\lambda\mu} = i_\lambda \cdot i_\mu$	Kronecker Symbol definiert durch $\delta_{\lambda\mu} = 1 \quad (\lambda = \mu)$ $\delta_{\lambda\mu} = 0 \quad (\lambda \neq \mu)$
$(\)_{,\lambda}$	Differenzierung nach x^λ oder $(\)_{,\lambda} = \frac{\partial(\)}{\partial x^\lambda}$
$\tau^{\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu}$	$\sum_{\lambda=1}^3 \sum_{\mu=1}^3 \tau^{\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\mu} = \tau^{11} \varepsilon_{11} + \tau^{12} \varepsilon_{12} + \tau^{13} \varepsilon_{13} + \tau^{21} \varepsilon_{21} + \tau^{22} \varepsilon_{22} + \dots$
ε_{ik}	Verzerrungstensor nach der Theorie der virtuellen Verschiebungen
τ_{ik}	Spannungstensor nach der Theorie der virtuellen Verschiebungen
K_i	Vektor der Volumenkräfte
P_i	Vektor der Oberflächenkräfte auf R_1
u_i	Dem Verzerrungstensor entsprechende Verschiebungen $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(u_{ik} + u_{ki})$
\bar{u}_i	Vorgeschriebene Verschiebungen auf R_2

Für die kombinierte Lösung wird ein Gesamtpotential

$$\tilde{\Pi} = \mathfrak{S} + \mathfrak{R} \quad (4.4.2)$$

aufgestellt, in dem iterativ die Variation der potentiellen Energie $\delta \mathfrak{S} = 0$ und der Ergänzungsenergie $\delta \mathfrak{R} = 0$ durchgeführt werden.

Dabei ist die Forderung nach dem Minimum der Potentiellen Energie (Lagrange-Dirichlet) dargestellt in Tensor-Form gemäß Horak (Horak 1969):

$$\mathfrak{S}(u_i, \varepsilon_{ik}) \equiv \int_V \left\{ \frac{1}{2} E_{iklm} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm} - K_i u_i \right\} dV - \int_{R_1} \bar{P}_i \bar{u}_i dR_1 = \min \quad (4.4.3)$$

$$\text{mit} \quad u_i - \bar{u}_i = 0 \quad \text{auf} \quad R_2 \quad (4.4.3.1)$$

Um die Analogien aus Kap. 4.4.1 zu wahren, werden in (4.4.3) Multiplikatoren nach der Methode von Lagrange eingeführt und man erhält:

$$\mathfrak{S}^*(u_i, \varepsilon_{ik}, \lambda_{ik}, \mu_{ik}) \equiv \mathfrak{S} + \int_V \left\{ \lambda_{ik} \left[-E_{iklm} \varepsilon_{lm} + \frac{1}{2}(u_{ik} + u_{ki}) \right] \right\} dV - \int_{R_1} \mu_i (u_i - \bar{u}_i) dR_1 \quad (4.4.4)$$

Das zweite Funktional in (4.4.2) ist die Ergänzungsenergie mit der Forderung (Castigliano-Menabrea):

$$\mathfrak{R}(u_i, \tau_{ik}) \equiv \int_V \left\{ \frac{1}{2} E_{iklm} \tau_{ik} \tau_{lm} \right\} dV - \int_{R_1} \bar{P}_i \bar{u} dR_1 = \max \quad (4.4.5)$$

Hier sind \bar{u} die vorgeschriebenen Verschiebungen.

Variiert wird die Spannung τ_{ik} unter Einhaltung der Gleichgewichtsbedingung im untersuchten Körper :

$$\tau_{ik,k} + K_i = 0 \quad \text{in } V \quad (4.4.6)$$

und die Bedingung an der Oberfläche:

$$\tau_{ik} n_k = \bar{P}_i \quad \text{auf } R_1 \quad (4.4.7)$$

hier sind \bar{P}_i auf der Oberfläche R_1 angreifende Kräfte. Wenn die Bedingungen mit in das Funktional aus (4.4.5) aufgenommen, werden ergibt sich das erweiterte Ergänzungspotential:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^*(u_i, \tau_{ik}, \lambda_{ik}, \mu_{ik}) \equiv & \mathfrak{R} + \int_V \left\{ \lambda_{ik}^* [(\tau_{ik,k} + K_i) - E_{iklm} \text{RotRot}\phi] \right\} dV \\ & - \int_{R_1} \mu_i^* \left[\left(\tau_{ik} n_k - \bar{P}_i \right) \text{RotRot}\phi \right] dR_1 \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Nach Auswahl entsprechender Abbruchkriterien für die iterative Lösung werden wechselweise die Variationen der Verschiebungen in (4.4.4) und danach die der Spannungen aus (4.4.8), gemäß dem Lösungsverfahren aus Kap. 3.4.2, angesetzt. In Abb. 4.1 ist der schematische Ablauf dargestellt. Dies erlaubt eine kontinuierliche Konvergenz von beiden Seiten zu der optimalen Lösung.

Für den Übergang von den resultierenden Verschiebungen aus der Variation von \mathfrak{S}^* zu den Spannungen für die Variation von \mathfrak{R}^* sind die Kompatibilitätsgleichungen (Eulers Differentialgleichungen) zu verwenden. Die Erfüllung dieser Gleichungen ist äquivalent der Existenz solcher Verschiebungen, die einerseits die Beziehungen des Stoffgesetzes erfüllen,

$$\tau_{ik} = c_{iklm} \varepsilon_{lm} \quad (4.4.9)$$

andererseits die Gleichung

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i}) \quad \text{in } V \quad (4.4.10)$$

erfüllen, wobei

$$u_{i,k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (4.4.11)$$

ist.

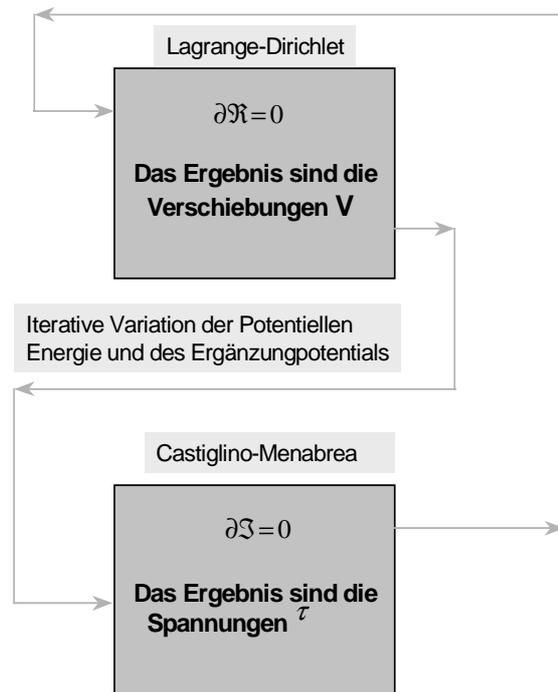


Abb. 4.1 Iterative Lösung im Gesamtpotential nach der Methode der Kleinsten Quadrate

4.4.4. Quasi-statische Formulierung

Die Quasi-statische Formulierung beschreibt einen Körper, der im Ausgangszustand weder Verzerrungen noch Spannungen erfährt. Er soll Gegenstand von zeitabhängig wirkenden inneren Kräfte $\bar{K} = (x_1, x_2, x_3, t)$, Randkräfte $\bar{P} = (x_1, x_2, x_3, t)$ auf R_1 und Randverschiebungen $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3, t)$ auf R_2 sein, wobei \bar{u} und t vom Ausgangszustand aus gemessen worden sind. Es stellt sich die Aufgabe die Deformation und die Spannungsverteilung, während dieser Bewegung, zu bestimmen. Dies kann durch eine quasi-statische Formulierung des dynamischen Problems geschehen. Dabei sind die Änderungen der

inneren und äußeren Kräfte, sowie die Verschiebungen so gering, dass die inertialen Anteile in den Bewegungsgleichungen vernachlässigt werden können.

Somit wäre der von Pelzer eingeführte Begriff Quasi-statisches Modell (Pelzer 1993) passender als der Begriff Statisches Modell aus der Klassifizierung in Abbildung 1.1. Entsprechend kann das Prinzip der virtuellen Arbeit wie in (4.2.2), und die damit verbundene Variationsprinzipien wie unter 4.2.2.3 und 4.2.2.4 formuliert werden, nur dass die Zeit t als zusätzlicher Parameter erscheint.

Das quasi-statische Problem kann als Funktion der Zeit wie folgt ausgedrückt werden:

Die Gleichgewichtsgleichungen und Randbedingungen werden als Terme der Geschwindigkeit wie folgt ausgedrückt:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left[(\delta_{\mu}^{\lambda} + u_{\cdot\mu_i}^{\lambda}) \tau^{\chi\mu} \right]_{\cdot\chi} + \overline{K}^{\lambda} \right\} = 0 \quad \text{in} \quad V \quad (4.4.8)$$

$$\dot{P}^{\lambda} = \dot{\overline{P}}^{\lambda} \quad \text{auf} \quad R_1 \quad (4.4.9)$$

$$\dot{u}^{\lambda} = \dot{\overline{u}}^{\lambda} \quad \text{auf} \quad R_2 \quad (4.4.10)$$

wobei

$$\dot{P}^{\lambda} = \dot{\tau}^{\chi\mu} n_{\chi} (\delta_{\mu}^{\lambda} + u_{\cdot\mu}^{\lambda}) + \tau^{\chi\mu} n_{\chi} \dot{u}_{\cdot\mu}^{\lambda} \quad (4.4.11)$$

$$- \iiint_V \frac{d}{dt} \left\{ \left[(\delta^{\lambda\mu} + u_{\cdot\mu}^{\lambda}) \tau^{\chi\mu} \right]_{\cdot\chi} + \overline{K}^{\lambda} \right\} \delta u^{\lambda} dV + \iint_{R_1} (\dot{P}^{\lambda} - \dot{\overline{P}}^{\lambda}) \delta u^{\lambda} dR_1 = 0 \quad \text{ist.} \quad (4.4.12)$$

Oder nach Umformung der Gleichung:

$$\iiint_V \left[\dot{\tau}^{\lambda\mu} \delta \dot{\epsilon}_{\lambda\mu} + \tau^{\lambda\mu} \dot{u}_{\cdot\lambda}^{\chi} \delta \dot{u}_{\cdot\mu}^{\lambda} - \dot{\overline{K}}^{\lambda} \delta \dot{u}^{\lambda} \right] dV - \iint_{R_1} \dot{\overline{P}}^{\lambda} \delta \dot{u}^{\lambda} dR_1 = 0, \quad (4.4.13)$$

Gleichung (4.4.13) beschreibt das Prinzip der virtuellen Arbeit bei einer quasi-statischen Problemstellung. Hier ist $\delta \dot{\epsilon}_{\mu}$ die Variation von $\dot{\epsilon}_{\mu}$ unter Berücksichtigung nur von \dot{u}^{χ} .

Für die Aufstellung des Variationsprinzips für die quasi-statische Problematik kann, angenommen werden:

- dass die Spannungs- und Verzerrungsänderung durch,

$$\dot{\tau}^{\lambda\mu} = \dot{\tau}^{\lambda\mu} (\dot{\epsilon}_{\alpha\beta}; \tau^{\alpha\beta}, \epsilon_{\alpha\beta}) \quad (4.4.14)$$

gegeben ist, wobei $\tau^{\alpha\beta}$ und $\epsilon_{\alpha\beta}$ als Parameter aufzufassen sind.

- dass die Relation (4.4.14) die Gleichung

$$\frac{\partial \dot{\tau}^{\lambda\mu}}{\partial \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}} = \frac{\partial \dot{\tau}^{\alpha\beta}}{\partial \dot{\varepsilon}_{\lambda\mu}} \quad (4.4.15)$$

erfüllt, was die Existenz einer Zustandsfunktion $A^*(\dot{\varepsilon}_{\lambda\mu}; \tau^{\lambda\mu}, \varepsilon_{\lambda\mu})$ definiert durch

$$dA^* = \dot{\tau}^{\lambda\mu} d\dot{\varepsilon}_{\lambda\mu} , \quad (4.4.16)$$

sicherstellt.

- dass zwei Zustandsfunktionen $\Phi^*(\dot{u}_i)$ und $\Psi^*(\dot{u}_i)$ definiert durch

$$\delta\Phi^* = -\dot{K}^\lambda \delta\dot{u}^\lambda , \quad \delta\Psi^* = -\dot{P}^\lambda \delta\dot{u}^\lambda \quad (4.4.17)$$

existieren.

Das Prinzip der stationären potentiellen Energie kann aus (4.4.13) erhalten werden, und nach Erweiterung durch Lagrangeschen Multiplikatoren als erweitertes Potential geschrieben Π_I werden:

$$\begin{aligned} \Pi_I = & \iiint_V \left[A^* \left(\dot{\varepsilon}_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \tau^{\lambda\mu} \dot{u}_{,\lambda}^\chi \dot{u}_{,\mu}^\chi + \Phi^*(\dot{u}_\lambda) \right) \right] dV \\ & - \iiint_V \dot{\tau}^{\lambda\mu} \left\{ \frac{1}{2} \left[(\delta_\lambda^\chi + \dot{u}_{,\lambda}^\chi) \dot{u}_{,\mu}^\chi + (\delta_\mu^\chi + \dot{u}_{,\mu}^\chi) \dot{u}_{,\lambda}^\chi \right] \right\} dV \\ & + \iint_{R_1} \Psi^*(\dot{u}^\lambda) dR - \iint_{R_2} \dot{P}^\lambda (\dot{u}^\lambda - \dot{u}^\lambda) dR \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

Hier sind die unabhängigen Größen $\dot{\tau}^{\lambda\mu}$, $\dot{\varepsilon}_{\lambda\mu}$, \dot{u}^λ und \dot{P}^λ Gegenstand der Variation ohne zusätzliche Bedingungen, da die Größen $\tau^{\lambda\mu}$, $\varepsilon_{\lambda\mu}$, u^λ als Parameter behandelt werden und nicht variiert werden. Die Bedingungen der Stationarität für eine quasi-statische Formulierung ist durch die Gleichungen (4.4.8), (4.4.9) und (4.4.10) zusammen mit der Definition der Lagrangeschen Multiplikatoren

$$\dot{p}^\lambda = \dot{P}^\lambda \quad (4.4.19)$$

gegeben.

Wenn das quasi-statische Problem in der virtuellen Verschiebungstheorie definiert ist, gelten für die Bedingungsgleichungen (4.4.3.1), (4.4.6), (4.4.7) und (4.4.10) nur mit den Größen in

ihrer ersten Ableitung. Mit dieser Einschränkung ist auch das erweiterte Potential aus (4.4.3) für (4.4.17) einzusetzen.

4.4.5. Dynamische Formulierung

In betracht wird die dynamische Problemstellung gemäß 4.4.4 herangezogen ohne eine quasi-statische Bewegung des Körpers zu verlangen (Washizu 1968). Die Bewegungsgleichungen für die dynamische Problemstellung ergeben sich aus der Kraftgleichung des Gleichgewichts

$$\tau_{,\lambda}^{\lambda} + \bar{K} = 0 \quad (4.4.20)$$

durch Ersetzen von \bar{K} durch $\bar{K} - \zeta \left(\frac{d^2}{dt^2} \right)$

und generalisierten Spannungsgleichung

$$\tau^{\lambda\mu} = \tau^{\mu\lambda} \quad (4.4.21)$$

wobei ζ die Dichte des Körpers pro Einheitsvolumen im Ausgangszustand ist.

Entsprechend erhält man aus der Gleichung der virtuellen Arbeit durch entsprechendes Ersetzen von \bar{K} und Integration im Zeitraum $t = t_1$ und $t = t_2$, bei Einhaltung der Forderung für r in beiden Zeitpunkten - $\delta r(x^1, x^2, x^3, t_1) = \delta r(x^1, x^2, x^3, t_2) = 0$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V \tau^{\lambda\mu} \delta \varepsilon_{\lambda\mu} dV - \delta T - \iiint_V \bar{K} \cdot \delta r dV - \iint_{R_1} \bar{P} \cdot \delta r dS \right] dt = 0 \quad (4.4.22)$$

Dabei ist

$$\varepsilon_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} (u_{,\mu}^{\lambda} + u_{,\lambda}^{\mu} + u_{,\lambda}^{\chi} u_{,\mu}^{\chi}) \quad (4.4.23)$$

und T ist die kinetische Energie des Körpers definiert als

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \zeta dV = \frac{1}{2} \iiint_V \dot{u}^{\lambda} \dot{u}^{\lambda} \zeta dV \quad (4.4.24)$$

Wenn eine Energiefunktion der Form

$$dA = \tau^{\lambda\mu} d\varepsilon_{\lambda\mu} \quad (4.4.25)$$

existiert, so kann (4.4.22) wie folgt geschrieben werden:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V \delta T - \delta U - \iiint_V \bar{K} \cdot \delta r dV - \iint_{R_1} \bar{P} \cdot \delta r dS \right] dt = 0 \quad (4.4.26)$$

Dabei ist U die Verzerrungsenergie des elastischen Körpers gegeben durch:

$$U = \iiint_V A(u^\lambda) dV. \quad (4.4.27)$$

Wenn zwei Potentiale der Form existieren :

$$\delta\Phi = -K^\lambda \delta u^\lambda, \quad \delta\Psi = -P^\lambda \delta u^\lambda \quad (4.4.28)$$

kann (4.4.26) zu

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V T - U - \iiint_V \Phi dV - \iint_{R_1} \Psi dS \right] dt = 0, \quad (4.4.29)$$

reduziert werden. Hier wird u^λ variiert.

Dies ist das Hamilton'sche Prinzip für ein elastischen Körper, in seiner dynamischen Formulierung, das besagt:

Aus der Menge aller zulässigen Verschiebungen die die vorgeschriebenen geometrischen Randbedingungen auf S_2 und die vorgeschriebenen Bedingungen durch $t = t_1$ und $t = t_2$, erfüllen, gewährleistet die gegebene Lösung des Funktionales (4.4.29) die Stationarität.

Das ist eine Erweiterung des Prinzips des Minimums der Potentiellen Energie aus (4.2.6) auf dynamische Problemstellungen und kann wie in (4.4.3) durch die Einführung von Multiplikatoren erweitert werden.

Aufgrund der zuvor durchgeführten Betrachtungen aus Sicht der Theoretischen Mechanik, erscheint es logisch als, Allgemeinfall der Definition des Problems der Deformationsanalyse, das erweiterte Hamilton'sche Funktional anzusehen.

5. Geotechnisches Informationssystem und Anwendungsbeispiele

5.1. Geotechnisches Informationssystem

Bevor zu der Übernahme der Daten in das Informationssystem übergegangen wird, ist erst die Frage ihrer Art und Herkunft zu klären. Für den geodätischen Teil erscheint dies nicht so problematisch, da ausgereifte statistische Verfahren entsprechend Informationen über die Qualität der Ergebnisse liefern. Aus Sicht des Geodäten ist es interessanter die Frage zu beantworten, wie genau, zuverlässig und reproduzierbar sind die Daten die von den Nachbardiisziplinen kommen und dem Informationssystem zugrunde gelegt werden. Für bestimmte Bereiche könnten die geodätischen Daten als Kontrolle verwendet werden. Das könnten die Verschiebungen, berechnet aus Messungen diskreter Punkte am Objekt, verglichen mit den gewonnenen aus einem Finite Elemente Modell, sein. Eine gute Lösung wäre auch die Berechnung der nichtgeodätischen Größen, wie Spannungen und Kräfte, nach den vorgeschlagenen Berechnungsmethoden in Kapitel 4 und 5. Diese Ergebnisse würden Standardabweichungen beinhalten womit die Qualität beurteilt werden könnte.

Als erster Schritt ist eine Kombination von Daten aus Geodäsie und Bauingenieurwesen der Richtige. Dies wurde auch in den vorangegangenen Überlegungen dieser Arbeit begründet. Im Allgemeinfall eines Ingenieurobjekt bezogenem geotechnischen Informationssystem, z. B. einer Staumauer, werden die Daten von folgenden Fachgebieten zur Verfügung gestellt.

- Bauingenieurwesen
- Geodäsie
- Ingenieurgeologie
- Mineralogie
- Hydrogeologie
- Seismologie
- Geophysik
- Geologie
- Ingenieurchemie

Eine grafische Darstellung erlaubt die Zuordnung, der auf der entsprechenden Fachschicht dargestellten Information mit den zugeordneten digitalen fachspezifischen Daten, sowie die Abfrage von Zusatzinformationen. Die Investitionen und entsprechende Ausbaustufen des Systems sind vor allem von der Wichtigkeit des Objekts abhängig. Eine Beispielstruktur für ein geotechnisches Informationssystem ist auf Abbildung 5.1 gegeben.

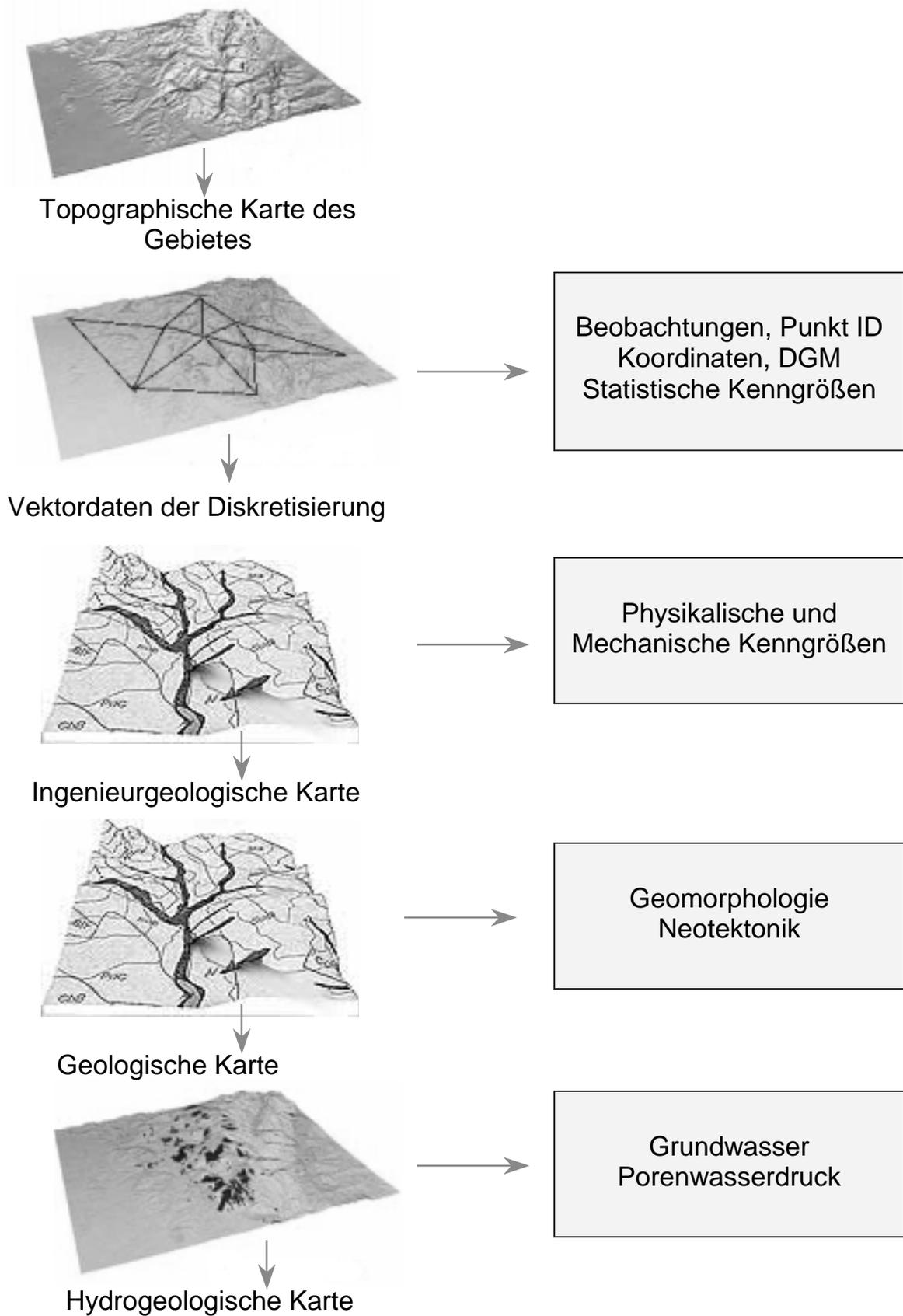


Abb. 5.1: Geotechnisches Informationssystem (Milev, Gründig 1998)

5.2. Beispiele zur Deformationsuntersuchung

5.2.1. Talsperren

Als Beispiel wird die Überwachung des Mathis Staudammes in den USA angeführt, der zum Zuständigkeitsbereich des Energieversorgungsunternehmens Georgia Power gehört. Die dort zeitdiskret durchgeführten Winkel- und Streckenmessungen wurden analysiert.

5.2.1.1. Das Überwachungsnetz und die Messung

In Abbildung 5.2 ist die Netzkonfiguration dargestellt. Die Deformationsanalyse wurde für die Messungen Herbst 1991 (F91), Frühling 1993 (S93) und Herbst 1993 (F93) durchgeführt. Die a priori Standardabweichungen sind entsprechend:

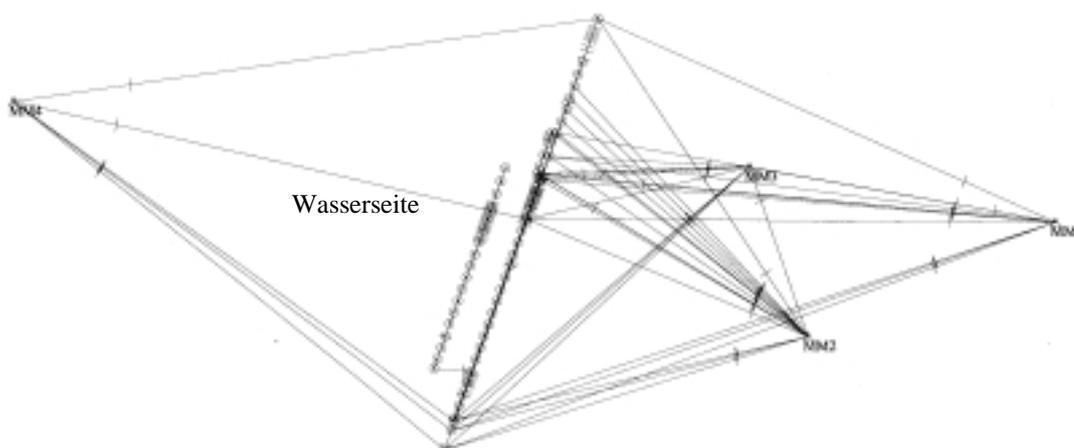
Richtungen	6 "
Schrägstrecken	1.0 mm + 1 ppm
Zenitwinkel	7 "
Zentrierunsicherheit	0.5mm

angesetzt worden.

Das Netz besteht aus 4 Referenzpunkten MM1 - MM4, von denen sich MM1-MM3 auf der Luft- und MM4 auf der Wasserseite befinden (Abb. 5.2).

Diese Punkte definieren nach einer Überprüfung gemäß 4.2.2.1 das Datum.

Man erkennt, dass die Objektpunkte in zwei Gruppen aufgeteilt sind, die sich in einer Flucht befinden. Die gewählte Geometrie ermöglicht eine Kontrolle mittels Alignment.



M 1:3300

Abb. 5.2: Deformationsnetz Mathis Dam - USA

Die Ausgleichungen der einzelnen Epochen als freies Netz bestätigen die gute Geometrie. Die Standardabweichung der Punktkoordinaten liegt im Durchschnitt bei 0.5 mm.

5.2.1.2. Durchführung der Deformationsanalyse

Im Vergleich der Epochen F91 und S93 wurde in der Gruppe der signifikant verschobenen Punkte ein Bewegungstrend erkannt. Daraufhin wurde die Gruppe SM1 - SM12 auf gemeinsame Deformationsparameter hin überprüft. Dabei handelt es sich um das zur Wasserseite liegende Profil (Abb.5.2) mit einer Bewegungstendenz zur Luftseite.

Bei der gemeinsamen Auswertung der Epochen F91 und F93 wurde erneut eine gemeinsame Bewegung festgestellt (Abb. 5.3), die eine Prüfung der Signifikanz dieser Gemeinsamkeit begründete. Die Gruppe enthält die Punkte SM20 - SM28. Die gemeinsamen Parameter der Veränderung sind in Abb. 5.4 gegeben. Dieses Mal ist es das zur Luftseite liegende Profil, welches sich in Richtung Wasserseite bewegt.

SIGNIFIKANZPRUEFUNG NICHT ZUR BASIS GEHOERIGER PUNKTE					
LFD. Nr.	PUNKTNAME	DX (CM)	DY (CM)	OMEGA-ANTEIL	ETEST
36	SM15	0.4341	-0.3707	26.9944	6.1800
36	SM13	0.4965	-0.2931	26.9304	6.1800
36	SM17	0.4961	-0.4415	29.9972	6.1800
36	SM20	0.1315	-0.2459	17.7500	6.1800
36	SM21	0.2826	-0.2229	21.3502	6.1800
36	SM25	0.2839	-0.3123	31.4871	6.1800
36	SM22	0.1886	-0.3501	33.2921	6.1800
36	SM27	0.3902	-0.2995	33.3911	6.1800
36	SM24	0.4162	-0.3021	42.0678	6.1800
36	SM26	0.1870	-0.4207	39.3382	6.1800
36	SM14	0.5508	-0.3770	38.8340	6.1800
36	SM28	0.4667	-0.3676	46.1972	6.1800
36	SM23	0.4352	-0.3957	58.9474	6.1800
36	WP3	0.1983	0.2008	10.1197	6.1800
36	WP2	0.5816	-0.5632	60.4549	6.1800
36	SM16	0.8498	-0.4462	61.6473	6.1800
36	SM35	-0.3435	-0.1639	7.2062	6.1800

Abb. 5.3: Signifikante Verschiebungen zwischen den Epochen F91 und F93

SIGNIFIKANTE	PARAMETER
TRANSLATION Y	-0.3713 CM
TRANSLATION X	0.3314 CM
ROTATION X-Y	0.0032 GON

Abb. 5.4: Ergebnis DEFAN nach Untersuchung auf Gruppenverschiebungen

Nachfolgend wurden die Ergebnisse des Einzelpunkttests dem Analyseverfahren, das in Kapitel 2.3 beschrieben wurde, unterzogen.

Die Koordinatendifferenzen und die Kovarianzen wurden in ein lokales Koordinatensystem gerechnet und für diesen Untersuchungsschritt in ein anderes, das durch beide Hauptachsen des Objekts definiert wird, transformiert. Es wurden die Parameter eines Polynoms dritten

Grades für den statistischen Test angesetzt. Als signifikant wurden die Parameter b, c und d erkannt. Das Ergebnis ist in Abb. 5.5 Dargestellt.

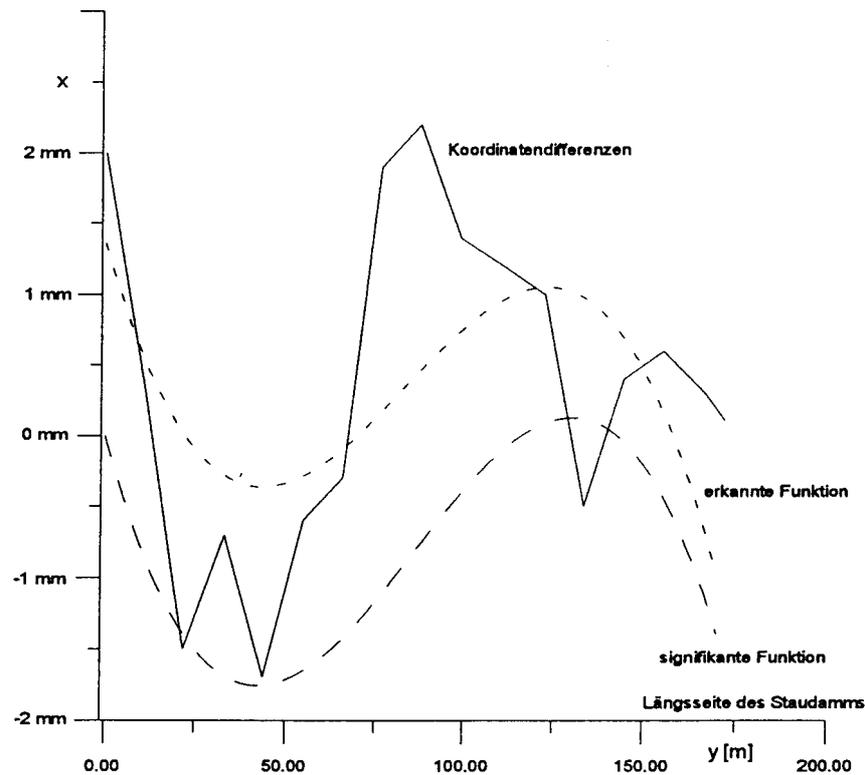


Abb. 5.5: Ergebnis nach Signifikanzprüfung eines angesetzten Polynoms (Nitschke 1997)

Diese Bewegungen sind als jahreszeitbedingt einzuordnen, da Stauhöhe und Temperaturunterschied zwischen Luft und Wasserseite, über das Jahr geglättet, sich zu den Beobachtungszeitpunkten in unterschiedlichen Wertebereich befanden.

5.2.2. Brücken

Die Überwachung der Lindenhofbrücke in Berlin (Abb. 5.6) ist eine der vielen Messungen, welche die Vermessungsabteilung der Senatsverwaltung für Bauen, Wohnen und Verkehr durchführt. Um größere Schäden abzuwenden, werden diese Brücken in regelmäßigen Abständen untersucht. Auch bei bereits sanierten Brücken, wie im vorliegenden Fall, können Schäden durch unsachgemäß durchgeführte Arbeiten entstehen. Praktiziert werden von Seiten der Vermessungsabteilung permanente Messungen, sowohl im statischen so auch im dynamischen Belastungsbereich. Diese sollen durch geodätische Messungen gestützt werden (Spranger 1999).



Abb. 5.6: Lindenhofbrücke, Ansicht von Osten

Nachfolgend sind einige Technische Daten der Brücke aufgeführt:

Entstehungsjahr	1970
Bauweise	Stahlbeton - Skelettbauweise
Brückenklasse	60/30
Tragfähigkeit	60 t

Gegenwärtig ist das bevorzugte Messverfahren bei der geometrischen Brückenprüfung noch das Nivellement. Als Hauptgrund dafür ist sicherlich der wirtschaftliche Aspekt zu sehen. Die so durchgeführten Messungen erfordern lediglich eine Sperrung der Brücke oder eine Durchführung der Messung in der Nacht. Zum Nachweis der Standsicherheit werden oftmals Belastungsversuche herangezogen. Eine Erfassung der Einflussgrößen erfolgt meist nicht. Die Aufstellung und Überprüfung eines mathematischen Brückenmodells ist damit nicht möglich. Für eine umfangreiche Brückenprüfung können folgende Zielsetzungen genannt werden:

- Das Messverfahren und Auswertung müssen
 - dem Nachweis der Standsicherheit,
 - dem rechtzeitigen Erkennen von Schäden sowie
 - der Überprüfung des zugrundeliegenden Rechenmodells
 dienen und an diesen Zielen ausgerichtet sein.

- Zusätzlich zu den Deformationen müssen die Einflussgrößen erfasst werden.
- Die Herstellung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Einfluss- und Deformationsgrößen ermöglicht so die Ursachenforschung. Eine Überprüfung, Ergänzung oder sogar eine Verbesserung des Bauwerksmodells wäre damit möglich.

5.2.2.1. Sensoren in der permanenten Vermessung

Um das mathematische Modell einer Brücke zu verbessern, sind die Ursachen der Deformationen zu klären. Daraus können dann die Konstruktions- und Materialeigenschaften abgeleitet werden. Mit ihrer Hilfe wird es möglich, zukünftige Brücken so zu konzipieren, dass auftretende Deformationen bereits in der Planungsphase weitgehend bekannt sind und ihnen entgegengewirkt werden kann. Dies erfordert bei einem Übergang zur kontinuierlichen Vermessung das Installieren von Sensoren. Bei einem kontrollierten Lastfall sollte dies keine Schwierigkeiten bereiten; bei normalem Verkehrsbetrieb ist dies jedoch nur beschränkt möglich. Hier müssen Schätzungen und Generalisierungen vorgenommen werden. Die Einflussfaktoren werden für einen bestimmten Zeitraum zusammengefasst und für einen individuellen Zeitpunkt interpoliert. Eine solche mathematische Filterung hat den Vorteil, dass dabei kurzfristige Einflüsse eliminiert werden. In besonderen Fällen kann dies aber auch zum Nachteil werden.

5.2.2.2. Geodätischer Anteil der Messungen

Da die Fahrbahnschäden besonders zwischen den Trägern 3 bis 7 auftreten, gilt es diesen Bereich besonders zu untersuchen. Am besten wäre es, den gesamten Fahrbahnbereich zu messen, um zu sehen, wie sich die Träger verhalten, bei denen bisher keine Fahrbahnschäden aufgetreten sind.

Um auch die Maximaldeformation zu erfassen, die in der Mitte der Träger zu erwarten ist, sollten die Messmarken möglichst mittig angebracht werden. Dazu werden Schrauben in den Stahlbeton gebohrt.

Es wird angenommen, dass einzelne oder auch alle Punkte Relativbewegungen ausführen. Die zu beobachtenden Zustände seien kurz genannt:

- 1: Urzustand, Nullmessung
- 2: Messung bei Belastung
- 3: Messung nach Entlastung; ggf. Enddeformation bei plastischem Verformungsanteil

Die Höhen der Messmarken werden durch Firstnivelllement bestimmt. Sie werden relativ zu einem Referenzpunkt gemessen. Da die Messung nachts erfolgt, ist der Einsatz eines Digitalnivelliers äußerst problematisch. Mögliche Mustererkennungsfehler, sowie die Ungewissheit der Funktionszuverlässigkeit bei Dunkelheit, Regen oder Schnee haben zur Wahl eines optischen Nivelliers geführt. Bei gleichzeitiger Verwendung einer Doppel-Invarlatte, die zuvor mit einem Laserinterferometer auf Teilungsfehler untersucht wurde, ist eine Verprobung der Messdaten noch vor Ort möglich.

Zur Verfügung stand das Präzisionsnivellier Ni 1. Die Eigenschaften dieses Gerätetyps sind in Abb. 5.7 aufgeführt.

Eine Beobachtungsgenauigkeit von 0,1 bis 0,2mm wird angestrebt, was auch bei nicht optimalen Sichtverhältnissen für realistisch gehalten werden kann.

Gerät /Zubehör	Genauigkeit /Kalibrierung
Ni 1	- $\pm 0,1\text{mm}$ für 1 km Doppelnivellement
2m Doppelinvarbandlatte	- Neigungsfehler ca. $0,5\text{mgon}$ - Teilungsfehler $< 1/100\text{ mm}$

Abb. 5.7 Instrumentarium

Bedingt durch die Trägheit der Bauteile wird die Maximaldeformation bei statischer Belastung erwartet. Die Größenordnung, in der sich die Objektdeformationen bewegen, wird aufgrund der großen Probelastung auf 2mm geschätzt. Da eine elastische Reaktion der Brückenelemente zu erwarten ist, wird die Deformation so gut wie ohne Verzögerung eintreten.

5.2.2.3. Sensorischer Anteil der Belastungsmessung

Die Messuhren registrieren Wegänderungen bis zum $1/100\text{ mm}$ -Bereich. Die Standardabweichung wird vorsichtig auf $\sigma = 0,05\text{mm}$ geschätzt.

Die Messung erfolgt in zwei Zuständen. In Zustand 2 werden zwei Spezialfälle simuliert. Um mögliche Torsionen besonders beanspruchter Träger zu messen, wird die Probelast in zwei unterschiedlichen Positionen geparkt (Abb. 5.8). Als ein Satz (Messsatz) wird in der nachfolgenden Ausführung die abgelesenen Werte aller Messuhren eines Belastungszustandes.

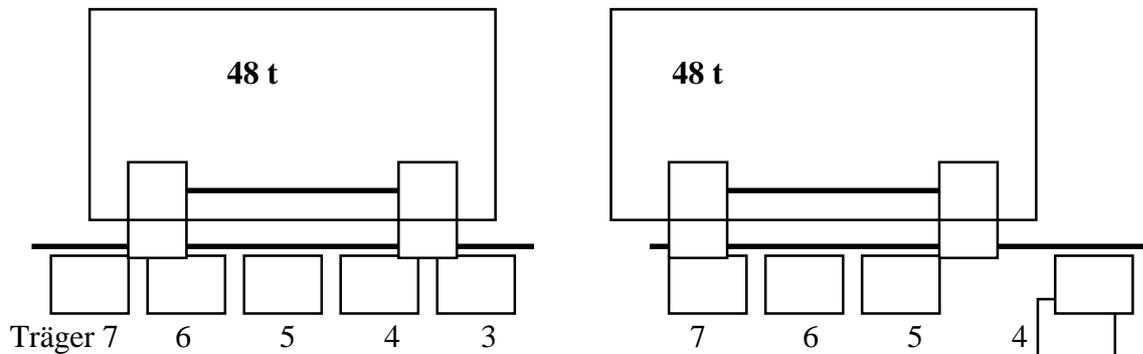


Abb. 5.8 Positionen des LKW, links: Position I, rechts: Position II

Besonders in den Bereichen der Träger 3 und 4 sind Fahrbahnschäden vorhanden. Deshalb sollen an diesen Trägern jeweils zwei Messpunkte installiert werden, um eventuell auftretende Torsionen zu messen.

5.2.2.4. Messung bei dynamischer Belastung

Die für die statische Belastung durchgeführten Vorplanungen zur Messgenauigkeit und Trennschärfe des Meßsystems gelten auch für die dynamische Messung.

Die Abtastrate während der dynamischen Untersuchungen sollte der Deformationsgeschwindigkeit und auch der Trennschärfe des Messverfahrens angepasst sein.

Für den Fall, dass die ausgewählte Probelast mit 40 km/h die Brücke überquert (ca. 11 m/sec), dauert die Überfahrt bei einer Brückenlänge von ca. 20 m, schätzungsweise 2 sec. Die Maximaldeformation von 2 mm müsste bei elastischer Durchbiegung nach ca. 1 sec erreicht werden. Die Deformationsgeschwindigkeit beträgt demnach etwa 2 mm/sec.

$$\dot{y} = \left(\frac{dy}{dt} \right) = \left(\frac{2mm}{1sec} \right) = 2mm/sec$$

Bei der Kenntnis der Deformationsgeschwindigkeit lässt sich mit einer Faustformel (Pelzer, 1988) die sinnvolle Länge des Messzeitpunktabstandes Δt berechnen:

$$\Delta t = 5 \frac{\sigma_y}{|\dot{y}|} = 5 \frac{0.05mm}{2mm/sec} = 0.125 sec$$

Dieser Wert sollte nur als grober Anhaltswert verstanden werden, da die Deformationsgeschwindigkeit auch nur näherungsweise bekannt ist.

Die zum Einsatz kommende Messeinrichtung realisiert eine Abtastrate von 0.2 sec bzw. eine Abtastfrequenz von 5 Hz. Aufgrund der theoretischen Überlegungen wäre eine höhere Abtastrate empfehlenswert, was jedoch mit diesem System leider nicht möglich ist. Daher muss eine niedrigere Geschwindigkeit des Belastungsfahrzeuges gefordert werden. Durchgeführt wurden zwei Überfahrten und anschließend zwei Bremsproben auf der Brücke.

5.2.2.5. Ergebnisse der Ausgleichungen und Deformationsanalyse der geodätischen und physikalischen Messungen bei statischer Belastung

In der folgenden Übersicht (Abb. 5.9) ist die Lage der Messmarken dargestellt, sowie ihre Einteilung nach verwendetem Messverfahren.

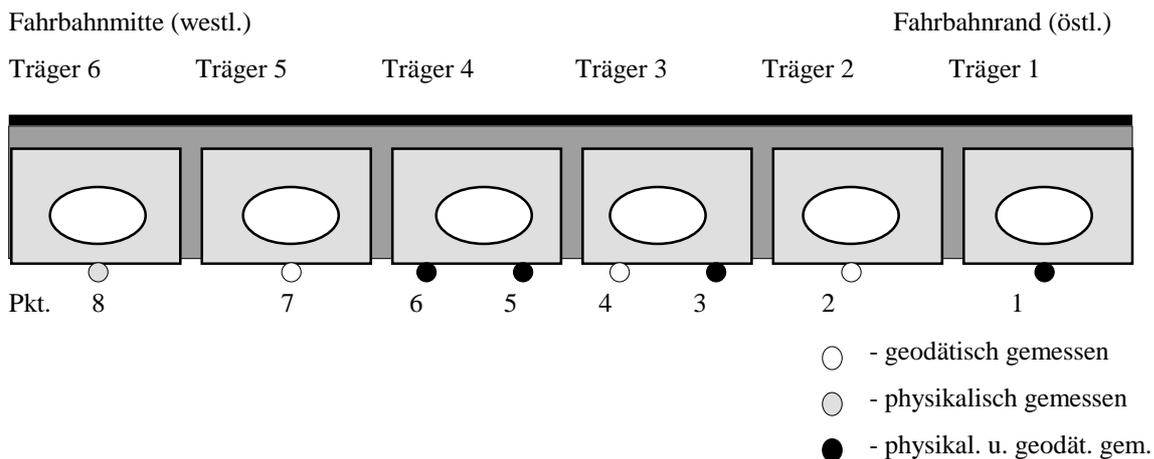


Abb. 5.9 Position der Messpunkte

In vorgebohrte Löcher gedrehte Schrauben dienten als Bezugspunkte für beide Meßmethoden. Dauerhaftigkeit und Zuverlässigkeit in der Stabilität dieser Punkte kann zumindest für den Zeitraum der Untersuchung vorausgesetzt werden.

- Geodätische Messung

Die Standardabweichungen des Nivellements sind in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt.

Pkt.-nr.	lokale Höhen					
	Epoche 1 [m]	σ in [cm]	Epoche 2 [m]	σ in [cm]	Epoche 3 [m]	σ in [cm]
1	6,1542	0,010	6,1521	0,009	6,1542	0,004
2	6,1424	0,013	6,1401	0,012	6,1425	0,005
3	6,1548	0,015	6,1529	0,013	6,1553	0,005
4	6,1456	0,015	6,1429	0,014	6,1455	0,005
5	6,1433	0,015	6,1406	0,013	6,1431	0,005
6	6,1467	0,013	6,1437	0,012	6,1464	0,005
7	6,1281	0,010	6,1249	0,009	6,1276	0,004
8	-	-	-	-	-	-

Tabelle: 5.1 Ausgleichsergebnis des Nivellements

- Deformationsanalyse

Pkt.-nr.	Epochenvergleich - Verschiebungen				
	Epoche 1-2 [cm]	σ in [cm]	Epoche 2-3 [cm]	σ in [cm]	Epoche 1-3 [m]
1	-0,1977	0,013	0,2045	0,010	keine signifikanten Verschiebungen
2	-0,2221	0,018	0,2406	0,013	
3	-0,1930	0,020	0,2405	0,014	
4	-0,2601	0,021	0,2583	0,015	
5	-0,2600	0,020	0,2618	0,014	
6	-0,2816	0,018	0,2735	0,013	
7	-0,2965	0,013	0,2755	0,010	
8	-	-	-	-	

Tabelle 5.2: Deformationsanalyse der geodätischen Messungen

- Kontinuierliche Messung

Pkt.-nr.	Epoche 1	Epoche 2		
	Nullsetzung [mm] (Unbelastet)	Simultan 1 [mm] (Position 1 belastet)	Simultan 2 [mm] (Position 1 belastet)	Simultan 3 [mm] (Position 2 belastet)
1	0,00	-1,66	-1,94	-1,89
2	---	---	---	---
3	0,00	-2,68	-2,23	-1,94
4	---	---	---	---
5	0,00	-2,72	-2,53	-2,38
6	0,00	-2,88	-2,49	-2,38
7	---	---	---	---
8	0,00	-2,77	-2,10	-2,12

Tabelle 5.3: Deformationsanalyse der kontinuierlichen Messungen

Offenbar existieren keine Korrelationen der Positionierungen des Fahrzeuges mit den auftretenden Deformationen. Wie aus der Tabelle ersichtlich, passen die Messungen von Satz 2 in Position 1 und Satz 3 in Position 2 besser zusammen, als die Messungen bei gleicher Positionierung.

- Satzausgleichung

Die an der Vorrichtung abgelesenen Wegänderungen werden als Höhendifferenzbeobachtungen eingeführt. Aufgrund der großen Differenzen zwischen den einzelnen Sätzen kann die geschätzte Genauigkeit der Beobachtungen mit $\pm 0,05\text{mm}$ nicht bestätigt werden. Um Unstimmigkeiten im mathematischen Modell der Ausgleichung zu vermeiden, muss bei gemeinsamer Ausgleichung der Sätze 2 und 3 eine Korrektur der Standardabweichung auf $\pm 0,1\text{mm}$ und bei Ausgleichung der Sätze 1,2 und 3 auf $\pm 0,2\text{mm}$ erfolgen.

Durch eine Kombination mit den geodätischen Beobachtungen könnte die Erhöhung der Redundanz eine Verringerung der Standardabweichungen bewirken sowie die Lokalisierung eventueller grober Fehler erleichtern.

- Ergebnis der Kombination kontinuierlich und geodätisch gewonnener Messwerte

Pkt.-nr.	Epoche 0		Epoche 1	
	Ausgegl. Höhen [m]	σ in [cm]	Ausgegl. Höhen [m]	σ in [cm]
1	6,1542	0,014	6,1523	0,011
2	6,1424	0,018	6,1401	0,021
3	6,1551	0,020	6,1528	0,016
4	6,1455	0,021	6,1429	0,023
5	6,1432	0,020	6,1406	0,018
6	6,1466	0,018	6,1439	0,020
7	6,1279	0,014	6,1250	0,019
8	0,0000	0,000	-0,0025	0,024

Tabelle 5.4: Ergebnis der kombinierten Ausgleichung beider Messmethoden

Auf Grund der Tatsache, dass zwischen Nullmessung und Messung 3- nach der Entlastung keine signifikanten Verschiebungen auftauchen, wurden sie im Rahmen der Auswertung gemeinsam zu einer neuen Nullmessung zusammengefasst. Dadurch konnte die Redundanz gesteigert werden. Der Belastungszustand wird durch die 3 Sätze der kontinuierlichen Messung und der Diskretmessung 2 - geodätisch , repräsentiert.

Durch die Kombination mit geodätischen Beobachtungen verbessert können die Standardabweichungen der Satzausgleichung der kontinuierlichen Beobachtungen wieder gedrückt werden. Das ist ein Beweis für die gute Übereinstimmung der Daten aus beiden Messverfahren.

- Deformationsanalyse der kombinierten Messwerte aus kontinuierlich gewonnener und geodätischer Methode

Für die in der folgenden Tabelle berechneten Verschiebungen wurden ein Signifikanzniveau für Fisher-Test von 95% und die geschätzte Aufstellgenauigkeit von 0.02cm angesetzt.

<i>Pkt.-nr.</i>	<i>Verschiebung in [cm]</i>	<i>σ in [cm]</i>
1	-0,1895	0,018
2	-0,2325	0,028
3	-0,2288	0,026
4	-0,2635	0,031
5	-0,2615	0,027
6	-0,2696	0,027
7	-0,2826	0,024
8	-0,2465	0,024

Tabelle 5.5: Endgültige Verschiebungen aus der Belastungsprobe

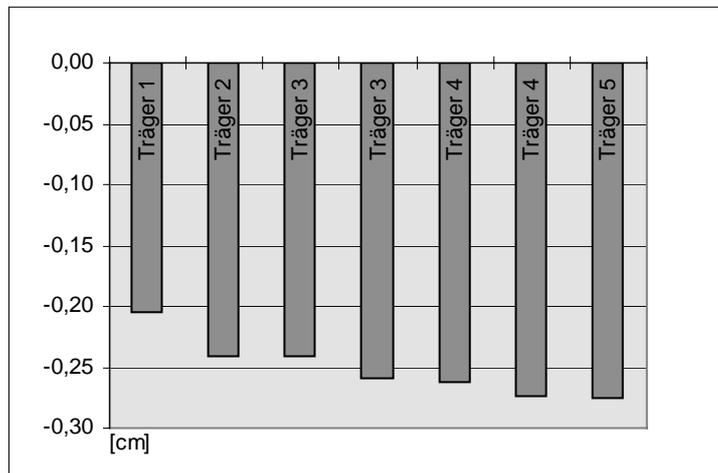


Abb. 5.10: Durchbiegung der Träger, bestimmt aus geodätischen Beobachtungen

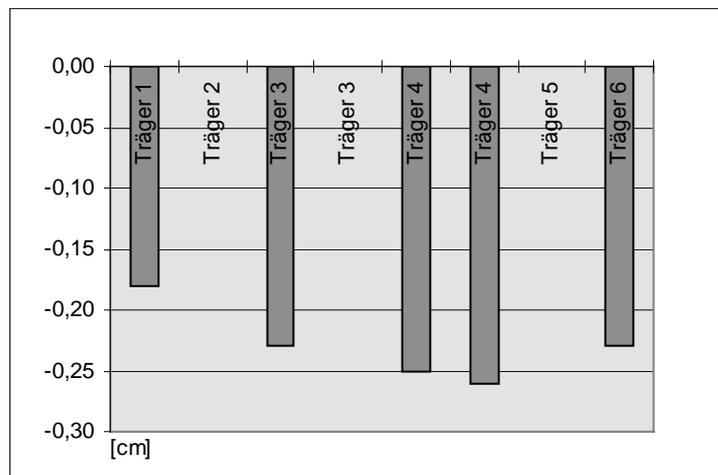


Abb. 5.11: Durchbiegung der Träger, bestimmt aus kontinuierlichen Beobachtungen

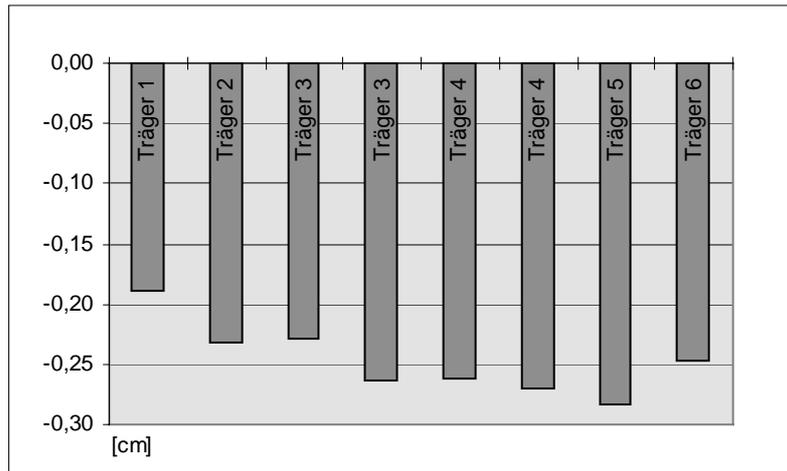


Abb. 5.12: Durchbiegung der Träger, bestimmt aus geodätischen und kontinuierlichen Beobachtungen

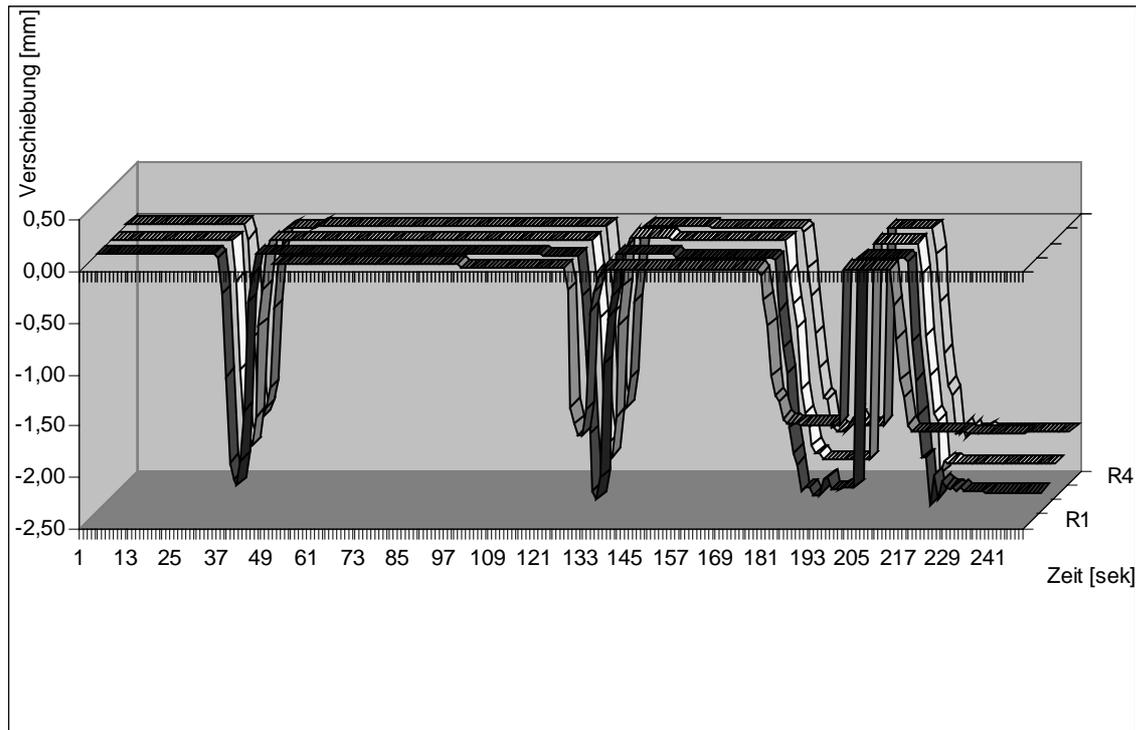
5.2.2.6. Zeitreihenanalyse der Messung bei dynamischer Belastung

Für Auswertung einer der dynamischen Messungen stehen die Daten der Mesysteme der Punkte 3, 5, 6 und 8 zur Verfügung. In den Diagrammen (Abb. 5.12) sind die beobachteten Deformationen während der beiden Überfahrten und den Bremsversuchen als Funktion der Zeit dargestellt (5 Messwerte = 1 sec).

Aus den Diagrammen lässt sich sofort das elastische Verhalten der Brücke ablesen. Bei Belastung reagiert die Brücke praktisch ohne Verzögerung und begibt sich bei Entlastung sofort in die Ausgangslage zurück. Selbst die zu erwartende schnell abklingende Schwingung während des Bremsruckes ist in den Zeitreihen der Punkte 5 (Abb. 5.12) und 7 deutlich zu erkennen. Auffallend sind jedoch die unterschiedlichen Ausschläge während des Bremsruckes an den vier Messpunkten. Eine verschiedenartige Reaktion der einzelnen Träger lässt sich anhand der Ergebnisse der Messungen bei statischer Belastung nicht vermuten. Eine unterschiedliche Sensibilisierung der Mesysteme dürfte die plausible Begründung sein. Während bei den Messpunkten 5 und 8 eine deutliche gedämpfte Schwingung, hervorgerufen durch den Bremsruck, zu erkennen ist, verhindert die Trägheit der Mesysteme an den Punkten 3 und 6 derartige Erkenntnisse. Bei Vergleich der Zeitreihen in Diagramm 8 ist das Verhalten der Reihe 1 auffällig. Wie schon bei den statischen Messungen, wo die Daten von Messpunkt 3 durch einen höheren Wert der normierten Verbesserung aufgefallen sind, ist auch bei der dynamischen Messung am Messpunkt 3 ein abnormes Verhalten gegenüber den anderen Messreihen festzustellen. Bei der Messreihe 3 (vgl. Abb. 5.12) lässt sich ein offensichtliches Klemmen des Ubertragungskolbens an der Position -1,60mm feststellen. Des Weiteren fehlen auch die Schwingungen des Bremsruckes. Ein zusätzlicher Ausfall des Mesystems während der 1. Überfahrt an dieser Messstelle, bestätigt das Defekt.

_[mm]	MP 3	MP 5	MP 6	MP 8
1. Überfahrt	---	-2,25	-2,01	-1,88
2. Überfahrt	-1,62	-2,39	-2,11	-1,81
1. Bremsversuch	-1,52	-2,35	-2,14	-2,01
2. Bremsversuch	-1,60	-2,45	-2,28	-2,06

Tabelle 5.6: Maximalwerte bei dynamischer Belastung und kontinuierlichen Beobachtungen



Reihe 1 - Messpunkt 3
 Reihe 2 - Messpunkt 5
 Reihe 3 - Messpunkt 6
 Reihe 4 - Messpunkt 8

Abb. 5.13 Datenreihen - synchronisiert

5.2.2.7. Spektralanalyse

Eine äquivalente Form der Darstellung von Messdaten in Abhängigkeit von der Zeit (als sog. Zeitdiagramm) ist die Darstellung von Messdaten in Abhängigkeit von der Frequenz (als sog. Spektraldiagramm). Die Konvertierung der beiden Darstellungsformen erfolgt durch die FOURIER-Transformation (Siehe Kap. 2.2.5). Sie ist umkehrbar und wird je nach Richtung der Umwandlung im folgenden als Fourier-Analyse oder Fourier-Synthese bezeichnet. Im Idealfall lässt sich durch die Fourier-Synthese der Frequenzdarstellung der ursprüngliche Datensatz wiederherstellen. Sie dient hier zur Kontrolle der Fourier-Analyse.

Das Spektrogramm besteht aus zwei Koordinatensystemen. Im oberen wird der Phasenwinkel, im unteren die Amplitude über der Frequenz dargestellt.

Zusätzlich erfolgt die Frequenzdarstellung durch Lomb's Spektrum. Die Irrtumswahrscheinlichkeiten sind hier dem Diagramm direkt zu entnehmen. Sie sind eine Hilfe, um signifikante Frequenzen leichter zu erkennen.

5.2.2.8. Auswertung der Spektrogramme

Die fehlenden Daten von Messstelle 3 wurden mit Nullen aufgefüllt. Inwiefern die Ergebnisse brauchbar sind, wird sich bei der Analyse des Spektrogramms zeigen.

Alle anderen Spektrogramme werden bis zur höchsten darstellbaren Frequenz, der Nyquist-Frequenz $f_c = 2,5$ Hz, dargestellt. Nach dem Abtast-Theorem werden pro Frequenz mindestens zwei Meßwerte benötigt. Das sind bei einer Abtastrate von $\Delta t = 0,2$ sec multipliziert mit zwei (2 Messwerte) 0,4 sec, entspricht also einer Frequenz von 2,5 Hz. Enthält der Datensatz

höhere Frequenzen als f_c , errechnet die Fourier-Analyse falsche Werte (Aliasing-Effekt). Da die Amplitudenwerte schon weit vor Erreichen der Nyquist-Frequenz gegen Null konvergieren, kann Aliasing somit ausgeschlossen werden.

Die hohen Amplituden des Spektrums der Fourier-Analyse in der Nähe von 0 Hz kommen durch die Periodisierung der Fourier-Transformation des kurzen, nur 50 Sekunden umfassenden Messungszeitraumes zustande.

Bessere Ergebnisse liefert Lomb's Spektrum. Ganz eindeutig sind bei der Frequenzanalyse Peaks in den Spektrogrammen zu erkennen. Die Daten der Peaks sind in Tabellenform für die Messpunkte 5 und 6 dargestellt (Tabelle 5.7 und 5.8):

Frequenz in [Hz]	Amplitude (Anz. Meßw.)	Periode in [sec]	Ereignis
0,02	37,8	50	Gesamte Messdauer
0,10	25,9	10	2. Bremsversuch
0,16	8,5	6,25	1. Bremsversuch
0,26	3,8	3,8	2. Überfahrt
0,42	1,8	2,4	1. Überfahrt

Tabelle 5.7: Daten aus Lomb's Spektrum - Messpunkt 5

Frequenz in [Hz]	Amplitude (Anz. Meßw.)	Periode in [sec]	Ereignis
0,02	32,0	50	Gesamte Messdauer
0,10	31,4	10	2. Bremsversuch
0,16	5,8	6,25	1. Bremsversuch
0,26	4,3	3,8	2. Überfahrt
0,40	3,0	2,5	1. Überfahrt

Tabelle 5.8: Daten aus Lomb's Spektrum - Messpunkt 6

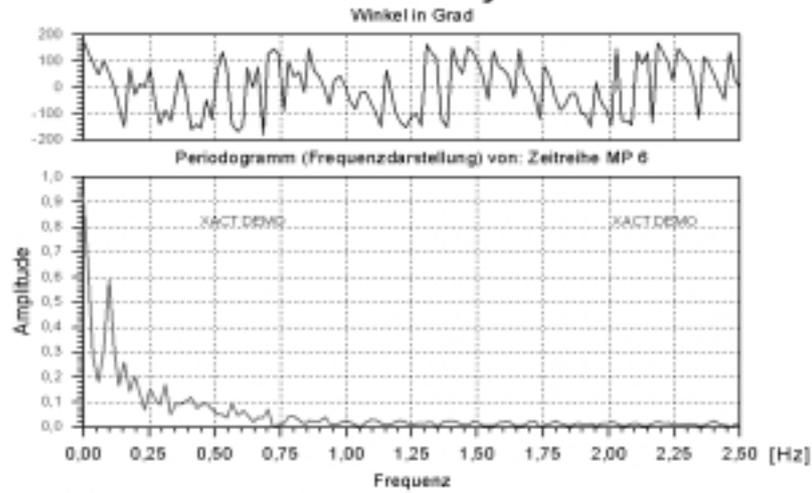
Nicht interpretierbar ist die Messreihe von Messpunkt 3. Mit großer Wahrscheinlichkeit liegen hier zu wenig Messwerte für eine Spektralanalyse vor. Die Nyquist-Frequenz von 0,5 Hz beweist, dass im Gegensatz zu den anderen Messstellen deutlich weniger Messwerte für die Fourier-Transformation verwendet werden konnten. Das ist zu wenig, um vorhandene Periodizitäten aufzudecken. Die Ergebnisse der anderen Messreihen stimmen dagegen gut überein.

In Verbindung mit der Zeitreihe aus der Fourier-Synthese lassen sich die Frequenzen den jeweiligen Ereignissen zuordnen. In Lomb's Spektrum ist die Amplitude zugleich die Anzahl der Messwerte, die der jeweiligen Frequenz zugeordnet wird. Man sieht an diesem Beispiel, dass auch Messungen über kurze Zeiträume durchaus mit einer Frequenzanalyse auswertbar sind (Abb. 5.14).

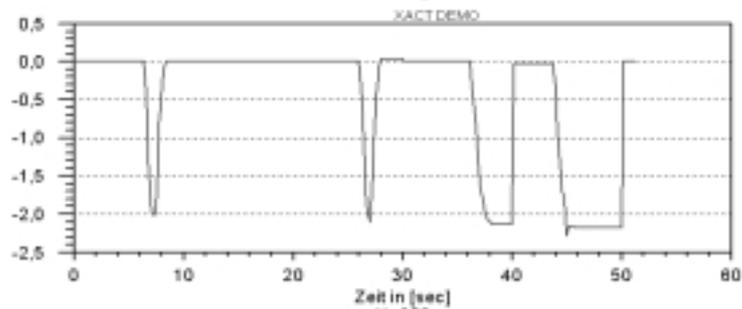
Jedoch sind die Vorteile der Frequenzdarstellung gegenüber der Zeitdarstellung, aufgrund der kurzen Beobachtungsdauer und bei nur einer Einflussgröße, nicht eindeutig sichtbar. Neue Interpretationsmöglichkeiten oder gar einen Erkenntnisgewinn liefert sie in diesem Fall nicht.

Meßpunkt 6

Fourier-Analyse



Fourier-Synthese



Lomb's Spektrum

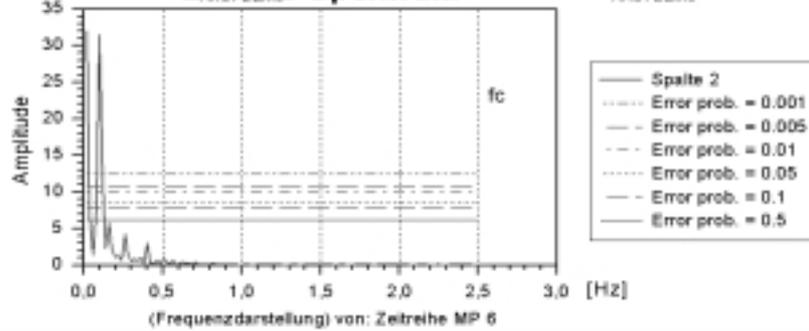


Abb. 5.14 Fourier-Analyse für Messpunkt 6

5.2.3. Beweissicherung

Als Beispiel zu den theoretischen Ausführungen in Kap. 2.4, werden die Erschütterungsmessungen an der U-Bahn Station Osloer Straße in Berlin, im Rahmen des Umbaus der Gewerbeflächen, präsentiert.

5.2.3.1. Aufgabenstellung

Im U-Bahnhof Osloer Straße in Berlin sollen Einbauten mit empfindlichen Glasscheiben vorgenommen werden. Die Scheiben werden an Schienen, die von der Decke abgehängt sind, aufgehängt. Sie werden unten mit einem geringen horizontalen Spiel in einer Schiene so geführt, dass eine vertikale Verschiebung von 5 mm aufgenommen werden kann. Es bestand die Befürchtung, dass die Bewegungen von Decke und Boden infolge der U-Bahndurchfahrten die Glasscheiben durch vertikale Zwängungen beschädigen würden. Mit anderen Worten gesagt, befürchtete man also, dass die Relativbewegung zwischen Boden und Decke größer als 5 mm sein könnte. In einer Messserie sollte abgeklärt werden, ob dieses Maß bei U-Bahndurchfahrten überschritten würde.

5.2.3.2. Messeinrichtung

Daher wurden an den Montagestellen der Schiene die Relativverschiebungen zwischen Boden und Decke gemessen. Zu diesem Zweck wurden induktive Wegaufnehmer mittels extremharter Stahlrohre, wie in Abb. 5.15 gezeigt, zwischen Boden und Decke montiert. Der Anker des Aufnehmers war in der Spule federnd gelagert, so dass er gegen die Decke gespannt werden konnte. Diese induktiven Wegaufnehmer hatten eine Auflösung von 10^{-6} m. Die obere Grenzfrequenz betrug 500 Hertz. Erfahrungsgemäß kommen bei solchen Problemen Frequenzen bis zu 100 Hertz vor, so dass hier keine Probleme bezüglich der Auflösung zu befürchten waren. Es standen insgesamt drei Wegaufnehmer dieser Art zur Verfügung.

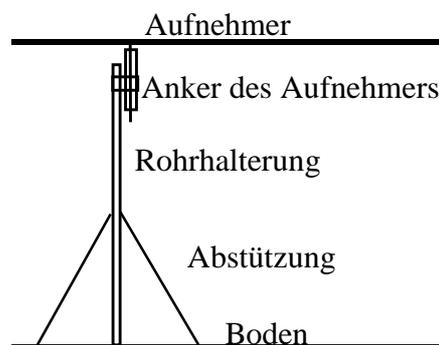


Abb. 5.15 Schematischer Aufbau der Messeinrichtung

Auf diese Art konnten die Relativverschiebungen zwischen Boden und Decke direkt ohne Integration eines Schwingungsaufnehmers gemessen werden. Diese Art der Messungen ist für Verschiebungen die Genaueste.

Des Weiteren wurden noch induktive Aufnehmer eingesetzt, die ein der Schwingungsgeschwindigkeit proportionales Signal abgeben. Diese Aufnehmer eignen sich nicht so gut zur Bestimmung von Verschiebungen, da aus den Geschwindigkeiten die Verschiebungen erst durch Integration berechnet werden müssen. Die Relativverschiebungen ergeben sich mit solchen Sensoren also erst durch Integration zweier Aufnehmer an Boden und Decke und anschließende Differenzbildung dieser Werte. Ein solches Vorgehen ist naturgemäß mit höheren Fehlern behaftet. Man kann aber diese Aufnehmer sehr gut zur Bestimmung des Spektrums der Erschütterungen einsetzen, da die Geschwindigkeiten in ihrem zeitlichen Verlauf damit genauer gemessen werden können. Solche Spektren sind wichtig, da die Scheiben nicht nur durch rein mechanische Zwangsspannungen zerstört werden können. Es kann auch geschehen, dass die Anregung durch die Durchfahrten Frequenzen enthält, die in der Nähe der Resonanzfrequenz der Scheiben liegen. Dann werden durch jede Zugdurchfahrt diese Scheiben zum Schwingen angeregt. Die so entstehenden Schwingungen können beträchtliche Amplituden annehmen. Damit könnte es zu Schäden durch große Bewegungen in der Resonanz kommen. Diese Gefahr kann aber erst nach dem Einbau der Scheiben abgeschätzt werden, da die Resonanzfrequenzen der Scheiben unter anderem von der Art der Lagerung abhängen. Einer entsprechenden eventuellen Gefahr kann aber durch Verstimmung der Schwingungen der Scheiben, eventuell durch den Einbau von Zusatzmassen, begegnet werden.

Alle Signale wurden mit einer Abtastfrequenz von jeweils 5000 Hertz digitalisiert und auf einem Rechner abgespeichert. Damit haben wir eine gegenüber dem interessierenden Bereich von bis zu 100 Hertz eine 50-fach höhere Abtastung, so dass die Frequenzen mit einer ausreichenden Genauigkeit bestimmt werden konnten.

5.2.3.3. Messeinrichtung

Es wurden die Relativverschiebungen zwischen Boden und Decke in der Spur der Aufhängeschiene für die Scheiben gemessen. Die Lage der Messpunkte ist in Bild 5.16 gezeigt. Insgesamt wurden 6 Positionen mit jeweils drei Wegaufnehmern und drei Schwingungsaufnehmern gleichzeitig gemessen.

Im Folgenden sind alle Messpunkte mit Benennung aufgeführt. Jeweils eine Gruppe wurde synchron aufgenommen. In der Nähe der Messpunkte 9 bis 11 befand sich ein Riss in der Decke, in dessen Nähe größere Verschiebungen vermutet wurden. Deshalb wurde links und rechts des Risses noch einmal zusätzlich gemessen.

An jeder Messstelle wurde mindestens über einen Zeitraum von 20 Minuten, teilweise wesentlich länger, gemessen. Dabei war immer mindestens eine U-Bahndurchfahrt in dieser Zeit enthalten. Dies ist nicht zu kurz, da jede einzelne Durchfahrt nach Ende schnell (innerhalb von Zehntel Sekunden) abklingt. Die Gefahr der Ausbildung hoher Amplituden durch Überlagerung von Schwingungen besteht also nicht.

5.2.3.4. Messergebnisse

Die Messungen wurden folgendermaßen ausgewertet: Es wurden die maximal auftretenden Relativverschiebungen innerhalb des Messzeitraumes für alle drei Längenaufnehmer bestimmt und in eine Tabelle eingetragen. Weiter wurden für charakteristische Erschütterungen die Spektren der Schwingungsaufnehmersignale bestimmt und dargestellt. Aus diesen Spektren können die wichtigsten Anregungsfrequenzen abgelesen werden.



Abb. 5.16 Lage der Messpunkte 9-11

Messpunkt	Max. Relativverschiebung, [mm] Aufnehmer A	Max. Relativverschiebung, [mm] Aufnehmer B	Max. Relativverschiebung, [mm] Aufnehmer C
M 1, 2	0.042	0.033	
M 3, 4	0.037	0.040	
M 3, 4, 5	0.034	0.073	0.061
M 6, 7, 8	0.091	0.184	0.045
M 9, 10, 11	0.060	0.50	0.062
Riß	0.055	0.478	0.068

Abb. 5.17 Maximale Relativverschiebungen

Man kann also feststellen, dass alle Relativverschiebungen kleiner als 0.5 mm sind. Das sind Größen, die eine Gefährdung der Scheiben durch Zwangsspannungen sicher ausschließen, wenn die mitgeteilten Maße eingehalten werden. Die Messpunkte M9,10,11 lagen in dem Bereich der Überfahrt der Straßenbahn. Erwartungsgemäß wurden hier die höchsten Werte gemessen, die aber immer noch weit entfernt von einer Gefährdungsgrenze liegen. Während der Messungen in den Punkte M3, 4, 5 wurden Holzbalken auf den Boden geworfen. Aber auch hier liegen die Messergebnisse weit unterhalb einer Gefährdungsgrenze.

In den Bildern 5.18 bis 5.20 sind charakteristische Schwingungsspektren für jede einzelne Messgruppe dargestellt.

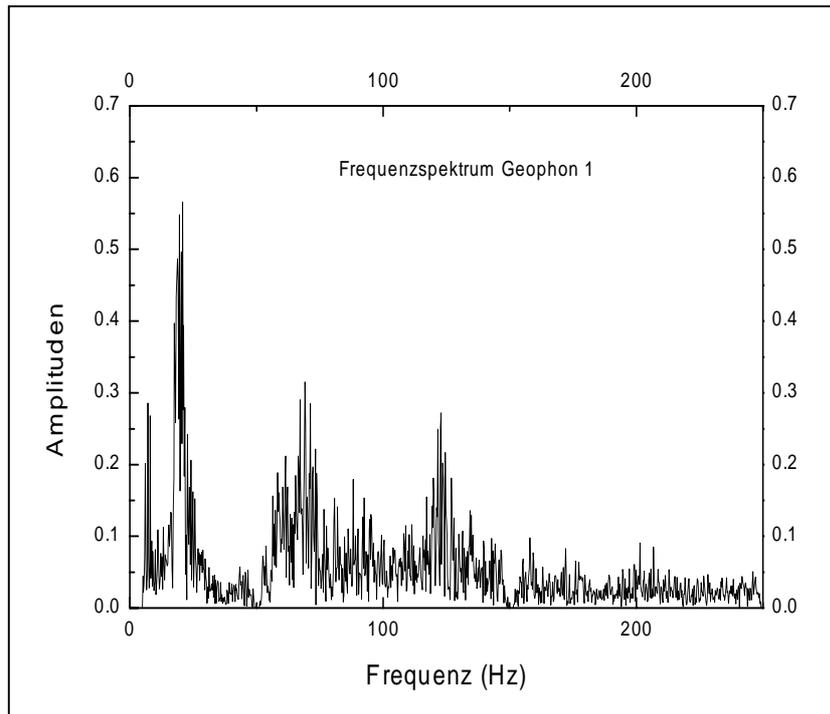


Abb. 5.18 Charakteristisches Spektrum der Schwinggeschwindigkeiten der Messgruppe (M 1, 2)

Hier erkennt man charakteristische Frequenzbänder bei 20, 70 und 125 Hertz. Liegt eine Resonanzfrequenz des Einbaus in diesem Bereich, muss mit erhöhten Schwingamplituden gerechnet werden.

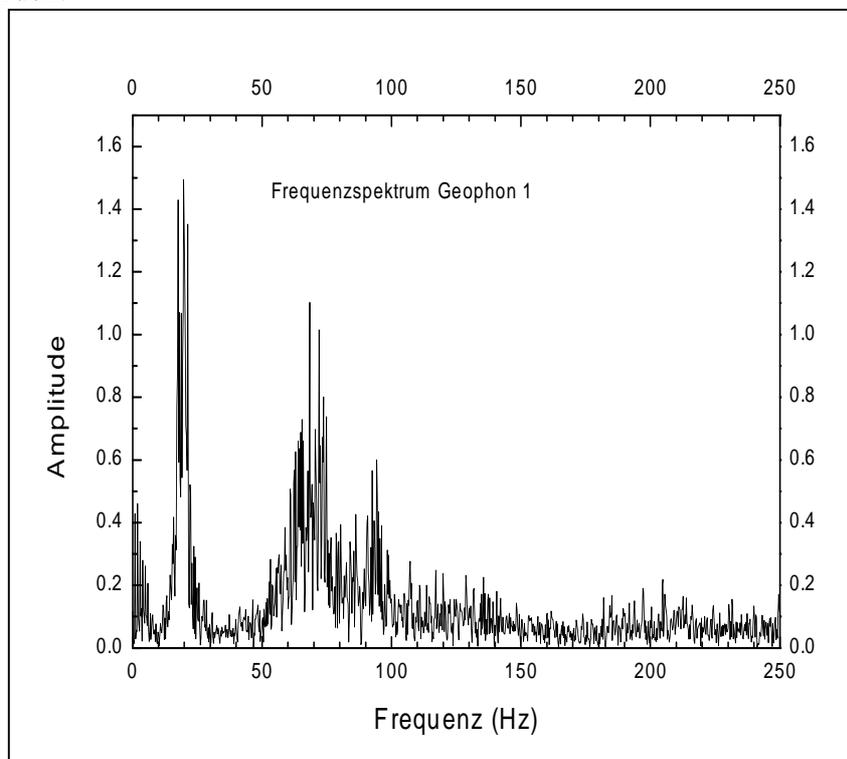


Abb. 5.19 Charakteristisches Spektrum der Schwinggeschwindigkeiten der Messgruppe (M 3,4)

Hier liegen charakteristische Frequenzbänder bei 20 Hertz und zwischen 60 und 90 Hertz.

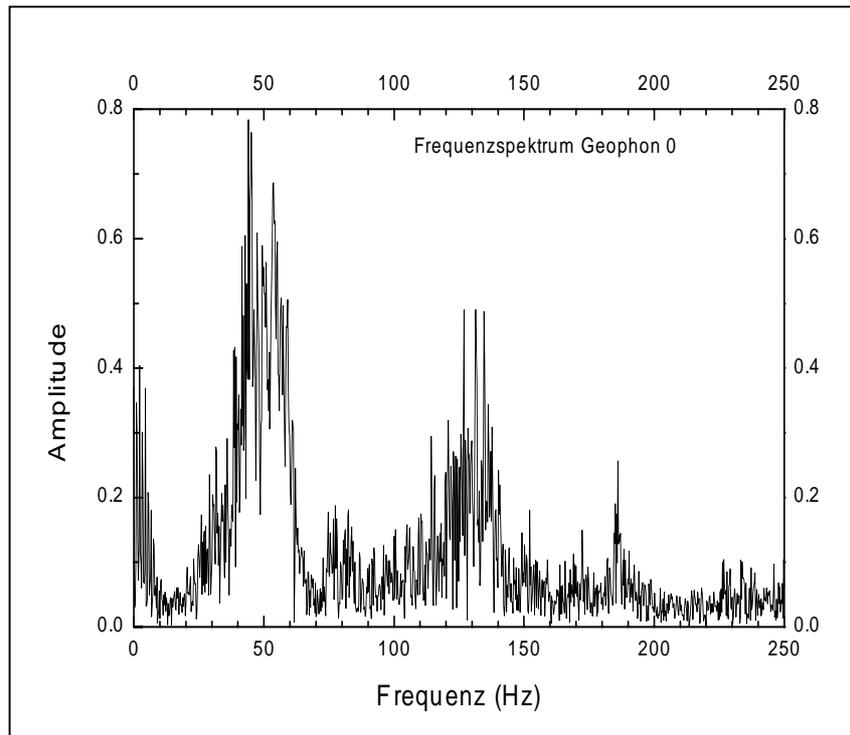


Abb. 5.20 Charakteristisches Spektrum der Schwinggeschwindigkeiten der Gruppe (M9,10,11)

Die charakteristischen Frequenzbänder liegen hier zwischen 40 und 60 Hertz und bei 130 Hertz. Das untere Band mit 20 Hertz fehlt.

5.2.3.5. Zusammenfassung

Als erstes kann man feststellen, dass die Relativverschiebungen zwischen Boden und Decke kleiner als 0.5 mm und damit so gering sind, dass eine Gefährdung der eingebauten Glasscheiben durch Zwangsspannungen ausgeschlossen werden kann. Dabei handelt es sich um wirkliche Maximalwerte, die mittleren Verschiebungen sind um ungefähr eine Zehnerpotenz geringer, liegen also in der Größenordnung von 0.05 mm. Die Spektren der Schwingungsgeschwindigkeitsaufnehmer zeigen Anregungsbänder bei 10, zwischen 60 und 90 und bei 120 Hertz. Liegen in diesen Bereichen Resonanzfrequenzen von Einbauten, müssen eventuell Maßnahmen ergriffen werden. Diese sind aber relativ einfach durchzuführen.

5.2.4. Rutschungen

Hierzu sei das Beispiel des geodätischen Überwachungsnetz im Rutschungsgebiet an der Schwarzmeerküste nördlich von Varna (Abb.5.22) genannt. Die terrestrischen Beobachtungen zweier diskreter Zeitzustände sind ausgeglichen und einer Deformationsanalyse mit statistischen Tests gemäß der Ausführung in Kap. 2.2.3 unterzogen worden. Die damit verifizierten signifikanten Verschiebungen sind in Abbildung 5.21 gegeben.

LOKALISIERUNG VON EINZELPUNKTVERSCHIEBUNGEN

PUNKT NAME	DX (CM)	DY (CM)	OMEGA ANTEIL	E TEST
1	0.0781	-0.0862	0.0080	6.5600
2	-0.0687	-0.0905	0.0075	6.5600
3	-0.0526	0.3119	0.0543	6.5600
4	0.1738	-0.1910	0.0188	6.5600

SIGNIFIKANT NICHT ZUR BASIS GEHÖRENDE PUNKTE

PUNKT NAME	DX (CM)	DY (CM)	OMEGA ANTEIL	E TEST
5	-9.9492	2.7011	37.3013	6.5600
8	-19.4088	4.4267	60.4487	6.5600
6	-23.5633	4.7310	163.7750	6.5600
9	-29.7249	7.1952	242.6538	6.5600
7	-157.2846	56.4639	3778.6628	6.5600

Abb. 5.21: Verschiebungsfeld mit Signifikanzprüfung aus der Deformationsanalyse

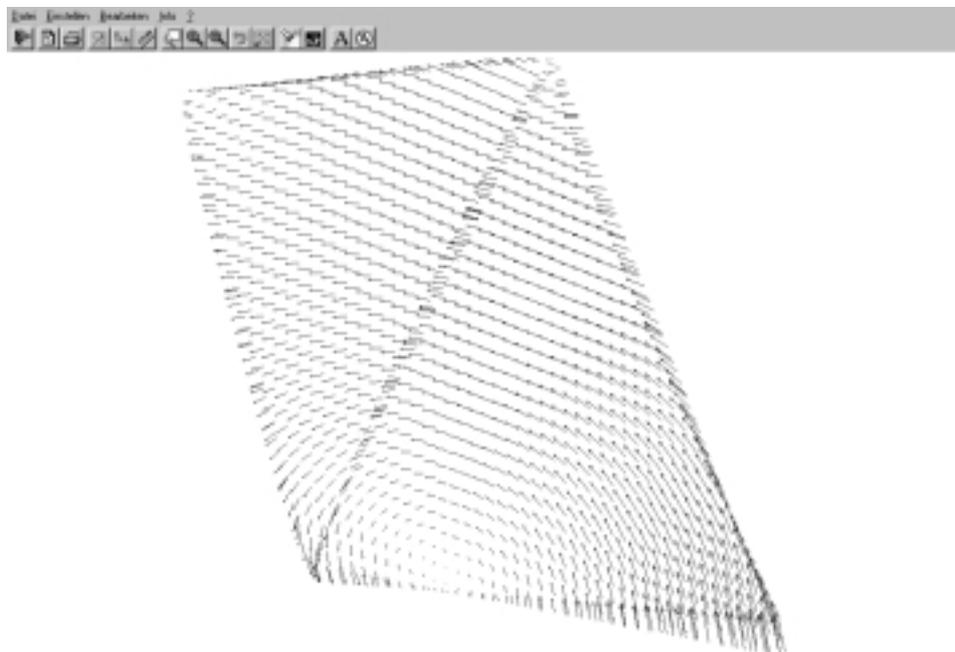


Abb. 5.22: Simulierte gegenläufige Verschiebungen des Modells 2

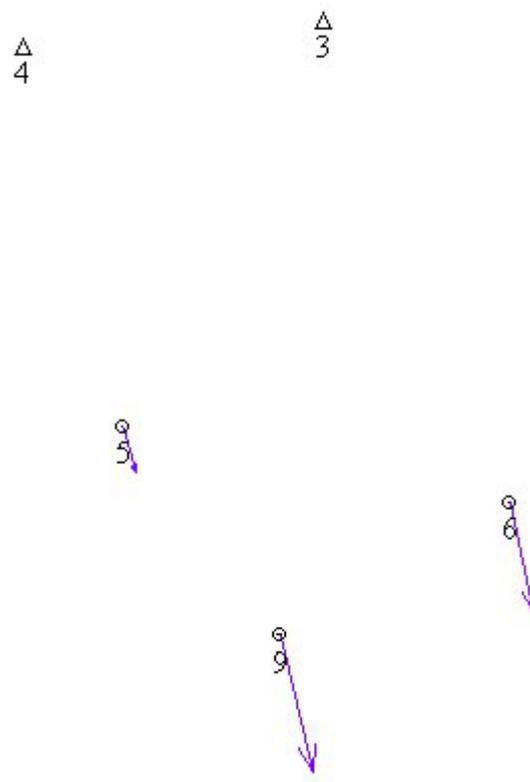


Abb. 5.23: Messpunkte des Rutschungsgebietes nördlich von Varna

5.2.4.1. Diskretisierung

Die Netzpunkte 3,4,5 und 6 werden für eine weitere Diskretisierung verwendet.

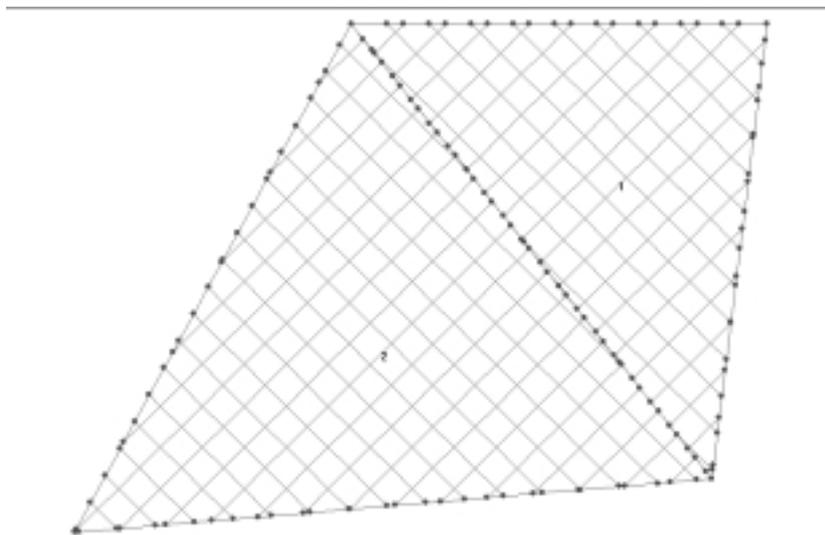


Abb. 5.24: Diskretisierung in Vierecke

5.2.4.2 Abbildungsfunktion

Ausgeglichen werden Maßstabsbeobachtungen gewichtet mit der Fläche des entsprechenden Dreieckes. Wichtig für das Ausgleichungsmodell ist die Beziehung zwischen den Transformationsparametern und die unbekanntes Koordinaten der Dreiecksknoten. Die Berechnung ist gemäß der Methode in 3.4.2 durchgeführt worden.

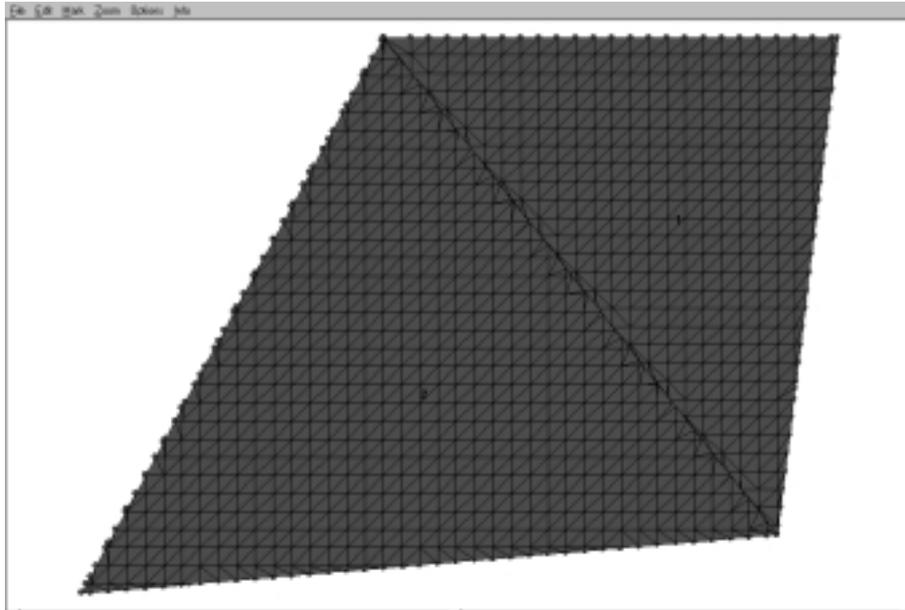


Abb. 5.25: Weitere Diskretisierung in Dreiecke

Nach der Diskretisierung wird die Affintransformation als Abbildungsfunktion gewählt.

Es werden zwei Gewichtsmodelle gegenübergestellt:

Streckengewichtet – **Modell 1** und

Flächengewichtet – **Modell 2**

Wichtig für die korrekte Modellierung des diskretisierten Objektes sind die Randbedingungen.

Falls das nicht geschieht, treten Extrapolationseffekte auf, die das Modell verfälschen.

Die folgende Abbildung (5.25) zeigt die Ergebnisse im Teil des Testgebietes bei der Anwendung von Modell 1.

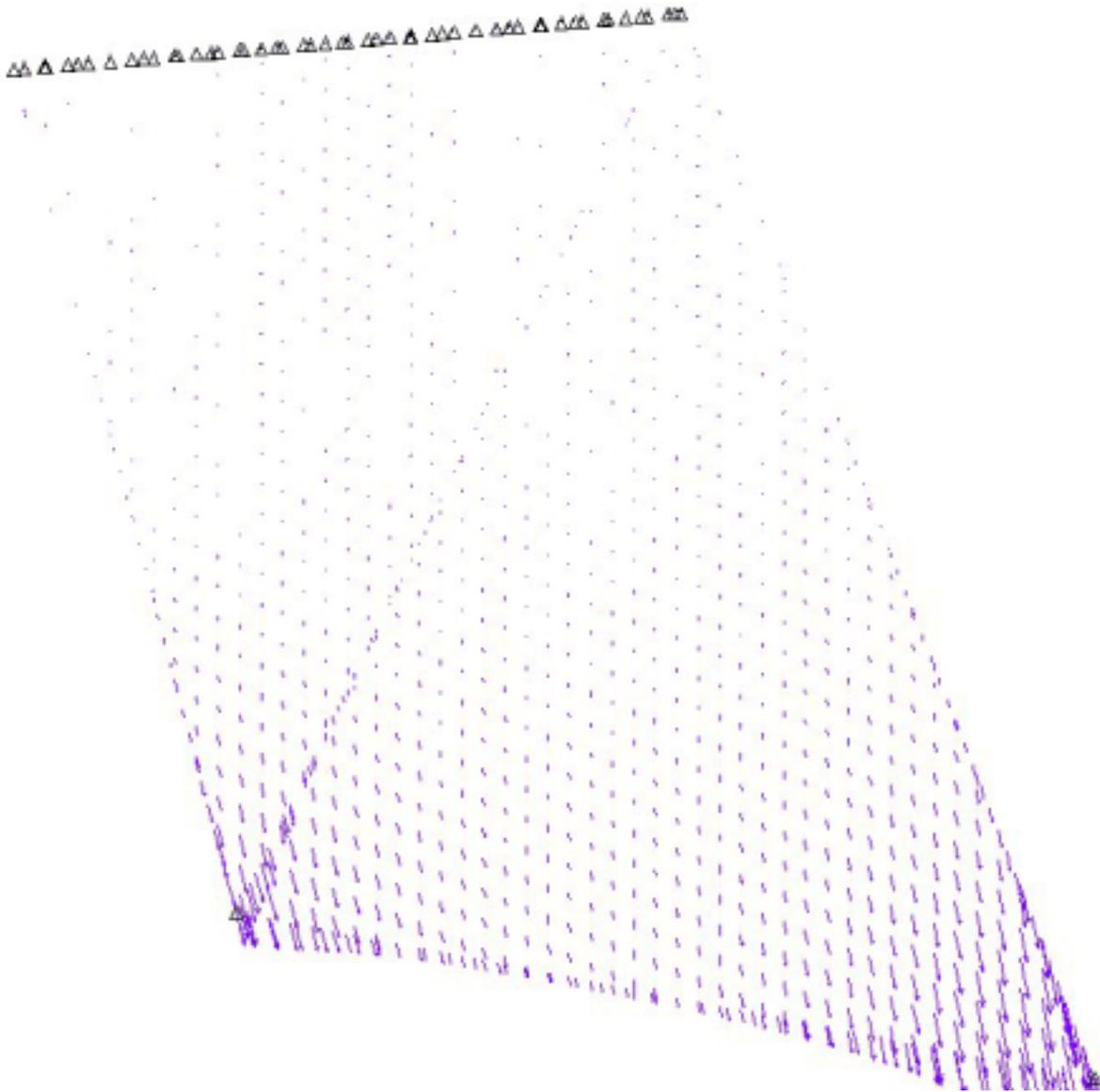


Abb. 5.26: Berechnungsergebnis beim Einsatz des streckengewichteten Modells

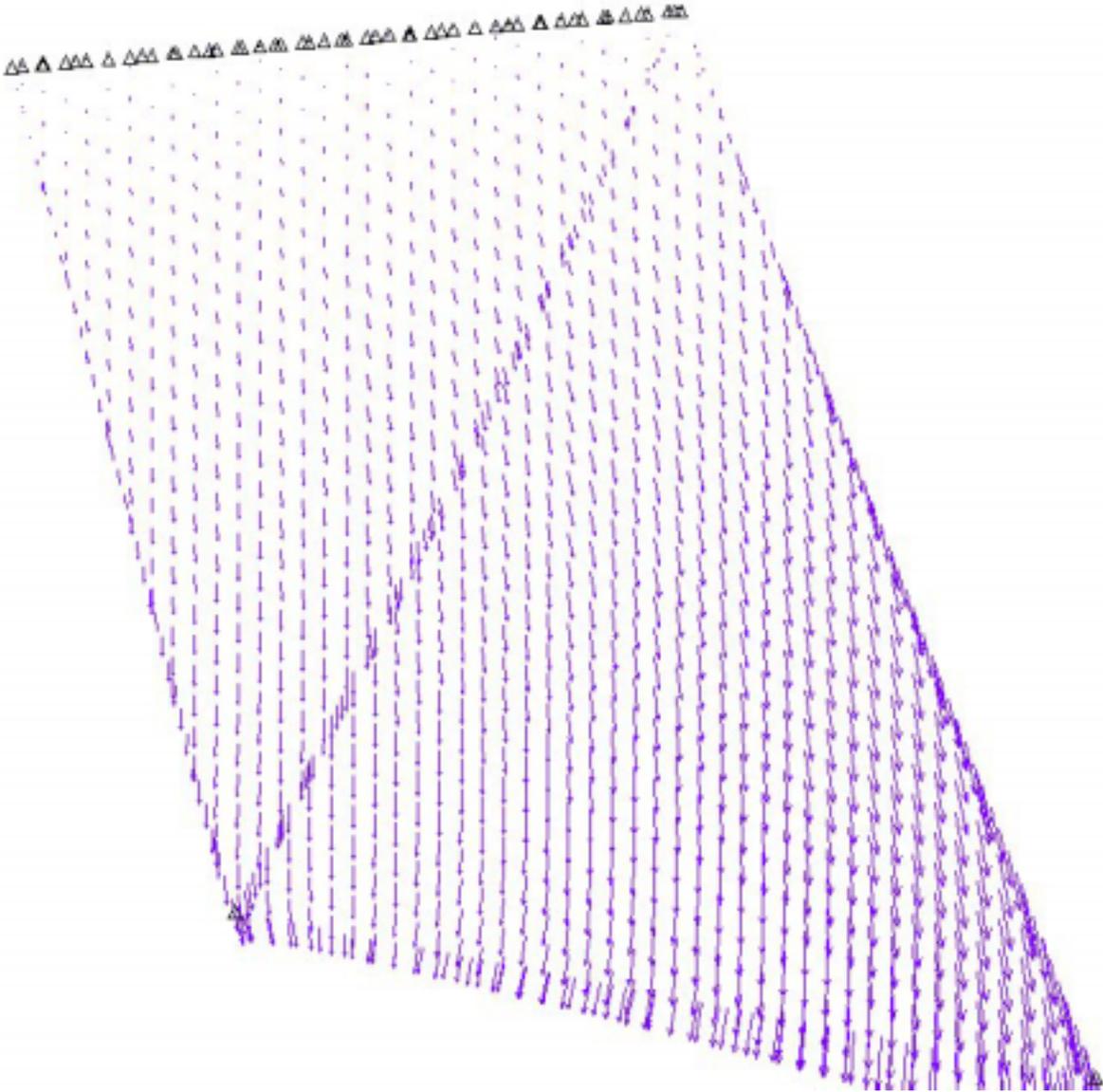


Abb. 5.27: Berechnungsergebnis beim Einsatz des flächengewichteten Modells

Ersichtlich ist, dass das flächengewichtete Modell 2 (Abb. 5.26) ein homogenes Medium besser repräsentiert. Als Erklärung dafür dient die Tatsache, dass der Interpolationsvorgang in der ersten Ableitung stattfindet was auch für eine Glättung sorgt. Bei bekannten Materialeigenschaften können aus den Verschiebungen über Gleichung (3.3.19) die Hauptspannungsgrößen für jedes diskrete Dreieck bestimmt werden.

6. Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

In der Dissertation werden zunächst die für Deformationsuntersuchungen geeigneten Mess-, Auswerte- und Analysemethoden zusammengestellt und Interpretationsmodelle verglichen.

Die Deformationsproblematik ist möglichst als ein Komplex von Messung, Auswertung, Analyse und Approximation, begleitet durch statistische Methoden und nachfolgender fachlicher Interpretation, realitätsnah betrachtet worden.

Die in Kapitel 3 vorgeschlagene Lösung, die ein integriertes Modell darstellt, entspricht relativ genau der physikalischen Realität. Gezeigt wurde, dass unter Verwendung von Transformationen eine Problemstellung so umformuliert werden kann, dass erprobte zum Teil einfachere Lösungswege verwendet werden können. Die Verwendung existierender digitaler Oberflächenmodelle ist als Diskretisierungsgrundlage möglich.

Das Modell entspricht der aus der Natur kommenden physikalischen Voraussetzungen. Es erlaubt, detaillierte Untersuchungen von Deformationen durchzuführen und die Änderung der einwirkenden Kräfte auf das untersuchte Objekt abzuleiten.

Weiter sind in Kapitel 4 eine Verallgemeinerung der Beziehungen der Variationsmethoden in der Mechanik und des Allgemeinfalls der Ausgleichsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate durchgeführt, und die Lösungen nach MKQ auf die Variationsmodelle angewandt worden.

Beim Variationsproblem mit einbezogenen Bedingungen ist die Lösung mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren sichergestellt. So wurden in Kombination mit der Methode der Kleinsten Quadrate eine Reihe äquivalenter Prinzipien abgeleitet.

Dadurch werden auch die stochastischen Eigenschaften aller mechanisch relevanten Größen bestimmt.

Diese Strategie der integrierten Modelle erlaubt es, die Phase der Interpretation, die bislang oft aus Deutungen und Vermutungen bestand, umzuwandeln in eine mathematisch definierte. Das Funktional, das Gegenstand der Variation ist, hat eine streng physikalische Bedeutung und ist invariant bezüglich Transformationen. Das macht die Variationsmethode äußerst effektiv und universell.

Ausgehend von den durchgeführten Untersuchungen wird als allgemeinstes Deformationsanalysemodell ein Ansatz nach dem erweiterten Hamilton'schen Prinzip vorgeschlagen. Auch hierfür wird ein integrierter Lösungsansatz empfohlen.

Die Anwendungsbeispiele zeigen die Möglichkeiten des vielfältigen und effektiven Einsatzes der vorgeschlagenen Lösungen.

Da die Erfassungsinformationen und Ergebnisse untrennbar bei den Untersuchungen der einzelnen Objekte sind, ist es notwendig ein entsprechendes System zur Vervollständigung dieser Daten aus Nachbardisziplinen und zur Bereitstellung der gesamten Information, auch dieser von experimentellen Untersuchungen, zur Weiternutzung in ein objektbezogenes Geotechnisches Informationssystem zu generieren.

7. Literatur

ARNET, F. *Crustal Deformation of the Yellowstone Volcanic Field From Precise Measurements of Temporal Gravity Changes and Supplementary Leveling and GPS Data*. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der Eidg. Technischen Hochschule, Mitteilungen , Nr. 56, Zürich, 1996

BATHE, K-J. *Finite-Elemente Methoden*. Berlin: Springer, 1986.

BOLJEN, J. *Ein dynamisches Modell zur Analyse und Interpretation von Deformationen*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität. Hannover, Hannover, 1983, Nr. 122, S. 142

BOLJEN, J. *Statische, kinematische und dynamische Deformationsmodelle*. ZfV, Heft 9, 1984, S. 461-468

BRACEWELL, Ronald N. *The Fourier Transform and Its Applications*. 2nd ed. McGraw-Hill Electrical and Electronic Engineering Series. New York: McGraw-Hill, 1987.

CASPARY, W. F. *Concepts of Network and Deformation Analysis*. The University of New South Wales, Kensington, 1987.

CASPARY, W. F., CHEN, Q. Y., KÖNIG, G. : *Ermittlung instabiler Referenzpunkte durch Minimierung der Summe der Klaffungsbeträge*. Deformationsanalyse 83, Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen Hochschule der Bundeswehr, München, 1983

CHRZANOVSKI, A., CHEN, Y. *Deformation Monitoring Analysis and Prediction – Status Report*. XX FIG Congress, Helsinki 1990, Com. 6, pp 83-97

CHRZANOVSKI, A., CHEN, Y., SZOSTAK-CHRZANOVSKI, A., SECORD, J. *Combination of Geometrical Analysis with Physical Interpretation for the Enhancement of Deformation Modelling*. XIX FIG Congress, Helsinki, 1990, Com. 6, pp 326-341

CHRZANOVSKI, A., WELLS, W. (Eds), *Deformationsmeasurement, Analysis and Prediction*. Proceedings of 5th International (FIG) Symposium on Deformation Measurement. N.B. Canada, 6-9 June 1988

CHRZANOWSKI, A., CHEN, Y. Q.: *Bericht des Sonderkomitees: Analyse von Deformationsmessungen*, XVIII Int. Congress FIG, Toronto, Band 6, S. 167-185, 1986

GIELSDORF, F., GRÜNDIG, L. *Nachbarschaftstreue Anpassung auf der Basis des Membranmodells*. ZfV, Heft 5, 1997, S. 208-218

GRÜNDIG, L. *Die Berechnung vorgespannter Seil- und Hängenetze unter Berücksichtigung ihrer topologischen und physikalischen Eigenschaften und Ausgleichsrechnung*. DGK, Reihe C, Nr. 216, München, 1976

- GRÜNDIG, L., NEUREITHER, M., BAHNDORF, J. *Deformationsanalyse und S-Transformation*. ZfV, Heft 4, 1985a, S. 151-160
- GRÜNDIG, L., NEUREITHER, M. *Deformationsanalyse und S-Transformation – Erfahrungen und praktische Anwendungen eines Analysesystems für ein-, zwei- und dreidimensionale Netze*. IX FIG Symposium Deformations Measurements, , Katovoce, Polen ,1985b
- GÜLAL, E. *Geodätische Überwachung einer Talsperre; eine Anwendung der KALMAN-Filtertechnik*.)Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 224, Hannover, 1997
- HEINE, K. *Beschreibung von Deformationsprozessen durch Volterra- und Fuzzy-Modelle sowie Neuronale Netze*. DGK, Reihe C, Nr. 516, München, 1999
- HEUNECKE, O. *Zur Identifikation und Verifikation von Deformationsprozessen mittels adaptiver KALMAN-Filterung (Hannoverisches Filter*.)Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 208, Hannover, 1995
- KNOTE, K., WESSELS, H. *Finite Elemente*. Berlin: Springer 3. Auflage, 1994.
- HORAK, V. *Inverse Variational Principles of Continuum Mechanics*. Praha: Academia Nakladatelstvi Ceskoslovenske akademie Ved, 1969.
- JURY, E. I. *Theory and Application of the z-Transform Method*. New York: John Wiley, 1964.
- KERSTING, N. *Zur Analyse rezenter Krustenbewegungen bei Vorliegen seismotektonischer Dislokationen*. Schriftenreihe der Hochschule der Bundeswehr, Heft 42, München, 1992
- KOCH, K. R. *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modell*. Bonn, 1987.
- KUHLMANN, H. *Ein Beitrag zur Überwachung von Brückenbauwerken mit kontinuierlich registrierten Messungen*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität, Nr. 218, Hannover, 1996
- KRAUS, K. *Photogrammetrie*. Bonn: Dümmler, 1994.
- KRÜGER, T. *Entwicklung und Erprobung eines automatisierten Systems zur lasergestützten Tunnelprofilaufnahme*. Diplomarbeit (unveröffentlicht), Technische Universität Berlin, 1999.
- LEVY, H., and LESSMAN, F. *Finite Difference Equations*. New York: Macmillan, 1963.
- LINKWITZ, K. *Fehlertheorie und Ausgleichung von Streckennetzen nach der Theorie elastischer Systeme*. DGK, Reihe C, Nr. 46, München, 1961
- LINKWITZ, K. *Conventional and non-conventional methods of monitoring and analyzing deformations (In the context of engineering Applications)*. Proceedings, 1st Turkish International Symposium on Deformations. September 5-9, Istanbul , 1994, pp 224-233

MARKO, H. *Methoden der Systemtheorie*. Berlin Heidelberg New York: Springer, 1982.

MILEV, G. *Gegenwärtige geodätische Methoden zur Untersuchung von Deformationen*. Technika, Sofia, 1978

MILEV, G., PELZER, H. (Hrsg.). *Instrumentelle Methoden zur Untersuchung von gefährliche Geodynamischen Prozessen*. Bulgarische Akademie der Wissenschaften, Sofia, 1992

MILEV, G. *Precision of the Classification of Methods and Models for Determination , Analysis and Interpretation of Deformations*. The 9th International Symposium on Deformation Measurements, Olstzyn 1999a pp. 430– 434

MILEV, I., GRÜNDIG, L. *Information System for 3D Deformation Analysis*. Perelmuter Workshop on Dynamic Deformation Models., August 29-September 1, Haifa, 1994, pp. 210-215

MILEV, I., GRÜNDIG, L. *Applying the Theory of Fundamental Mechanics for Modeling of the Deformation Behavior of Objects*. The 9th International Symposium on Deformation Measurements, Olstzyn 1999b pp. 362–368

NIEMEIER, W. *Zur Kongruenz mehrfach beobachteter geodätischer Netze*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover., Nr. 88, Hannover 1979

NITSCHKE, U. *Erprobung von Deformationsmodellen*. Diplomarbeit (unveröffentlicht), Technische Universität Berlin, 1996.

OPPENHEIM, Alan V., WILLSKY, Alan S., whit YOUNG, Ian T. *Signals and Systems*. Prentice/Hall, 1983.

PAPO, H., PERLMUTER, A. *Vierdimensionale Analyse von Deformationen*. ZfV, 1983, Heft 2, S. 66-72

PELZER, H. (Hrsg.). *Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung I und II*. Konrad Wittwer. Stuttgart. I - 1980, S., II - 1985

PELZER, H. *Ingenieurgeodätische Modelle zur Erfassung und Prädiktion von Hangrutschungen*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover., Nr. 216, Hannover, 1996 S. 123-136

PELZER, H. *Zur Analyse von Deformationsmessungen*. DGK, Reihe C, Nr. 164, München, 1971

PELZER, H., MILEV, G. (Hrsg.): *Untersuchung zur geodätischen Bestimmung von Rutschungserscheinungen und vertikalen Krustenbewegungen*. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover. 1984, Nr. S. 133

PFEUFER, A. *Classification of Models for Geodetic Examination of Deformations*. Final paper of the Ad Hoc Committee on Classification on Models and Terminology. by G. Milev, A. Pfeufer, W. Proszynski, G. Steinberg, W. Teskey, W. Welsch, Perelmuter Workshop on Dynamic Deformation Models., August 29-September 1, Haifa, 1994

RAINVILLE, Earl David. *The Laplace Transform: An Introduction*. New York: Macmillan, 1963.

REED, Michael , SIMON, Barry. *Methods of Modern Mathematical Physics, I. Functional Analysis*. San Diego: Academic Press, 1980.

REINKING, J. *Geodätische Analyse inhomogener Deformationen mit nichtlinearen Transformations Funktionen*. DGK, , Reihe C, Nr. 413, München, 1994

SCHWARZ, W. (Hrsg.). *Ingenieurvermessung aktuell*. Stuttgart: Wittwer , 1998, Schriftenreihe 32. Beiträge zum 47. DVW-Seminar 10-11. November, 1997, Hamburg. S. 127-139

SINGER, P. *Die Berechnung von Minimalflächen, Seifenblasen, Membrane und Pneus aus geodätischer Sicht*. DGK, Reihe C, Nr. 448, München, 1995

SOMMERFELD, A. *Vorlesungen über Theoretische Physik. Bd. II. Mechanik der deformierbaren Körper*. H. Deutsch , Frankfurt /M, 1978.

SPRANGER, R. *Deformationsuntersuchungen bei statischer und dynamischer Belastung einer Brücke - Methodenvergleich*. Diplomarbeit (unveröffentlicht), Technische Universität Berlin, 1999.

STRÖBEL, D. *Die Anwendung der Ausgleichsrechnung auf elastomechanische Systeme*. DGK, Reihe C, Nr. 478, München, 1997

TAUBENHEIM, J. *Statistische Auswertung geophysikalischer und meteorologischer Daten*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. , Leipzig , 1969.

THOMAS, George B., Jr., and FINNEY, Ross L. *Calculus and Analytic Geometry*. 5th ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1979.

TESKEY, William F. *Integrierte Analyse geodätischer und geotechnischer Daten sowie physikalischer Modelldaten zur Beschreibung des Deformationsverhaltens großer Erddämme unter statischer Belastung*. DGK, Reihe C, Nr. 341, München, 1988

WASHIZU, K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. New York: Pergamon Press, 1968.

WELSCH, W. *Zur Beschreibung homogenen Strains oder einige Betrachtungen zur affinen Transformation*. In: ZfV 1982, Heft 5, S. 173-182

WELSCH, W. *Strainanalyse aus Geodätischen Netzbeobachtungen*. HSBW. Vermessungswesen. 1989, Heft 39, S. 171-190

WELSCH, W., HEUNECKE, O. *Terminology and Classification of Deformation Models – Final Report of Ad-Hoc Committee of the FIG Working Group 6.1-*. The 9th International Symposium on Deformation Measurements, Olstzyn 1999 S. 416– 429

WOLF, H. *Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*. Bonn, 1968.

ZAISER, J. *Ein dreidimensionales geometrisch-physikalisches Modell für konventionelle geodätische Beobachtungen – Beobachtungsfunktionale, Parameterschätzung und Deformationsanalyse*. DGK, Reihe C, Nr. 298, München, 1984 .

Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung
A	Konfigurationsmatrix
B	Koeffizientenmatrix
b	Trendparameter
C	Funktionsparameter
E	Einheitsmatrix
F	Matrix der partiellen Ableitungen
G	Matrix der Helmertbedingungen
H	Statistische Hypothese
K	Steifigkeitsmatrix, Varianz- Kovarianzmatrix
l	Beobachtungsvektor
P	Gewichtsmatrix
Q_{xx}	Verianz-Kovarianzmatrix
S,R	Oberfläche
T	kinetische Energie
U	potentielle Energie
V	Volumen
v	Verbesserungsvektor
X	Koordinatenvektor
δW :	Virtuelle Arbeit
$\boldsymbol{\varepsilon}$:	Verzerrungsvektor
$\boldsymbol{\varepsilon}_{ik}$	Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\tau}_{ik}$	Spannungstensor
$\delta \mathcal{S}$	Variation der potentiellen Energie
$\delta \mathcal{R}$	Variation der Ergänzungsenergie
λ_{ik}, μ_{ik}	Lagrangesche Multiplikatoren
ζ	Dichte eines Körpers

Abbildungsverzeichnis

1.1	Ablauf der Deformationsanalyse mit S-Transformation	11
2.1	Ablauf der Deformationsanalyse mit S-Transformation	19
2.2	Sensorsignal, nach Tiefpaßfilterung, nach Hochpassfilterung	24
2.2	Sensorsignal, nach Tiefpassfilterung, nach Hochpassfilterung	24
2.3	Zweistufige z-Transformation	31
3.1	Zweistufige Diskretisierung	34
3.2	Integrierte Lösung des Dynamischen Modells	45
4.1	Iterative Lösung im Gesamtpotential nach der Methode der Kleinsten Quadrate	69
5.1	Geotechnisches Informationssystem	75
5.2	Deformationsnetz Mathis Dam – USA	76
5.3	Signifikante Verschiebungen zwischen den Epochen F91 und F93	77
5.4	Ergebnis DEFAN nach Untersuchung auf Gruppenverschiebungen	77
5.5	Ergebnis nach Signifikanzprüfung eines angesetzten Polynoms	78
5.6	Lindenhofbrücke, Ansicht von Osten	79
5.7	Instrumentarium	81
5.8	Positionen des LKW, links: Position I, rechts: Position II	81
5.9	Position der Messpunkte	82
5.10	Durchbiegung der Träger, bestimmt aus geodätischen Beobachtungen	85
5.11	Durchbiegung der Träger, bestimmt aus kontinuierlichen Beobachtungen	85
5.12	Durchbiegung der Träger, bestimmt aus geodätischen und kontinuierlichen Beobachtungen	86
5.13	Datenreihen - synchronisiert	87
5.14	Fourier-Analyse für Messpunkt 6	89
5.15	Schematischer Aufbau der Messeinrichtung	90
5.16	Lage der Messpunkte 9-11	92
5.17	Maximale Relativverschiebungen	92
5.18	Charakteristisches Spektrum der Schwinggeschwindigkeiten der Messgruppe (M 1, 2)	93
5.19	Charakteristisches Spektrum der Schwinggeschwindigkeiten der Messgruppe (M 3,4)	93
5.20	Charakteristisches Spektrum der Schwinggeschwindigkeiten der Gruppe (M9,10,11)	94
5.21	Verschiebungsfeld mit Signifikanzprüfung aus der Deformationsanalyse	95
5.22	Simulierte gegenläufige Verschiebungen des Modells 2	95
5.23	Messpunkte des Rutschungsgebietes nördlich von Varna	96
5.24	Diskretisierung in Vierecke	96
5.25	Weitere Diskretisierung in Dreiecke	97
5.26	Berechnungsergebnis beim Einsatz des streckengewichteten Modells	98
5.27	Berechnungsergebnis beim Einsatz des flächengewichteten Modells	99

Tabellenverzeichnis

5.1	Ausgleichungsergebnis des Nivellements	84
5.2	Deformationsanalyse der geodätischen Messungen	84
5.3	Deformationsanalyse der kontinuierlichen Messungen	84
5.4	Ergebnis der kombinierten Ausgleichung beider Messmethoden	85
5.5	Endgültige Verschiebungen aus der Belastungsprobe	86
5.6	Maximalwerte bei dynamischer Belastung und kontinuierlichen Beobachtungen	87
5.7	Daten aus Lomb's Spektrum – Meßpunkt 5	88
5.8	Daten aus Lomb's Spektrum - Messpunkt 6	88

Danksagung

Meinem Doktorvater Herrn Prof. Gründig gilt mein besonderer Dank. Seine Unterstützung hat wesentliches zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen.

Meinen Dank, für die Übernahme der Berichte im Promotionsverfahren, richte ich auch an Herrn Prof. Schwarz, sowie an Herrn Dr.-Ing. habil. Blum, dessen wertvolle Anregungen die Dissertation bereicherten.

Meinem Vater Prof. Milev danke ich besonders für die jahrelange Unterstützung, für wertvolle Ratschläge und sein Vorbild für meine menschliche und fachliche Entwicklung.

Nicht zuletzt widme ich diese Arbeit meinem lieben Sohn Victor, der mir die Kraft gegeben hat in schwierigen Zeiten meine Ziele weiter zu verfolgen und zum Erfolg zu führen.

Lebenslauf

09.07.1963			Geboren in Sofia , Bulgarien
März 1970	–	Mai 1973	Besuch der Grundschule in Stuttgart
September 1973	–	Juni 1977	Besuch der Grundschule in Sofia
September 1977	–	Juni 1981	Besuch des Deutschsprachigen Gymnasiums Sofia
			Abschluss mit dem Abitur
September 1981	–	September 1983	Grundwehrdienst
September 1983	–	Juli 1988	Studium der Geodäsie und Markscheiderwesen an der Universität Sofia
Oktober 1988	–	Oktober 1989	Entwicklungsingenieur am Institut für Anwendung der Lasertechnik und Optik im Bergbau
November 1989	–	März 1991	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Bulgarischen Akademie der Wissenschaften
März 1991	–	Oktober 1993	Aufbaustudium an der TU Berlin
Oktober 1993	–	Oktober 1998	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik der Technischen Universität Berlin
Seit Dezember 1998			Entwicklungsingenieur bei der Technet GmbH Berlin