

Neue Test- und Schätzverfahren für die Modellierung von Wertpapierverläufen

DANIEL ZIGGEL

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften
an der Fakultät für Mathematik
der Ruhr-Universität Bochum

2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Grundlagen	11
2.1	Stabile Konvergenz	11
2.2	Bipower Variation	13
2.2.1	Anwendungen von Bipower Variation	15
3	Bootstrap Methoden für Bipower Variation	19
3.1	u.i.v. Bootstrap	19
3.2	Wild Bootstrap	22
3.3	Zweite-Ordnungs Güte des Bootstraps	26
3.4	Konfidenzintervalle	34
3.4.1	Ergebnisse endlicher Stichproben	35
3.5	Technische Ergebnisse	41
4	Testen auf Sprünge - Ein wild Bootstrap Ansatz	53
4.1	Einleitung	53
4.2	Betrachtetes Modell und das statistische Problem	54
4.3	Testprozedur für Prozesse ohne Rauschen	55
4.3.1	Abgeschnittene realisierte Power Variation	55
4.3.2	Definition der Teststatistiken	56
4.3.3	Die Wahl der Verteilung der externen Zufallsvariablen	58
4.4	Vergleich zu anderen Testprozeduren mit Hilfe von lokalen Alternativen	59
4.5	Testprozedur für Prozesse mit Rauschen	62
4.6	Die Wahl der Schranke	65
4.7	Ergebnisse bei endlichen Stichproben	66
4.7.1	Level Ergebnisse	78
4.7.2	Power Ergebnisse	78
4.8	Beweise	79

5	Ein Range-basierter Test auf die parametrische Form der Volatilität	85
5.1	Einleitung	85
5.2	Voraussetzungen und Testprozedur	86
5.2.1	Range-basierte Schätzung	88
5.2.2	Testprozedur	91
5.2.3	Abstandshypothesen	95
5.3	Parametrischer Bootstrap und Eigenschaften bei endlichen Stichproben	96
5.3.1	Parametrischer Bootstrap	96
5.3.2	Monte-Carlo Simulationen	98
6	Appendix	107
	Literaturverzeichnis	111
	Danksagung	117
	Lebenslauf	118

Kapitel 1

Einleitung

Heutzutage spielen zeitstetige Modelle eine große Rolle in der modernen Finanzmathematik. Dort werden Aktienkurse oder Zinsdynamiken oft durch Brownsche Semimartingale der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

modelliert. Dabei ist W eine Brownsche Bewegung, a eine Driftfunktion und σ eine Volatilitätsfunktion. Das Intervall $[0, 1]$ repräsentiert gewöhnlich einen Handelstag.

Eine entscheidende Größe in diesem Modell, die zahlreiche wichtige Anwendungen in der Praxis findet, ist die integrierte Volatilität. Sie ist definiert als

$$IV_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds. \quad (1.2)$$

Intuitiv können wir uns unter ihr ein Maß für die Schwankungsbreite und damit für das Risiko eines Wertpapiers vorstellen. Von einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkt aus betrachtet entspricht IV_t der quadratischen Variation des Semimartingals X zur Zeit t . Die Kenntnis der integrierten Volatilität wird zum Beispiel benötigt um den Preis von Derivaten, wie Optionen oder Swaps, zu bestimmen (siehe, z.B., Duffie und Harrison (1993) oder Howison, Rafailidis und Rasmussen (2004)). Aber auch im Risikomanagement, beim Hedgen und der Portfoliooptimierung spielt die integrierte Volatilität eine wichtige Rolle (siehe, z.B., Bakshi, Cao und Chen (2000) oder Andersen, Bollerslev, Christoffersen und Diebold (2005)).

Im Verlauf der letzten Jahre, gefördert durch die erhöhte Erhältlichkeit von Hochfrequenzdaten, gab es eine Vielzahl von Publikationen, die sich mit der Schätzung der integrierten Volatilität beschäftigen. Andersen und Bollerslev (1998) sowie Barndorff-Nielsen und Shephard (2002) untersuchten die Statistik

$$RV_t = \sum_{i=1}^{[nt]} (X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}})^2, \quad (1.3)$$

realisierte Volatilität genannt, zur Schätzung von IV_t . Die Konsistenz dieses Schätzers ist eine einfache Konsequenz der Definition der quadratischen Variation. Weiterhin ist gemeinhin

bekannt, dass die realisierte Volatilität der Maximum Likelihood Schätzer der integrierten Volatilität ist, wenn kein Drift vorhanden ist und die Volatilitätsfunktion konstant.

Die theoretischen und empirischen Eigenschaften der realisierten Volatilität wurden in zahlreichen Artikeln untersucht (siehe, z.B., Jacod (1994), Jacod und Protter (1998), Andersen, Bollerslev, Diebold und Labys (1998) sowie Barndorff-Nielsen und Shephard (2002) neben vielen anderen). Darüber hinaus konnte ein Zentraler Grenzwertsatz für die Größe

$$\sqrt{n}(RV_t - IV_t) \quad (1.4)$$

formuliert werden.

Gonçalves und Meddahi (2005) untersuchten zwei Bootstrap Methoden für die realisierte Volatilität, mit deren Hilfe sich genauere Konfidenzbereiche für IV_t bestimmen lassen. Im dritten Kapitel dieser Arbeit werden diese beiden Methoden erweitert, so dass sie sich auf eine breitere Klasse von Statistiken, genannt Power Variation und Bipower Variation, anwenden lassen. Power und Bipower Variation sind für $r, s \geq 0$ definiert als

$$V(X, r)_t^n = n^{\frac{r}{2}-1} \sum_{i=1}^{[nt]} |X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}}|^r \quad (1.5)$$

und

$$V(X, r, s)_t^n = n^{\frac{r+s}{2}-1} \sum_{i=1}^{[nt]-1} |X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}}|^r |X_{\frac{i+1}{n}} - X_{\frac{i}{n}}|^s. \quad (1.6)$$

Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij und Shephard (2006) haben eine asymptotische Theorie für diese wichtige Klasse von Statistiken entwickelt. Ein Vorteil dieser Klasse ist ihre Robustheit bei Sprungprozessen. Hierbei werden Prozesse der Form

$$Y_t = X_t + J_t \quad (1.7)$$

betrachtet, wobei X_t ein Brownsches Semimartingal und J_t ein Sprungprozess ist. Barndorff-Nielsen und Shephard konnten zeigen, dass eine skalierte Version von $V(X, 1, 1)_t^n$ gegen IV_t konvergiert, während RV_t in Wahrscheinlichkeit gegen die quadratische Variation von Y konvergiert. Robuste Schätzer für höhere Potenzen der Volatilität, wie sie zum Beispiel in Zentralen Grenzwertsätzen benötigt werden, können mit der Verallgemeinerung zur Multipower Variation konstruiert werden (siehe Barndorff-Nielsen und Shephard (2007)).

In der Praxis gibt es zahlreiche Situationen in denen der Preisverlauf eines Wertpapiers Sprünge aufweist, beziehungsweise wo es zu starken Preisbewegungen kommt. So können zum Beispiel überraschende Pressemitteilungen eines Unternehmens, politische Turbulenzen oder makroökonomische Entwicklungen zu plötzlichen und heftigen Preisausschlägen führen. Aus diesem Grund macht es Sinn, dem theoretischen Modell eine Sprungkomponente hinzuzufügen. Nun stellt sich aber nicht nur das Problem die integrierte Volatilität unter Sprüngen konsistent

zu schätzen, sondern auch zu testen, ob in einem beobachteten Pfad tatsächlich Sprünge aufgetreten sind.

Im Laufe der letzten Jahre wurden verschiedene Sprungtests entwickelt (siehe, z.B., Barndorff-Nielsen und Shephard (2004a, 2006), Aït-Sahalia und Jacod (2008), Lee und Mykland (2007) oder Fan und Wang (2007)). Erwähnenswert ist, dass Aït-Sahalia und Jacod Zentrale Grenzwertsätze unter beiden Alternativen, Sprünge und keine Sprünge, formulierten.

Eine verlässliche Kenntnis über die Sprungstruktur des zugrunde liegenden Prozesses ist für die Praxis hoch relevant. Zum Einen muss eventuell das gewählte Modell modifiziert werden, um Sprünge mit einzubeziehen und zum Anderen ergeben sich, zum Beispiel für das Risikomanagement, verschiedene Ausgangssituationen je nachdem ob man Sprünge einkalkulieren muss oder nicht.

Im vierten Kapitel dieser Arbeit wird ein neuer Sprungtest vorgestellt. Er beruht auf der Idee, dass Zuwächse $|X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}}|$ nicht berücksichtigt werden, wenn sie eine bestimmte Schranke übersteigen, die mit wachsender Stichprobe gegen 0 konvergiert. Zusätzlich wird in diesem Test die Idee des wild Bootstraps benutzt, um eine normal verteilte Teststatistik zu konstruieren.

Ein großer Vorteil dieses neuen Testverfahrens ist, dass es mit leichten Modifikationen auch in Modellen mit mikrostrukturellem Rauschen eingesetzt werden kann. Dies ist besonders wichtig, da heute weitgehend akzeptiert ist, dass der beobachtete Preis durch mikrostrukturelle Prozesse, wie zum Beispiel gerundete Preise oder die Geld-Brief-Spanne, verunreinigt ist (siehe Bay, Russell und Tiao (2000) für eine empirische Studie).

In einem Modell mit Rauschen wird der intuitive Schätzer, RV_t , der integrierten Volatilität inkonsistent und ausgefeiltere Methoden werden benötigt. Zhang, Mykland und Aït-Sahalia (2005) betrachteten das Modell

$$Y_t = X_t + \epsilon_t, \quad (1.8)$$

wobei X ein Brownsches Semimartingal ist und ϵ ein diskretes u.i.v. Rauschen mit $E[\epsilon] = 0$. Sie benutzten eine Unterstichprobenstatistik als Schätzer für die quadratische Variation von X und konnten sowohl die Konsistenz des Schätzers zeigen, als auch einen Zentralen Grenzwertsatz mit der Rate $n^{\frac{1}{6}}$ beweisen.

Inzwischen wurden in verschiedenen Arbeiten neue Schätzer für IV_t entwickelt, die die optimale Rate von $n^{-\frac{1}{4}}$ in Modellen mit Rauschen erreichen (siehe, z.B., Zhang (2006), Barndorff-Nielsen, Hansen, Lunde und Shephard (2004) oder Podolskij und Vetter (2008)).

Wir möchten dabei den Ansatz von Podolskij und Vetter (2008) herausstellen. Diese Autoren verwendeten in ihrer Arbeit das Konzept des pre-averaging für Bipower Statistiken. Der große Vorteil dieses Ansatzes ist, dass beliebige Potenzen der Volatilität geschätzt werden können. Weiterhin ermöglicht diese Theorie auf Sprünge zu testen.

Trotz der wachsenden Anzahl der Arbeiten zu Modellen mit Rauschen, wird in der Praxis und in empirischen Arbeiten oft auf eine einfachere Art mit verunreinigten Daten verfahren. Anstatt alle verfügbaren Daten zu benutzen, wird die Beobachtungsfrequenz verringert. So werden

Datenfrequenzen von 5-, 10- oder 30-Minuten für die Berechnung von Power oder Bipower Schätzern benutzt und die Daten zwischen diesen Beobachtungen vernachlässigt. Dies soll eine Balance schaffen zwischen der echten Informationsmenge und mikrostrukturellen Störungen. Es ist jedoch offensichtlich, dass es keine optimale Strategie ist vorhandene Daten, also Informationen, zu ignorieren.

Eine Möglichkeit dieses Vorgehen zu verbessern ist Range-basierte Schätzer zu verwenden. Der Ansatz die Volatilität mit Range-Statistiken zu schätzen geht auf Parkinson (1980) zurück. Unter den Voraussetzungen, dass kein Drift vorhanden und die Volatilitätsfunktion σ konstant ist, zeigte der Autor, dass die normierte tägliche Range ein unverzerrter Schätzer für die tägliche Volatilität ist. Zusätzlich wurde gezeigt, dass dieses Vorgehen ungefähr fünf mal effizienter ist als die quadrierten inner-Tag Erträge zu verwenden. Dies lässt sich an der jeweiligen Varianz in den dazugehörigen Zentralen Grenzwertsätzen ablesen.

Christensen und Podolskij (2006, 2007) führten einen Range-basierten Power Variationsschätzer ein, der wie folgt definiert ist

$$RPV(r)_t^n = n^{\frac{r}{2}-1} \sum_{i=1}^{[nt]} \sup_{p,q \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]} |X_p - X_q|^r, \quad r \in \mathbb{R}_+. \quad (1.9)$$

Die Autoren zeigten, dass eine diskrete Version dieses Range-Schätzers, mit der richtigen Skalierung und $r = 2$, benutzt werden kann um IV_t konsistent zu schätzen. Weiterhin wurde gezeigt, dass dieser Schätzer effizienter ist als der gewöhnliche Schätzer RV_t .

Im letzten Kapitel dieser Arbeit nutzen wir die hohe Effizienz der Range-basierten Statistiken, um mit ihnen einen Test auf die funktionale Form der Volatilität zu konstruieren. Grundlage ist dabei die Idee von Dette, Podolskij und Vetter (2006). Dabei werden aber einzelne Komponenten des Tests durch Range-Statistiken ersetzt.

Im Detail soll getestet werden, ob die Volatilitätsfunktion σ in einem Vektorraum U liegt, der durch gegebene positive Funktionen

$$\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2 : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad (1.10)$$

aufgespannt wird. Die Methode basiert auf dem Prozess

$$M_t^2 = \int_0^t \left\{ \sigma^2(s, X_s) - \sum_{j=1}^d \alpha_j^{min} \sigma_j^2(s, X_s) \right\}^2 ds, \quad (1.11)$$

wobei $\alpha^{min} = (\alpha_1^{min}, \dots, \alpha_d^{min})^T$ definiert ist als

$$\alpha^{min} = \operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}^d} \int_0^t \left\{ \sigma^2(s, X_s) - \sum_{j=1}^d \alpha_j \sigma_j^2(s, X_s) \right\}^2 ds. \quad (1.12)$$

Es ist offensichtlich, dass H_0 genau dann erfüllt ist, wenn

$$M_t^2 = 0, \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (1.13)$$

Der Unterschied zu der Methode von Dette, Podolskij und Vetter (2006) wird sein, dass der Schätzer für M_t mit Range-Statistiken gebildet wird und somit effizienter ist.

Andere Ansätze, um auf die funktionale Form der Drift- oder Volatilitätsfunktion zu testen, können in der Literatur gefunden werden (siehe, z.B., Aït-Sahalia (1996), Corradi und White (1999) oder Dette und von Lieres und Wilkau (2003)).

Diese Arbeit ist folgendermaßen gegliedert. Im zweiten Kapitel führen wir einige grundlegende Definitionen und Resultate ein, die wir während der gesamten Arbeit benötigen. Im dritten Kapitel erweitern wir zwei Bootstrap Methoden auf Bipower Variationsstatistiken, während im dann folgenden vierten Kapitel ein neuer Test auf Sprünge eingeführt wird. Im fünften Kapitel stellen wir einen Test auf die parametrische Form der Volatilität vor.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel führen wir verschiedene Methoden, Modelle und Definitionen ein, die gemeinhin in der Literatur verwendet werden. Die hier eingeführten Aussagen stellen daher die Grundlage für viele Ergebnisse und Prozeduren dar, die später in dieser Arbeit vorgestellt werden.

2.1 Stabile Konvergenz

In diesem Abschnitt führen wir die stabile Konvergenz einer Folge von Zufallsvariablen ein, welche ein wichtiges Werkzeug für viele Resultate in dieser Arbeit ist.

Definition 2.1.1 *Eine Folge von Zufallsvariablen $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , konvergiert genau dann stabil in Verteilung gegen die Zufallsvariable Y , welche auf einer Erweiterung $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ von (Ω, \mathcal{F}, P) definiert ist, wenn die Konvergenz*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[Zg(Y_n)] = E[Zg(Y)] \quad (2.1)$$

für jede messbare und beschränkte Zufallsvariable Z auf (Ω, \mathcal{F}, P) und jede beschränkte und stetige Funktion g gilt. Wir bezeichnen stabile Konvergenz in dieser Arbeit mit $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}_{\text{st}}} Y$.

Gilt (2.1) nur, wenn Z lediglich \mathcal{G} messbar ist, wobei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ ist, sagen wir, Y_n konvergiert \mathcal{G} -stabil gegen Y . Wir verwenden dafür die Notation $Y_n \xrightarrow{\mathcal{G}_{\text{st}}} Y$.

Es ist leicht einsehbar, dass stabile Konvergenz eine stärkere Art von Konvergenz ist als Konvergenz in Verteilung, welche analog mit $Z = 1$ definiert werden könnte. Weitere äquivalente Definitionen von stabiler Konvergenz finden sich zum Beispiel in Renyi (1963), Hall und Heyde (1980) oder Jacod und Shiryaev (2003).

Im Weiteren führen wir einige Eigenschaften der stabilen Konvergenz auf, die in dieser Arbeit relevant sind.

Lemma 2.1.2 *Sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{F}, P) , dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a) $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}_{\text{st}}} Y$
- (b) $(Y_n, Z)^T \xrightarrow{\mathcal{D}_{\text{st}}} (Y, Z)^T$ für alle \mathcal{F} -messbaren Zufallsvariablen Z .

Der Beweis findet sich in Aldous und Eagleson (1978).

Das nächste Lemma zeigt den Zusammenhang zwischen stabiler und stochastischer Konvergenz und wird für den Beweis des darauf folgenden Satzes benötigt.

Lemma 2.1.3 *Seien $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen von Zufallsvariablen auf (Ω, \mathcal{F}, P) . Angenommen es gelten die folgenden Konvergenzen*

$$Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}_{\text{st}}} Y \quad \text{und} \quad Z_n \xrightarrow{P} Z, \quad (2.2)$$

dann gilt auch

$$(Y_n, Z_n)^T \xrightarrow{\mathcal{D}_{\text{st}}} (Y, Z)^T. \quad (2.3)$$

Informationen zum Beweis finden sich in Jacod (1997).

Möchte man aus der schwachen Konvergenz der Folge $\sqrt{n}(Y_n - Y)$ die schwache Konvergenz von $\sqrt{n}(g(Y_n) - g(Y))$ schließen, ist dies im Allgemeinen nicht möglich. Eine Ausnahme ist der Fall, dass die Zufallsvariable Y deterministisch ist. Der nächste Satz zeigt, dass stabile Konvergenz dieses Problem lösen kann.

Satz 2.1 (Die verallgemeinerte Δ -Methode) *Seien $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Y d -dimensionale Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit*

$$\sqrt{n}(Y_n - Y) \xrightarrow{\mathcal{D}_{\text{st}}} Z. \quad (2.4)$$

Sei $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit Gradient ∇g . Dann gilt

$$\sqrt{n}(g(Y_n) - g(Y)) \xrightarrow{\mathcal{D}_{\text{st}}} \nabla g(Y)Z. \quad (2.5)$$

Der Beweis findet sich in Podolskij (2006).

2.2 Bipower Variation

In der modernen Finanzmathematik werden gewöhnlich Modelle der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad t > 0, \quad (2.6)$$

definiert auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, benutzt, um den Verlauf von Wertpapieren zu beschreiben. Dabei bezeichnet $W = (W_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung, $a = (a_t)_{t \geq 0}$ ist eine lokal beschränkte, an $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptierte und vorher-sagbare Driftfunktion und $\sigma = (\sigma_t)_{t \geq 0}$ ist eine Volatilitätsfunktion, welche càdlàg, an $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptiert und nichtnegativ ist. Zur Erinnerung, ein Prozess ist càdlàg, wenn er rechtsstetig ist und linksseitige Grenzwerte besitzt. Prozesse der obigen Form nennt man im Allgemeinen Brownsche Semimartingale (BSM).

Diese Modelle lassen sich wie folgt interpretieren. Die Driftfunktion kann als fundamental gerechtfertigte Kursbewegung angesehen werden, während das stochastische Integral die zufälligen Schwankungen um diesen gerechtfertigten Preis beschreibt. Somit kann σ als Maß für zufällige Kursschwankungen und daher für das Risiko betrachtet werden. Dies erklärt auch, wieso die integrierte Volatilität eine Kerngröße ist, an deren verlässlicher Schätzung man sehr interessiert ist.

Andersen und Bollerslev (1998) sowie Barndorff-Nielsen und Shephard (2002) untersuchten die realisierte Volatilität, welche wie folgt definiert ist

$$RV_t = \sum_{i=1}^{[nt]} (X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}})^2. \quad (2.7)$$

Unter dem obigen Modell ist die realisierte Volatilität ein konsistenter Schätzer für die integrierte Volatilität. Allerdings ist dieser Schätzer nicht robust gegen Sprünge und um einen Zentralen Grenzwertsatz für die Größe $\sqrt{n}(RV_t - IV_t)$ zu konstruieren, muss auch eine höhere Potenz der Volatilität geschätzt werden.

Barndorff-Nielsen und Shephard (2004a) führten darauf hin so genannte Bipower Variationsstatistiken ein, mit denen es sowohl möglich ist beliebige Potenzen der Volatilität zu schätzen, als auch die integrierte Volatilität robust gegen Sprünge.

Um diese Klasse von Schätzern formal zu definieren, nehmen wir an, dass äquidistante Hochfrequenzdaten auf $[0, t]$ verfügbar sind, so dass wir inner-Tag Erträge von X_t für den Zeitraum $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ bestimmen können, das heißt

$$\Delta_i^n X = X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}}. \quad (2.8)$$

Weiterhin führen wir die Konstanten $\mu_r = E[|u|^r]$ ein, wobei gilt $u \sim N(0, 1)$.

Mit dieser Vorarbeit definieren wir den realisierten Bipower Variationsschätzer als

$$V(X, r, s)_t^n = n^{\frac{r+s}{2}-1} \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^r |\Delta_{i+1}^n X|^s, \quad r, s \geq 0. \quad (2.9)$$

Dabei definieren wir zusätzlich $\Delta_{[nt]+1}^n X := \Delta_{[nt]}^n X$.¹ Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij und Shephard (2006) haben die, im folgenden Satz gezeigte, Konvergenz in Wahrscheinlichkeit von $V(X, r, s)_t^n$ bewiesen.

Satz 2.2 Sei X_t ein Brownsches Semimartingal und $r, s \geq 0$, dann gilt für $n \rightarrow \infty$

$$V(X, r, s)_t^n \xrightarrow{\mathcal{P}} V(X, r, s)_t. \quad (2.10)$$

Dabei ist $V(X, r, s)_t$ gegeben durch

$$V(X, r, s)_t = \mu_r \mu_s \int_0^t |\sigma_u|^{r+s} du. \quad (2.11)$$

Mit Hilfe dieses Satzes ist es nun möglich in Modell (2.6) jede beliebige Potenz der Volatilität zu schätzen. Allerdings wird für viele Anwendungen auch die asymptotische Verteilung von $\sqrt{n}(V(X, r, s)_t^n - V(X, r, s)_t)$ benötigt. Um diese jedoch vorstellen zu können, brauchen wir zunächst noch eine Annahme.

Annahme 2.2.1 Sei X_t ein Brownsches Semimartingal. Wir sagen dann der Prozess X_t erfüllt die Bedingung (V), wenn folgendes gilt:

i) σ ist überall invertierbar

$$ii) \sigma_t = \sigma_0 + \int_0^t \acute{a}_u du + \int_0^t \acute{\sigma}_u dW_u + \int_0^t \acute{v}_u dW'_u.$$

Dabei sind $\acute{a} = (\acute{a}_t)_{t \geq 0}$, $\acute{\sigma} = (\acute{\sigma}_t)_{t \geq 0}$ und $\acute{v} = (\acute{v}_t)_{t \geq 0}$ adaptierte càdlàg Prozesse. Außerdem ist \acute{a} lokal beschränkt und vorhersagbar sowie $W' = (W'_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung unabhängig von W .

Mit dieser zusätzlichen Annahme an den Prozess X_t formulierten Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij und Shephard (2006) folgenden stabilen Zentralen Grenzwertsatz.

Satz 2.3 Seien $r, s \geq 0$ und X_t ein Brownsches Semimartingal. Weiterhin sei Bedingung (V) erfüllt. Dann gilt, wenn $n \rightarrow \infty$ läuft

$$\sqrt{n}(V(X, r, s)_t^n - V(X, r, s)_t) \xrightarrow{\mathcal{D}_{\mathbb{R}}} U(r, s)_t. \quad (2.12)$$

¹In Wirklichkeit läuft in theoretischen Arbeiten die Summe nur bis $[nt] - 1$, da es für die asymptotische Theorie keine Rolle spielt ob n oder $n - 1$ Daten betrachtet werden. Allerdings werden wir im Verlauf dieser Arbeit Erwartungswerte mit endlicher Anzahl von Datenpunkten berechnen, wo bei Vernachlässigung einzelner Datenpunkte überflüssige Fehlerterme in die Rechnung kommen.

Dabei ist $U(r, s)_t$ ein Prozess der Form

$$U(r, s)_t = \sqrt{\mu_{2r}\mu_{2s} + 2\mu_r\mu_s\mu_{r+s} - 3\mu_r^2\mu_s^2} \int_0^t |\sigma_u|^{r+s} d\hat{W}_u \quad (2.13)$$

und \hat{W} eine eindimensionale Brownsche Bewegung, die auf einer Erweiterung des filtrierten Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ definiert und unabhängig von der σ -Algebra \mathcal{F} ist.

Als Folgerung ist es möglich die folgenden stabilen Zentralen Grenzwertsätze zu formulieren, die eine Vielzahl von praktischen Anwendungen finden (siehe Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod und Shephard (2006)).

Satz 2.4 Seien die Bedingungen von Satz 2.3 erfüllt. Dann gilt, wenn $n \rightarrow \infty$ läuft

$$S_n = \frac{\sqrt{n}(V(X, r, s)_t^n - V(X, r, s)_t)}{\rho(r, s)_t} \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} U \quad (2.14)$$

und

$$T_n = \frac{\sqrt{n}(V(X, r, s)_t^n - V(X, r, s)_t)}{\rho(r, s)_t^n} \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} U. \quad (2.15)$$

Dabei ist U eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, die auf einer Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ definiert und unabhängig von \mathcal{F} ist. Die Größen $\rho^2(r, s)_t$ und $\rho^2(r, s)_t^n$ sind weiterhin gegeben durch

$$\rho^2(r, s)_t = (\mu_{2r}\mu_{2s} + 2\mu_r\mu_s\mu_{r+s} - 3\mu_r^2\mu_s^2) \int_0^t |\sigma_u|^{2(r+s)} du \quad (2.16)$$

und

$$\rho^2(r, s)_t^n = \frac{\mu_{2r}\mu_{2s} + 2\mu_r\mu_s\mu_{r+s} - 3\mu_r^2\mu_s^2}{\mu_{2r}\mu_{2s}} V(X, 2r, 2s)_t^n. \quad (2.17)$$

Hier ist erwähnenswert, dass $\rho^2(r, s)_t$ gerade die bedingte Varianz des Grenzprozesses $U(r, s)_t$ ist. Die Konvergenz in (2.10) impliziert

$$\rho^2(r, s)_t^n \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho^2(r, s)_t. \quad (2.18)$$

2.2.1 Anwendungen von Bipower Variation

In diesem Abschnitt zeigen wir anhand von zwei Beispielen die Anwendungsmöglichkeiten auf, die sich durch die Theorie der Bipower Statistiken ergeben.

Bipower Variation bei der Anwesenheit von Sprüngen

Wir nehmen an, dass der Verlauf des Wertpapierpreises nicht stetig verläuft, sondern im Zeitverlauf endlich viele Sprungstellen aufweist. Dies läßt sich zum Beispiel durch den Prozess

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_{i=1}^{N_t} J_i \quad (2.19)$$

modellieren. Hier ist $N = (N_t)_{t \in [0,1]}$ ein einfacher Zählprozess mit endlicher Aktivität und $J = \{J_i\}_{i=1, \dots, N_t}$ ist eine Menge von Zufallsvariablen, die nicht 0 sind. Wenn wir dieses Modell zu Grunde legen, wird die realisierte Volatilität ein inkonsistenter Schätzer für die integrierte Volatilität. Es ergibt sich dann folgende Konvergenz

$$RV_t \xrightarrow{P} \int_0^t \sigma_s^2 ds + \sum_{i=1}^{N_t} J_i^2. \quad (2.20)$$

Um dieses Problem zu lösen, kann man zur Schätzung der integrierten Volatilität die 1,1-Bipower Variationsstatistik benutzen. Zur Erinnerung, diese ist definiert als

$$\mu_1^{-2} V(X, 1, 1)_t^n = \mu_1^{-2} \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X| |\Delta_{i+1}^n X|. \quad (2.21)$$

Der Grundgedanke bei diesem Vorgehen ist, dass keine zwei benachbarten Datenpunkte Sprünge enthalten, wenn der Sprungprozess endliche Aktivität hat und die Datenanzahl gegen unendlich läuft. Somit konvergieren immer noch alle Summanden gegen 0. Es läßt sich beweisen, dass 1,1-Bipower auch unter der Anwesenheit von Sprüngen ein konsistenter Schätzer der integrierten Volatilität ist.

Mit diesem Grundgedanken läßt sich auch ein Test auf die Anwesenheit von Sprüngen konstruieren. Barndorff-Nielsen und Shephard (2004a, 2006) führten diesen Test ein und bewiesen den folgenden Satz.

Satz 2.5 Sei X_t ein Prozess aus Modell (2.19). Weiterhin gelte Bedingung (V). Dann gilt, wenn $n \rightarrow \infty$ läuft

$$\frac{\sqrt{n}(V(X, 2, 0)_t^n - \mu_1^{-2} V(X, 1, 1)_t^n)}{\sqrt{\kappa MPV_{(1,1,1,1),t}^n}} \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} U, \quad (2.22)$$

wenn $N_t = 0$ ist und

$$\frac{\sqrt{n}(V(X, 2, 0)_t^n - \mu_1^{-2} V(X, 1, 1)_t^n)}{\sqrt{\kappa MPV_{(1,1,1,1),t}^n}} \xrightarrow{P} \infty, \quad (2.23)$$

sonst. Dabei ist U wie in Satz 2.4 und $\kappa = \frac{\pi^2}{4} + \pi - 5 \approx 0,6091$. $MPV_{(1,1,1,1),t}^n$ ist definiert als

$$MPV_{(1,1,1,1),t}^n = \mu_1^{-4} n \sum_{i=1}^{[nt]-3} |\Delta_i^n X| |\Delta_{i+1}^n X| |\Delta_{i+2}^n X| |\Delta_{i+3}^n X|. \quad (2.24)$$

Aus diesem Satz läßt sich nun ohne weiteres eine Teststatistik konstruieren, mit der auf die Anwesenheit von Sprüngen getestet werden kann.

Bemerkung 2.2.2 In Satz 2.5 wird die vierte Potenz der Volatilität unter der Anwesenheit von Sprüngen bestimmt. Dies geschieht mit der nahe liegenden Verallgemeinerung der realisierten Bipower Variation, nämlich der realisierten Multipower Variation (siehe Barndorff-Nielsen und Shephard (2007)). Diese ist gegeben durch

$$MPV_{(r_1, \dots, r_k), t}^n = n^{\frac{r_+}{2} - 1} \sum_{i=1}^{[nt]-k+1} \prod_{j=1}^k \frac{1}{\mu_{r_j}} |\Delta_{i+j-1}^n X|^{r_j}. \quad (2.25)$$

Dabei ist $k \in \mathbb{N}$, $r_j \geq 0$ für alle j und $r_+ = \sum_{j=1}^k r_j$.

Gilt $r_j < 2$ für alle j , so konvergiert $MPV_{(r_1, \dots, r_k), t}^n$ im Modell (2.19) gegen $\int_0^t \sigma_u^{r_+} du$ (Barndorff-Nielsen und Shephard (2007)). Folglich ist $MPV_{(1,1,1,1), t}^n$ ein, auch unter der Anwesenheit von Sprüngen, konsistenter Schätzer der vierten Potenz der Volatilität.

Asymptotische Konfidenzintervalle für die integrierte Volatilität

Möchte man Konfidenzintervalle für die integrierte Volatilität bestimmen, so ist dies durch die Anwendung von Satz 2.3 möglich. Allerdings benötigen wir dafür einen Schätzer für die vierte Potenz der Volatilität. Eine Möglichkeit dafür ist zum Beispiel $V(X, 4, 0)_t^n$. Die Konsistenz dieses Schätzers wird durch Gleichung (2.10) gesichert.

Somit erhalten wir ein asymptotisches symmetrisches zweiseitiges, beziehungsweise ein rechtsseitiges $100(1 - \alpha)\%$ Konfidenzintervall für die integrierte Volatilität durch

$$C_{2, sym} = \left(V(X, 2, 0)_t^n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\rho^2(2, 0)_t^n}{n}}, V(X, 2, 0)_t^n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\rho^2(2, 0)_t^n}{n}} \right) \quad (2.26)$$

und

$$C_{1, r} = \left(0, V(X, 2, 0)_t^n - z_\alpha \sqrt{\frac{\rho^2(2, 0)_t^n}{n}} \right). \quad (2.27)$$

Dabei sind die z_α die kritischen Werte der Standardnormalverteilung für ein α -Level.

Kapitel 3

Bootstrap Methoden für Bipower Variation

Der Bootstrap (Efron (1979)) ist eine resampling Methode, welche in einer Vielzahl von Problemen in unterschiedlichster Weise eingesetzt werden kann (siehe Shao und Tu (1995) für einen Überblick). In diesem Kapitel erweitern wir zwei Bootstrap Methoden, die ursprünglich von Gonçalves und Meddahi (2005) für die realisierte Volatilität eingeführt wurden, um genauere Konfidenzintervalle für IV_t zu berechnen. Wir benutzen ebenfalls den u.i.v. Bootstrap und den wild Bootstrap (siehe Wu (1986)), allerdings beweisen wir ihre erste-Ordnungs Gültigkeit¹ für allgemeinere Statistiken, nämlich für Bipower Variationsprozesse. Außerdem vergleichen wir mit Hilfe von Edgeworth expansions und Monte Carlo Simulationen die Genauigkeit im Vergleich zu anderen bestehenden Verfahren.

In diesem gesamten Kapitel nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass äquidistante Daten $\Delta_i^n X = X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}}$ auf $[0, 1]$ beobachtbar sind und X_t ein Brownsches Semimartingal aus Modell (2.6) ist. Da $t = 1$ gilt, unterdrücken wir im Folgenden den Zeitindex t .

3.1 u.i.v. Bootstrap

Um den u.i.v. Bootstrap zu konstruieren, führen wir zuerst die Notation $b_i^n = |\Delta_i^n X|^r |\Delta_{i+1}^n X|^s$ ein. Dabei unterdrücken wir jedoch bei b_i^n die Abhängigkeit von $r, s \geq 0$ zur Vereinfachung der

¹Wir lehnen uns an Horowitz (2001) an und sprechen von einer asymptotischen Verbesserung der Ordnung $O(h^r)$ für ein $r > 0$, wenn die Bootstrap Verteilung der betrachteten Statistik korrekt ist bis einschließlich zu Termen der Ordnung $O(h^r)$. Dies bedeutet gleichzeitig, dass der Schätzfehler von Ordnung $o(h^r)$ ist. Für $r = 1/2$ bedeutet dies, dass der erste Term einer Edgeworth expansion getroffen wird. In diesem Fall sagen wir der Bootstrap hat eine Güte zweiter Ordnung.

Notation. Das u.i.v. Bootstrap Analogon von b_i^n bezeichnen wir mit b_i^{n*} . Die Bootstrapdaten b_i^{n*} berechnen wir nach folgender Regel

$$b_i^{n*} = b_{I_i}^n, \quad I_i \sim \text{u.i. gleichverteilt auf } \{1, \dots, n\}. \quad (3.1)$$

Die resultierende Bootstrap Statistik ist dann definiert als

$$V^*(X, r, s)^n = n^{\frac{r+s}{2}-1} \sum_{i=1}^n b_i^{n*}. \quad (3.2)$$

Der Erwartungswert dieser Bootstrap Statistik ist folglich gegeben durch²

$$E^*(V^*(X, r, s)^n) = E^*\left(n^{\frac{r+s}{2}-1} \sum_{i=1}^n b_i^{n*}\right) = n^{\frac{r+s}{2}} E^*(b_1^{n*}) = V(X, r, s)^n. \quad (3.3)$$

Gleichung (3.3) kann leicht nachgerechnet werden, da b_i^{n*} eine u.i.v. Stichprobe aus $(b_i^n)_{i=1, \dots, n}$ ist.³ Zusätzlich erhalten wir die Gleichung⁴

$$\begin{aligned} \rho^{*2}(r, s) &= \text{Var}^*(\sqrt{n}V^*(X, r, s)^n) = n \text{Var}^*\left(n^{\frac{r+s}{2}-1} \sum_{i=1}^n b_i^{n*}\right) \\ &= n^{r+s} \text{Var}^*(b_1^{n*}) = V(X, 2r, 2s)^n - [V(X, r, s)^n]^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Wir benutzen

$$\rho^{*2}(r, s)^n = V^*(X, 2r, 2s)^n - [V^*(X, r, s)^n]^2 \quad (3.5)$$

als konsistenten Schätzer für $\rho^{*2}(r, s)$.

Die u.i.v. Bootstrap Analogons zu (2.14) und (2.15) sind dann durch

$$S_n^* = \frac{\sqrt{n}(V^*(X, r, s)^n - V(X, r, s)^n)}{\rho^*(r, s)} \quad (3.6)$$

und

$$T_n^* = \frac{\sqrt{n}(V^*(X, r, s)^n - V(X, r, s)^n)}{\rho^*(r, s)^n} \quad (3.7)$$

gegeben.

Nun wäre es natürlich wünschenswert, dass diese beiden Ausdrücke ebenfalls gegen die Standardnormalverteilung konvergieren. Dann wäre es nämlich, intuitiv gesprochen, denkbar, dass die Verteilung von S_n^* , beziehungsweise T_n^* , als Approximation der Grenzverteilung von (2.14), beziehungsweise (2.15), geeignet ist. Mit der obigen Notation und der Annahme, dass X_t ein Brownsches Semimartingal ist, können wir in der Tat folgenden Satz beweisen, der die Grundlage für die u.i.v. Bootstrap Methode für Bipower Variation darstellt.

² E^* bezeichnet den Erwartungswert der u.i.v. Bootstrap Statistik, bedingt auf die originale Stichprobe.

³Zur Erinnerung, wir hatten $\Delta_{n+1}^n X := \Delta_n^n X$ definiert.

⁴ Var^* bezeichnet die Varianz der u.i.v. Bootstrap Statistik, bedingt auf die originale Stichprobe.

Satz 3.1 Sei X_t ein Brownsches Semimartingal, $Z \sim N(0, 1)$ und $\Phi(x) = P(Z \leq x)$. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |P^*(T_n^* \leq x) - \Phi(x)| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0. \quad (3.8)$$

Sei zusätzlich Bedingung (V) erfüllt. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$

$$P^*(T_n^* \leq x) - P(T_n \leq x) = o_P(1). \quad (3.9)$$

Beweis: Der Beweis gliedert sich in zwei Teile. Zuerst beweisen wir das Resultat für S_n^* . Dann genügt es zu zeigen $\rho^*(r, s)^n \xrightarrow{\mathcal{P}^*} \rho^*(r, s)$.

1. Teil

Wir definieren

$$z_i^* = \frac{n^{\frac{r+s-1}{2}} (b_i^{n^*} - E^*(b_i^{n^*}))}{\rho^*(r, s)} \quad (3.10)$$

und

$$S_n^* = \sum_{i=1}^n z_i^*. \quad (3.11)$$

Die z_i^* sind dabei (bedingt auf die originale Stichprobe) u.i.v. und wir erhalten

$$E^*(z_i^*) = 0. \quad (3.12)$$

Weiterhin gilt

$$\text{Var}^*(z_i^*) = n^{r+s-1} \rho^{*2}(r, s) \text{Var}(b_i^{n^*}) = \frac{1}{n}. \quad (3.13)$$

Die letzte Gleichung liefert folglich

$$\text{Var}^*\left(\sum_{i=1}^n z_i^*\right) = 1. \quad (3.14)$$

Die Gleichungen (3.12) und (3.14) ermöglichen uns nun Berry-Esseen's Schranke (siehe Katz (1963) für mehr Details) zu benutzen. Es existiert ein $\epsilon > 0$ und eine Konstante $0 < K < \infty$, so dass

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |P^*\left(\frac{\sum_{i=1}^n z_i^*}{\sqrt{\text{Var}^*(\sum_{i=1}^n z_i^*)}} \leq x\right) - \Phi(x)| \leq K \sum_{i=1}^n E^*|z_i^*|^{2+\epsilon}. \quad (3.15)$$

Nun müssen wir zeigen, dass die rechte Seite in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n E^* |z_i^*|^{2+\epsilon} &= n E^* |z_1^*|^{2+\epsilon} \\
&= n^{\frac{(r+s)(2+\epsilon)-\epsilon}{2}} |\rho^*(r, s)_t|^{-(2+\epsilon)} E^* (|b_i^{n*} - E^*(b_i^{n*})|^{2+\epsilon}) \\
&\leq 2 |\rho^*(r, s)|^{-(2+\epsilon)} n^{\frac{(r+s)(2+\epsilon)-\epsilon}{2}} E^* [(b_i^{n*})^{2+\epsilon}] \\
&= 2 |\rho^*(r, s)|^{-(2+\epsilon)} n^{\frac{-\epsilon}{2}} V(X, r(2+\epsilon), s(2+\epsilon))_t^n = O_p(n^{\frac{-\epsilon}{2}}). \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Dies genügt für die Konvergenz, da bereits die Konvergenzen

$$V(X, r, s)^n \xrightarrow{\mathcal{P}} V(X, r, s) = \mu_r \mu_s \int_0^1 |\sigma_u|^{r+s} du \quad (3.17)$$

und

$$\rho^*(r, s) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mu_{2r} \mu_{2s} \int_0^1 |\sigma_u|^{2r+2s} du - \mu_r^2 \mu_s^2 \left(\int_0^1 |\sigma_u|^{r+s} du \right)^2 > 0 \quad (3.18)$$

bekannt sind.

2. Teil

Nun bleibt uns noch zu beweisen, dass

$$\rho^*(r, s)^n \xrightarrow{\mathcal{P}^*} \rho^*(r, s) \quad (3.19)$$

erfüllt ist. Zu diesem Zweck müssen wir

$$Bias(\rho^*(r, s)^n) = E^*(\rho^*(r, s)^n) - \rho^*(r, s) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad (3.20)$$

und

$$Var^*(\rho^*(r, s)^n) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad (3.21)$$

nachweisen. Dies geschieht in Lemma 3.5.3 und vervollständigt den Beweis. \square

3.2 Wild Bootstrap

Der wild Bootstrap basiert auf einem anderen Prinzip als der u.i.v. Bootstrap. Er benutzt die gleichen Summanden wie die originale Statistik $V(X, r, s)^n$, allerdings werden alle Erträge

einzelnen mit einer externen Zufallsvariablen modifiziert. Wir definieren den wild Bootstrap für Bipower Variation durch

$$V^{WB}(X, r, s)^n = n^{\frac{r+s}{2}-1} \sum_{i=1}^n \eta_i^2 |\Delta_i^n X|^r |\Delta_{i+1}^n X|^s. \quad (3.22)$$

Die $(\eta_i)_{i=1, \dots, n}$ sind dabei u.i.v. externe Zufallsvariablen, die unabhängig vom zugrunde liegenden Prozess sind. Wir benutzen die Notation

$$\mu_m^{WB} = E|\eta_i|^m, \quad (3.23)$$

um das m -te absolute Moment von η_i zu bezeichnen. Wir nehmen zusätzlich an, dass die externen Zufallsvariablen so gewählt sind, dass die auftretenden Momente existieren.

Der Erwartungswert der wild Bootstrap Statistik kann leicht nachgerechnet werden⁵

$$E^{WB}(V^{WB}(X, r, s)^n) = \mu_2^{WB} V(X, r, s)^n. \quad (3.24)$$

Die Varianz von $\sqrt{n}V^{WB}(X, r, s)^n$ ist gegeben durch⁶

$$\begin{aligned} \rho_{WB}^2(r, s) &= \text{Var}^{WB}(\sqrt{n}V^{WB}(X, r, s)^n) \\ &= n[E^{WB}((V^{WB}(X, r, s)^n)^2) - (E^{WB}(V^{WB}(X, r, s)^n))^2] \\ &= n^{r+s-1} (\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2) \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n X|^{2r} |\Delta_{i+1}^n X|^{2s} \\ &= (\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2) V(X, 2r, 2s)^n. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Wir verwenden die folgende Statistik als konsistenten Schätzer des Varianz Terms $\rho_{WB}^2(r, s)$

$$\hat{\rho}_{WB}^2(r, s)^n = \frac{\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2}{\mu_4^{WB}} n^{r+s-1} \sum_{i=1}^n \eta_i^4 |\Delta_i^n X|^{2r} |\Delta_{i+1}^n X|^{2s}. \quad (3.26)$$

Nun können wir ein wild Bootstrap Analogon zu Satz 3.1 formulieren und beweisen.

Satz 3.2 Sei X_t ein Brownsches Semimartingal, $\mu_q^{WB} < \infty$, $q = 2(2 + \epsilon)$ und $\Phi(x) = P(Z \leq x)$ mit $Z \sim N(0, 1)$. Wir definieren weiterhin

$$S_n^{WB} = \frac{\sqrt{n}(V^{WB}(X, r, s)^n - \mu_2^{WB} V(X, r, s)^n)}{\rho_{WB}(r, s)} \quad (3.27)$$

und

$$T_n^{WB} = \frac{\sqrt{n}(V^{WB}(X, r, s)^n - \mu_2^{WB} V(X, r, s)^n)}{\rho_{WB}(r, s)^n}. \quad (3.28)$$

⁵ E^{WB} bezeichnet den Erwartungswert der wild Bootstrap Statistik, bedingt auf die originale Stichprobe.

⁶ Var^{WB} bezeichnet die Varianz der wild Bootstrap Statistik, bedingt auf die originale Stichprobe.

Dann gilt für $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P^{WB}(T_n^{WB} \leq x) - \Phi(x)| \xrightarrow{P} 0. \quad (3.29)$$

Sei zusätzlich Bedingung (V) erfüllt. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$

$$P^{WB}(T_n^{WB} \leq x) - P(T_n \leq x) = o_P(1). \quad (3.30)$$

Beweis: Der Beweis ähnelt dem von Satz 3.1. Zuerst zeigen wir wieder, dass die Aussage für S_n^{WB} stimmt. Dann bleibt uns noch zu beweisen, dass die Varianz im richtigen Sinne konvergiert.

1. Teil

Wir definieren zuerst

$$x_i = \frac{n^{\frac{r+s-1}{2}} (\eta_i^2 - \mu_2^{WB}) |\Delta_i^n X|^r |\Delta_{i+1}^n X|^s}{\rho_{WB}(r, s)}. \quad (3.31)$$

Wir erhalten natürlich $E^{WB}(x_i) = 0$. Zusätzlich ergibt sich

$$Var^{WB}(x_i) = \frac{n^{r+s-1} (\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2) |\Delta_i^n X|^{2r} |\Delta_{i+1}^n X|^{2s}}{\rho_{WB}^2(r, s)} \quad (3.32)$$

und folglich

$$Var^{WB} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) = \sum_{i=1}^n Var^{WB}(x_i) = 1. \quad (3.33)$$

Nun können wir wieder Berry-Esseen's Schranke benutzen. Der Rest dieses Schritts ist analog zu dem im Beweis von Satz 3.1. Wir erhalten

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P^{WB} \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sqrt{Var^{WB}(\sum_{i=1}^n x_i)}} \leq x \right) - \Phi(x)| \leq K \sum_{i=1}^n E^{WB} |x_i|^{2+\epsilon} = O_p(n^{-\frac{\epsilon}{2}}). \quad (3.34)$$

2. Teil

Im zweiten Schritt berechnen wir zuerst

$$E^{WB}(\rho_{WB}^2(r, s)^n) = \frac{\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2}{\mu_4^{WB}} n^{r+s-1} \sum_{i=1}^n E^{WB}(\eta_i^4) |\Delta_i^n X|^{2r} |\Delta_{i+1}^n X|^{2s} = \rho_{WB}^2(r, s). \quad (3.35)$$

Andererseits bekommen wir für die Varianz

$$Var^{WB}(\rho_{WB}^2(r, s)^n) = E^{WB}[(\rho_{WB}^2(r, s)^n)^2] - E^{WB}(\rho_{WB}^2(r, s))^2. \quad (3.36)$$

Nun müssen wir die einzelnen Erwartungswerte in diesem Ausdruck berechnen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
E^{WB}[(\rho_{WB}^2(r, s)^n)^2] &= \left(\frac{\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2}{\mu_4^{WB}} \right)^2 n^{2r+2s-2} E^{WB} \left(\sum_{i=1}^n \eta_i^8 |\Delta_i^n X|^{4r} |\Delta_{i+1}^n X|^{4s} \right. \\
&+ 2 \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i^4 \eta_{i+1}^4 |\Delta_i^n X|^{2r} |\Delta_{i+1}^n X|^{2r+2s} |\Delta_{i+2}^n X|^{2s} \\
&\left. + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, i+1, i-1}}^n \eta_i^4 \eta_j^4 |\Delta_i^n X|^{2r} |\Delta_{i+1}^n X|^{2s} |\Delta_j^n X|^{2r} |\Delta_{j+1}^n X|^{2s} \right)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

und

$$\begin{aligned}
E^{WB}(\rho_{WB}^2(r, s))^2 &= (\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2)^2 n^{2r+2s-2} \left(\sum_{i=1}^n |\Delta_i^n X|^{4r} |\Delta_{i+1}^n X|^{4s} \right. \\
&+ 2 \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n X|^{2r} |\Delta_{i+1}^n X|^{2r+2s} |\Delta_{i+2}^n X|^{2s} \\
&\left. + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, i+1, i-1}}^n |\Delta_i^n X|^{2r} |\Delta_{i+1}^n X|^{2s} |\Delta_j^n X|^{2r} |\Delta_{j+1}^n X|^{2s} \right).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Die Differenz ist

$$\begin{aligned}
&E^{WB}[(\rho_{WB}^2(r, s)^n)^2] - E^{WB}(\rho_{WB}^2(r, s))^2 \\
&= \left(\frac{\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2}{\mu_4^{WB}} \right)^2 \mu_8^{WB} n^{2r+2s-2} \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n X|^{4r} |\Delta_{i+1}^n X|^{4s} \\
&\quad - (\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2)^2 n^{2r+2s-2} \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n X|^{4r} |\Delta_{i+1}^n X|^{4s} = O_P \left(\frac{1}{n} \right).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Somit ist der Beweis vollständig. \square

Bemerkung 3.2.1 Die Sätze 3.1 und 3.2 können für Range-basierte Schätzer (siehe, z.B., Christensen und Podolskij (2006, 2007)) erweitert werden.

3.3 Zweite-Ordnungs Güte des Bootstraps

In den beiden letzten Abschnitten haben wir gezeigt, dass beide Bootstrapverfahren erste-Ordnung gültig sind. Das heißt, die Statistiken in Gleichungen (2.15) und (2.14) haben die gleichen Grenzverteilungen wie ihre Bootstrap Analogons. Es wäre nun noch wünschenswert, wenn die Verteilungen von T_n und S_n durch die Bootstrap Analogons besser approximiert werden könnten als durch die Standardnormalverteilung.

In der Tat weisen die Simulationsergebnisse in Abschnitt 3.4.1 darauf hin, dass dies tatsächlich der Fall ist. Dort zeigt sich, dass Konfidenzintervalle für verschiedene Potenzen der Volatilität, die mit den Bootstrap Methoden ermittelt werden, präziser sind als solche, die mit Hilfe der Normalverteilung berechnet werden. Um diese Beobachtungen erklären zu können, die auch Gonçalves und Meddahi (2005) bei dem weniger allgemeinen Fall machten, wird die folgende zweite-Ordnung Edgeworth expansion der Verteilung T_n betrachtet (siehe, z.B., Hall (1992), Seite 48)

$$P(T_n \leq x) = \Phi(x) + n^{-\frac{1}{2}} q_1(x) \phi(x) + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.40)$$

Dabei ist $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, $\phi(x)$ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung und die Größe q_1 ist gegeben durch

$$q_1(x) = -k_1 - \frac{1}{6} k_3 (x^2 - 1) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (3.41)$$

wobei gilt

$$\hat{k}_1(T_n) = E(T_n) = \frac{k_1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.42)$$

und

$$\hat{k}_3(T_n) = E(T_n^3) - 3E(T_n^2)E(T_n) + 2[E(T_n)]^3 = \frac{k_3}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.43)$$

Bemerkung 3.3.1 *Wir geben an dieser Stelle keinen Beweis für die Gültigkeit der Edgeworth expansions. Für unsere Zwecke ist es ausreichend, sie als formale Ausdrücke zu behandeln. Dieses Vorgehen ist üblich, wenn diese formalen Ausdrücke für Untersuchungen, welche die Güte höherer Ordnungen betreffen, benutzt werden (siehe, z.B., Mammen (1993) oder Davidson und Flachaire (2001)).*

Bemerkung 3.3.2 *Für die Verteilungen von T_n^* und T_n^{WB} definieren wir die Edgeworth expansions analog.*

Zur Berechnungen der Kumulanten verwenden wir die folgende Notation

$$U_n = \frac{\sqrt{n}(\rho^2(r, s)^n - \rho^2(r, s))}{\rho^2(r, s)}. \quad (3.44)$$

Damit folgt

$$T_n = S_n \left(\frac{\rho^2(r, s)^n}{\rho^2(r, s)} \right)^{-\frac{1}{2}} = S_n \left(1 + \frac{U_n}{\sqrt{n}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.45)$$

Mit Hilfe einer Taylor Entwicklung für $f(x) = (1+x)^{-\frac{k}{2}}$ um 0 erhalten wir

$$f(x) = 1 - \frac{k}{2}x + O(x^2). \quad (3.46)$$

Nun können wir T_n^k umschreiben zu

$$T_n^k = S_n^k \left(1 + \frac{U_n}{\sqrt{n}} \right)^{-\frac{k}{2}} = S_n^k - \frac{k}{2} \frac{S_n^k U_n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) =: \tilde{T}_n^k + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (3.47)$$

Um die nun folgenden Ergebnisse zu entwickeln, benötigen wir zwei weitere Annahmen. Die erste davon ist eine sehr starke Einschränkung. Wir setzen nämlich voraus, dass $\sigma_s = \sigma \geq 0$ konstant ist. Die zweite Annahme, $a_s = 0$, ist weniger restriktiv, da der Driftprozess a eine kleinere Ordnung, im Vergleich zu der Volatilitätsfunktion σ , hat. Daher ist der Driftprozess, wenn die Daten bei hohen Frequenzen beobachtet werden, ohnehin vernachlässigbar (siehe, z.B., Andersen, Bollerslev und Diebold (2002)).

Letztendlich erhalten wir das vereinfachte Modell

$$X_t = X_0 + \sigma W_t. \quad (3.48)$$

Bemerkung 3.3.3 *Ist $\sigma_s = \sigma$ konstant, so erhalten wir*

$$\Delta_i^n X = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \sigma_u dW_u = \sigma(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-1}{n}}) = \sigma v_i. \quad (3.49)$$

Folglich sind die Zuwächse $\Delta_i^n X$ u.i.v. mit gemeinsamer Verteilung $N(0, \frac{\sigma^2}{n})$, wobei gilt $v_i = W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-1}{n}} \sim N(0, \frac{1}{n})$.

Unter dem vereinfachten Modell können wir im Weiteren folgende Abschätzung für den u.i.v. Bootstrap zeigen⁷

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} |q_1^*(x) - q_1(x)| \leq |q_1(x)|. \quad (3.50)$$

Dies zeigt, dass, asymptotisch betrachtet, der Fehler der Bootstrap Methode kleiner oder gleich dem Fehler ist, der mit der Approximation durch die Normalverteilung gemacht wird.

⁷plim bezeichnet hier den Grenzwert, der in Wahrscheinlichkeit angenommen wird.

Für den wild Bootstrap können wir sogar eine noch stärkere Aussage beweisen. Wenn nämlich die Verteilung der η_i passend gewählt ist, gilt

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} |q_1^{WB}(x) - q_1(x)| = 0. \quad (3.51)$$

Dies bedeutet, dass wir eine zweite-Ordnungs Verbesserung erhalten.

Bemerkung 3.3.4 Für den u.i.v. Bootstrap gilt nur $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} |q_1^*(x) - q_1(x)| = 0$, falls $r=2$ und $s=0$ (siehe Gonçalves und Meddahi (2005) sowie Tabellen 3.1 und 3.2).

Bemerkung 3.3.5 Auch wenn σ nicht konstant ist, zeigen die Simulationsergebnisse, dass beide Bootstrap Verteilungen die Verteilung von T_n besser approximieren als die Normalverteilung (siehe Gonçalves und Meddahi (2005) oder Tabellen 3.3 - 3.18).

Lemma 3.3.6 Sei σ konstant. Dann ergeben sich im vereinfachten Modell (3.48) die folgenden Resultate

$$\text{a) } \hat{k}_1(T_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\left(\frac{-A_1}{2\rho^3(r, s)} (\mu_{3r}\mu_{3s} + \mu_{2r}\mu_s\mu_{r+2s} + \mu_r\mu_{2s}\mu_{2r+s} - 3\mu_r\mu_s\mu_{2r}\mu_{2s}) \sigma^{3(r+s)} \right)}_{k_1} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.52)$$

Dabei ist

$$A_1 = \frac{\mu_{2r}\mu_{2s} + 2\mu_r\mu_s\mu_{r+s} - 3\mu_r^2\mu_s^2}{\mu_{2r}\mu_{2s}}. \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \hat{k}_3(T_n) = & \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\underbrace{\frac{\sigma^{3(r+s)}}{2\rho^3(r, s)\mu_{2r}\mu_{2s}} (-14\mu_r^3\mu_s^3\mu_{2r}\mu_{2s} - 12\mu_{3r}\mu_{3s}\mu_r\mu_s\mu_{r+s} - 12\mu_r\mu_s^2\mu_{r+s}\mu_{2r}\mu_{r+2s} - 12\mu_r^2\mu_s\mu_{r+s}\mu_{2s}\mu_{2r+s} - 12\mu_r^2\mu_s^2\mu_{r+s}\mu_{2r}\mu_{2s} + 18\mu_{3r}\mu_{3s}\mu_r^2\mu_s^2 + 18\mu_r^2\mu_s^3\mu_{2r}\mu_{r+2s} + 18\mu_r^3\mu_s^2\mu_{2s}\mu_{2r+s} + 12\mu_{r+s}^2\mu_{2r}\mu_{2s}\mu_r\mu_s - 4\mu_{3r}\mu_{3s}\mu_{2r}\mu_{2s})}_{k_3} \right] + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \hat{k}_1^*(T_n^*) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\left(\frac{-1}{2\rho^{*3}(r,s)} (V(X, 3r, 3s)^n - 3V(X, r, s)^n V(X, 2r, 2r)^n + 2(V(X, r, s)^n)^3) \right)}_{k_1^*} \\ &+ O_P\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \hat{k}_3^*(T_n^*) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\left(\frac{-2}{\rho^{*3}(r,s)} (V(X, 3r, 3s)^n - 3V(X, r, s)^n V(X, 2r, 2r)^n + 2(V(X, r, s)^n)^3) \right)}_{k_3^*} \\ &+ O_P\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \hat{k}_1^{WB}(T_n^{WB}) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\left[\left(\frac{\mu_6^{WB} - \mu_2^{WB} \mu_4^{WB}}{2(\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2)^{\frac{1}{2}} \mu_4^{WB}} \right) \frac{V(X, 3r, 3s)^n}{(V(X, 2r, 2s)^n)^{\frac{3}{2}}} \right]}_{k_1^{WB}} + O_P\left(\frac{1}{n}\right) \\ & \quad (3.57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \hat{k}_3^{WB}(T_n^{WB}) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \\ & \underbrace{\left[\frac{V(X, 3r, 3s)^n}{(V(X, 2r, 2s)^n)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\mu_6^{WB} - 3\mu_4^{WB} \mu_2^{WB} + 2(\mu_2^{WB})^3}{(\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(\mu_6^{WB} - \mu_4^{WB} \mu_2^{WB})}{\mu_4^{WB} (\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right]}_{k_3^{WB}} + O_P\left(\frac{1}{n}\right) \\ & \quad (3.58) \end{aligned}$$

Beweis: Die benötigten Werte für $E(S_n^1)$, $E(S_n^2)$, $E(S_n^3)$, $E(S_n^1 U_n)$, $E(S_n^2 U_n)$ und $E(S_n^3 U_n)$ finden sich in Lemma 3.5.2 und werden mit Hilfe der Ergebnisse aus Lemma 3.5.1 für die Gleichungen

$$E(S_n^1) = n^{\frac{1}{2}} E\left(\frac{V(X, r, s)^n - V(X, r, s)}{\rho(r, s)}\right), \quad (3.59)$$

$$E(S_n^2) = nE \left(\frac{(V(X, r, s)^n - V(X, r, s))^2}{\rho^2(r, s)} \right), \quad (3.60)$$

$$E(S_n^3) = n^{\frac{3}{2}} E \left(\frac{(V(X, r, s)^n - V(X, r, s))^3}{\rho^3(r, s)} \right), \quad (3.61)$$

$$E(S_n^1 U_n) = nE \left(\frac{(V(X, r, s)^n - V(X, r, s))(\rho^2(r, s)^n - \rho^2(r, s))}{\rho^3(r, s)} \right), \quad (3.62)$$

$$E(S_n^2 U_n) = n^{\frac{3}{2}} E \left(\frac{(V(X, r, s)^n - V(X, r, s))^2 (\rho^2(r, s)^n - \rho^2(r, s))}{\rho^4(r, s)} \right) \quad (3.63)$$

und

$$E(S_n^3 U_n) = n^2 E \left(\frac{(V(X, r, s)^n - V(X, r, s))^3 (\rho^2(r, s)^n - \rho^2(r, s))}{\rho^5(r, s)} \right) \quad (3.64)$$

entwickelt.

Die entsprechenden Resultate für den u.i.v. Bootstrap finden sich in Lemma 3.5.3 und Lemma 3.5.4 bzw. in Lemma 3.5.6 für den wild Bootstrap. Eine Kombination aus diesen Ergebnissen liefert die Behauptung. \square

Als nächstes betrachten wir die Grenzwerte von q_1^{WB} und $q_1(x)$. Ziel dabei ist es, die Verteilung der η_i so zu wählen, dass die Differenz zwischen q_1^{WB} und $q_1(x)$ verschwindet. Dazu ist es notwendig ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und 3 Variablen zu lösen. Um genau zu sein, es müssen folgende Gleichungen erfüllt sein

$$k_1 = k_1^{WB} \quad (3.65)$$

und

$$k_3 = k_3^{WB}, \quad (3.66)$$

wobei μ_2^{WB} , μ_4^{WB} und μ_6^{WB} die Variablen sind. Es ist leicht einsehbar, dass dieses Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt.

Bemerkung 3.3.7 Wenn wir die Verteilung der η_i so wählen, dass das Gleichungssystem gelöst ist, haben wir eine Verteilung gefunden, die eine zweite-Ordnungs Verbesserung liefert. Für $r=2$ und $s=0$ findet sich ein Beispiel für eine korrekte Spezifikation in Gonçalves und Meddahi (2005). Für $r=1$, $s=1$ können wir zum Beispiel die Verteilung $\eta_i = 0,828838488$ mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,778271187$ und $\eta_i = 1,44869881$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ benutzen.

Für $r=4$, $s=0$ ist eine mögliche Verteilung $\eta_i = 1, 353047$ mit Wahrscheinlichkeit $p = 0, 268306$ und $\eta_i = 0, 833891$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$. Beide zuletzt genannten Beispiele liefern eine zweite-Ordnungs Verbesserung.

Bemerkung 3.3.8 Die Einschränkung auf zwei-Punkt Verteilungen ist nicht notwendig und erfolgt nur zur Vereinfachung.

Als Konsequenz aus Lemma 3.3.6 erhalten wir, unter gleichen Annahmen wie in Lemma 3.3.6, folgende Ergebnisse.

Korollar 3.3.9

$$plim_{n \rightarrow \infty} |q_1^*(x) - q_1(x)| \leq |q_1(x)|. \quad (3.67)$$

Korollar 3.3.10 Falls die Verteilung der η_i so gewählt ist, dass sie die Gleichungen (3.65) und (3.66) löst, gilt

$$plim_{n \rightarrow \infty} |q_1^{WB}(x) - q_1(x)| = 0. \quad (3.68)$$

Bemerkung 3.3.11 Die Beweise der Korollare sind nicht schwierig aber sehr lang und unübersichtlich. Sie folgen direkt aus Lemma 3.3.6 und den technischen Resultaten in Abschnitt 3.5.

Bemerkung 3.3.12 Die folgenden Tabellen 3.1 und 3.2 enthalten Werte für k_1 , $|k_1 - k_1^*|$, k_3 , und $|k_3 - k_3^*|$ gemäß Lemma 3.3.6 für einige Werte von r und s . Dies illustriert die Aussage von Korollar 3.3.9.

r/s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,16	0	0,09	0,15	0,19	0,21	0,22	0,22	0,22	0,22
1	0,291	0,2	0,05	0,14	0,32	0,47	0,6	0,69	0,75	0,79
2	0,2	0,2	0,05	0,21	0,54	0,88	1,2	1,49	1,73	1,92
3	0,05	0,05	0,13	0,49	0,99	1,57	2,2	2,8	3,38	3,91
4	0,14	0,21	0,49	1,01	1,76	2,69	3,75	4,87	6,02	7,14
5	0,32	0,54	0,99	1,76	2,87	4,3	6	7,91	9,95	12,08
6	0,47	0,88	1,57	2,69	4,3	6,42	9,03	12,08	15,51	19,24
7	0,6	1,2	2,2	3,75	6	9,03	12,88	17,54	22,97	29,1
8	0,69	1,49	2,81	4,87	7,91	12,08	17,54	24,36	32,56	42,13
9	0,75	1,73	3,38	6,02	9,95	15,51	22,97	32,56	44,45	58,75
10	0,79	1,92	3,91	7,13	12,08	19,24	29,1	42,13	58,75	79,3
r/s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,7	1,4	2,7	4,9	9	16,4	30	55	100,7	184,9
1	1,6	2,7	4,5	7,9	14,2	25,8	47,4	87,1	160,1	294,4
2	2,7	4,6	8	14,1	25,4	46,4	85,3	157	289	531,7
3	4,5	8	14,1	25,4	46,1	84,6	155,6	286,5	527,5	970,8
4	7,9	14,1	25,4	46,1	84,2	154,7	284,9	524,8	966,3	1778
5	14,1	25,4	46,1	84,2	154,5	284,1	523,1	963,2	1773	3262
6	25,8	46,4	84,6	154,7	284,1	522,5	961,6	1770	3256	5988
7	47,4	85,3	155,6	284,9	523,1	961,6	1768	3253	5982	10998
8	87,11	157	284,5	324,8	963,2	1770	3253	5979	10992	20203
9	160,1	289	527,5	966,3	1773	3256	5982	10992	20198	37115
10	294,4	531,7	970,8	1778	3262	5988	10998	20203	37115	68187

Tabelle 3.1: Der obere Bereich dieser Tabelle zeigt einige Werte von $|k_1 - k_1^*|$ gemäß Lemma 3.3.6 für verschiedene Kombinationen von r und s . Der untere Bereich dieser Tabelle zeigt einige Werte von k_1 gemäß Lemma 3.3.6 für verschiedene Kombinationen von r und s .

r/s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,99	0	0,56	0,92	1,15	1,28	1,34	1,36	1,34	1,29
1	0,85	0,2	0,46	0,96	1,27	1,43	1,48	1,47	1,43	1,36
2	0,2	0,03	0,4	0,88	1,24	1,45	1,52	1,5	1,44	1,36
3	0,46	0,4	0,59	0,93	1,25	1,45	1,53	1,51	1,44	1,34
4	0,96	0,88	0,93	1,12	1,34	1,5	1,56	1,54	1,45	1,34
5	1,27	1,24	1,25	1,34	1,48	1,58	1,61	1,57	1,48	1,35
6	1,43	1,45	1,45	1,5	1,58	1,65	1,66	1,6	1,5	1,38
7	1,48	1,52	1,53	1,56	1,61	1,66	1,66	1,61	1,52	1,39
8	1,47	1,5	1,51	1,54	1,57	1,61	1,61	1,58	1,5	1,39
9	1,43	1,44	1,44	1,45	1,48	1,51	1,52	1,5	1,45	1,36
10	1,36	1,36	1,34	1,34	1,35	1,38	1,39	1,39	1,36	1,3
r/s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	-3	-6	-10	-20	-35	-65	-119	-219	-402	-739
1	-6	-10	-17	-31	-57	-104	-191	-350	-642	-1179
2	-10	-18	-31	-56	-103	-188	-345	-633	-1162	-2133
3	-17	-31	-56	103	-187	-343	-630	-1156	-2122	-3897
4	-31	-56	-103	-187	-343	-628	-1153	-2117	-3888	-7140
5	-57	-103	-187	-343	-628	-1152	-2115	-3883	-7130	-13094
6	-104	-188	-343	-628	-1152	-2114	-3881	-7125	-13084	-24028
7	-191	-345	-630	-1153	-2115	-3881	-7124	-13079	-24017	-44106
8	-350	-633	-1156	-2117	-3883	-7125	-13079	-24014	-44095	-80977
9	-642	-1162	-2122	-3888	-7130	-13084	-24017	-44095	-80970	-148695
10	-1179	-2133	-3897	-7140	-13094	-24028	-44106	-80978	-148695	-273064

Tabelle 3.2: Der obere Bereich dieser Tabelle zeigt einige Werte von $|k_3 - k_3^*|$ gemäß Lemma 3.3.6 für verschiedene Kombinationen von r und s . Der untere Bereich dieser Tabelle zeigt einige Werte von k_3 gemäß Lemma 3.3.6 für verschiedene Kombinationen von r und s .

3.4 Konfidenzintervalle

Im letzten Abschnitt haben wir unter starken Annahmen gezeigt, dass beide Bootstrap Methoden die Verteilung von T_n besser approximieren als die Standardnormalverteilung. Eine wichtige Anwendung dieses Ergebnisses ist die Konstruktion von Konfidenzintervallen für $V(X, r, s)$. Ein symmetrisches zweiseitiges $100(1 - \alpha)\%$ Konfidenzintervall, welches aus (2.15) folgt, ist gegeben durch

$$C_{2,sym} = \left(V(X, r, s)^n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\rho^2(r, s)^n}{n}}, V(X, r, s)^n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\rho^2(r, s)^n}{n}} \right). \quad (3.69)$$

Ein rechtsseitiges $100(1 - \alpha)\%$ Konfidenzintervall, das auch aus (2.15) folgt, können wir konstruieren durch

$$C_{1,r} = \left(0, V(X, r, s)^n - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\rho^2(r, s)^n}{n}} \right). \quad (3.70)$$

Dabei sind die z_{α} die kritischen Werte der Standardnormalverteilung für ein α -Level. Benutzen wir die oben eingeführten Bootstrap Methoden, so erhalten wir andere Konfidenzbereiche. Es ergibt sich dann

$$C_2^{Boot} = \left(V(X, r, s)^n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}^{Boot} \sqrt{\frac{\rho^2(r, s)^n}{n}}, V(X, r, s)^n - z_{\frac{\alpha}{2}}^{Boot} \sqrt{\frac{\rho^2(r, s)^n}{n}} \right) \quad (3.71)$$

und

$$C_{1,r}^{Boot} = \left(0, V(X, r, s)^n - z_{\alpha}^{Boot} \sqrt{\frac{\rho^2(r, s)^n}{n}} \right). \quad (3.72)$$

Hier ist z_{α}^{Boot} das α -Quantil der entsprechenden Bootstrap Verteilung T_n^{Boot} , also $T_n^{Boot} = T_n^*$ oder $T_n^{Boot} = T_n^{WB}$.

Simulationsergebnisse für $r=2$ und $s=0$ finden sich in Gonçalves und Meddahi (2005). In dieser Arbeit präsentieren wir Resultate für $r=4, s=0$ und $r=1, s=1$. Diese beiden Statistiken haben, wie bereits erwähnt, eine Vielzahl von Anwendungen in der Praxis. 1,1-Bipower ist robust gegen Sprünge und kann zur Konstruktion von Sprungtests bei Wertpapierverläufen verwendet werden (siehe Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) oder Christensen und Podolskij (2006)). 4,0-Bipower wird in Zentralen Grenzwertsätzen, die integrierte Volatilität betreffend, benutzt, um die Varianz zu schätzen (Barndorff-Nielsen und Shephard (2004b)).

Bemerkung 3.4.1 Barndorff-Nielsen und Shephard (2002) führten eine logarithmierte Version der Konfidenzintervalle $C_{1,r}$ und $C_{2,sym}$ ein. Natürlich ist es möglich, analoge Intervalle auch für $C_{1,r}^{Boot}$ und C_2^{Boot} zu konstruieren.

3.4.1 Ergebnisse endlicher Stichproben

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Verhalten der Bootstrap Methoden für $r=4$, $s=0$ und $r=1$, $s=1$ bei endlichen Stichproben (siehe Tabellen 3.3 - 3.18). Wir berechnen sowohl ein- als auch zweiseitige 95%-Konfidenzintervalle für konstante Volatilität und ein 2-Faktor-Modell. Letzteres ist spezifiziert durch

$$dX_t = \mu dt + \sigma_t dW_t, \quad (3.73)$$

$$\sigma_t = \exp(\beta_0 + \beta_1 \tau_t), \quad (3.74)$$

$$d\tau_t = \alpha \tau_t dt + dB_t, \quad (3.75)$$

$$\text{corr}(dW_t, dB_t) = \rho. \quad (3.76)$$

Wir haben die Parameter gewählt als $\beta_0 = 0,3125$, $\beta_1 = 0,125$, $\alpha = -0,025$ und $\rho = -0,3$. Zusätzlich untersuchen wir den Einfluss der Driftfunktion. Aus diesem Grund haben wir im ersten Durchgang $\mu = 0$ gewählt. Danach haben wir im zweiten Durchlauf $\mu = 0,03$ gesetzt. Das 2-Faktor-Modell findet sich auch in den Arbeiten von Barndorff-Nielsen, Hansen, Lunde und Shephard (2006) und Podolskij und Vetter (2006). Für jede Simulation haben wir 1000 Durchläufe mit jeweils 600 Bootstrap Wiederholungen berechnet. Die Verteilung des wild Bootstraps haben wir gemäß Abschnitt 3.3 gewählt.

Die Resultate finden sich in den Tabellen 3.3 - 3.18. Dort haben wir die Abkürzung *Nor* für das Level, welches sich mit der Normalverteilung ergab, benutzt. Analog stehen die Abkürzungen *u.i.v. Boot* und *WB* für die Level, welche sich mit der u.i.v. Bootstrap Verteilung und der wild Bootstrap Verteilung ergaben. Die Endung *-log* symbolisiert die Level, die wir mit der logarithmierten Version der jeweiligen Verteilung erhielten.

In den meisten Simulationen scheinen die Intervalle zu wenig Fälle abzudecken. Besonders groß ist diese Diskrepanz, wenn die Stichprobe nur wenig Daten umfasst. Es ist allerdings offenkundig, dass die Bootstrap Intervalle akkurater sind als die Intervalle, die sich mit der Normalverteilung ergeben. Besonders bei kleinen Stichproben beobachten wir eine signifikante Verbesserung. Im Fall $r=4$, $s=0$ verbessern die logarithmierten Versionen die Genauigkeit noch einmal. In der Situation $r=1$, $s=1$ ist dies nicht der Fall, da die Intervalle der Bootstrap Methoden ohnehin schon sehr genau sind. Dies gilt auch für kleine Datensätze. Außerdem fällt auf, dass die zweiseitigen Konfidenzintervalle akkurater sind als die einseitigen. Zusätzlich zeigen die Simulationen, dass die Ergebnisse robust gegen Drifteffekte sind.

Für $r=4$, $s=0$ liefert der u.i.v. Bootstrap die besten Ergebnisse, gefolgt vom wild Bootstrap. Für den Fall $r=1$, $s=1$ sind die Ergebnisse beider Bootstrap Methoden gleich gut. Dabei sind sie aber, gerade bei kleinen Datenmengen, den Konfidenzintervallen der Normalverteilung überlegen. Bei großen Datenanzahlen liefern jedoch alle Methoden gute Ergebnisse.

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	73,8	81,1	86	93,9	80,2	87,6
100	80,1	85,2	89,3	94,2	85,1	91,3
200	85,9	88,8	91,8	95	90,1	93,7
500	89,6	92	93,7	95,3	92,9	94,8
1000	88,7	90,4	92,5	93,8	91,7	93,4

Tabelle 3.3: Simulationsergebnisse für einseitige 95%-Konfidenzintervalle mit konstanter Volatilität sowie $r=4$, $s=0$ und $\mu = 0$.

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	78,8	83,8	90,1	92,5	80,8	85,4
100	84,2	87,8	91,6	93	87,5	89,2
200	88,9	91,4	93,6	93,2	91,8	92,1
500	92,2	93,3	93,8	94,5	93,3	93,9
1000	91,7	92,8	93,1	94,2	92,8	94,3

Tabelle 3.4: Simulationsergebnisse für zweiseitige 95%-Konfidenzintervalle mit konstanter Volatilität sowie $r=4$, $s=0$ und $\mu = 0$.

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	74,8	82,4	87,7	95,5	81,2	90,5
100	81,4	86,6	90,1	94,4	86,6	91,9
200	84,9	88,2	90,4	94	89,4	93,1
500	89	91,1	93,1	95,2	92	94,4
1000	90,1	91,1	92,6	94,7	92,3	94

Tabelle 3.5: Simulationsergebnisse für einseitige 95%-Konfidenzintervalle im 2-Faktor-Modell sowie $r=4$, $s=0$ und $\mu = 0$.

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	79,5	85,3	92,2	92,6	82,4	86
100	85,2	88,9	93,2	93,7	88,6	90,3
200	88,1	89,1	92,3	92,8	90	90,2
500	91,4	93,1	94,5	94,9	93,4	94,6
1000	92,1	93,5	94,2	94,3	93,4	93,7

Tabelle 3.6: *Simulationsergebnisse für zweiseitige 95%-Konfidenzintervalle im 2-Faktor-Modell sowie $r=4$, $s=0$ und $\mu = 0$.*

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	76,1	82,7	88	94,3	81,4	89,9
100	82,6	87,5	91,3	95,3	88,4	94
200	89,2	88,4	91,3	95,2	89,7	92,6
500	88,9	91,4	93,2	95,9	92,8	95,2
1000	92,3	93,6	95	95,6	94,4	95,8

Tabelle 3.7: *Simulationsergebnisse für einseitige 95%-Konfidenzintervalle mit konstanter Volatilität sowie $r=4$, $s=0$ und $\mu = 0,03$.*

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	79,9	86,3	91,5	94	82,6	87,5
100	86	90,7	93,6	93,4	89,7	91
200	88,8	90,9	93,3	94,8	91	93,3
500	92	93,8	95,2	93,4	94	93
1000	94,4	94,9	94,3	94	94,5	93,9

Tabelle 3.8: *Simulationsergebnisse für zweiseitige 95%-Konfidenzintervalle mit konstanter Volatilität sowie $r=4$, $s=0$ und $\mu = 0,03$.*

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	75	82,4	88,6	94,7	81	89,1
100	82,6	87,8	92	95,2	88,1	93,2
200	84,8	88,8	91,7	95	89,9	93,5
500	87,9	90,3	92,8	95,1	91,4	94,4
1000	91,3	92,9	94,4	95,7	94,3	95,2

Tabelle 3.9: *Simulationsergebnisse für einseitige 95%-Konfidenzintervalle im 2-Faktor-Modell sowie $r=4$, $s=0$ und $\mu = 0,03$.*

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	79,3	85,8	92,6	93,7	81,8	87
100	86,4	90,4	94	92,3	89,4	90,3
200	88,8	91,3	94,2	94	91,7	92,6
500	91	92,4	94,5	94,2	93,1	93,5
1000	93	93,2	93,8	94,1	92,9	93,5

Tabelle 3.10: *Simulationsergebnisse für zweiseitige 95%-Konfidenzintervalle im 2-Faktor-Modell sowie $r=4$, $s=0$ und $\mu = 0,03$.*

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	88,2	91,2	92,8	96,2	93,6	97,2
100	91,0	93,9	94,3	96,3	94,5	96,5
200	91,7	93,5	94,1	95,2	94,7	95,8
500	93,7	94,9	95,5	96,6	95,4	96,2
1000	95,4	95,8	96,1	96,7	95,9	96,6

Tabelle 3.11: *Simulationsergebnisse für einseitige 95%-Konfidenzintervalle mit konstanter Volatilität sowie $r=1$, $s=1$ und $\mu = 0$.*

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	90,9	94,1	94,8	95,6	94,3	94,5
100	93,6	94,3	94,6	95,1	94,6	94,6
200	94,5	94,7	95,2	94,8	94,7	94,8
500	95,7	95,4	95,2	95,6	95,6	95,5
1000	95,8	96,3	96,1	95,6	95,8	95,4

Tabelle 3.12: Simulationsergebnisse für zweiseitige 95%-Konfidenzintervalle mit konstanter Volatilität sowie $r=1$, $s=1$ und $\mu = 0$.

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	88	91,7	93,7	96,5	94,2	96,8
100	89	91,8	93	96	93,8	96,4
200	92,2	93,7	93,9	95,6	94,4	96
500	93,3	93,8	94,2	94,8	94,2	94,9
1000	94,9	95,4	95,6	95,9	95,7	95,9

Tabelle 3.13: Simulationsergebnisse für einseitige 95%-Konfidenzintervalle im 2-Faktor-Modell sowie $r=1$, $s=1$ und $\mu = 0$.

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	90,7	93,6	95	94,8	93,6	94
100	92,3	94,2	95,6	95,8	94,7	94,5
200	93,8	94,2	94,7	95,6	94,2	94,6
500	93,2	93,2	93,1	92,8	93	93,1
1000	95,5	95,1	95	94,6	94,8	94,9

Tabelle 3.14: Simulationsergebnisse für zweiseitige 95%-Konfidenzintervalle im 2-Faktor-Modell sowie $r=1$, $s=1$ und $\mu = 0$.

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	86,3	90,6	92	95,6	92,2	96
100	90,6	93,2	94	96	94,5	96,5
200	92,7	94	94,2	95,6	94,6	96,1
500	94,2	95,3	95,3	96,3	95,5	97,2
1000	93,5	94,5	94,3	95,2	94,3	95,6

Tabelle 3.15: Simulationsergebnisse für einseitige 95%-Konfidenzintervalle mit konstanter Volatilität sowie $r=1$, $s=1$ und $\mu = 0,03$.

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	89,8	92,5	93,6	95,8	92,5	95
100	92,8	93,2	94,4	93,4	93,6	92,7
200	94,4	94,8	95,1	94,8	94,9	94,6
500	96	95,7	95,9	95,9	96,2	95,8
1000	94,2	94,4	94,6	94,6	94,4	94,6

Tabelle 3.16: Simulationsergebnisse für zweiseitige 95%-Konfidenzintervalle mit konstanter Volatilität sowie $r=1$, $s=1$ und $\mu = 0,03$.

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	89,1	92,2	93,2	96,4	94	96,8
100	91	93,6	94,1	96,4	95,1	96,8
200	92,1	94,8	94,7	96,5	95,3	96,8
500	92,3	93,8	93,8	95	94,1	95,3
1000	93	93,4	93,9	94,7	94,1	94,8

Tabelle 3.17: Simulationsergebnisse für einseitige 95%-Konfidenzintervalle im 2-Faktor-Modell sowie $r=1$, $s=1$ und $\mu = 0,03$.

Anzahl von Daten	Nor	Nor-log	u.i.v. Boot	u.i.v. Boot-log	WB	WB-log
50	91,2	93,3	94,4	96,1	93,7	95,1
100	92,4	93,7	95,1	95,7	94,6	94,8
200	94,6	94,6	95,1	95,3	94,3	94,7
500	94	93,6	94,9	94	93,9	94,2
1000	94,6	94,6	95	94,8	94,5	94,7

Tabelle 3.18: *Simulationsergebnisse für zweiseitige 95%-Konfidenzintervalle im 2-Faktor-Modell sowie $r=1$, $s=1$ und $\mu = 0,03$.*

3.5 Technische Ergebnisse

Für die Beweise in Abschnitt 3.3 müssen wir zahlreiche Momente berechnen. Diese Berechnungen sind vom Prinzip einfach, jedoch äußerst langwierig. Sie ähneln außerdem den Berechnungen in Gonçalves und Meddahi (2005). Aus diesem Grund geben wir nur die Beweise einiger Ergebnisse an, damit die Ideen nachvollzogen werden können.

Im vereinfachten Modell (3.48) und mit den Annahmen von Lemma 3.3.6 ergeben sich die folgenden Resultate.

Lemma 3.5.1 *Unter den gleichen Annahmen wie in Lemma 3.3.6 erhalten wir die folgenden Ergebnisse.*

$$(a) \quad E(V(X, r, s)^n) = V(X, r, s) \quad (3.77)$$

$$(b) \quad E([V(X, r, s)^n]^2) = (V(X, r, s))^2 + \frac{\rho^2(r, s)}{n} + \frac{2\mu_r^2\mu_s^2\sigma^{2(r+s)} - 2\mu_{r+s}\mu_r\mu_s\sigma^{2(r+s)}}{n^2} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad E([V(X, r, s)^n]^3) &= \sigma^{3(r+s)} \left[\mu_s^3 \mu_r^3 + \frac{3\mu_{2r}\mu_{2s}\mu_r\mu_s + 6\mu_{r+s}\mu_r^2\mu_s^2 - 9\mu_s^3\mu_r^3}{n} \right. \\
&+ \frac{\mu_{3r}\mu_{3s} + 3\mu_{2r+s}\mu_r\mu_{2s} + 3\mu_{2s+r}\mu_{2r}\mu_s - 9\mu_{2r}\mu_r\mu_s\mu_{2s} + 6\mu_{r+s}^2\mu_r\mu_s}{n^2} \\
&\left. + \frac{26\mu_r^3\mu_s^3 - 30\mu_{r+s}\mu_r^2\mu_s^2}{n^2} \right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{3.79}
\end{aligned}$$

$$(d) \quad E(\rho^2(r, s)^n) = \rho^2(r, s) \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
(e) \quad E(V(X, r, s)^n \rho^2(r, s)^n) &= V(X, r, s) \rho^2(r, s) \\
&+ A_1 \sigma^{3(r+s)} \frac{\mu_{3r}\mu_{3s} + \mu_{2r}\mu_s\mu_{r+2s} + \mu_r\mu_{2s}\mu_{2r+s} - 3\mu_r\mu_s\mu_{2r}\mu_{2s}}{n} \\
&+ A_1 \sigma^{3(r+s)} \frac{2\mu_{2r}\mu_{2s}\mu_r\mu_s - \mu_r\mu_{2r+s}\mu_{2s} - \mu_{2r}\mu_{2s+r}\mu_s}{n^2} \tag{3.81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f) \quad E([V(X, r, s)^n]^2 \rho^2(r, s)^n) &= \sigma^{4(r+s)} A_1 \left[\mu_r^2 \mu_s^2 \mu_{2r} \mu_{2s} + \frac{\mu_{2r}^2 \mu_{2s}^2 + 2\mu_{r+s} \mu_r \mu_s \mu_{2r} \mu_{2s}}{n} \right. \\
&+ \frac{2\mu_{3r} \mu_{3s} \mu_r \mu_s + 2\mu_{r+2s} \mu_{2r} \mu_r \mu_s^2 + 2\mu_{2r+s} \mu_{2s} \mu_r^2 \mu_s - 9\mu_r^2 \mu_s^2 \mu_{2r} \mu_{2s}}{n} \\
&+ \frac{\mu_{4r} \mu_{4s} + 2\mu_{2r+2s} \mu_{2r} \mu_{2s} - 3\mu_{2r}^2 \mu_{2s}^2 + 2\mu_{3r+s} \mu_{3s} \mu_r + 2\mu_{r+3s} \mu_{3r} \mu_s}{n^2} \\
&+ \frac{2\mu_{r+s} \mu_{2r+s} \mu_r \mu_{2s} + 2\mu_{r+s} \mu_{r+2s} \mu_{2r} \mu_s + 2\mu_{2r+s} \mu_{r+2s} \mu_r \mu_s - 6\mu_{3r} \mu_{3s} \mu_r \mu_s}{n^2} \\
&\left. + \frac{26\mu_{2r} \mu_{2s} \mu_r^2 \mu_s^2 - 10\mu_r \mu_s^2 \mu_{2r} \mu_{r+2s} - 10\mu_r^2 \mu_s \mu_{2r+s} \mu_{2s} - 10\mu_{r+s} \mu_s \mu_r \mu_{2r} \mu_{2s}}{n^2} \right] + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{3.82}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g) \quad E([V(X, r, s)]^3 \rho^2(r, s)^n) &= \sigma^{5(r+s)} A_1 [\mu_r^3 \mu_s^3 \mu_{2r} \mu_{2s} + \frac{-18 \mu_r^3 \mu_s^3 \mu_{2r} \mu_{2s}}{n} \\
&+ \frac{3 \mu_r^3 \mu_s^2 \mu_{2r+s} \mu_{2s} + 3 \mu_r^2 \mu_s^3 \mu_{r+2s} \mu_{2r} + 6 \mu_r^2 \mu_s^2 \mu_{2r} \mu_{2s} \mu_{r+s} + 3 \mu_{2r}^2 \mu_{2s}^2 \mu_r \mu_s}{n} \\
&+ \frac{3 \mu_r^2 \mu_s^2 \mu_{3r} \mu_{3s}}{n} + \frac{119 \mu_r^3 \mu_s^3 \mu_{2r} \mu_{2s} - 36 \mu_r^3 \mu_s^2 \mu_{2r+s} \mu_{2s} - 36 \mu_r^2 \mu_s^3 \mu_{r+2s} \mu_{2r}}{n^2} \\
&+ \frac{6 \mu_r^2 \mu_{r+s} \mu_s \mu_{2s} \mu_{2r+s} - 72 \mu_r^2 \mu_s^2 \mu_{2r} \mu_{2s} \mu_{r+s} + 6 \mu_s^2 \mu_{r+s} \mu_r \mu_{2r} \mu_{r+2s} - 27 \mu_{2r}^2 \mu_{2s}^2 \mu_r \mu_s}{n^2} \\
&+ \frac{6 \mu_{r+s}^2 \mu_r \mu_s \mu_{2r} \mu_{2s} - 27 \mu_r^2 \mu_s^2 \mu_{3r} \mu_{3s} + 6 \mu_{r+s} \mu_{r+2s} \mu_r \mu_s^2 \mu_{2r} + 6 \mu_{r+2s} \mu_{2r+s} \mu_r^2 \mu_s^2}{n^2} \\
&+ \frac{6 \mu_{2r+s} \mu_{r+s} \mu_r^2 \mu_s \mu_{2s} + 4 \mu_{3r} \mu_{3s} \mu_{2r} \mu_{2s} + 3 \mu_{4r} \mu_{4s} \mu_r \mu_s + 3 \mu_{r+2s} \mu_{2r}^2 \mu_{2s} \mu_s}{n^2} \\
&+ \frac{3 \mu_{2r+s} \mu_{2r} \mu_r \mu_{2s}^2 + 6 \mu_{r+s} \mu_{3r} \mu_{3s} \mu_r \mu_s + 3 \mu_{2r+s} \mu_{2r} \mu_r \mu_{2s}^2 + 3 \mu_{r+2s} \mu_{2r}^2 \mu_{2s} \mu_s}{n^2} \\
&+ \frac{6 \mu_{2r+2s} \mu_{2r} \mu_r \mu_{2s} \mu_s + 6 \mu_{3r+s} \mu_r^2 \mu_{3s} \mu_s + 6 \mu_{r+3s} \mu_{3r} \mu_r \mu_s^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(b) \quad E([V(X, r, s)]^2) &= E([n^{\frac{r+s}{2}-1} \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n X|^r |\Delta_{i+1}^n X|^s]^2) \\
&= n^{r+s-2} (E[\sum_{i=1}^n |\Delta_i^n X|^{2r} |\Delta_{i+1}^n X|^{2s} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta_i^n X|^r |\Delta_{i+1}^n X|^{r+s} |\Delta_{i+2}^n X|^s] \\
&+ \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i-1, i, i+1}}^n |\Delta_i^n X|^r |\Delta_{i+1}^n X|^s |\Delta_j^n X|^r |\Delta_{j+1}^n X|^s])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n^{r+s-2} \left(\frac{n\mu_{2r}\mu_{2s}\sigma^{2(r+s)}}{n^{r+s}} + \frac{2(n-1)\mu_r\mu_s\mu_{r+s}\sigma^{2(r+s)}}{n^{r+s}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{[2(n-2) + (n-2)(n-3)]\mu_r^2\mu_s^2\sigma^{2(r+s)}}{n^{r+s}} \right) \\
&= \mu_r^2\mu_s^2\sigma^{2(r+s)} + \frac{\mu_{2r}\mu_{2s}\sigma^{2(r+s)} + 2\mu_r\mu_s\mu_{r+s}\sigma^{2(r+s)} - 3\mu_r^2\mu_s^2\sigma^{2(r+s)}}{n} \\
&\quad + \frac{2\mu_r^2\mu_s^2\sigma^{2(r+s)} - 2\mu_{r+s}\mu_r\mu_s\sigma^{2(r+s)}}{n^2} \tag{3.84}
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.5.2 *Unter den gleichen Annahmen wie in Lemma 3.3.6 erhalten wir die folgenden Ergebnisse.*

$$(a) \quad E(S_n) = 0 \tag{3.85}$$

$$(b) \quad E(S_n^2) = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.86}$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad E(S_n^3) &= \frac{\sigma^{3(r+s)}}{\sqrt{n}\rho^3(r,s)} (\mu_{3r}\mu_{3s} + 3\mu_{2r+s}\mu_r\mu_{2s} + 3\mu_{2s+r}\mu_{2r}\mu_s - 9\mu_{2r}\mu_r\mu_s\mu_{2s} \\
&\quad + 6\mu_{r+s}^2\mu_r\mu_s - 24\mu_{r+s}\mu_r^2\mu_s^2 + 20\mu_r^3\mu_s^3) + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{3.87}
\end{aligned}$$

$$(d) \quad E(S_n U_n) = \frac{A_1 \sigma^{3(r+s)} (\mu_{3r}\mu_{3s} + \mu_{2r}\mu_s\mu_{r+2s} + \mu_r\mu_{2s}\mu_{2r+s} - 3\mu_r\mu_s\mu_{2r}\mu_{2s})}{\rho^3(r,s)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.88}$$

$$(e) \quad E(S_n^2 U_n) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}
(f) \quad E(S_n^3 U_n) &= \frac{\sigma^{5(r+s)} * A_1}{\rho^5(r, s)} (27\mu_r^3 \mu_s^3 \mu_{2r} \mu_{2s} - 9\mu_r^3 \mu_s^2 \mu_{2r+s} \mu_{2s} - 9\mu_r^2 \mu_s^3 \mu_{r+2s} \mu_{2r} \\
&\quad - 18\mu_r^2 \mu_s^2 \mu_{r+s} \mu_{2r} \mu_{2s} + 6\mu_{r+s} \mu_{r+2s} \mu_r \mu_{2r} \mu_s^2 + 6\mu_{r+s} \mu_{2r+s} \mu_r^2 \mu_s \mu_{2s} \\
&\quad + 3\mu_{3r} \mu_{3s} \mu_{2r} \mu_{2s} + 6\mu_{r+s} \mu_{3r} \mu_{3s} \mu_r \mu_s + 3\mu_{2r+s} \mu_{2r} \mu_r \mu_{2s}^2 + 3\mu_{r+2s} \mu_{2r}^2 \mu_s \mu_{2s} \\
&\quad - 9\mu_{2r}^2 \mu_{2s}^2 \mu_r \mu_s - 9\mu_r^2 \mu_s^2 \mu_{3r} \mu_{3s}) + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.90}
\end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(d) \quad E(S_n U_n) &= nE\left(\frac{V(X, r, s)^n \rho^2(r, s)^n - V(X, r, s)^n \rho^2(r, s) - V(X, r, s) \rho^2(r, s)^n + V(X, r, s) \rho^2(r, s)}{\rho^3(r, s)}\right) \\
&= \frac{n}{\rho^3(r, s)} (E(V(X, r, s)^n \rho^2(r, s)^n) - V(X, r, s) \rho^2(r, s)) \\
&= A_1 \sigma^{3(r+s)} \frac{\mu_{3r} \mu_{3s} + \mu_{2r} \mu_s \mu_{r+2s} + \mu_r \mu_{2s} \mu_{2r+s} - 3\mu_r \mu_s \mu_{2r} \mu_{2s}}{\rho^3(r, s)} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.91}
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.5.3 *Für den u.i.v. Bootstrap erhalten wir die folgenden Resultate.*

$$(a) \quad E^*(V^*(X, r, s)^n) = V(X, r, s)^n \tag{3.92}$$

$$(b) \quad E^*([V^*(X, r, s)^n]^2) = [V(X, r, s)^n]^2 + \frac{V(X, 2r, 2s)^n - [V(X, r, s)^n]^2}{n} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad E^*([V^*(X, r, s)^n]^3) &= (V(X, r, s)^n)^3 \\
&\quad + \frac{3V(X, 2r, 2s)^n V(X, r, s)^n - 3(V(X, r, s)^n)^3}{n} \\
&\quad + \frac{V(X, 3r, 3s)^n - 3V(X, 2r, 2s)^n V(X, r, s)^n + 2(V(X, r, s)^n)^3}{n^2} \tag{3.94}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d) \quad E^*([V^*(X, r, s)^n]^4) &= (V(X, r, s)^n)^4 \\
&+ \frac{6V(X, 2r, 2s)^n(V(X, r, s)^n)^2 - 6(V(X, r, s)^n)^4}{n} \\
&+ \frac{11(V(X, r, s)^n)^4 + 4V(X, 3r, 3s)^n V(X, r, s)^n - 18V(X, 2r, 2s)^n(V(X, r, s)^n)^2}{n^2} \\
&+ \frac{3(V(X, 2r, 2s)^n)^2}{n^2} + \frac{V(X, 4r, 4s)^n - 6(V(X, r, s)^n)^4}{n^3} \\
&+ \frac{12V(X, 2r, 2s)^n(V(X, r, s)^n)^2 - 4V(X, 3r, 3s)^n V(X, r, s)^n - 3(V(X, 2r, 2s)^n)^2}{n^3}
\end{aligned} \tag{3.95}$$

$$\begin{aligned}
(e) \quad E^*([V^*(X, r, s)^n]^5) &= (V(X, r, s)^n)^5 \\
&+ \frac{10V(X, 2r, 2s)^n(V(X, r, s)^n)^3 - 10(V(X, r, s)^n)^5}{n} \\
&+ \frac{35(V(X, r, s)^n)^5 + 10V(X, 3r, 3s)^n(V(X, r, s)^n)^2}{n^2} \\
&+ \frac{15(V(X, 2r, 2s)^n)^2 V(X, r, s)^n - 60V(X, 2r, 2s)^n(V(X, r, s)^n)^3}{n^2} \\
&+ \frac{5V(X, 4r, 4s)^n V(X, r, s)^n - 50(V(X, r, s)^n)^5}{n^3} \\
&+ \frac{10V(X, 3r, 3s)^n V(X, 2r, 2s)^n - 30V(X, 3r, 3s)^n(V(X, r, s)^n)^2}{n^3} \\
&+ \frac{110V(X, 2r, 2s)^n(V(X, r, s)^n)^3 - 45V(X, r, s)^n(V(X, 2r, 2s)^n)^2}{n^3} \\
&+ \frac{V(X, 5r, 5s)^n + 24(V(X, r, s)^n)^5 - 5V(X, 4r, 4s)^n V(X, r, s)^n}{n^4} \\
&+ \frac{30(V(X, 2r, 2s)^n)^2 V(X, r, s)^n - 10V(X, 3r, 3s)^n V(X, 2r, 2s)^n}{n^4} \\
&+ \frac{20V(X, 3r, 3s)^n(V(X, r, s)^n)^2 - 60V(X, 2r, 2s)^n(V(X, r, s)^n)^3}{n^4}
\end{aligned} \tag{3.96}$$

$$(f) \quad E^*[V^*(X, r, s)^n V^*(X, 2r, 2s)^n] = V(X, r, s)^n V(X, 2r, 2s)^n \\ + \frac{V(X, 3r, 3s)^n - V(X, r, s)^n V(X, 2r, 2s)^n}{n} \quad (3.97)$$

$$(g) \quad E^*[(V^*(X, r, s)^n)^2 V^*(X, 2r, 2s)^n] = V(X, 2r, 2s)^n (V(X, r, s)^n)^2 \\ + \frac{(V(X, 2r, 2s)^n)^2 + 2V(X, 3r, 3s)^n V(X, r, s)^n - 3V(X, 2r, 2s)^n (V(X, r, s)^n)^2}{n} \\ + \frac{V(X, 4r, 4s)^n - (V(X, 2r, 2s)^n)^2 + 2V(X, 2r, 2s)^n (V(X, r, s)^n)^2 - 2(V(X, 2r, 2s)^n)^2}{n^2} \quad (3.98)$$

$$(h) \quad E^*[(V^*(X, r, s)^n)^3 V^*(X, 2r, 2s)^n] = (V(X, r, s)^n)^3 V(X, 2r, 2s)^n \\ + \frac{3(V(X, 2r, 2s)^n)^2 V(X, r, s)^n - 6(V(X, r, s)^n)^3 V(X, 2r, 2s)^n}{n} \\ + \frac{3(V(X, r, s)^n)^2 V(X, 3r, 3s)^n}{n} + \frac{11(V(X, r, s)^n)^3 V(X, 2r, 2s)^n}{n^2} \\ + \frac{3V(X, r, s)^n V(X, 4r, 4s)^n + 4V(X, 2r, 2s)^n V(X, 3r, 3s)^n}{n^2} \\ - \frac{9(V(X, 2r, 2s)^n)^2 V(X, r, s)^n + 9(V(X, r, s)^n)^2 V(X, 3r, 3s)^n}{n^2} \\ + \frac{V(X, 5r, 5s)^n - 6(V(X, r, s)^n)^3 V(X, 2r, 2s)^n - 3V(X, 4r, 4s)^n V(X, r, s)^n}{n^3} \\ - \frac{4V(X, 2r, 2s)^n V(X, 3r, 3s)^n}{n^3} \\ + \frac{6(V(X, 2r, 2s)^n)^2 V(X, r, s)^n + 6(V(X, r, s)^n)^2 V(X, 3r, 3s)^n}{n^3} \quad (3.99)$$

$$(i) \quad E^*(\rho^*(r, s)^n) \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho^*(r, s) \quad (3.100)$$

$$(j) \quad Var^*(\rho^*(r, s)^n) \xrightarrow{\mathcal{P}} 0 \quad (3.101)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
b) \quad E^*([V^*(X, r, s)^n]^2) &= E^*(n^{r+s-2}[\sum_{i=1}^n b_i^{n*}]^2) \\
&= n^{r+s-2}E^*(\sum_{i=1}^n [b_i^{n*}]^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_i^{n*} b_j^{n*}) = n^{r+s-2}(nE^*[b_1^{n*}]^2 + n(n-1)E^*[b_1^{n*}]^2) \\
&= n^{r+s-2} \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n X|^{2r} |\Delta_{i+1}^n X|^{2s} + n^{r+s} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n X|^r |\Delta_{i+1}^n X|^s \right)^2 \\
&\quad - n^{r+s-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n X|^r |\Delta_{i+1}^n X|^s \right)^2 \\
&= [V(X, r, s)^n]^2 + \frac{V(X, 2r, 2s)^n - [V(X, r, s)^n]^2}{n}
\end{aligned} \tag{3.102}$$

□

Lemma 3.5.4 Für den u.i.v. Bootstrap erhalten wir die folgenden Resultate.

$$(a) \quad E^*(S_n^*) = 0 \tag{3.103}$$

$$(b) \quad E^*(S_n^{*2}) = 1 \tag{3.104}$$

$$(c) \quad E^*(S_n^{*3}) = \frac{V(X, 3r, 3s)^n - 3V(X, 2r, 2s)^n V(X, r, s)^n + 2(V(X, r, s)^n)^3}{\sqrt{n} \rho^{*3}(r, s)} \tag{3.105}$$

$$\begin{aligned}
(d) \quad E^*(S_n^* U_n^*) &= \frac{V(X, 3r, 3s)^n - 3V(X, r, s)^n V(X, 2r, 2s)^n + 2(V(X, r, s)^n)^3}{\rho^{*3}(r, s)} \\
&\quad + O_P\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned} \tag{3.106}$$

$$(e) \quad E^*(S_n^{*2}U_n^*) = O_P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.107)$$

$$(f) \quad E^*(S_n^{*3}U_n^*) = 3 \frac{V(X, 3r, 3s)^n - 3V(X, r, s)^n V(X, 2r, 2s)^n + 2(V(X, r, s)^n)^3}{\rho^{*3}(r, s)} \\ + O_P\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.108)$$

$$(g) \quad I_1^1 = \frac{V(X, 3r, 3s)^n - V(X, r, s)^n V(X, 2r, 2s)^n}{n} \quad (3.109)$$

$$(h) \quad I_1^2 = \frac{V(X, 4r, 4s)^n - (V(X, 2r, 2s)^n)^2 - 2V(X, 3r, 3s)^n V(X, r, s)^n}{n^2} \\ + \frac{2V(X, 2r, 2s)^n (V(X, r, s)^n)^2}{n^2} \quad (3.110)$$

$$(i) \quad I_1^3 = 3 \frac{(V(X, 3r, 3s)^n - V(X, 2r, 2s)^n V(X, r, s)^n)(V(X, 2r, 2s)^n - [V(X, r, s)^n]^2)}{n^2} \\ + O_P\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (3.111)$$

$$(j) \quad I_2^1 = \frac{V(X, 3r, 3s)^n - 3V(X, r, s)^n V(X, 2r, 2s)^n + 2(V(X, r, s)^n)^3}{n^2} \quad (3.112)$$

$$(k) \quad I_2^2 = \frac{3[V(X, 2r, 2s)^n - (V(X, r, s)^n)^2]^2}{n^2} \\ + \frac{V(X, 4r, 4s)^n - 4V(X, 3r, 3s)^n V(X, r, s)^n + 12V(X, 2r, 2s)^n (V(X, r, s)^n)^2}{n^3} \\ - \frac{6(V(X, r, s)^n)^4 + 3(V(X, 2r, 2s)^n)^2}{n^3} \quad (3.113)$$

$$(l) \quad I_2^3 = \frac{10[V(X, 3r, 3s)^n - 3V(X, 2r, 2s)^n V(X, r, s)^n + 2(V(X, r, s)^n)^3]}{n^2} \\ * \frac{[V(X, 2r, 2s)^n - (V(X, r, s)^n)^2]}{n} + O_P\left(\frac{1}{n^4}\right) \quad (3.114)$$

$$(m) \quad I_3^1 = \frac{-2V(X, r, s)^n}{n} (V(X, 2r, 2s)^n - (V(X, r, s)^n)^2) \quad (3.115)$$

$$(n) \quad I_3^2 = \frac{-2V(X, r, s)^n}{n^2} [V(X, 3r, 3s)^n - 3V(X, 2r, 2s)^n V(X, r, s)^n \\ + 2(V(X, r, s)^n)^3] \quad (3.116)$$

$$(o) \quad I_3^3 = \frac{-6V(X, r, s)^n}{n^2} [V(X, 2r, 2s)^n - (V(X, r, s)^n)^2]^2 + O_P\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (3.117)$$

Beweis:

$$b) \quad E^*(S_n^{*2}) = nE^* \left(\frac{[V^*(X, r, s)^n]^2 - 2V^*(X, r, s)^n V(X, r, s)^n + [V(X, r, s)^n]^2}{\rho^{*2}(r, s)} \right) \\ = nE^* \left(\frac{[V^*(X, r, s)^n]^2}{\rho^{*2}(r, s)} \right) - \frac{n[V(X, r, s)^n]^2}{\rho^{*2}(r, s)} \\ = \frac{n[V(X, r, s)^n]^2}{\rho^{*2}(r, s)} + \frac{V(X, 2r, 2s)^n - [V(X, r, s)^n]^2}{\rho^{*2}(r, s)} - \frac{n[V(X, r, s)^n]^2}{\rho^{*2}(r, s)} = 1 \quad (3.118)$$

□

Bemerkung 3.5.5 Die Terme I_i^j ergeben sich durch folgende Gleichung.

$$\rho^{*2}(r, s)^n - \rho^{*2}(r, s) = V^*(X, 2r, 2s)^n - (V^*(X, r, s)^n)^2 - V(X, 2r, 2s)^n \\ + (V(X, r, s)^n)^2 = V^*(X, 2r, 2s)^n - V(X, 2r, 2s)^n - [V^*(X, r, s)^n - V(X, r, s)^n]^2 \\ - 2V(X, r, s)^n [V^*(X, r, s)^n - V(X, r, s)^n]. \quad (3.119)$$

Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned}
& E^*[(V^*(X, r, s)^n - V(X, r, s)^n)^q (\rho^{*2}(r, s)^n - \rho^{*2}(r, s))] \\
&= E^*[(V^*(X, r, s)^n - V(X, r, s)^n)^q (V^*(X, 2r, 2s)^n - V(X, 2r, 2s)^n)] \\
&\quad - E^*[(V^*(X, r, s)^n - V(X, r, s)^n)^{2+q}] \\
&\quad - 2V(X, r, s)^n E^*[(V^*(X, r, s)^n - V(X, r, s)^n)^{1+q}] \\
&= I_1^q - I_2^q - I_3^q.
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Lemma 3.5.6 Für den wild Bootstrap erhalten wir die folgenden Resultate.

$$(a) \quad E^{WB}(S_n^{WB}) = 0 \tag{3.121}$$

$$(b) \quad E^{WB}(S_n^{2WB}) = 1 \tag{3.122}$$

$$(c) \quad E^{WB}(S_n^{3WB}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{V(X, 3r, 3s)^n}{(V(X, 2r, 2s)^n)^{\frac{3}{2}}} \frac{\mu_6^{WB} - 3\mu_4^{WB}\mu_2^{WB} + 2(\mu_2^{WB})^3}{(\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.123}$$

$$(d) \quad E^{WB}(S_n^{WB}U_n^{WB}) = n^{\frac{3r+3s}{2}-1} (\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2) * \frac{\frac{\mu_6^{WB}}{\mu_4^{WB}} \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta_i^n X|^{3r} |\Delta_{i+1}^n X|^{3s} - \mu_2^{WB} \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta_i^n X|^{3r} |\Delta_{i+1}^n X|^{3s}}{\rho_{WB}^3(r, s)} \tag{3.124}$$

$$(e) \quad E^{WB} \left(\frac{S_n^{2WB}U_n^{WB}}{\sqrt{n}} \right) = O_P \left(\frac{1}{n} \right) \tag{3.125}$$

$$(f) \quad E^{WB} \left(\frac{S_n^{3WB}U_n^{WB}}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{3(\mu_6^{WB} - \mu_4^{WB}\mu_2^{WB})}{\mu_4^{WB}(\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{V(X, 3r, 3s)^n}{(V(X, 2r, 2s)^n)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.126}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
b) \quad & E^{WB}(S_n^{2WB}) \\
&= nE^{WB} \left(\frac{(V^{WB}(X, r, s)^n)^2 - 2\mu_2^{WB}V(X, r, s)^nV^{WB}(X, r, s)^n + (\mu_2^{WB})^2(V(X, r, s)^n)^2}{\rho_{WB}^2(r, s)} \right) \\
&= nE^{WB} \left(\frac{n^{r+s-2}(\sum_{i=1}^n \eta_i^2 |\Delta_i^n X|^r |\Delta_{i+1}^n X|^s)^2 - (\mu_2^{WB})^2(V(X, r, s)^n)^2}{\rho_{WB}^2(r, s)} \right) \\
&= n \left(\frac{n^{r+s-2} \mu_4^{WB} \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n X|^{2r} |\Delta_{i+1}^n X|^{2s} - n^{r+s-2} (\mu_2^{WB})^2 \sum_{i=1}^n |\Delta_i^n X|^{2r} |\Delta_{i+1}^n X|^{2s}}{\rho_{WB}^2(r, s)} \right) \\
&= \frac{(\mu_4^{WB} - (\mu_2^{WB})^2)V(X, 2r, 2s)^n}{\rho_{WB}^2(r, s)} = 1 \tag{3.127}
\end{aligned}$$

□

Kapitel 4

Testen auf Sprünge - Ein wild Bootstrap Ansatz

In diesem Kapitel stellen wir eine neue Klasse von Teststatistiken vor, mit der untersucht werden kann, ob ein an diskreten Zeitpunkten beobachteter zufälliger Prozess Sprünge beinhaltet oder nicht. Dabei wird die Idee des wild Bootstraps aus dem letzten Kapitel, gemeinsam mit abgeschnittenen Power Variationsstatistiken, benutzt. Unser Test ist sowohl in Semimartingal Modellen als auch bei Semimartingal Modellen mit Rauschen einsetzbar. Die Teststatistik konvergiert stochastisch gegen unendlich, wenn Sprünge vorliegen und sonst schwach gegen eine Standardnormalverteilung.

Wir präsentieren weiterhin Simulationsergebnisse für endliche Stichproben unter verschiedenen Modellen. Dort zeigt sich, dass der Test eine größere Power hat als die Tests von Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) und Aït-Sahalia und Jacod (2008)

4.1 Einleitung

Die Fragestellung, zu entscheiden ob ein zeitstetiger Prozess, der zum Beispiel Wertpapierverläufe modelliert, Sprünge beinhaltet oder nicht, ist ein wichtiges Problem in der modernen Finanzmathematik. Durch die breite Erhältlichkeit von Hochfrequenzdaten ergeben sich neue Ansatzmöglichkeiten für Tests, die dieses Problem behandeln.

Ist der Kursverlauf eines Wertpapiers beeinflusst durch wichtige Ereignisse, wie zum Beispiel Notenbankentscheidungen, äußert sich dies meistens durch heftige Kursbewegungen. Diese großen Sprünge lassen sich durch einen einfachen Blick auf den Kursverlauf erkennen. Die Situation wird schwieriger, wenn entschieden werden soll, ob kleine oder mittlere Sprünge aufgetreten sind. Hier ist ein schneller Blick auf die Daten meistens nicht ausreichend.

Modelle mit und ohne Sprünge haben durchaus verschiedene mathematische Eigenschaften und somit auch verschiedene Konsequenzen für die Finanzwelt. Wegen der Vielzahl und Wichtigkeit

der praktischen Anwendung dieser Modelle sollte Sicherheit vorliegen, ob das angenommene Modell Sprünge aufweist oder nicht. Insbesondere für das Risikomanagement, das Preisen von Optionen oder das Hedgen ist es wichtig verlässliche Methoden für das Testen auf Sprünge zu haben (siehe, z.B., Merton (1976), Bakshi, Cao und Chen (1997, 2000) oder Duffie, Pan und Singleton (2000)).

Es gibt bereits einige Arbeiten, die sich mit dem Testen auf Sprünge beschäftigen. Barndorff-Nielsen und Shephard (2004a, 2006) benutzten Bipower Variation um eine Teststatistik zu entwickeln, die Sprünge erkennt. Aït-Sahalia und Jacod (2008) konstruierten einen Test, der darauf beruht Power Variationsstatistiken mit unterschiedlichen Stichprobenfrequenzen zu vergleichen. Sie bewiesen Zentrale Grenzwertsätze unter beiden Alternativen, Sprünge und keine Sprünge. Lee und Mykland (2007) verglichen inner-Tag Erträge mit einer konsistenten Schätzung der lokalen Volatilität um einen nichtparametrischen Test zu erhalten. Weitere Tests finden sich unter anderem bei Aït-Sahalia (2002), Carr und Wu (2003), Fan und Wang (2007) oder Ji-ang und Oomen (2005).

In diesem Kapitel stellen wir einen neuen Test vor, der die Ideen des wild Bootstraps (siehe Abschnitt 3.2 oder Wu (1986)) und der abgeschnittenen Power Variationsstatistiken benutzt. Letztere sind ursprünglich von Mancini (2001, 2004) eingeführt worden. Unsere Teststatistik konvergiert stochastisch gegen unendlich, wenn Sprünge auftreten und sonst schwach gegen eine Standardnormalverteilung. Weiterhin ist der Test, mit kleinen Modifikationen, auch in Modellen mit Rauschen, welche aktuell intensiv in der ökonometrischen Literatur behandelt werden (siehe, z.B., Zhang, Mykland und Aït-Sahalia (2005) oder Hansen und Lunde (2006)), einsetzbar.

Die neue Methode hat zwei große Vorteile. Zum Einen ist sie für alle Itô Semimartingale anwendbar und benötigt keine weiteren Annahmen bezüglich des Volatilitätsprozesses. Zum Anderen ist die Power des neuen Tests viel höher im Vergleich zu den Tests von Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) und Aït-Sahalia und Jacod (2008). Dabei ist die Approximation des Levels nicht schlechter als bei diesen Verfahren.

4.2 Betrachtetes Modell und das statistische Problem

Wir betrachten ein Semimartingal $(X_t)_{t \geq 0}$ der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + (x1_{|x| \leq 1}) * (\mu - \nu) + (x1_{|x| > 1}) * \mu, \quad (4.1)$$

definiert auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$. Dabei ist W eine eindimensionale Brownsche Bewegung, a eine lokal beschränkte, adaptierte und vorhersagbare Driftfunktion, σ ein adaptierter Volatilitätsprozess, der càdlàg ist, μ ein Sprungmaß und ν sein vorhersagbarer Kompensator. Weiterhin machen wir eine Annahmen bezüglich des Kompensators ν .

Annahme 4.2.1 Wir sagen der Kompensator ν erfüllt die Annahme **(H)**, wenn folgendes gilt. ν ist von der Form

$$\nu(dt, dx) = dt F_t(dx)$$

und $\int(1 \wedge x^2)dF_t(x)$ ist dabei ein lokal beschränkter und vorhersagbarer Prozess.

Wir beobachten den Prozess X über ein gegebenes Intervall $[0, t]$ zu äquidistanten Zeitpunkten $t_i = \frac{i}{n}$, $i = 1, \dots, [nt]$. Basierend auf den diskreten Beobachtungen $(X_{\frac{i}{n}}(\omega))_{0 \leq i \leq [nt]}$ wollen wir entscheiden, ob der unbeobachtete Pfad $(X_s(\omega))_{s \in [0, t]}$ stetig ist oder nicht. Wie bereits in Aït-Sahalia und Jacod (2008) ausgeführt wurde, können wir nur statistische Entscheidungen über den speziellen (unbeobachteten) Pfad $(X_s(\omega))_{s \in [0, t]}$ treffen. Im Fall eines Sprungprozesses mit endlicher Aktivität ist es uns nicht möglich zu entscheiden, ob das Modell des Semimartingals Sprünge erlaubt oder nicht. Dies liegt daran, dass eine positive Wahrscheinlichkeit existiert, dass der Pfad $(X_s(\omega))_{s \in [0, t]}$ keine Sprünge enthält, obwohl das Modell (4.1) dies erlauben würde. Folglich wollen wir entscheiden, zu welcher der folgenden zwei komplementären Mengen der Pfad $(X_s(\omega))_{s \in [0, t]}$ gehört:

$$\begin{cases} \Omega_t^j = \{\omega : s \mapsto X_s(\omega) \text{ ist unstetig auf } [0, t]\} \\ \Omega_t^c = \{\omega : s \mapsto X_s(\omega) \text{ ist stetig auf } [0, t]\}. \end{cases} \quad (4.2)$$

4.3 Testprozedur für Prozesse ohne Rauschen

In diesem Abschnitt führen wir die neue Klasse von Sprungtests für Brownsche Semimartingale ohne Rauschen ein und beweisen einen Zentralen Grenzwertsatz für die Nullhypothese, dass keine Sprünge vorhanden sind.

4.3.1 Abgeschnittene realisierte Power Variation

Um im Folgenden eine neue Klasse von Teststatistiken zu konstruieren, benutzen wir das Konzept der realisierten Power Variation und der abgeschnittenen realisierten Power Variation. Die realisierten Power Variationsstatistiken des Prozesses X , welche eine Teilmenge der realisierten Bipower Variationsstatistiken darstellen, sind gegeben durch

$$V(X, p)_t^n = n^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^p. \quad (4.3)$$

Es ist bekannt (siehe, z.B., Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij und Shephard (2006)), dass

$$V(X, 2)_t^n \xrightarrow{P} [X]_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds + \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta X_s|^2 \quad (4.4)$$

gilt, mit $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$. Andererseits ergibt sich

$$V(X, p)_t^n \xrightarrow{P} \begin{cases} \mu_p \int_0^t |\sigma_s|^p ds & \text{auf } \Omega_t^c, \\ \infty & \text{auf } \Omega_t^j, \end{cases} \quad (4.5)$$

falls $p > 2$ ist.

Die abgeschnittene realisierte Power Variation, ursprünglich eingeführt von Mancini (2001, 2004), ist gegeben durch

$$\bar{V}(X, p)_t^n = n^{\frac{p}{2}-1} \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^p 1_{\{|\Delta_i^n X| \leq cn^{-\varpi}\}}. \quad (4.6)$$

Dabei ist $c > 0$ und $\varpi \in (0, 1/2)$. Die Schranke im Indikator in (4.6) eliminiert die Zuwächse $\Delta_i^n X$, welche einen Sprung beinhalten, während die Zuwächse (asymptotisch) nicht von der Schranke beeinflusst werden, falls kein Sprung in dem Intervall $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ vorhanden ist. Folglich ist $\bar{V}(X, p)_t^n$ robust gegen Sprünge, das heißt

$$\bar{V}(X, p)_t^n \xrightarrow{P} \mu_p \int_0^t |\sigma_s|^p ds \quad (4.7)$$

für jedes $p \geq 2$ (dies ist eine gradlinige Erweiterung von den Resultaten in Jacod (2008) sowie Cont und Mancini (2007)). Zusätzlich erhalten wir, unter weiteren Annahmen an die Aktivität der Sprungkomponente von X (und an den Parameter ϖ), dass die Effizienz von $\bar{V}(X, p)_t^n$ die gleiche ist wie von $V(X, p)_t^n$ (siehe wieder Jacod (2008)).

Die Resultate in (4.4), (4.5) und (4.7) weisen darauf hin, dass die Statistiken $V(X, p)_t^n - \bar{V}(X, p)_t^n$ (oder $\frac{V(X, p)_t^n}{\bar{V}(X, p)_t^n} - 1$) für $p \geq 2$ benutzt werden können, um zu entscheiden, ob der Prozess X Sprünge aufweist oder nicht. Nichtsdestoweniger stellt sich heraus, dass die Entwicklung einer asymptotischen Theorie (auf Ω_t^c) für die obigen Statistiken eine sehr schwierige Aufgabe ist.

4.3.2 Definition der Teststatistiken

Inspiziert durch den wild Bootstrap aus Kapitel 3 führen wir nun externe (d.h. unabhängig von \mathcal{F}) positive u.i.v. Zufallsvariablen $(\eta_i)_{1 \leq i \leq [nt]}$ mit $E[\eta_i] = 1$ und $E[\eta_i^2] < \infty$ ein. Dann definieren wir eine neue Klasse von Teststatistiken durch

$$T(X, p)_t^n = n^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^p \left(1 - \eta_i 1_{\{|\Delta_i^n X| \leq cn^{-\varpi}\}}\right). \quad (4.8)$$

Die Wahl der Verteilung von η beeinflusst entscheidend die Level und Power Ergebnisse der Teststatistik $T(X, p)_t^n$. Wir werden daher im nächsten Abschnitt diskutieren, wie die Verteilung

gewählt werden sollte.

Alle Prozesse definieren wir nun auf einer kanonischen Erweiterung $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, (\mathcal{F}_t^*)_{t \geq 0}, P^*)$ des originalen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, welche auch die Zufallsvariablen $(\eta_i)_{1 \leq i \leq [nt]}$ trägt.

Der nächste Satz sichert die stabile Konvergenz von $T(X, p)_t^n$ auf Ω_t^c und Ω_t^j .

Satz 4.1 *Wir nehmen an, dass Bedingung (H) erfüllt ist und $E[|\eta_i|^{2+\delta}] < \infty$ für ein $\delta > 0$. Für jedes $p \geq 2$ und alle $t > 0$ erhalten wir die folgenden Ergebnisse.*

(i) Auf Ω_t^c gilt

$$T(X, p)_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} \sqrt{\text{Var}[\eta_i] \mu_{2p}} \int_0^t |\sigma_s|^p dW'_s. \quad (4.9)$$

Dabei ist W' eine weitere Brownsche Bewegung, die auf einer Erweiterung $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t \geq 0}, P')$ des Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, (\mathcal{F}_t^*)_{t \geq 0}, P^*)$ definiert und unabhängig von \mathcal{F}^* ist.

(ii) Auf Ω_t^j gilt

$$T(X, p)_t^n \xrightarrow{P^*} \infty. \quad (4.10)$$

Beweis: Siehe Abschnitt 4.8.

Wir möchten darauf hinweisen, dass die Zufallsvariable im Grenzwert in (4.9) gemischt normalverteilt ist mit \mathcal{F} -bedingter Varianz

$$\rho^2(p)_t = \text{Var}[\eta_i] \mu_{2p} \int_0^t |\sigma_s|^{2p} ds. \quad (4.11)$$

Durch Gleichung (4.7) erhalten wir einen gegen Sprünge robusten Schätzer von $\rho^2(p)_t$. Dieser ist gegeben durch

$$\rho^2(p)_t^n = \text{Var}[\eta_i] \bar{V}(X, 2p)_t^n \xrightarrow{P} \rho^2(p)_t. \quad (4.12)$$

Letztendlich definieren wir die standardisierten Statistiken

$$S(p)_t^n = \frac{T(X, p)_t^n}{\rho(p)_t}, \quad \hat{S}(p)_t^n = \frac{T(X, p)_t^n}{\rho(p)_t^n}. \quad (4.13)$$

Mit Hilfe der Eigenschaften der stabilen Konvergenz erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 4.3.1 *Wir nehmen an, dass Bedingung (H) erfüllt ist und $E[|\eta_i|^{2+\delta}] < \infty$ für ein $\delta > 0$. Für jedes $p \geq 2$ und jedes $t > 0$ erhalten wir die folgenden Resultate.*

(i) Auf Ω_t^c gilt

$$S(p)_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} U, \quad \hat{S}(p)_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} U. \quad (4.14)$$

Dabei ist U eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, die auf einer Erweiterung $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t)_{t \geq 0}, P')$ von $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, (\mathcal{F}^*_t)_{t \geq 0}, P^*)$ definiert und unabhängig von \mathcal{F}^* ist.

(ii) Auf Ω_t^j gilt

$$S(p)_t^n \xrightarrow{P^*} \infty, \quad \hat{S}(p)_t^n \xrightarrow{P^*} \infty. \quad (4.15)$$

Indem wir wieder die Eigenschaften der stabilen Konvergenz nutzen und Korollar 4.3.1 anwenden, können wir folgern, dass

$$P^*(\hat{S}(p)_t^n > c_{1-\alpha} | \Omega_t^c) \rightarrow \alpha \quad (4.16)$$

und

$$P^*(\hat{S}(p)_t^n > c_{1-\alpha} | \Omega_t^j) \rightarrow 1 \quad (4.17)$$

gilt. Dabei ist $c_{1-\alpha}$ das $(1 - \alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung.

4.3.3 Die Wahl der Verteilung der externen Zufallsvariablen

Wie bereits in Abschnitt 4.3.1 erwähnt, ist es naheliegend die Statistik $V(X, p)_t^n - \bar{V}(X, p)_t^n$ mit $p \geq 2$ zu verwenden, um zu testen, ob X Sprünge aufweist oder nicht. Da jedoch die asymptotische Verteilung dieser Statistik unter H_0 nicht erhältlich ist, benötigen wir eine kleine kontrollierte Störung der Zuwächse dieser Statistik. Daher empfehlen wir $(\eta_i)_{1 \leq i \leq [nt]}$ aus der Verteilung

$$P^n = \frac{1}{2}(\delta_{1-\tau} + \delta_{1+\tau}) \quad (4.18)$$

zu ziehen. Dabei bezeichnet δ_z das Dirac Maß im Punkt z . Weiterhin raten wir die Konstante τ relativ klein zu wählen, also zum Beispiel $\tau = 0,1$ oder $\tau = 0,05$. Mit dieser Wahl von τ sind die Statistiken $T(X, p)_t^n$ sehr nahe an $\sqrt{n}(V(X, p)_t^n - \bar{V}(X, p)_t^n)$. Diese Eigenschaft sichert die gute Power Performance von unserem Test.

Andererseits zeigt sich die Symmetrie der Verteilung von η_i um 1 verantwortlich für die gute Level Approximation von unserem Test. Dies lässt sich teilweise durch folgendes Lemma begründen.

Lemma 4.3.2 *Wir nehmen an, dass $X_t = \sigma W_t$ gilt. Dann ergibt sich für jedes $p \geq 2$*

$$P^*(\hat{S}(p)_t^n \leq x) = \Phi(x) + O(n^{-1}). \quad (4.19)$$

Dabei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Beweis: Siehe Abschnitt 4.8.

Wir möchten darauf hinweisen, dass in Gleichung (4.19) der Term der Ordnung $n^{-1/2}$ fehlt. Dies bedeutet, gemäß der Betrachtung aus Kapitel 3, eine zweite-Ordnungs Verbesserung.

4.4 Vergleich zu anderen Testprozeduren mit Hilfe von lokalen Alternativen

In diesem Abschnitt diskutieren wir das Verhalten der Statistik $T(X, p)_t^n$ unter lokalen Alternativen und vergleichen es mit dem, der Tests von Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) sowie Ait-Sahalia und Jacod (2008). Aus diesem Grund wiederholen wir kurz die Ideen dieser beiden Verfahren.

Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) benutzten 1,1-Bipower Variation, das heißt

$$V(X, 1, 1)_t^n = \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X| |\Delta_{i+1}^n X|, \quad (4.20)$$

um einen Sprungtest zu konstruieren. Wenn Annahme (H) gilt, ist $V(X, 1, 1)_t^n$ in der Tat robust gegen Sprünge des Prozesses X (siehe, z.B., Ait-Sahalia und Jacod (2008)) und es gilt

$$V(X, 1, 1)_t^n \xrightarrow{P} \mu_1^2 \int_0^t \sigma_s^2 ds. \quad (4.21)$$

Somit schlugen die beiden Autoren vor, die einfache Statistik

$$T^{BS}(X)_t^n = \sqrt{n}(V(X, 2)_t^n - \mu_1^{-2}V(X, 1, 1)_t^n) \quad (4.22)$$

zu benutzen, um zu entscheiden, ob der Prozess X Sprünge hat oder nicht. Mit der zusätzlichen Annahme (V) (siehe Abschnitt 2.2) konnten sie weiterhin einen stabilen Zentralen Grenzwertsatz (auf Ω_t^c) beweisen. Auf Ω_t^c , falls Annahme (V) erfüllt ist, gilt nämlich für jedes $t > 0$

$$\frac{T^{BS}(X)_t^n}{\sqrt{\kappa MPV_{(1,1,1,1),t}^n}} \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} U. \quad (4.23)$$

Dabei ist U definiert wie in Korollar 4.3.1, $\kappa = \frac{\pi^2}{4} + \pi - 5$ und $MPV_{(1,1,1,1),t}^n$ ist gegeben durch

$$MPV_{(1,1,1,1),t}^n = n\mu_1^{-4} \sum_{i=1}^{[nt]-3} |\Delta_i^n X| |\Delta_{i+1}^n X| |\Delta_{i+2}^n X| |\Delta_{i+3}^n X|. \quad (4.24)$$

Auf Ω_t^j konvergiert die Statistik in (4.23) andererseits stochastisch gegen unendlich.

Bemerkung 4.4.1 *Tatsächlich empfohlen Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) die Quotientenstatistik*

$$T^{BS,r}(X)_t^n = \frac{\sqrt{n} \left(1 - \frac{\mu_1^{-2} V(X,1,1)_t^n}{V(X,2)_t^n} \right)}{\sqrt{\kappa \max \left\{ \frac{MPV_{(1,1,1),t}^n}{(\mu_1^{-2} V(X,1,1)_t^n)^2}, \frac{1}{t} \right\}}} \quad (4.25)$$

zu verwenden, um auf Sprünge zu testen. Es zeigt sich nämlich, dass diese Statistik bessere Ergebnisse bei endlichen Stichproben liefert. Unter lokalen Alternativen hat diese Statistik das gleiche Verhalten wie $T^{BS}(X)_t^n$.

Aït-Sahalia und Jacod (2008) verglichen $V(X,p)_t^n$ (mit $p > 3$) bei verschiedenen Stichprobenfrequenzen, um auf Sprünge zu testen. Im Speziellen analysierten sie das Verhalten von der Statistik

$$T^{AJ}(X)_t^n = \sqrt{n} \left(\frac{2V(X,4)_t^{n/2}}{V(X,4)_t^n} - 2 \right). \quad (4.26)$$

Auf Ω_t^c , falls Annahme (V) erfüllt ist, gilt für jedes $t > 0$

$$\frac{T^{AJ}(X)_t^n}{\sqrt{\hat{V}_t^n}} \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} U. \quad (4.27)$$

Dabei ist U definiert wie in Korollar 4.3.1 und \hat{V}_t^n ist gegeben durch

$$\hat{V}_t^n = \kappa' \frac{\bar{V}(X,8)_t^n}{(\bar{V}(X,4)_t^n)^2}, \quad (4.28)$$

mit $\kappa' = \frac{32}{7}$. Auf Ω_t^j bewiesen Aït-Sahalia und Jacod (2008) auch die stabile Konvergenz der Statistik (4.26), wenn 2 als Zentrierung in der Definition von $T^{AJ}(X)_t^n$ durch 1 ersetzt wird.

Nun betrachten wir lokale Alternativen der Form

$$X_t^{(n)} = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \gamma_n J_t. \quad (4.29)$$

Dabei ist J_t ein compound Poisson Prozess und γ_n ist eine Folge mit $\gamma_n \rightarrow 0$. Wir erhalten den folgenden Satz.

Satz 4.2 *Für jedes $t > 0$ gelten die folgenden Resultate.*

- (i) *Es gelten die gleichen Annahmen wie in Satz 4.1. Außerdem sei $\gamma_n = n^{-\frac{p-1}{2p}}$. Falls $\varpi < \frac{p-1}{2p}$ ist, gilt*

$$T(X^{(n)}, p)_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} \sqrt{\text{Var}[\eta_i] \mu_{2p}} \int_0^t |\sigma_s|^p dW_s' + \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta J_s|^p \quad (4.30)$$

für jedes $p \geq 2$ und $t > 0$.

(ii) Es gelte die Annahme (V). Außerdem sei $\gamma_n = n^{-\frac{1}{4}}$. Dann gilt

$$T^{BS}(X^{(n)})_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} U_t^c + \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta J_s|^2. \quad (4.31)$$

Hier ist U_t^c der stabile Grenzwert von $T^{BS}(X^{(n)})_t^n$, wenn $J = 0$ ist und gegeben durch

$$U_t^c = \sqrt{\kappa \int_0^t \sigma_s^4 ds} U. \quad (4.32)$$

Dabei ist U wie in Korollar 4.3.1 definiert (siehe Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) für mehr Details und den Beweis im stetigen Fall [d.h. wenn $J = 0$ ist]).

(iii) Es gelte die Annahme (V). Außerdem sei $\gamma_n = n^{-\frac{3}{8}}$. Dann gilt

$$T^{AJ}(X^{(n)})_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} U_t'^c + \frac{2 \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta J_s|^4}{3 \int_0^t \sigma_s^4 ds}. \quad (4.33)$$

Hier ist $U_t'^c$ der stabile Grenzwert von $T^{AJ}(X^{(n)})_t^n$, wenn $J = 0$ ist und gegeben durch

$$U_t'^c = \frac{\sqrt{\kappa' \mu_8 \int_0^t \sigma_s^8 ds}}{\mu_4 \int_0^t \sigma_s^4 ds} U. \quad (4.34)$$

U ist dabei wie in Korollar 4.3.1 definiert (siehe Ait-Sahalia und Jacod (2008) für den Beweis im stetigen Fall).

Beweis: Siehe Abschnitt 4.8.

Wir möchten darauf hinweisen, dass sich die Rate, mit der unsere Klasse von Teststatistiken die lokalen Alternativen aufdeckt, zwischen $\gamma_n = n^{-1/4}$ (für $p = 2$) und $\gamma_n = n^{-1/2}$ (für $p \rightarrow \infty$) schwankt. In diesem Sinne hat $T(X^{(n)}, p)_t^n$ eine bessere Performance als $T^{BS}(X^{(n)})_t^n$ für $p > 2$, während für $p > 4$ $T(X^{(n)}, p)_t^n$ auch eine bessere Performance als $T^{AJ}(X^{(n)})_t^n$ liefert.

Neben diesem asymptotischen Argument gibt es einen weiteren Grund für die bessere Power unserer Teststatistik $T(X, p)_t^n$ (siehe die folgenden Simulationsergebnisse). Bei moderaten Stichprobengrößen hängt die Power des Tests stark von der Robustheit der Statistik $\bar{V}(X, p)_t^n$ ab, welche implizit benutzt wird, um $T(X, p)_t^n$ zu konstruieren. Sobald die Schranke in der Definition von $\bar{V}(X, p)_t^n$ einen Sprung aufdeckt, wird dieser durch die Indikatorfunktion sofort eliminiert. Die Teststatistiken von Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) und Ait-Sahalia und Jacod (2008) haben diese Eigenschaft nicht.

4.5 Testprozedur für Prozesse mit Rauschen

In diesem Abschnitt präsentieren wir eine Erweiterung unserer Theorie für Semimartingale mit Rauschen. Dazu nehmen wir als erstes an, dass das Semimartingal X aus (4.1) auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^0, \mathcal{F}^0, (\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}, P^0)$ definiert ist. Jedoch beobachten wir nicht direkt den Prozess X , sondern einen Prozess Z , der durch Rauschen gestört ist. Beim Modellieren des Rauschens folgen wir Jacod, Li, Mykland, Podolskij und Vetter (2007). Wir nehmen an, dass wir den Prozess Z zu Zeitpunkten $\frac{i}{n}, i = 0, 1, \dots, [nt]$ beobachten und dieser durch

$$Z_t = X_t + \epsilon_t \quad (4.35)$$

gegeben ist. Dabei sind die ϵ_t die Fehlerterme, die, bedingt auf X , zentriert und unabhängig sind.

Formal können wir dies wie folgt konstruieren. Für jedes $t \geq 0$ betrachten wir die Übergangswahrscheinlichkeit $Q_t(\omega^0, dz)$ von $(\Omega^0, \mathcal{F}_t^0)$ nach \mathbb{R} . Wir statten den Raum $\Omega^1 = \mathbb{R}^{[0, \infty)}$ mit der Produkt (Borel) σ -Algebra \mathcal{F}^1 aus. $(\epsilon_t)_{t \geq 0}$ betrachten wir dabei als den kanonischen Prozess auf diesem Raum. Das Wahrscheinlichkeitsmaß $Q(\omega^0, d\omega^1)$ ist durch das Produkt $\otimes_{t \geq 0} Q_t(\omega^0, \cdot)$ gegeben. Der filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, auf dem der Prozess Z lebt, ist dann definiert als

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Omega^0 \times \Omega^1, & \mathcal{F} &= \mathcal{F}^0 \times \mathcal{F}^1, & \mathcal{F}_t &= \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s^0 \times \mathcal{F}_s^1, \\ P(d\omega^0, d\omega^1) &= P^0(d\omega^0)Q(\omega^0, d\omega^1). \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Zusätzlich nehmen wir an, dass

$$\int z Q_t(\omega^0, dz) = X_t(\omega^0) \quad (4.37)$$

gilt und

$$\alpha_t^2(\omega^0) = E[Z_t^2 | \mathcal{F}^0](\omega^0) - X_t^2(\omega^0) \quad (4.38)$$

càdlàg ist. Letztendlich definieren wir den Prozess

$$N_t(q) = \int |z|^q Q_t(\omega^0, dz). \quad (4.39)$$

Bemerkung 4.5.1 *Typische Beispiele eines Prozesses Z , der die obige Konstruktion und Bedingungen (4.37) und (4.38) erfüllt, sind die folgenden zwei.*

(i) *(Additiver u.i.v. Prozess) Sei*

$$Z_{\frac{i}{n}} = X_{\frac{i}{n}} + \epsilon_{\frac{i}{n}}, \quad (4.40)$$

wobei $(\epsilon_{\frac{i}{n}})_i$ ein u.i.v. Prozess mit Erwartungswert 0 und Varianz α^2 ist, dann sind Bedingungen (4.37) und (4.38) natürlich erfüllt.

(ii) (Additiver u.i.v. Prozess mit Rundung) Wir betrachten den Prozess

$$Z_{\frac{i}{n}} = \gamma \left[\frac{X_{\frac{i}{n}} + \epsilon_{\frac{i}{n}}}{\gamma} \right]. \quad (4.41)$$

Hier ist $\gamma > 0$, $(\epsilon_{\frac{i}{n}})_i$ ist definiert wie in (i) und dabei gleichverteilt $U([0, \gamma])$. Dann ist

$$\alpha_t^2 = \gamma^2 \left(\left\{ \frac{X_t}{\gamma} \right\} - \left\{ \frac{X_t}{\gamma} \right\}^2 \right) \quad (4.42)$$

und Bedingungen (4.37) und (4.38) sind erfüllt, wobei $\{x\}$ den gebrochenen Teil von x bezeichnet.

Da der zu untersuchende Prozess X durch Rauschen verunreinigt ist, müssen wir die Daten für eine Untersuchung vorbehandeln. Zu diesem Zweck folgen wir dem Vorgehen von Jacod, Li, Mykland, Podolskij und Vetter (2007) sowie Podolskij und Vetter (2008).

Zuerst wählen wir eine Folge k_n von natürlichen Zahlen und eine Zahl $\theta \in (0, \infty)$ so, dass

$$k_n n^{-1/2} = \theta + o(n^{-1/4}) \quad (4.43)$$

gilt. Weiterhin wählen wir eine reellwertige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die nicht 0 ist und die folgenden Bedingungen erfüllt

- (i) g verschwindet außerhalb $(0, 1)$
- (ii) g ist stetig und stückweise C^1
- (iii) Die Ableitung g' ist stückweise Lipschitz.

Wir ordnen g die folgenden Größen zu

$$\psi_1 = \int_0^1 (g'(u))^2 du, \quad \psi_2 = \int_0^1 (g(u))^2 du. \quad (4.44)$$

Zusätzlich definieren wir die Größe

$$\bar{Z}_i^n = \sum_{j=1}^{k_n-1} g\left(\frac{j}{k_n}\right) \Delta_{i+j}^n Z. \quad (4.45)$$

Nun wählen wir die Konstanten $c > 0$ und $\varpi \in (0, 1/4)$. Letztendlich führen wir externe, das bedeutet unabhängig von \mathcal{F} , positive u.i.v. Zufallsvariablen $(\eta_i)_{0 \leq i \leq [nt]}$ ein. Für diese externen Zufallsvariablen soll außerdem $E[\eta_i] = 1$ und $E[\eta_i^2] < \infty$ gelten.

Mit dieser Vorbereitung können wir eine neue Klasse von Teststatistiken im Modell mit Rauschen konstruieren. Wir definieren

$$T^{Rauschen}(Z, p)_t^n = n^{(p-2)/4} \sum_{i=0}^{[nt]-k_n+1} |\bar{Z}_i^n|^p \left(1 - \eta_i 1_{\{|\bar{Z}_i^n| \leq cn^{-\varpi}\}} \right), \quad p \geq 2. \quad (4.46)$$

Offensichtlich hat $T^{\text{Rauschen}}(X, p)_t^n$ die gleiche Struktur wie $T(X, p)_t^n$.

Alle Prozesse sind auf einer kanonischen Erweiterung $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, (\mathcal{F}_t^*)_{t \geq 0}, P^*)$ des originalen Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ definiert, welche ebenso die externen Zufallsvariablen $(\eta_i)_{0 \leq i \leq [nt]}$ trägt.

Bemerkung 4.5.2 Falls V ein stetiges Semimartingal ist oder ein Prozess mit Rauschen, wie wir ihn oben konstruiert haben, gilt (siehe, z.B., Jacod, Li, Mykland, Podolskij und Vetter (2007) für mehr Details)

$$\bar{V}_i^n = O_p(n^{-1/4}). \quad (4.47)$$

Dies erklärt die Bedingung an ϖ , also $\varpi \in (0, 1/4)$.

Um die theoretischen Resultate formulieren zu können, müssen wir die folgenden Mengen einführen

$$\Omega_t^c = \Omega_t^{0,c} \times \Omega^1 \quad \text{und} \quad \Omega_t^j = \Omega_t^{0,j} \times \Omega^1 \quad (4.48)$$

mit

$$\Omega_t^{0,c} = \{\omega^0 \mid s \mapsto X_s(\omega^0) \text{ ist stetig auf } [0, t]\}, \quad (4.49)$$

$$\Omega_t^{0,j} = \{\omega^0 \mid s \mapsto X_s(\omega^0) \text{ ist unstetig auf } [0, t]\}. \quad (4.50)$$

Nun können wir den Schätzer

$$\Gamma(p)_t^n = \text{Var}[\eta_i] n^{(p-2)/2} \sum_{i=0}^{[nt]-k_n+1} |\bar{Z}_i^n|^{2p} 1_{\{|\bar{Z}_i^n| \leq cn^{-\varpi}\}} \quad (4.51)$$

definieren und setzen

$$S^{\text{Rauschen}}(p)_t^n = \frac{T^{\text{Rauschen}}(Z, p)_t^n}{\sqrt{\Gamma(p)_t^n}}. \quad (4.52)$$

Das Hauptresultat in diesem Abschnitt ist der folgende Satz.

Satz 4.3 Wir nehmen an, dass die Bedingung (H) erfüllt ist und $E[|\eta_i|^{2+\delta}] < \infty$ für ein $\delta > 0$. Weiterhin setzen wir voraus, dass der Prozess $N_t(q)$, der in (4.39) definiert ist, lokal beschränkt ist für ein $q > \frac{2p}{1-4\varpi}$. Dann erhalten wir für jedes $p \geq 2$ und jedes $t > 0$ die folgenden Resultate.

(i) Auf Ω_t^c gilt

$$S^{\text{Rauschen}}(p)_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} U. \quad (4.53)$$

Hier ist U eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, die auf einer Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, (\mathcal{F}_t^*)_{t \geq 0}, P^*)$ definiert und unabhängig von \mathcal{F}^* ist.

(ii) Auf Ω_t^j gilt

$$S^{\text{Rauschen}}(p)_t^n \xrightarrow{P^*} \infty. \quad (4.54)$$

Beweis: Siehe Abschnitt 4.8.

Aus Satz 4.3 können wir

$$P^*(S^{\text{Rauschen}}(p)_t^n > c_{1-\alpha} | \Omega_t^c) \rightarrow \alpha \quad (4.55)$$

und

$$P^*(S^{\text{Rauschen}}(p)_t^n > c_{1-\alpha} | \Omega_t^j) \rightarrow 1 \quad (4.56)$$

folgern. Dabei ist $c_{1-\alpha}$ das $(1 - \alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung.

Bemerkung 4.5.3 *Wie in Abschnitt 4.3.3 beschrieben, raten wir die externen Zufallsvariablen $(\eta_i)_{1 \leq i \leq [nt]}$ gemäß der Verteilung*

$$P^n = \frac{1}{2}(\delta_{1-\tau} + \delta_{1+\tau}) \quad (4.57)$$

zu generieren. Dabei sollte τ wieder relativ klein (d.h. $\tau = 0,1$ oder $\tau = 0,05$) sein.

4.6 Die Wahl der Schranke

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Wahl Schranke. Sie hat großen Einfluss auf die Ergebnisse bei endlichen Stichproben. Von daher ist es sehr wichtig die Konstanten c und ϖ vernünftig zu wählen.

Modell ohne Rauschen

Obwohl die asymptotischen Ergebnisse für alle $c > 0$ und $\varpi \in (0, 1/2)$ gültig sind, ist es sehr wichtig für die Performance bei endlichen Stichproben, dass beide Werte angemessen gewählt werden. Es muss, bei endlicher Stichprobengröße, ein Mittelweg bei der Schranke gefunden werden, so dass Sprünge eliminiert werden, große inner-Tag Erträge jedoch nicht. Hier stellen wir eine sehr einfache, aber effektive, Wahlmöglichkeit für c und ϖ vor.

In einem ersten Schritt berechnen wir einen robuster Schätzer für die integrierte Volatilität $\int_0^t \sigma_s^2 ds$. Dazu bietet sich $\mu_1^{-2} V(X, 1, 1)_t^n$ an (siehe (4.21)). Dann wählen wir

$$c = 2,3 \sqrt{V(X, 1, 1)_t^n}.$$

Dabei ist $2,3$ ungefähr das 99%-Quantil der Standardnormalverteilung. $\sqrt{V(X, 1, 1)_t^n}$ entspricht dem durchschnittlichen Wert der Volatilität. Deshalb erwarten wir, dass die meisten Zuwächse,

die keinen Sprung enthalten, die Schranke $cn^{-1/2}$ nicht übersteigen.

Die Konstante ϖ kontrolliert offensichtlich die Konvergenzrate der Schranke. Dies bedeutet, je größer ϖ ist, desto schneller konvergiert die Schranke gegen 0. Folglich werden Sprünge schneller eliminiert, wenn ϖ groß gewählt wird. Auf der anderen Seite führen aber zu große Werte für ϖ dazu, dass die Wahrscheinlichkeit wächst, einen Zuwachs ohne Sprung fälschlicherweise zu entfernen. Als Mittelweg zwischen diesen beiden Effekten raten wir $\varpi = 0,4$ zu setzen.

Modell mit Rauschen

Die Wahl der Konstanten im Modell mit Rauschen ist etwas schwieriger. Es besteht eine starke Abhängigkeit zwischen benachbarten \bar{Z}_i^n 's. Folglich besteht eine hohe Wahrscheinlichkeit mehr als einen Summanden zu eliminieren, wenn die Schranke fälschlicherweise einen Zuwachs aus dem stetigen Anteil des Prozesses als Sprung klassifiziert. Aus diesem Grund müssen wir die Schranke sehr sorgfältig wählen.

Wir empfehlen folgendes Vorgehen. Zuerst wählen wir

$$c = 2,3 \sqrt{\mu_1^{-2} BT(1,1)_t^n + \frac{\psi_1}{\theta} NV_t^n}, \quad (4.58)$$

mit

$$BT(1,1)_t^n = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{[nt]-2k_n+1} |\bar{Z}_i^n| |\bar{Z}_{i+k_n}^n| \quad (4.59)$$

und

$$NV_t^n = \frac{V(Z, 2, 0)_t^n}{2n}. \quad (4.60)$$

Die Struktur von c ähnelt der im Fall ohne Rauschen. Mit Hilfe der Resultate von Podolskij und Vetter (2008) erhalten wir

$$\mu_1^{-2} BT(1,1)_t^n + \frac{\psi_1}{\theta} NV_t^n \xrightarrow{P^*} \int_0^t (\theta \psi_2 \sigma_s^2 + \frac{\psi_1}{\theta} \alpha_s^2) ds. \quad (4.61)$$

Andererseits ist die Größe \bar{Z}_i^n asymptotisch $n^{-1/4} N(0, \theta \psi_2 \sigma_{\frac{i}{n}}^2 + \frac{\psi_1}{\theta} \alpha_{\frac{i}{n}}^2)$ verteilt, falls Z auf dem Intervall $[\frac{i}{n}, \frac{i+k_n}{n}]$ nicht springt. Folglich, wenn Z keine Sprünge hat, sollten die meisten \bar{Z}_i^n die Schranke $cn^{-1/4}$ nicht übersteigen. Mit den gleichen Überlegungen wie im Modell ohne Rauschen raten wir $\varpi = 0,17$ zu wählen.

4.7 Ergebnisse bei endlichen Stichproben

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Performance von verschiedenen Teststatistiken bei endlichen Stichproben. Als erstes vergleichen wir unsere Teststatistik $\hat{S}(p)_t^n$ mit $p = 2$ und

$p = 4$ mit den Teststatistiken $T^{BS}(X)_t^n$, $T^{BS,r}(X)_t^n$ von Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) und der Teststatistik $T^{AJ}(X)_t^n$ von Ait-Sahalia und Jacod (2008). Anschließend betrachten wir das Verhalten von unserer Teststatistik $S^{Rauschen}(p)_t^n$ (mit $p = 2$) in Semimartingal Modellen mit Rauschen.

Wir nehmen an, dass alle Prozesse auf dem Intervall $[0, 1]$ leben. Wir betrachten zwei verschiedene stetige Semimartingal Modelle. Das erste Modell ist ein Brownsches Semimartingal mit konstanter Volatilität $\sigma = 2$, d.h.

$$X_t = 2W_t. \quad (4.62)$$

Zusätzlich betrachten wir das 2-Faktor-Modell aus dem letzten Kapitel. Zur Erinnerung, es ist gegeben durch

$$dX_t = \mu dt + \sigma_t dW_t, \quad (4.63)$$

$$\sigma_t = \exp(\beta_0 + \beta_1 \tau_t), \quad (4.64)$$

$$d\tau_t = \alpha \tau_t dt + dB_t \quad (4.65)$$

und

$$\text{corr}(dW_t, dB_t) = \rho. \quad (4.66)$$

Wir haben die Parameter wieder gewählt als $\beta_0 = 0,3125$, $\beta_1 = 0,125$, $\alpha = -0,025$, $\rho = -0,3$ und $\mu = 0$. In diesem Modell variiert der Volatilitätsprozess ungefähr zwischen 1,4 und 2,1. Zusätzlich haben wir die u.i.v. externen Zufallsvariablen $(\eta_i)_{1 \leq i \leq n}$ gemäß der Verteilung (4.18) mit $\tau = 0,05$ generiert.

Wir betrachten drei verschiedene Typen von Sprungmodellen.

- (i) Ein Sprung mit fester Größe
- (ii) Zwei Sprünge mit fester Größe
- (iii) Drei Sprünge mit zufälligen $N(0, a^2)$ -verteilten Größen

Alle Sprungzeiten sind unabhängig und $U([0, 1])$ verteilt. Außerdem haben wir die genauen Sprunggrößen dem jeweiligen Modell angepasst, um sie mit der Größe des Volatilitätsprozesses σ vergleichbar zu machen.

Um die Performance der Teststatistik $S^{Rauschen}(p)_t^n$, welche in (4.52) definiert ist, bei Semimartingalen mit Rauschen zu untersuchen, betrachten wir ein u.i.v. Modell für den Prozess des Rauschens ϵ , welchen wir als unabhängig vom Semimartingal annehmen. Diese Zufallsvariablen $(\epsilon_{\frac{i}{n}})$ generieren wir gemäß einer $N(0, 0,0005^2)$ Verteilung. Zusätzlich wählen wir $g(x) = (\min(x, 1 - x))^+$ und $\theta = 1/3$, wie es in Jacod, Li, Mykland, Podolskij und Vetter (2007) vorgeschlagen wurde.

Wir führen 10000 Simulationsläufe für jedes Modell durch. Die Simulationsergebnisse finden sich in den Tabellen 4.1-4.10.

α	Test	n=100	n=200	n=500	n=1000	n=3000	n=10000
1%	$T^{BS}(X)_t^n$	5,7	3,93	2,77	2,23	2,01	1,5
1%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	2,36	1,9	1,79	1,53	1,57	1,37
1%	$\hat{S}(2)_t^n$	4,68	3,12	2,45	1,78	1,41	1,38
1%	$\hat{S}(4)_t^n$	4,21	2,75	2,16	1,71	1,2	1,26
1%	$T^{AJ}(X)_t^n$	0,35	0,38	0,56	0,71	0,96	0,86
2,5%	$T^{BS}(X)_t^n$	7,78	5,81	4,39	3,75	3,48	2,99
2,5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	4,01	3,42	3,1	2,9	3,02	2,64
2,5%	$\hat{S}(2)_t^n$	5,94	4,37	3,58	3,13	2,53	2,61
2,5%	$\hat{S}(4)_t^n$	5,38	3,93	3,45	2,87	2,46	2,55
2,5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	1,05	1,1	1,35	1,88	2,04	2,06
5%	$T^{BS}(X)_t^n$	11,37	9,05	7,32	6,65	6,42	5,71
5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	7,12	6,4	5,71	5,62	5,77	5,41
5%	$\hat{S}(2)_t^n$	8,65	6,78	5,99	5,41	4,93	5,01
5%	$\hat{S}(4)_t^n$	8,26	6,65	6,06	5,35	4,99	5,21
5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	3,18	3,3	3,69	4,27	4,35	4,37
10%	$T^{BS}(X)_t^n$	17,1	14,41	12,88	11,58	11,51	10,58
10%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	12,86	11,76	11,18	10,54	10,91	10,19
10%	$\hat{S}(2)_t^n$	13,67	11,72	10,65	9,94	10,14	9,74
10%	$\hat{S}(4)_t^n$	14,53	12,18	11,4	10,37	10,14	10,16
10%	$T^{AJ}(X)_t^n$	8,77	8,62	9,36	9,45	9,62	9,19
25%	$T^{BS}(X)_t^n$	30,83	29,12	27,54	25,76	26,21	25,77
25%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	28,55	27,52	26,54	25,21	25,72	25,53
25%	$\hat{S}(2)_t^n$	28,27	26,75	25,89	24,75	25,28	24,51
25%	$\hat{S}(4)_t^n$	30,47	27,85	26,8	25,79	25,39	24,72
25%	$T^{AJ}(X)_t^n$	27,41	25,99	26,38	25,19	24,43	25,09

Tabelle 4.1: Diese Tabelle zeigt simulierte Level Ergebnisse für das Modell mit konstanter Volatilität und ohne Rauschen.

α	Test	n=100	n=200	n=500	n=1000	n=3000	n=10000
1%	$T^{BS}(X)_t^n$	6,66	6,07	9,71	16,1	49,17	97,09
1%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	2,92	3,2	6,53	13,15	46,03	96,78
1%	$\hat{S}(2)_t^n$	8,6	15,24	56,6	95,11	100	100
1%	$\hat{S}(4)_t^n$	8,05	14,8	56,27	95,1	100	100
1%	$T^{AJ}(X)_t^n$	0,42	1,05	5,65	26,49	87,34	99,89
2,5%	$T^{BS}(X)_t^n$	9,5	8,6	13,81	22,17	59,18	98,4
2,5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	4,95	5,55	10,69	19,08	56,68	98,28
2,5%	$\hat{S}(2)_t^n$	9,88	16,37	57,24	95,18	100	100
2,5%	$\hat{S}(4)_t^n$	9,31	15,8	56,82	95,14	100	100
2,5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	1,26	2,46	9,57	34,24	89,91	99,93
5%	$T^{BS}(X)_t^n$	13,3	13,01	19,98	31	69,06	99,23
5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	8,79	9,48	16,89	28,05	67,55	99,19
5%	$\hat{S}(2)_t^n$	12,73	18,76	58,29	95,28	100	100
5%	$\hat{S}(4)_t^n$	12,06	18,37	58,02	95,27	100	100
5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	3,55	5,34	15,14	43,21	92	99,96
10%	$T^{BS}(X)_t^n$	19,61	20,04	29,28	42,71	78,81	99,68
10%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	15,15	16,75	26,61	40,78	77,97	99,68
10%	$\hat{S}(2)_t^n$	17,34	23,05	60,63	95,55	100	100
10%	$\hat{S}(4)_t^n$	18,05	23,74	60,69	95,61	100	100
10%	$T^{AJ}(X)_t^n$	9,44	12,21	24,91	53,62	93,79	99,97
25%	$T^{BS}(X)_t^n$	35,09	36,85	48,41	63,83	91,07	99,94
25%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	32,79	35,03	47,53	63,09	90,91	99,94
25%	$\hat{S}(2)_t^n$	31,18	35,94	66,7	96,28	100	100
25%	$\hat{S}(4)_t^n$	32,7	37,66	68,03	96,4	100	100
25%	$T^{AJ}(X)_t^n$	28,83	32,26	45,21	70,38	96,21	99,99

Tabelle 4.2: Diese Tabelle zeigt simulierte Power Ergebnisse für das Modell mit konstanter Volatilität und ohne Rauschen. Der Prozess enthält einen Sprung der Größe 0, 4.

α	Test	n=100	n=200	n=500	n=1000	n=3000	n=10000
1%	$T^{BS}(X)_t^n$	5,88	5,4	7,1	12,44	41,24	95,65
1%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	2,46	2,81	4,68	9,59	38,36	95,27
1%	$\hat{S}(2)_t^n$	6,09	7,44	24,18	68,5	99,95	99,99
1%	$\hat{S}(4)_t^n$	5,61	7,01	23,81	68,31	99,95	99,99
1%	$T^{AJ}(X)_t^n$	0,29	0,58	1,49	7,11	73,07	99,86
2,5%	$T^{BS}(X)_t^n$	8,39	7,76	10,4	17,39	50,8	97,41
2,5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	4,27	4,88	7,81	14,88	48,28	97,23
2,5%	$\hat{S}(2)_t^n$	7,27	8,26	25,1	68,86	99,95	99,99
2,5%	$\hat{S}(4)_t^n$	6,73	8,24	24,73	68,72	99,95	99,99
2,5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	0,95	1,52	2,81	11,2	78,11	99,89
5%	$T^{BS}(X)_t^n$	11,92	11,82	15,77	25,06	61,8	98,77
5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	7,66	8,49	12,96	22,47	60,03	98,73
5%	$\hat{S}(2)_t^n$	9,82	11,02	26,86	69,63	99,95	99,99
5%	$\hat{S}(4)_t^n$	9,26	10,78	26,81	69,57	99,95	99,99
5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	3,31	3,93	6,39	17,69	83,33	99,92
10%	$T^{BS}(X)_t^n$	17,84	18,13	24,24	36,18	73,72	99,62
10%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	13,82	15,13	21,72	34,07	72,73	99,58
10%	$\hat{S}(2)_t^n$	14,96	15,75	30,81	71,1	99,95	99,99
10%	$\hat{S}(4)_t^n$	15,1	16,42	31,19	71,49	99,95	99,99
10%	$T^{AJ}(X)_t^n$	9,21	9,96	13,4	28,47	88,04	99,93
25%	$T^{BS}(X)_t^n$	32,47	34,42	43,16	56,77	88,5	99,92
25%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	30,3	32,59	42,2	56,19	88,3	99,92
25%	$\hat{S}(2)_t^n$	29,55	30,02	42,1	75,83	99,97	99,99
25%	$\hat{S}(4)_t^n$	31,25	31,75	43,46	76,46	99,95	99,99
25%	$T^{AJ}(X)_t^n$	28,32	28,58	34,87	52,16	93,26	99,96

Tabelle 4.3: Diese Tabelle zeigt simulierte Power Ergebnisse für das Modell mit konstanter Volatilität und ohne Rauschen. Der Prozess enthält zwei Sprünge der Größe $+\sqrt{0,08}$ und $-\sqrt{0,08}$.

α	Test	n=100	n=200	n=500	n=1000	n=3000	n=10000
1%	$T^{BS}(X)_t^n$	6,3	6,41	10,09	17,37	37,88	64,97
1%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	2,38	3,85	7,68	15,03	36,2	64,41
1%	$\hat{S}(2)_t^n$	8,14	14,07	33,02	53,5	80,98	94,6
1%	$\hat{S}(4)_t^n$	7,67	13,74	32,84	53,27	80,81	94,64
1%	$T^{AJ}(X)_t^n$	0,4	0,98	5,12	15,85	50,49	83,57
2,5%	$T^{BS}(X)_t^n$	8,66	8,97	13,7	21,89	42,76	68,98
2,5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	4,5	5,83	11,07	19,53	41,48	68,36
2,5%	$\hat{S}(2)_t^n$	9,44	15,24	33,94	54,09	81,44	94,68
2,5%	$\hat{S}(4)_t^n$	8,79	14,82	33,68	53,8	81,02	94,69
2,5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	1,38	2,22	7,97	19,56	54,19	85,05
5%	$T^{BS}(X)_t^n$	12,5	13,37	19,18	28,09	49,22	73,78
5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	8,05	9,64	16,52	25,96	56,4	73,25
5%	$\hat{S}(2)_t^n$	12,36	17,38	35,56	55,11	82,51	94,78
5%	$\hat{S}(4)_t^n$	11,55	17,09	35,49	55,19	81,5	94,75
5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	3,82	5,23	12,27	25,2	58,94	86,79
10%	$T^{BS}(X)_t^n$	18,96	19,66	26,95	36,85	57,11	78,82
10%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	14,35	16,51	24,77	35,07	71,1	78,51
10%	$\hat{S}(2)_t^n$	17,05	21,85	38,95	57,5	82,57	94,99
10%	$\hat{S}(4)_t^n$	17,6	22,31	39,18	57,79	82,46	95
10%	$T^{AJ}(X)_t^n$	9,88	11,63	19,96	33,42	64,62	88,78
25%	$T^{BS}(X)_t^n$	33,52	36,3	44,11	54,04	71,47	86,84
25%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	30,95	34,58	43,18	53,41	80,82	86,77
25%	$\hat{S}(2)_t^n$	31,23	34,47	49	65,02	85,57	95,73
25%	$\hat{S}(4)_t^n$	33,53	36,51	49,82	65,22	85,56	95,74
25%	$T^{AJ}(X)_t^n$	29,8	31,23	39,14	51,47	75,1	92,24

Tabelle 4.4: Diese Tabelle zeigt simulierte Power Ergebnisse für das Modell mit konstanter Volatilität und ohne Rauschen. Der Prozess enthält drei Sprünge, die $N(0, \frac{0,16}{3})$ verteilt sind.

α	Test	n=100	n=200	n=500	n=1000	n=3000	n=10000
1%	$T^{BS}(X)_t^n$	5,56	4	2,69	2,07	1,85	1,35
1%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	2,29	1,9	1,65	1,37	1,5	1,1
1%	$\hat{S}(2)_t^n$	5,08	3,79	2,71	1,97	1,68	1,25
1%	$\hat{S}(4)_t^n$	4,4	3,51	2,32	1,68	1,37	1,37
1%	$T^{AJ}(X)_t^n$	0,37	0,41	0,47	0,6	0,7	1,13
2,5%	$T^{BS}(X)_t^n$	7,6	5,9	4,49	3,67	3,25	2,67
2,5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	3,93	3,49	3,12	2,85	2,9	2,44
2,5%	$\hat{S}(2)_t^n$	6,63	4,91	3,91	3,14	2,78	2,4
2,5%	$\hat{S}(4)_t^n$	5,69	4,57	3,73	3,06	2,5	2,54
2,5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	1,1	1,17	1,27	1,53	1,6	2,29
5%	$T^{BS}(X)_t^n$	10,99	9,17	7,23	6,98	5,95	5,19
5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	6,92	6,28	5,69	5,83	5,45	4,9
5%	$\hat{S}(2)_t^n$	9,24	7,4	6,53	5,21	4,95	4,9
5%	$\hat{S}(4)_t^n$	8,74	7,09	6,27	5,48	4,91	4,86
5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	3,33	3,62	3,6	3,78	3,74	4,6
10%	$T^{BS}(X)_t^n$	16,3	14,83	12,43	11,74	11,46	10,37
10%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	12,55	12,22	10,9	10,92	10,88	10,06
10%	$\hat{S}(2)_t^n$	14,48	12,14	11,39	10,12	9,84	9,92
10%	$\hat{S}(4)_t^n$	15,1	12,56	11,34	10,57	9,74	9,93
10%	$T^{AJ}(X)_t^n$	9,3	9,83	9,1	9,1	8,88	9,55
25%	$T^{BS}(X)_t^n$	30,9	29,29	27,22	26,7	25,95	25,18
25%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	28,57	27,52	26,43	25,99	25,6	25,03
25%	$\hat{S}(2)_t^n$	29,58	26,66	25,62	25,12	24,63	24,91
25%	$\hat{S}(4)_t^n$	31,23	27,9	26,63	25,86	24,82	24,78
25%	$T^{AJ}(X)_t^n$	28,36	28,03	25,62	25,8	25,68	25,1

Tabelle 4.5: Diese Tabelle zeigt simulierte Level Ergebnisse für das 2-Faktor-Modell ohne Rauschen.

α	Test	n=100	n=200	n=500	n=1000	n=3000	n=10000
1%	$T^{BS}(X)_t^n$	6,61	6,11	8,39	14,69	41,41	92,03
1%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	2,62	3,33	6,02	11,85	38,52	91,45
1%	$\hat{S}(2)_t^n$	7,83	13,41	48,41	90,1	100	100
1%	$\hat{S}(4)_t^n$	7,57	13,01	48,12	90,06	100	100
1%	$T^{AJ}(X)_t^n$	0,37	0,82	5,13	21,3	81,54	99,81
2,5%	$T^{BS}(X)_t^n$	8,96	9,07	12,1	20,12	50,89	94,67
2,5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	4,94	5,51	9,52	17,23	48,58	94,39
2,5%	$\hat{S}(2)_t^n$	9,03	14,63	49,02	90,3	100	100
2,5%	$\hat{S}(4)_t^n$	8,52	14,06	48,88	90,12	100	100
2,5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	1,08	1,87	8,13	28,06	84,87	99,85
5%	$T^{BS}(X)_t^n$	12,74	13,09	18	27,98	61,15	96,87
5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	8,25	9,74	15,2	25,66	59,64	96,7
5%	$\hat{S}(2)_t^n$	11,57	16,78	50,4	90,54	100	100
5%	$\hat{S}(4)_t^n$	11,13	16,43	50,32	90,4	100	100
5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	3,6	4,73	13,37	36,82	88,19	99,94
10%	$T^{BS}(X)_t^n$	18,81	19,59	26,66	39,22	72,28	98,31
10%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	14,64	16,72	24,53	37,22	71,38	98,3
10%	$\hat{S}(2)_t^n$	16,68	21,21	52,96	91,04	100	100
10%	$\hat{S}(4)_t^n$	17,15	21,51	53,25	91,04	100	100
10%	$T^{AJ}(X)_t^n$	10,26	10,98	21,59	47,45	91,18	99,96
25%	$T^{BS}(X)_t^n$	33,81	36,09	45,57	59,48	86,85	99,52
25%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	31,83	34,45	44,75	58,78	86,64	99,51
25%	$\hat{S}(2)_t^n$	30,73	34,39	60,66	92,52	100	100
25%	$\hat{S}(4)_t^n$	32,74	35,54	61,54	92,97	100	100
25%	$T^{AJ}(X)_t^n$	30,98	30,83	42,2	65,11	94,66	99,97

Tabelle 4.6: Diese Tabelle zeigt simulierte Power Ergebnisse für das 2-Faktor-Modell ohne Rauschen. Der Prozess enthält einen Sprung der Größe 0,26.

α	Test	n=100	n=200	n=500	n=1000	n=3000	n=10000
1%	$T^{BS}(X)_t^n$	6,15	5,47	6,87	11,14	34,5	89,2
1%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	2,43	2,92	4,76	8,88	31,69	88,55
1%	$\hat{S}(2)_t^n$	6,26	7,9	20,84	57,82	99,84	100
1%	$\hat{S}(4)_t^n$	5,71	7,56	20,61	57,64	99,84	100
1%	$T^{AJ}(X)_t^n$	0,33	0,61	1,54	5,86	61,82	99,61
2,5%	$T^{BS}(X)_t^n$	8,24	7,92	9,71	16,3	43,05	92,79
2,5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	4,55	5,02	7,65	13,6	40,82	92,41
2,5%	$\hat{S}(2)_t^n$	7,36	9,22	21,76	58,37	99,85	100
2,5%	$\hat{S}(4)_t^n$	6,78	8,78	21,46	58,16	99,84	100
2,5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	1,15	1,73	2,91	9,35	68,18	99,71
5%	$T^{BS}(X)_t^n$	11,92	12,03	14,94	22,95	53,41	95,58
5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	7,8	8,57	12,3	20,78	51,75	95,4
5%	$\hat{S}(2)_t^n$	9,93	11,56	23,7	59,37	99,86	100
5%	$\hat{S}(4)_t^n$	9,68	11,35	23,61	59,48	99,84	100
5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	3,47	4,3	6,29	15,39	74,6	99,77
10%	$T^{BS}(X)_t^n$	17,69	18,47	22,87	32,86	65,88	97,94
10%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	13,8	15,33	20,72	30,97	64,92	97,85
10%	$\hat{S}(2)_t^n$	14,82	16,36	27,77	61,83	99,86	100
10%	$\hat{S}(4)_t^n$	15,58	16,35	28,29	62,09	99,85	100
10%	$T^{AJ}(X)_t^n$	9,36	9,94	12,99	25,23	81,16	99,82
25%	$T^{BS}(X)_t^n$	32,7	34,36	41,99	53,68	82,36	99,47
25%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	30,22	32,82	40,82	53,07	82,17	99,46
25%	$\hat{S}(2)_t^n$	29,08	30,26	39,49	68,29	99,87	100
25%	$\hat{S}(4)_t^n$	31,13	31,55	40,54	69,19	99,89	100
25%	$T^{AJ}(X)_t^n$	28,65	29,44	34,3	47,87	89,57	99,93

Tabelle 4.7: Diese Tabelle zeigt simulierte Power Ergebnisse für das 2-Faktor-Modell ohne Rauschen. Der Prozess enthält zwei Sprünge der Größe $+\sqrt{0,26^2/2}$ und $-\sqrt{0,26^2/2}$.

α	Test	n=100	n=200	n=500	n=1000	n=3000	n=10000
1%	$T^{BS}(X)_t^n$	6,55	6,48	9,64	15,27	34,94	60,08
1%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	2,77	3,59	7,39	13,22	33,51	59,24
1%	$\hat{S}(2)_t^n$	8,14	12,98	29,72	50,57	79,03	93,4
1%	$\hat{S}(4)_t^n$	7,52	12,64	29,37	50,33	78,98	93,44
1%	$T^{AJ}(X)_t^n$	0,34	0,89	4,42	13,89	46,56	79,57
2,5%	$T^{BS}(X)_t^n$	8,74	9,02	12,69	19,65	40,27	64,42
2,5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	4,75	5,86	10,37	17,39	38,88	63,89
2,5%	$\hat{S}(2)_t^n$	9,27	14,03	30,54	51,35	79,24	93,52
2,5%	$\hat{S}(4)_t^n$	8,69	13,59	30,32	50,89	79,22	93,54
2,5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	0,97	1,95	6,74	17,59	50,79	81,21
5%	$T^{BS}(X)_t^n$	12,23	13,17	17,59	25,8	46,87	69,41
5%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	8,31	9,86	15,18	23,91	45,94	69,03
5%	$\hat{S}(2)_t^n$	11,37	16,13	32,05	52,72	79,7	93,74
5%	$\hat{S}(4)_t^n$	11,22	16,35	32,06	52,59	79,86	93,68
5%	$T^{AJ}(X)_t^n$	3,38	4,59	10,9	23,02	55,64	83,28
10%	$T^{BS}(X)_t^n$	18,17	19,37	25	34,04	55,03	75,42
10%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	14,03	16,4	22,98	32,49	54,11	75,24
10%	$\hat{S}(2)_t^n$	16,52	20,72	35,85	55,32	80,84	94,12
10%	$\hat{S}(4)_t^n$	16,53	21,41	36,11	55,57	81,05	94,04
10%	$T^{AJ}(X)_t^n$	9,25	11,02	18,47	31,13	61,73	85,6
25%	$T^{BS}(X)_t^n$	32,96	36,06	42,74	52,01	69,74	84,39
25%	$T^{BS,r}(X)_t^n$	30,66	34,4	41,85	51,41	69,53	84,33
25%	$\hat{S}(2)_t^n$	31,03	34,69	45,96	63,07	84,02	95,08
25%	$\hat{S}(4)_t^n$	32,79	35,7	47,36	63,47	84,6	94,98
25%	$T^{AJ}(X)_t^n$	28,92	30,36	38,21	49,43	73,14	90,25

Tabelle 4.8: Diese Tabelle zeigt simulierte Power Ergebnisse für das 2-Faktor-Modell ohne Rauschen. Der Prozess enthält drei Sprünge, die $N(0, \frac{0,26^2}{3})$ verteilt sind.

α	Test	n=100	n=400	n=900	n=1600	n=2500	n=4900	n=10000	n=22500
1%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	1,71	3,74	4,03	3,26	2,8	1,91	1,41	1,18
2,5%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	3,06	4,96	5,13	4,5	3,97	3,06	2,54	2,53
5%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	5,79	7,44	7,7	7,06	6,39	5,59	4,71	4,97
10%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	10,82	12,24	12,69	11,73	11,2	10,87	10,03	10,23
25%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	26,05	27,23	27,48	26,46	25,66	26,13	24,12	25,4
α	Test	n=100	n=400	n=900	n=1600	n=2500	n=4900	n=10000	n=22500
1%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	2,82	10,43	23,42	31,3	39,05	63,27	84,64	97,85
2,5%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	4,23	11,66	24,34	32,18	39,83	64,19	85,33	97,97
5%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	6,94	13,94	26,35	34,13	41,36	65,26	86,16	98,1
10%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	12,01	18,66	30,42	37,75	44,47	67,35	87,04	98,27
25%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	26,85	32,42	42,14	48,05	53,73	72,94	89,58	98,7
α	Test	n=100	n=400	n=900	n=1600	n=2500	n=4900	n=10000	n=22500
1%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	2,14	6,63	11,02	13,09	15,39	26,12	42,73	72,36
2,5%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	3,37	7,68	12,08	14,07	16,68	27,34	44,22	73,28
5%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	5,64	10,19	14,26	16,16	18,87	29,05	46,52	74,58
10%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	10,72	14,59	18,83	20,89	23,14	32,92	49,84	76,58
25%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	26,21	28,88	32,57	34,25	35,93	43,79	58,95	81,13
α	Test	n=100	n=400	n=900	n=1600	n=2500	n=4900	n=10000	n=22500
1%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	2,53	9,89	18,34	22,37	25,88	35,08	42,44	54,36
2,5%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	3,91	11,28	19,34	23,38	26,73	36,07	43,61	55,26
5%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	6,51	13,7	21,49	25,25	28,53	37,68	45,42	56,83
10%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	11,72	18,24	25,96	29	32,64	41,23	48,39	59,28
25%	$S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$	26,78	32,64	38,29	41,17	43,58	51	57,15	66,16

Tabelle 4.9: Diese Tabelle zeigt Level (oberster Bereich) und Power (Bereiche zwei bis vier) Ergebnisse für das Modell mit konstanter Volatilität und Rauschen. Wir haben zuerst einen Sprung der Größe 0,4 hinzugefügt. Danach zwei Sprünge der Größe $+\sqrt{0,08}$ und $-\sqrt{0,08}$, sowie abschließend drei $N(0, \frac{0,16}{3})$ verteilte Sprünge.

α	Test	n=100	n=400	n=900	n=1600	n=2500	n=4900	n=10000	n=22500
1%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	1,98	4,42	4,95	4,35	2,96	2,69	1,69	1,46
2,5%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	3,31	5,66	6,08	5,52	4,1	4,11	2,93	2,68
5%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	6,16	8,1	8,41	7,93	6,59	6,66	5,43	5,16
10%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	10,99	13,11	13,22	12,84	11,3	11,56	10,35	10
25%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	25,62	27,89	27,08	27,3	25,99	26,07	24,68	24,84
α	Test	n=100	n=400	n=900	n=1600	n=2500	n=4900	n=10000	n=22500
1%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	2,6	9,86	20,88	27,14	33,1	53,65	74,48	93,75
2,5%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	3,99	11,07	21,88	28,08	33,96	54,88	75,45	94,02
5%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	6,74	13,33	23,74	29,78	35,63	56,35	76,85	94,48
10%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	11,74	17,66	27,92	33,26	38,91	58,74	78,45	95,12
25%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	26,24	31,76	39,83	44,76	48,91	65,7	82,12	96,07
α	Test	n=100	n=400	n=900	n=1600	n=2500	n=4900	n=10000	n=22500
1%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	2,23	6,41	10,33	11,52	13,61	21,17	35,15	60,13
2,5%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	3,3	7,62	11,53	12,66	14,73	22,46	36,66	61,25
5%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	5,98	10,01	14,12	15,01	16,74	24,6	38,81	62,99
10%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	11,08	14,69	18,62	19,54	20,86	28,51	42,6	65,81
25%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	26,62	29,21	32,25	32,89	34,54	40,58	52,02	71,86
α	Test	n=100	n=400	n=900	n=1600	n=2500	n=4900	n=10000	n=22500
1%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	2,82	8,99	16,54	19,9	22,61	31,73	38,89	50,49
2,5%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	4,16	10,2	17,42	20,92	23,69	32,86	40,02	51,3
5%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	6,51	12,4	19,06	22,8	25,81	34,96	41,95	52,87
10%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	11,91	17,26	23,35	26,89	29,81	38,43	45,05	55,66
25%	$S^{Rauschen}(2)_{t}^n$	26,52	30,46	36,71	38,44	41,41	48,9	54,49	63,25

Tabelle 4.10: Diese Tabelle zeigt Level (oberster Bereich) und Power (Bereiche zwei bis vier) Ergebnisse für das 2-Faktor-Modell mit Rauschen. Wir haben zuerst einen Sprung der Größe 0,26 hinzugefügt. Danach zwei Sprünge der Größe $+\sqrt{0,26^2/2}$ und $-\sqrt{0,26^2/2}$, sowie abschließend drei $N(0, \frac{0,26^2}{3})$ verteilte Sprünge.

4.7.1 Level Ergebnisse

Wir beginnen mit den Semimartingal Modellen ohne Rauschen. Wir vergleichen die Level Ergebnisse für verschiedene Niveaus ($\alpha = 1\%, 2.5\%, 5\%, 10\%, 25\%$) und unterschiedliche Stichprobengrößen ($n = 100, 200, 500, 1000, 3000, 10000$). Die Level Ergebnisse finden sich in Tabelle 4.1 (für das Modell mit konstanter Volatilität) und Tabelle 4.5 (für das 2-Faktor-Modell). Es stellt sich heraus, dass die Teststatistiken $T^{BS}(X)_t^n$, $T^{BS,r}(X)_t^n$ von Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) und unsere Teststatistiken $\hat{S}(2)_t^n$, $\hat{S}(4)_t^n$ das wahre Level ein wenig überschätzen, während es die Methode $T^{AJ}(X)_t^n$ von Ait-Sahalia und Jacod (2008) unterschätzt. Die genaue Performance hängt von der Stichprobengröße ab. Während die Quotientenstatistik $T^{BS,r}(X)_t^n$ von Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) und die Teststatistik $T^{AJ}(X)_t^n$ von Ait-Sahalia und Jacod (2008) bessere Resultate für kleine Datensätze liefern, schneiden unsere Statistiken $\hat{S}(2)_t^n$ und $\hat{S}(4)_t^n$ am besten ab, wenn viele Daten vorhanden sind ($n \geq 1000$). Dabei ist $\hat{S}(4)_t^n$ ein wenig besser als $\hat{S}(2)_t^n$. Wie dem auch sei, alle Methoden liefern gute Level Ergebnisse.

Nun betrachten wir Semimartingale mit Rauschen. Die Ergebnisse für $S^{Rauschen}(2)_t^n$ finden sich in den Tabellen 4.9 und 4.10. Wir können beobachten, dass die asymptotische Theorie erst bei relativ großen Datensätzen ($n \geq 1600$) zum Tragen kommt. Dies ist jedoch nicht überraschend, da der Prozess durch Rauschen gestört ist und wir daher eine langsamere Konvergenzrate erwarten. Es ist jedoch sehr interessant zu sehen, dass die Performance von $S^{Rauschen}(2)_t^n$ für sehr wenig Daten sehr gut ist. Dies kommt daher, dass sich verschiedene Effekte, wie sie bei endlichen Stichproben auftreten, gegenseitig eliminieren. Dies wurde bereits von Podolskij und Vetter (2006) festgestellt.

4.7.2 Power Ergebnisse

Wir beginnen wieder mit den Fällen ohne Rauschen. Der stetige Anteil des Semimartingals wurde gemäß den Modellen (4.62) und (4.63) erzeugt. Folgende Sprungprozesse haben wir hinzugefügt: (i) einen Sprung der Größe 0,4 für (4.62) und 0,26 für (4.63), (ii) zwei Sprünge mit Größen $\sqrt{0,08}$ und $-\sqrt{0,08}$ für (4.62) und $\sqrt{0,26^2/2}$ und $-\sqrt{0,26^2/2}$ für (4.63), (iii) drei Sprünge mit $N(0, \frac{0,16}{3})$ verteilter Größe für (4.62) und mit $N(0, \frac{0,26^2}{3})$ verteilter Größe für (4.63). Alle Sprungzeiten sind unabhängig und $U([0, 1])$ verteilt. Wir möchten darauf hinweisen, dass die quadratische Variation der Sprünge (ungefähr) gleich gehalten worden ist (0,16 für das Modell (4.62) und $0,26^2$ für das Modell (4.63)). Die jeweiligen Power Ergebnisse finden sich in den Tabellen 4.2 - 4.4 und 4.6 - 4.8.

Die Resultate sind sehr gut. Unsere Statistiken $\hat{S}(2)_t^n$ und $\hat{S}(4)_t^n$ liefern die mit Abstand besten Power Ergebnisse bei allen Modellen. Schon bei relativ kleinen Datenanzahlen (d.h. $n = 500, 1000$) findet unser Test Sprünge, wohingegen die Methoden von Barndorff-Nielsen und Shephard (2006) und Ait-Sahalia und Jacod (2008) recht große Datenmengen benötigen (d.h. $n = 3000, 10000$).

Abschließend betrachten wir Semimartingale mit Rauschen. Dabei werden die gleichen Model-

le wie zuvor verwendet. Die Power Ergebnisse der Teststatistik $S^{\text{Rauschen}}(2)_t^n$ finden sich in den Tabellen 4.9 und 4.10.

Wir können feststellen, dass es viel schwieriger ist Sprünge zu finden, wenn die Daten durch Rauschen verunreinigt sind. Dies liegt vor allem an der langsameren Konvergenzrate der Schranke. Folglich bedarf es viel mehr Datenpunkten um Sprünge zu finden. Unser Test liefert gute Resultate für den Fall eines großen Sprungs, wenn die Stichprobe groß ist (d.h. $n = 4900 - 22500$). Falls die Sprünge klein sind, benötigen wir extrem viele Datenpunkte um sie zu finden.

4.8 Beweise

Durch den Einsatz von standard Stopptechniken (siehe, z.B., Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij und Shephard (2006)) können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Prozesse a und σ beschränkt sind. Weiterhin bezeichnen wir alle Konstanten, die in den Beweisen auftreten, mit C oder C_p , wenn sie von einem zusätzlichen Parameter p abhängen.

Im Folgenden werden wir oft die Ungleichung

$$E[|\Delta_i^n X^c|^l] \leq C_l n^{-\frac{l}{2}}, \quad l > 0 \quad (4.67)$$

benutzen. Hier bezeichnet X^c den stetigen Teil von X . Diese Aussage lässt sich von der Burkholder Ungleichung ableiten (siehe Jacod (2008)).

Beweis von Satz 4.1:

(i) Zuerst nehmen wir an, dass der Prozess X keine Sprünge im Intervall $[0, t]$ hat, dass heißt der beobachtete Pfad gehört in die Menge Ω_t^c . Es ist ausreichend zu zeigen, dass

$$S(p)_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} U \quad (4.68)$$

gilt (siehe (4.14) in Korollar 4.3.1). Dann erhalten wir nämlich durch die Eigenschaften der stabilen Konvergenz auch

$$T(X, p)_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} \sqrt{\text{Var}[\eta_i] \mu_{2p}} \int_0^t |\sigma_s|^p dW'_s. \quad (4.69)$$

Mit Hilfe von Ungleichung (4.67) erhalten wir

$$n^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^p \eta_i 1_{\{|\Delta_i^n X| > cn^{-\varpi}\}} \leq C_l n^{\frac{p-1}{2} + l\varpi} \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^{p+l} \eta_i = O_{P^*}(n^{l(\varpi-1/2)+1/2}) \quad (4.70)$$

für jedes $l > 0$. Indem wir $l > \frac{1}{2(\varpi-1/2)}$ wählen, erhalten wir die Approximation

$$T(X, p)_t^n = n^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^p (1 - \eta_i) + o_{P^*}(1) =: \tilde{T}(X, p)_t^n + o_{P^*}(1). \quad (4.71)$$

Aus Satz 3.2 folgern wir, dass

$$P^* \left(\frac{\tilde{T}(X, p)_t^n}{\rho(p)_t} \leq x \mid \mathcal{F} \right) \xrightarrow{P} \Phi(x) \quad (4.72)$$

gilt. Hier ist Φ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen und $\rho(p)_t$ ist in (4.11) definiert. Wir setzen

$$Y_n = \frac{\tilde{T}(X, p)_t^n}{\rho(p)_t} \quad (4.73)$$

und betrachten eine \mathcal{F} -messbare Variable Z . Dann erhalten wir, wenn $n \rightarrow \infty$ läuft

$$E^*[1_{\{Y_n \leq x, Z \leq z\}}] = E^*[1_{\{Z \leq z\}} P^*(Y_n \leq x \mid \mathcal{F})] \longrightarrow \Phi(x) P(Z \leq z) = P'(U \leq x, Z \leq z). \quad (4.74)$$

U ist hier definiert wie in Korollar 4.3.1. Per Definition folgt die Konvergenz

$$S(p)_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} U. \quad (4.75)$$

Dies vervollständigt diesen Beweisschritt.

(ii) Mit den Ergebnissen in Ait-Sahalia und Jacod (2008) erhalten wir unter Annahme (H) für jedes $p \geq 2$

$$\sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^p \left(1 - \eta_i 1_{\{|\Delta_i^n X| \leq cn^{-\varpi}\}} \right) \xrightarrow{P^*} \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta X_s|^p. \quad (4.76)$$

Deshalb gilt auf Ω_t^j

$$T(X, p)_t^n \xrightarrow{P^*} \infty. \quad (4.77)$$

Dies vervollständigt den Beweis von Satz 4.1. \square

Beweis von Lemma 4.3.2:

Nach Voraussetzung gilt $X = \sigma W$ und die Verteilung von η ist durch (4.18) gegeben. Wie im Beweis von Satz 4.1 erhalten wir die Approximation

$$\hat{S}(p)_t^n = \frac{n^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=1}^{[nt]} |\Delta_i^n X|^p (1 - \eta_i)}{\sqrt{\text{Var}[\eta_i] V(X, 2p)_t^n}} + O_{P^*}(n^{-1}) =: \tilde{S}(p)_t^n + O_{P^*}(n^{-1}) \quad (4.78)$$

auf Ω_t^c . Für die Kumulanten von $\tilde{S}(p)_t^n$ folgern wir die folgenden Gleichungen

$$k_1 = \text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} E[\tilde{S}(p)_t^n \mid \mathcal{F}] = 0, \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} k_3 &= \text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(E[(\tilde{S}(p)_t^n)^3 \mid \mathcal{F}] - 3E[(\tilde{S}(p)_t^n)^2 \mid \mathcal{F}] E[(\tilde{S}(p)_t^n) \mid \mathcal{F}] + 2(E[(\tilde{S}(p)_t^n) \mid \mathcal{F}])^3 \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Dabei ergibt sich die zweite Gleichung aus der Tatsache, dass η eine symmetrische Verteilung um 1 hat. Indem wir eine standard Edgeworth expansion (siehe Hall (1992), Seite 48) benutzen, folgern wir

$$P^*\left(\tilde{S}(p)_t^n \leq x \mid \mathcal{F}\right) = \Phi(x) + R_n(x). \quad (4.81)$$

Dabei erfüllt $R_n(x)$ die Gleichung $E[|R_n(x)|] = O(n^{-1})$. Nun nehmen wir den Erwartungswert und erhalten

$$P^*\left(\tilde{S}(p)_t^n \leq x\right) = \Phi(x) + O(n^{-1}). \quad (4.82)$$

Dies vervollständigt den Beweis von Lemma 4.3.2. \square

Beweis von Satz 4.2:

Zuerst führen wir die Zerlegung

$$X_t^{(n)} = X_t^c + X_t^{j,(n)}, \quad (4.83)$$

ein. Dabei ist X_t^c der stetige Teil von $X_t^{(n)}$ und $X_t^{j,(n)} = \gamma_n J_t$.

(i) Wir setzen $\gamma_n = n^{-\frac{p-1}{2p}}$. Dann ergibt sich

$$T(X^{(n)}, p)_t^n = n^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i \in I_t^n} |\Delta_i^n X^{(n)}|^p \left(1 - \eta_i 1_{\{|\Delta_i^n X^{(n)}| \leq cn^{-\varpi}\}}\right) \quad (4.84)$$

$$+ n^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i \in (I_t^n)^c} |\Delta_i^n X^{(n)}|^p \left(1 - \eta_i 1_{\{|\Delta_i^n X^{(n)}| \leq cn^{-\varpi}\}}\right). \quad (4.85)$$

Dabei gilt folgende Notation $I_t^n = \{i \mid \text{der Prozess } J \text{ springt auf } [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]\}$. Dabei können wir feststellen, dass die erste Summe fast sicher endlich ist, da J ein compound Poisson Prozess ist. Aus Satz 4.1 können wir

$$n^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i \in (I_t^n)^c} |\Delta_i^n X^{(n)}|^p \left(1 - \eta_i 1_{\{|\Delta_i^n X^{(n)}| \leq cn^{-\varpi}\}}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} \sqrt{\text{Var}[\eta_i] \mu_{2p}} \int_0^t |\sigma_s|^p dW'_s \quad (4.86)$$

folgern. Außerdem erhalten wir, da $\varpi < \frac{p-1}{2p}$ gilt,

$$n^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i \in I_t^n} |\Delta_i^n X^{(n)}|^p \left(1 - \eta_i 1_{\{|\Delta_i^n X^{(n)}| \leq cn^{-\varpi}\}}\right) \xrightarrow{P^*} \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta J_s|^p. \quad (4.87)$$

Folglich gilt

$$T(X^{(n)}, p)_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} \sqrt{\text{Var}[\eta_i] \mu_{2p}} \int_0^t |\sigma_s|^p dW'_s + \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta J_s|^p \quad (4.88)$$

für jedes $p \geq 2$ und $t > 0$.

(ii) Wir setzen $\gamma_n = n^{-\frac{1}{2}}$ und erhalten mit (4.67)

$$T^{BS}(X)_t^n = \sqrt{n}(V(X^c, 2)_t^n - \mu_1^{-2} V(X^c, 1, 1)_t^n + V(X^{j,(n)}, 2)_t^n) + o_{P^*}(1). \quad (4.89)$$

Wie zuvor erhalten wir

$$T^{BS}(X^{(n)})_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} U_t^c + \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta J_s|^2, \quad (4.90)$$

wobei U_t^c wie in Satz 4.2 definiert ist.

(iii) Wir setzen $\gamma_n = n^{-\frac{3}{8}}$. Da J nur endlich viele Sprünge hat, folgern wir aus (4.67)

$$T^{AJ}(X^{(n)})_t^n = \sqrt{n} \left(\frac{2V(X^c, 4)_t^{n/2}}{V(X^c, 4)_t^n} - 2 \right) + 2\sqrt{n} \frac{V(X^{j,(n)}, 2)_t^{n/2}}{V(X^c, 4)_t^n} + o_{P^*}(1). \quad (4.91)$$

Folglich erhalten wir

$$T^{AJ}(X^{(n)})_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} U_t'^c + \frac{\sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta J_s|^4}{3 \int_0^t \sigma_s^4 ds}, \quad (4.92)$$

wobei $U_t'^c$ wie in Satz 4.2 definiert ist. \square

Beweis von Satz 4.3:

Da der Prozess (α_t^2) , welcher in (4.38) definiert ist, per Annahme càdlàg ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass (α_t^2) beschränkt ist.

Es gilt die Gleichung

$$\bar{Z}_i^n = \sum_{j=1}^{k_n-1} g\left(\frac{j}{k_n}\right) \Delta_{i+j}^n Z = \sum_{j=0}^{k_n-1} \left(g\left(\frac{j}{k_n}\right) - g\left(\frac{j+1}{k_n}\right) \right) Z_{\frac{i+j}{n}}. \quad (4.93)$$

Durch die Burkholder Ungleichung erhalten wir

$$E[|\bar{X}_i^c|^q] \leq Cn^{-q/4} \quad (4.94)$$

für alle $q \geq 0$ und zwar gleichmäßig in i (X^c bezeichnet den stetigen Teil von X). Andererseits können wir die folgende Ungleichung für den Prozess des Rauschen folgern, indem wir die rechte Seite von (4.93) benutzen, falls der Prozess $N_t(2p)$ lokal beschränkt ist

$$E[|\bar{\epsilon}_i^n|^q] \leq Cn^{-q/4}. \quad (4.95)$$

Dies gilt für alle $q < 2p$ und gleichmäßig in i .

(i) Wir nehmen nun an, dass $X(\omega)$ keine Sprünge aufweist, das heißt der Pfad gehört in Ω_t^c . Durch die Ungleichungen (4.94) und (4.95) erhalten wir die Approximationen (siehe den Beweis von Satz 4.1 (i))

$$T^{Rauschen}(Z, p)_t^n = n^{(p-2)/4} \sum_{i=0}^{[nt]-k_n+1} |\bar{Z}_i^n|^p (1 - \eta_i) + o_{P^*}(1) =: \bar{T}^{Rauschen}(Z, p)_t^n + o_{P^*}(1) \quad (4.96)$$

und

$$\Gamma(p)_t^n = \text{Var}[\eta_i] n^{(p-2)/2} \sum_{i=0}^{[nt]-k_n+1} |\bar{Z}_i^n|^{2p} + o_{P^*}(1) =: \bar{\Gamma}(p)_t^n + o_{P^*}(1). \quad (4.97)$$

Weil $\text{Var}\left(\bar{T}^{\text{Rauschen}}(Z, p)_t^n \mid \mathcal{F}\right) = \bar{\Gamma}(p)_t^n$ gilt, folgern wir

$$P^*\left(S^{\text{Rauschen}}(p)_t^n \leq x \mid \mathcal{F}\right) \xrightarrow{P} \Phi(x). \quad (4.98)$$

Hier ist Φ die Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen (dies folgt mit Hilfe der gleichen Methoden, die im Beweis von Satz 3.2 verwendet werden). Die Argumente aus dem Beweis von Satz 4.1 liefern

$$S^{\text{Rauschen}}(p)_t^n \xrightarrow{\mathcal{F}_{st}} U. \quad (4.99)$$

Dabei ist U wie in (4.53) definiert. Dies vervollständigt diesen Beweisschritt.

(ii) Mit den Resultaten aus Podolskij und Vetter (2008) (siehe dort insbesondere den Beweis von Lemma 1) erhalten wir unter Annahme (H) für jedes $p \geq 2$

$$\frac{1}{k_n} \sum_{i=0}^{[nt]-k_n+1} |\bar{Z}_i^n|^p \left(1 - \eta_i 1_{\{|\bar{Z}_i^n| \leq cn^{-\varpi}\}}\right) \xrightarrow{P^*} \int_0^1 |g(u)|^p du \sum_{0 \leq s \leq t} |\Delta X_s|^p \quad (4.100)$$

und

$$\Gamma(p)_t^n \xrightarrow{P^*} \text{Var}[\eta_i] \mu_{2p} \int_0^t \left(\psi_2 \theta \sigma_s^2 + \frac{\psi_1}{\theta} \alpha_s^2\right)^p ds. \quad (4.101)$$

Deshalb haben wir auf Ω_t^j

$$S^{\text{Rauschen}}(p)_t^n \xrightarrow{P^*} \infty. \quad (4.102)$$

Dies vervollständigt den Beweis von Satz 4.3. \square

Kapitel 5

Ein Range-basierter Test auf die parametrische Form der Volatilität

In diesem Kapitel stellen wir einen neuen Test auf die parametrische Form der Volatilität vor. Dabei betrachten wir ein stetiges Diffusionsmodell vom Typ $dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$. Unser Ansatz verwendet Range-basierte Schätzer für die integrierte Volatilität und die integrierte vierte Potenz der Volatilität, welche benutzt werden, um die Teststatistik zu konstruieren. Wir zeigen unter relativ schwachen Annahmen die schwache Konvergenz unserer Teststatistik gegen eine zentrierte Normalverteilung. Als Konsequenz erhalten wir einen Test, der für jede feste Alternative konsistent ist.

Weiterhin präsentieren wir eine parametrische Bootstrap Methode, welche eine verbesserte Approximation der Teststatistik liefert. Abschließend demonstrieren wir mit Hilfe von Monte Carlo Simulationen, dass der Range-basierte Test eine höhere Power hat als der Test, der auf inner-Tag Erträgen beruht, wenn sie auf der selben Stichprobenfrequenz verglichen werden.

5.1 Einleitung

Zeitstetige stochastische Prozesse sind grundlegende Werkzeuge für das theoretische Bewerten von Wertpapieren und Optionen. Ito Diffusionen, die die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad t \in [0, 1] \quad (5.1)$$

lösen, wobei das Intervall $[0, 1]$ typischer Weise einen Handelstag repräsentiert, bilden eine gemeinhin verwendete Klasse von Prozessen, um die Dynamiken von Wertpapierpreisen oder Zinsen zu modellieren. Dabei bezeichnet W eine Brownsche Bewegung, a eine Driftfunktion und σ die Volatilitätsfunktion. Wir nehmen außerdem an, dass der Prozess $X = (X_t)_{t \in [0, 1]}$ an äquidistanten Zeitpunkten $t_i = i/N, i = 0, \dots, N$ beobachtet wird.

In den letzten Jahrzehnten sind eine Vielzahl von unterschiedlichen parametrischen Modellen vorgeschlagen worden, um verschiedene Typen von Optionen zu modellieren (siehe, z.B., Black und Scholes (1973), Vasicek (1977), Cox, Ingersoll und Ross (1985), Karatzas (1988) oder Constantinides (1992) neben vielen anderen). Eine angemessene Modellierung der Volatilitätsfunktion σ in Gleichung (5.1) ist äußerst wichtig für die Optionsbewertung und eine fehlerhafte Spezifikation führt zu erheblichen Fehlern in der Analyse der Daten.

Erstaunlicherweise gibt es nur wenig theoretische Resultate bezüglich der parametrischen Form der Volatilität unter Berücksichtigung von Hochfrequenzdaten (siehe Corradi und White (1999), Dette und von Lieres und Wilkau (2003), Dette, Podolskij und Vetter (2006) sowie Dette und Podolskij (2008)). Im Folgenden präsentieren wir einen konsistenten und Range-basierten Test für die Nullhypothese, dass die wahre Volatilitätsfunktion σ^2 in dem Vektorraum \mathcal{U} liegt, der durch die gegebenen Volatilitätsfunktionen

$$\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2 : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \tag{5.2}$$

aufgespannt wird. Dabei basiert der Test auf Hochfrequenzdaten $X_{i/N}$. Die Kerngröße in unserem Ansatz ist

$$M^2 = \min_{\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}^d} \int_0^1 \left(\sigma^2(s, X_s) - \sum_{j=1}^d \alpha_j \sigma_j^2(s, X_s) \right)^2 ds, \tag{5.3}$$

die den \mathcal{L}^2 -Abstand zwischen σ^2 und \mathcal{U} misst. Wir konstruieren einen Range-basierten Schätzer M_N^2 von M^2 und entwickeln einen Zentralen Grenzwertsatz für eine standardisierte Version von M_N^2 . Die Nullhypothese lehnen wir für große Werte von M_N^2 ab.

Grundlage für unseren Test ist die Idee von Dette, Podolskij und Vetter (2006). Sie schätzten M^2 mit Hilfe von Statistiken, die auf inner-Tag Erträgen beruhen (siehe auch Dette und Podolskij (2008) für einen Ansatz mit empirischen Prozessen). Praktiker benutzen gewöhnlich moderate Frequenzen, zum Beispiel 5- oder 10-Minuten Frequenzen, bei der Verwendung von inner-Tag Erträgen. Dies liegt daran, dass mikrostrukturelles Rauschen den wahren Preisprozess verunreinigt. Hansen und Lunde (2006) zeigten allerdings empirisch, dass mikrostrukturelles Rauschen vernachlässigt werden kann, wenn moderate Frequenzen benutzt werden. Wir empfehlen nun, anstatt 5- oder 10-Minuten Erträge, 5- oder 10-Minuten Ranges zu benutzen, da dieses Vorgehen effizienter ist. Somit erwarten wir, dass unser Test eine größere Power hat, als jener bei Dette, Podolskij und Vetter (2006). Weiterhin konstruieren wir einen Test für Abstandshypothesen, welcher den \mathcal{L}^2 -Abstand zwischen σ^2 und \mathcal{U} statistisch quantifiziert.

5.2 Voraussetzungen und Testprozedur

Zuerst definieren wir einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}, P)$. Wir nehmen in diesem gesamten Kapitel an, dass die stochastische Differentialgleichung (5.1) eine eindeutige starke Lösung $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ mit deterministischem Startwert X_0 besitzt, die zu der

Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}$ adaptiert ist (siehe, z.B., Karatzas und Shreve (1991), Seite 289, für hinreichende Bedingungen für Existenz und Eindeutigkeit einer starken Lösung). In diesem Fall läßt sich X wie folgt repräsentieren

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s, \quad t \in [0, 1]. \quad (5.4)$$

In diesem Kapitel konstruieren wir einen neuen Test für die Hypothese, dass die wahre Volatilitätsfunktion σ^2 , entlang des beobachteten Pfades $(X_t(\omega))_{t \in [0,1]}$, als Linearkombination der Funktionen $\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2$, welche durch die Gleichung (5.2) gegeben sind, repräsentiert werden kann. Dies bedeutet

$$\sigma^2(t, X_t) = \sum_{j=1}^d \alpha_j \sigma_j^2(t, X_t), \quad \forall t \in [0, 1], \quad (5.5)$$

für gewisse $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)^T \in \mathbb{R}^d$.

Bemerkung 5.2.1 *Wenn wir die ideale Situation haben und den Pfad $(X_t)_{t \in [0,1]}$ vollständig beobachten können, sind wir natürlich in der Lage zu entscheiden, ob Gleichung (5.5) wahr ist oder nicht. Allerdings ist es uns im Allgemeinen nicht möglich zu entscheiden, ob die Funktion σ^2 außerhalb der Menge $\{X_t(\omega) \mid t \in [0, 1]\}$ als Linearkombination der Funktionen $\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2$ dargestellt werden kann. Wenn allerdings die Funktionen $\sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2$ nicht von t abhängen und analytisch auf \mathbb{R} sind, ist es ausreichend (5.5) zu verifizieren, um zu schließen, dass die entsprechende Annahme für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, wenn der beobachtete Pfad von X nicht konstant ist.*

Es ist erwähnenswert, dass die Repräsentation (5.5) genau dann gilt, wenn $M^2 = 0$ entlang des beobachteten Pfades $(X_t(\omega))_{t \in [0,1]}$ erfüllt ist. Folglich definieren wir die Nullhypothese und die Alternative als

$$H_0 : \omega \in \Omega_0 = \{\omega \in \Omega \mid M^2(\omega) = 0\} \quad \text{und} \quad H_1 : \omega \in \Omega_1 = \{\omega \in \Omega \mid M^2(\omega) > 0\}. \quad (5.6)$$

Bevor wir fortfahren die Testprozedur zu diskutieren, müssen wir einige Voraussetzungen festlegen, die notwendig sind, um die asymptotischen Resultate dieses Kapitels zu beweisen.

(A1) Die Prozesse $a_t = a(t, X_t)$, $\sigma_t = \sigma(t, X_t)$, $\sigma_{1t} = \sigma_1(t, X_t), \dots, \sigma_{dt} = \sigma_d(t, X_t)$ sind stetig.

(A2) Die Annahme (A1) gilt und $\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_d \in C^{1,2}([0, 1] \times \mathbb{R})$. Das heißt, die Funktionen sind einmal stetig differenzierbar in t und zweimal stetig differenzierbar in x . Zusätzlich dürfen die Prozesse $\sigma_t, \sigma_{1t}, \dots, \sigma_{dt}$ nicht verschwinden.

(A3) Die Funktionen $\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2$ sind linear unabhängig auf $[0, 1] \times [a, b]$ für alle $a < b$.

Als nächstes formulieren wir eine äquivalente Darstellung der Größe M^2 , wie sie in (5.3) gegeben ist. Aus diesem Grund definieren wir das innere Produkt für quadratisch integrierbare Funktionen $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$[f, g] = \int_0^1 f(s, X_s)g(s, X_s)ds. \quad (5.7)$$

Wir möchten darauf hinweisen, dass M^2 der von $[\cdot, \cdot]$ induzierte \mathcal{L}^2 -Abstand zwischen der Funktion σ^2 und dem Vektorraum, der von $\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2$ aufgespannt wird, ist. Mit Hilfe von Standardargumenten der Hilbertraumtheorie (siehe, z.B., Achieser (1956)) erhalten wir sofort die Identität

$$M^2 = C_0 - (C_1, \dots, C_d)D^{-1}(C_1, \dots, C_d)^T. \quad (5.8)$$

Dabei sind die Größen C_0, C_1, \dots, C_d und $D = (D_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} C_0 &= [\sigma^2, \sigma^2] = \int_0^1 \sigma^4(s, X_s)ds, \\ C_i &= [\sigma_i^2, \sigma^2] = \int_0^1 \sigma_i^2(s, X_s)\sigma^2(s, X_s)ds, \quad 1 \leq i \leq d, \\ D_{ij} &= [\sigma_i^2, \sigma_j^2] = \int_0^1 \sigma_i^2(s, X_s)\sigma_j^2(s, X_s)ds, \quad 1 \leq i, j \leq d. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Voraussetzung (A3) impliziert die Invertierbarkeit der Zufallsmatrix D , wenn der Prozess X mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht konstant ist.

Im Folgenden benutzen wir die Range-basierten Methoden, die in Christensen und Podolskij (2006, 2007) diskutiert wurden, um empirische Analogons zu den in (5.9) definierten Termen zu konstruieren. Wir wiederholen nun kurz die grundlegenden Ideen dieses Konzeptes.

5.2.1 Range-basierte Schätzung

Wir definieren $N = nm$ wobei n und m zwei natürliche Zahlen sind. Weiterhin definieren wir die beobachtete Range des Prozesses X auf dem Intervall $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ als

$$s_{i,n,m} = \sup_{s,t \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \cap I_N} |X_t - X_s|. \quad (5.10)$$

Dabei gilt $I_N = \{j/N \mid j = 0, \dots, N\}$. Wir schreiben $s_{i,n,m}(X)$, wenn wir die Abhängigkeit vom Prozess X herausstellen wollen. Die Statistik $s_{i,n,m}$ basiert auf $m + 1$ Beobachtungen aus dem Intervall $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ und wir erhalten die absoluten inner-Tag Erträge, wenn $m = 1$ gilt.

Das Kernstück des Range-basierten Ansatzes ist die Klasse der Range-basierten Power Variationsstatistiken. Diese sind für ein $r \geq 0$ definiert als

$$RPV(r)_{n,m} = n^{\frac{r}{2}-1} \sum_{i=1}^n s_{i,n,m}^r. \quad (5.11)$$

Satz 5.1 *Wir nehmen an, dass (A1) gilt. Dann erhalten wir, wenn $n \rightarrow \infty$ läuft*

$$\sup_m \left| RPV(r)_{n,m} - \lambda_{r,m} \int_0^1 |\sigma(s, X_s)|^r ds \right| \xrightarrow{P} 0. \quad (5.12)$$

Hier sind die Konstanten $\lambda_{r,m}$ definiert als

$$\lambda_{r,m} = E \left[\sup_{s,t \in [0,1] \cap I_m} |W_t - W_s|^r \right]. \quad (5.13)$$

Beweis: Für einen Beweis siehe Christensen und Podolskij (2006).

Bemerkung 5.2.2 *Nach unserem Wissen gibt es keine explizite Darstellung für $\lambda_{r,m}$. Jedoch lassen sich diese Größen leicht durch Simulationen bestimmen. Wenn „ $m = \infty$ “ gilt, entspricht die Konstante $\lambda_r = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{r,m}$ offensichtlich dem r -ten Moment der Range der Brownschen Bewegung auf dem Intervall $[0, 1]$. Feller (1951) zeigte, dass die Dichte der Funktion $R = \sup_{s,t \in [0,1]} |W_t - W_s|$ als*

$$\delta(x) = 8 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k^2 \phi(kx) \quad (5.14)$$

repräsentiert werden kann. Dabei bezeichnet ϕ die Dichte der Standardnormalverteilung. Mit dieser Formel können wir folgern, dass $\lambda_r < \infty$ ist, für alle $r \in \mathbb{R}$. Für $r \geq 1$ erhalten wir weiterhin

$$\lambda_r = \frac{2^{\frac{r}{2}+1}(r-1)}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{r-1}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{r-1}} \quad r > 1, \quad (5.15)$$

$$\lambda_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}. \quad (5.16)$$

Wir verweisen auf Podolskij (2006) für einen detaillierten Beweis.

Satz 5.1 gibt bereits einen Hinweis, wie die Schätzer der in (5.9) definierten Größen später konstruiert werden. Zusätzlich benötigen wir noch ein Resultat über stabile Konvergenz, um einen Test auf die parametrische Form der Volatilität entwickeln zu können.

Satz 5.2 *Wir nehmen an, dass (A2) gilt. Dann gilt, wenn $n \rightarrow \infty$ läuft und m fest ist*

$$\sqrt{n} \left(RPV(r)_{n,m} - \lambda_{r,m} \int_0^1 |\sigma(s, X_s)|^r ds \right) \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} \sqrt{\lambda_{2r,m} - \lambda_{r,m}^2} \int_0^1 |\sigma(s, X_s)|^r dW'_s. \quad (5.17)$$

Hierbei bezeichnet W' eine weitere Brownsche Bewegung, die auf einer Erweiterung des filtrierten Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}, P)$ definiert und unabhängig von der σ -Algebra \mathcal{F} ist.

Beweis: Ein Beweis findet sich in Christensen und Podolskij (2006).

Obwohl wir den Satz 5.2 für feste m formuliert haben, gilt er auch, wenn „ $m = \infty$ “ gilt. Wir möchten darauf hinweisen, dass Annahme (A2) zusammen mit Ito’s Formel impliziert, dass der Volatilitätsprozess (σ_t) eine Ito diffusion ist, was eine standard Voraussetzung für stabile Zentrale Grenzwertsätze bei Hochfrequenzszenarien ist (siehe, z.B., Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij und Shephard (2006) oder Christensen und Podolskij (2006, 2007)). Aus Satz 5.1 können wir schließen, dass die Statistik $\lambda_{2,m}^{-1}RPV(2)_{n,m}$ ein konsistenter Schätzer der Größe $\int_0^1 \sigma^2(s, X_s)ds$ ist. Satz 5.2 liefert dann den Zentralen Grenzwertsatz für diese Statistik.

Nun wollen wir die Effizienz des Range-basierten Schätzers mit der, des gewöhnlichen Schätzers der integrierten Volatilität, vergleichen. Zur Erinnerung, die realisierte Volatilität ist definiert als

$$RV_n = \sum_{i=1}^n (X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}})^2. \quad (5.18)$$

Mit Hilfe von Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij und Shephard (2006) sowie Satz 5.2 folgern wir die folgenden Zentralen Grenzwertsätze

$$\sqrt{n} \left(RV_n - \int_0^1 \sigma^2(s, X_s)ds \right) \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} MN \left(0, 2 \int_0^1 \sigma^4(s, X_s)ds \right), \quad (5.19)$$

$$\sqrt{n} \left(\lambda_{2,m}^{-1}RPV(2)_{n,m} - \int_0^1 \sigma^2(s, X_s)ds \right) \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} MN \left(0, \frac{\lambda_{4,m} - \lambda_{2,m}^2}{\lambda_{2,m}^2} \int_0^1 \sigma^4(s, X_s)ds \right). \quad (5.20)$$

Hier bezeichnet $MN(0, \eta^2)$ die gemischte Normalverteilung mit bedingter Varianz η^2 . In Christensen und Podolskij (2007) wurde gezeigt, dass

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{4,m} - \lambda_{2,m}^2}{\lambda_{2,m}^2} \approx 0,4 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_{4,m} - \lambda_{2,m}^2}{\lambda_{2,m}^2} \leq 2 \quad \text{für alle } m \quad (5.21)$$

gilt. Dies bedeutet, dass der Range-basierte Schätzer $\lambda_{2,m}^{-1}RPV(2)_{n,m}$ effizienter ist als RV_n . Wir möchten dennoch darauf hinweisen, dass, statistisch gesehen, der obige Vergleich unfair ist. Die Statistik $\lambda_{2,m}^{-1}RPV(2)_{n,m}$ beruht auf nm Beobachtungen, während RV_n nur n Daten verwendet. Trotzdem hat der Range-basierte Schätzer $\lambda_{2,m}^{-1}RPV(2)_{n,m}$ einige praktische Vorteile. Es ist gemeinhin in der ökonomischen Literatur akzeptiert, dass der Preisprozess X durch mikrostrukturelles Rauschen gestört ist (siehe, z.B., Barndorff-Nielsen und Shephard (2007)). Dies bedeutet, dass die realisierte Volatilität ein ungenaues Maß für die integrierte Volatilität wird, wenn hohe Frequenzen, beziehungsweise alle Daten, benutzt werden. Aus diesem Grund verwenden Praktiker moderate Frequenzen, wie z.B. 5- oder 10-Minuten Frequenzen, um die realisierte Volatilität zu bestimmen. Bei diesen Frequenzen kann der Einfluss des Rauschens vernachlässigt werden (siehe Hansen und Lunde (2006) für eine empirische Rechtfertigung dieses Vorgehens). Christensen und Podolskij (2007) haben empfohlen 5- oder 10-Minuten Ranges

anstatt 5- oder 10-Minuten Erträge zur Konstruktion von Schätzern der integrierten Volatilität zu verwenden (siehe auch Martens und van Dijk (2007) für einen empirischen Vergleich dieser beiden Vorgehen). Der obige Zentrale Grenzwertsatz bestätigt die Vorteile der Range-basierten Methode.

5.2.2 Testprozedur

Nun sind wir so weit konsistente Schätzer der Größen C_0, C_1, \dots, C_d und D , wie sie in (5.9) definiert sind, zu konstruieren. Wir betrachten die Statistiken

$$C_0^{n,m} = \lambda_{4,m}^{-1} \sum_{k=1}^n s_{k,n,m}^4, \quad (5.22)$$

$$C_i^{n,m} = \lambda_{2,m}^{-1} \sum_{k=1}^n \sigma_i^2\left(\frac{k-1}{n}, X_{\frac{k-1}{n}}\right) s_{k,n,m}^2, \quad 1 \leq i \leq d \quad (5.23)$$

und

$$D_{ij}^n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma_i^2\left(\frac{k-1}{n}, X_{\frac{k-1}{n}}\right) \sigma_j^2\left(\frac{k-1}{n}, X_{\frac{k-1}{n}}\right), \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (5.24)$$

Unter der Annahme (A1) konvergieren $C_0^{n,m}, C_1^{n,m}, \dots, C_d^{n,m}$ und D^n jeweils in Wahrscheinlichkeit gegen C_0, C_1, \dots, C_d und D . Somit erhalten wir durch

$$M_N^2 = C_0^{n,m} - (C_1^{n,m}, \dots, C_d^{n,m})(D^n)^{-1}(C_1^{n,m}, \dots, C_d^{n,m})^T \quad (5.25)$$

einen konsistenten Schätzer des Distanzmaßes M^2 . Der nächste Satz sichert die stabile Konvergenz des Vektors $\sqrt{n}(C_0^{n,m} - C_0, C_1^{n,m} - C_1, \dots, C_d^{n,m} - C_d)^T$.

Satz 5.3 *Wir nehmen an, dass die Bedingungen (A2) und (A3) gelten. Dann gilt, wenn $n \rightarrow \infty$ läuft und m fest ist*

$$D^n - D = o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \quad (5.26)$$

und

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} C_0^{n,m} - C_0 \\ C_1^{n,m} - C_1 \\ \vdots \\ C_d^{n,m} - C_d \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} \int_0^1 \Sigma_s^{\frac{1}{2}} dW'_s. \quad (5.27)$$

Dabei ist Σ_s eine $(d+1)$ -dimensionale Matrix. Sie ist gegeben durch

$$\Sigma_s = \begin{pmatrix} v(s) & v_1(s) & \cdots & v_d(s) \\ v_1(s) & v_{11}(s) & \cdots & v_{1d}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_d(s) & v_{d1}(s) & \cdots & v_{dd}(s) \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

mit

$$v(s) = \frac{\lambda_{8,m} - \lambda_{4,m}^2}{\lambda_{4,m}^2} \sigma^8(s, X_s), \quad (5.29)$$

$$v_i(s) = \frac{\lambda_{6,m} - \lambda_{4,m} \lambda_{2,m}}{\lambda_{4,m} \lambda_{2,m}} \sigma_i^2(s, X_s) \sigma^6(s, X_s), \quad 1 \leq i \leq d \quad (5.30)$$

und

$$v_{ij}(s) = \frac{\lambda_{4,m} - \lambda_{2,m}^2}{\lambda_{2,m}^2} \sigma_i^2(s, X_s) \sigma_j^2(s, X_s) \sigma^4(s, X_s), \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (5.31)$$

W' ist dabei eine $(d + 1)$ -dimensionale Brownsche Bewegung, die auf einer Erweiterung des filtrierten Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}, P)$ definiert und unabhängig von der σ -Algebra \mathcal{F} ist.

Beweis: Als erstes stellen wir fest, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass die Prozesse $a_t = a(t, X_t)$ und $\sigma_t = \sigma(t, X_t), \sigma_{1t} = \sigma_1(t, X_t), \dots, \sigma_{dt} = \sigma_d(t, X_t)$ beschränkt sind. Dies lässt sich mit Hilfe von Stopptechniken und Voraussetzung (A1) folgern (siehe Barndorff-Nielsen, Graversen, Jacod, Podolskij und Shephard (2006) für eine Rechtfertigung dieser Annahme). Weiterhin bezeichnen wir alle Konstanten, die im Beweis auftreten, mit C .

In Dette, Podolskij und Vetter (2006) wurde bereits gezeigt, dass

$$D^n - D = o_p(n^{-\frac{1}{2}}) \quad (5.32)$$

gilt. So bleibt uns nur noch den stabilen Zentralen Grenzwertsatz in Satz 5.3 zu beweisen. Dazu approximieren wir die Größe $s_{i,n,m}(X)$ durch $|\sigma_{\frac{i-1}{n}}| s_{i,n,m}(W)$. Christensen und Podolskij (2006) haben in diesem Zusammenhang bereits unter der Voraussetzung (A2) folgende Aussage gezeigt

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} C_0^{n,m} - C_0 \\ C_1^{n,m} - C_1 \\ \vdots \\ C_d^{n,m} - C_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \left(\xi_{i,n,m}^{(0)} - E[\xi_{i,n,m}^{(0)} | \mathcal{F}_{\frac{i-1}{n}}] \right) \\ \sum_{i=1}^n \left(\xi_{i,n,m}^{(1)} - E[\xi_{i,n,m}^{(1)} | \mathcal{F}_{\frac{i-1}{n}}] \right) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \left(\xi_{i,n,m}^{(d)} - E[\xi_{i,n,m}^{(d)} | \mathcal{F}_{\frac{i-1}{n}}] \right) \end{pmatrix} + o_p(n^{-1/2}), \quad (5.33)$$

mit

$$\xi_{i,n,m}^{(0)} = \frac{n^{3/2}}{\lambda_{4,m}} \sigma_{\frac{i-1}{n}}^4 s_{i,n,m}^4(W), \quad (5.34)$$

$$\xi_{i,n,m}^{(k)} = \frac{n^{1/2}}{\lambda_{2,m}} \sigma_{k, \frac{i-1}{n}}^2 \sigma_{\frac{i-1}{n}}^2 s_{i,n,m}^2(W), \quad k = 1, \dots, d. \quad (5.35)$$

Weiterhin können wir folgern

$$\sum_{i=1}^n \left(E[\xi_{i,n,m}^{(k)} \xi_{i,n,m}^{(l)} | \mathcal{F}_{\frac{i-1}{n}}] - E[\xi_{i,n,m}^{(k)} | \mathcal{F}_{\frac{i-1}{n}}] E[\xi_{i,n,m}^{(l)} | \mathcal{F}_{\frac{i-1}{n}}] \right) \xrightarrow{P} \int_0^1 \Sigma_s^{k+1, l+1} ds \quad (5.36)$$

für $0 \leq k, l \leq d$, und

$$E[|\xi_{i,n,m}^{(k)}|^4 | \mathcal{F}_{\frac{i-1}{n}}] \leq \frac{C}{n^2}, \quad k = 0, \dots, d, \quad (5.37)$$

da die Prozesse $\sigma_t, \sigma_{1t}, \dots, \sigma_{dt}$ beschränkt sind. Als nächstes möchten wir darauf hinweisen, dass die Identität

$$E[\xi_{i,n,m}^{(k)} (W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-1}{n}}) | \mathcal{F}_{\frac{i-1}{n}}] = 0, \quad k = 0, \dots, d, \quad (5.38)$$

gilt, weil die Funktionale $s_{i,n,m}^2(W)(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-1}{n}})$ und $s_{i,n,m}^4(W)(W_{\frac{i}{n}} - W_{\frac{i-1}{n}})$ beide ungerade in W sind.

Abschließend nehmen wir an, N sei ein beschränktes Martingal auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}, P)$, das orthogonal zu W ist. Dies bedeutet für die Kovariation $\langle N, W \rangle_t = 0$ fast sicher. Dann folgern wir

$$E[\xi_{i,n,m}^{(k)} (N_{\frac{i}{n}} - N_{\frac{i-1}{n}}) | \mathcal{F}_{\frac{i-1}{n}}] = 0, \quad k = 0, \dots, d, \quad (5.39)$$

was bereits in Christensen und Podolskij (2007) gezeigt wurde. Der Rest der Aussage von Satz 5.3 folgt nun aus (5.33)-(5.39) und Theorem IX.7.28 in Jacod und Shiryaev (2003). \square

Wir können den stabilen Limes in Satz 5.3 auch anders identifizieren. Er ist nämlich gemischt normalverteilt mit bedingter Varianz $\int_0^1 \Sigma_s ds$. Mit Hilfe der Δ -Methode für stabile Konvergenz (siehe Podolskij (2006) oder Abschnitt 2.1) können wir das folgende Ergebnis formulieren.

Korollar 5.2.3 *Wir nehmen an, dass die Bedingungen (A2) und (A3) erfüllt sind. Wenn $n \rightarrow \infty$ läuft und m fest ist, dann gilt*

$$\sqrt{n} \left(M_N^2 - M^2 \right) \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} \left(1, -2(C_1, \dots, C_d) D^{-1} \right) \int_0^1 \Sigma_s^{\frac{1}{2}} dW'_s. \quad (5.40)$$

Dabei ist W' wieder eine $(d+1)$ -dimensionale Brownsche Bewegung, welche auf einer Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}, P)$ definiert und unabhängig von der σ -Algebra \mathcal{F} ist.

Nun zeigen wir, wie Korollar 5.2.3 angewendet werden kann, um einen standard Zentralen Grenzwertsatz zu erhalten. Wir möchten darauf hinweisen, dass der stabile Limes in (5.40) gemischt normalverteilt ist mit bedingter Varianz

$$\rho^2 = \left(1, -2(C_1, \dots, C_d) D^{-1} \right) \int_0^1 \Sigma_s ds \left(1, -2(C_1, \dots, C_d) D^{-1} \right)^T. \quad (5.41)$$

Indem wir wieder eine Variante von Satz 5.1 benutzen, erhalten wir

$$\rho_N^2 = \left(1, -2(C_1^{n,m}, \dots, C_d^{n,m})(D^n)^{-1}\right) \Sigma_N \left(1, -2(C_1^{n,m}, \dots, C_d^{n,m})(D^n)^{-1}\right)^T, \quad (5.42)$$

als konsistenten Schätzer für ρ^2 . Dabei ist Σ_N gegeben durch

$$\Sigma_N = \begin{pmatrix} v^N & v_1^N & \cdots & v_d^N \\ v_1^N & v_{11}^N & \cdots & v_{1d}^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_d^N & v_{d1}^N & \cdots & v_{dd}^N \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

mit

$$v^N = \frac{\lambda_{8,m} - \lambda_{4,m}^2}{\lambda_{4,m}^2 \lambda_{8,m}} n^3 \sum_{k=1}^n s_{k,n,m}^8, \quad (5.44)$$

$$v_i^N = \frac{\lambda_{6,m} - \lambda_{4,m} \lambda_{2,m}}{\lambda_{4,m} \lambda_{2,m} \lambda_{6,m}} n^2 \sum_{k=1}^n \sigma_i^2\left(\frac{k-1}{n}, X_{\frac{k-1}{n}}\right) s_{k,n,m}^6, \quad 1 \leq i \leq d, \quad (5.45)$$

$$v_{ij}^N = \frac{\lambda_{4,m} - \lambda_{2,m}^2}{\lambda_{2,m}^2 \lambda_{4,m}} n \sum_{k=1}^n \sigma_i^2\left(\frac{k-1}{n}, X_{\frac{k-1}{n}}\right) \sigma_j^2\left(\frac{k-1}{n}, X_{\frac{k-1}{n}}\right) s_{k,n,m}^4, \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (5.46)$$

Die Eigenschaften der stabilen Konvergenz implizieren direkt die folgende stabile Konvergenz

$$\frac{\sqrt{n}(M_N^2 - M^2)}{\rho_N} \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} W'_1. \quad (5.47)$$

Mit diesem Ergebnis können wir nun auf die parametrische Form der Volatilität testen. Die Nullhypothese $H_0 : \omega \in \Omega_0$ wird auf dem Level α verworfen, wenn

$$\frac{\sqrt{n}M_N^2}{\rho_N} > c_{1-\alpha}, \quad (5.48)$$

wobei $c_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung ist. Die Unabhängigkeit zwischen W' und \mathcal{F} impliziert die folgende Konvergenz

$$P\left(\frac{\sqrt{n}M_N^2}{\rho_N} > c_{1-\alpha} | \Omega_0\right) \rightarrow \alpha.$$

Andererseits gilt auch

$$P\left(\frac{\sqrt{n}M_N^2}{\rho_N} > c_{1-\alpha} | \Omega_1\right) \rightarrow 1. \quad (5.49)$$

Folglich ist der obige Test konsistent gegen jede feste Alternative.

5.2.3 Abstandshypothesen

In der Praxis ist es relativ unrealistisch zu erwarten, dass die wahre Volatilitätsfunktion σ^2 als Linearkombination der gegebenen Funktionen $\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2$ repräsentiert werden kann. Eine interessantere Fragestellung ist, wie nah σ^2 dem Vektorraum ist, der durch $\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2$ aufgespannt wird. Wir müssen jedoch darauf hinweisen, dass die Größe M^2 kein adäquates Maß für dieses Problem ist. Wir müssen sie zuerst in Relation zu der Norm von σ^2 setzen, welche durch $[\cdot, \cdot]$ induziert wird. Dann erhalten wir die präzisen Abstandshypothesen

$$H_0 : \omega \in \Omega_0(\epsilon) = \left\{ \omega \in \Omega \mid \frac{M^2(\omega)}{[\sigma^2, \sigma^2](\omega)} \leq \epsilon \right\} \quad (5.50)$$

und

$$H_1 : \omega \in \Omega_1(\epsilon) = \left\{ \omega \in \Omega \mid \frac{M^2(\omega)}{[\sigma^2, \sigma^2](\omega)} > \epsilon \right\}. \quad (5.51)$$

Hierbei ist $0 < \epsilon < 1$ eine gegebene Konstante. Außerdem wollen wir darauf hinweisen, dass $[\sigma^2, \sigma^2] = C_0 = \int_0^1 \sigma_s^4 ds$ ist. Hypothesen dieser Form sind, in einem klassischen Szenario, von Hodges und Lehmann (1954) diskutiert worden.

Mit Hilfe von Satz 5.3 und der Δ -Methode für stabile Konvergenz erhalten wir

$$\sqrt{n} \left(\frac{M_N^2}{C_0^{n,m}} - \frac{M^2}{C_0} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}_{st}} MN(0, \tilde{\rho}^2), \quad (5.52)$$

mit

$$\tilde{\rho}^2 = \left(\frac{(C_1, \dots, C_d) D^{-1} (C_1, \dots, C_d)^T}{C_0^2}, \frac{-2(C_1, \dots, C_d) D^{-1}}{C_0} \right) \int_0^1 \Sigma_s ds \quad (5.53)$$

$$\times \left(\frac{(C_1, \dots, C_d) D^{-1} (C_1, \dots, C_d)^T}{C_0^2}, \frac{-2(C_1, \dots, C_d) D^{-1}}{C_0} \right)^T. \quad (5.54)$$

Als konsistenten Schätzer für die bedingte Varianz $\tilde{\rho}^2$ benutzen wir

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_N^2 &= \left(\frac{(C_1^{n,m}, \dots, C_d^{n,m}) (D^n)^{-1} (C_1^{n,m}, \dots, C_d^{n,m})^T}{(C_0^{n,m})^2}, \frac{-2(C_1^{n,m}, \dots, C_d^{n,m}) (D^n)^{-1}}{C_0^{n,m}} \right) \Sigma_N \\ &\times \left(\frac{(C_1^{n,m}, \dots, C_d^{n,m}) (D^n)^{-1} (C_1^{n,m}, \dots, C_d^{n,m})^T}{(C_0^{n,m})^2}, \frac{-2(C_1^{n,m}, \dots, C_d^{n,m}) (D^n)^{-1}}{C_0^{n,m}} \right)^T. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Folglich wird die Nullhypothese $H_0 : \omega \in \Omega_0(\epsilon)$ zu einem α -Level verworfen, wenn

$$\frac{\sqrt{n} \left(\frac{M_N^2}{C_0^{n,m}} - \frac{M^2}{C_0} \right)}{\tilde{\rho}_N} > c_{1-\alpha}. \quad (5.56)$$

Die Unabhängigkeit zwischen W' und \mathcal{F} impliziert wieder

$$P\left(\frac{\sqrt{n}\left(\frac{M_N^2}{C_0^{n,m}} - \epsilon\right)}{\tilde{\rho}_N} > c_{1-\alpha}|\Omega_0(\epsilon)\right) \leq P\left(\frac{\sqrt{n}\left(\frac{M_N^2}{C_0^{n,m}} - \frac{M^2}{C_0}\right)}{\tilde{\rho}_N} > c_{1-\alpha}|\Omega_0(\epsilon)\right) \rightarrow \alpha \quad (5.57)$$

und

$$P\left(\frac{\sqrt{n}\left(\frac{M_N^2}{C_0^{n,m}} - \epsilon\right)}{\tilde{\rho}_N} > c_{1-\alpha}|\Omega_1(\epsilon)\right) \rightarrow 1. \quad (5.58)$$

Als Konsequenz der letzten Konvergenz erhalten wir, dass der Test konsistent gegen jede Alternative ist.

5.3 Parametrischer Bootstrap und Eigenschaften bei endlichen Stichproben

In diesem Kapitel führen wir einen parametrischen Bootstrap ein und untersuchen die Performance unserer Methode bei endlichen Stichproben.

5.3.1 Parametrischer Bootstrap

Um die Performance bei endlichen Stichproben zu verbessern, führen wir nun ein parametrisches Bootstrapverfahren ein. Immer wenn wir dieses Bootstrapverfahren benutzen, nehmen wir an, dass die Funktionen $\sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2$ nicht von t abhängen und analytisch auf \mathbb{R} sind. Weiterhin betrachten wir den Koeffizientenvektor $\alpha^{min} = (\alpha_1^{min}, \dots, \alpha_d^{min})^T$, welcher wie folgt definiert ist

$$\alpha^{min} = \operatorname{argmin}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_d)^T \in \mathbb{R}^d} \int_0^1 \left(\sigma^2(s, X_s) - \sum_{j=1}^d \alpha_j \sigma_j^2(s, X_s) \right)^2 ds. \quad (5.59)$$

Indem wir Argumente aus der Hilbertraumtheorie anwenden, erhalten wir die Darstellung

$$\alpha^{min} = D^{-1}(C_1, \dots, C_d)^T. \quad (5.60)$$

Die Größen hier sind in (5.9) definiert. Folglich erhalten wir einen konsistenten Schätzer von α^{min} durch

$$\alpha_N^{min} = (D^n)^{-1}(C_1^{n,m}, \dots, C_d^{n,m})^T. \quad (5.61)$$

In einem zweiten Schritt generieren wir Daten $X_{\frac{i}{N}}^{*j}$ ($i = 0, \dots, N, j = 1, \dots, B$) aus der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = \sum_{j=1}^d \alpha_{jN}^{min} \sigma_j(t, X_t) dW_t, \quad t \in [0, 1]. \quad (5.62)$$

Hierbei möchten wir daran erinnern, dass die Driftfunktion die asymptotische Verteilung nicht beeinflusst. Als nächstes berechnen wir die Bootstrap Analogons

$$\frac{\sqrt{n}M_N^2(1)}{\rho_N(1)}, \dots, \frac{\sqrt{n}M_N^2(B)}{\rho_N(B)} \quad (5.63)$$

der Statistik $\sqrt{n}M_N^2/\rho_N$. Abschließend vergleichen wir den Wert von $\sqrt{n}M_N^2/\rho_N$ mit den entsprechenden Quantilen der Bootstrap Verteilung. Wir möchten darauf hinweisen, dass die Bootstrap Prozedur gerechtfertigt ist, da die Funktionen $\sigma^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2$ unabhängig von t und auf \mathbb{R} analytisch sind.

Im Folgenden vergleichen wir die Performance bei endlichen Stichproben von dem Rangebasierten Test mit der Methode, welche von Dette, Podolskij und Vetter (2006) vorgeschlagen wurde. Wir möchten deshalb kurz wiederholen, wie der Test in jenem Artikel konstruiert wurde. Dort wird das Abstandsmaß M^2 mit Hilfe von Ertrags-basierten Statistiken geschätzt

$$\tilde{M}_n^2 = \tilde{C}_0^n - (\tilde{C}_1^n, \dots, \tilde{C}_d^n)(D^n)^{-1}(\tilde{C}_1^n, \dots, \tilde{C}_d^n)^T, \quad (5.64)$$

mit

$$\tilde{C}_0^n = \frac{n}{3} \sum_{k=1}^n (X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}})^4, \quad (5.65)$$

$$\tilde{C}_i^n = \sum_{k=1}^n \sigma_i^2\left(\frac{k-1}{n}, X_{\frac{k-1}{n}}\right)(X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}})^2, \quad 1 \leq i \leq d. \quad (5.66)$$

Wir möchten nochmals darauf hinweisen, dass die Größe \tilde{M}_n^2 auf der moderaten Frequenz $1/n$ beruht und nicht auf $1/N$, da die Ertrags-basierte Statistik bei Hochfrequenzmessungen inadäquat wird. Dette, Podolskij und Vetter (2006) haben gezeigt, dass $\sqrt{n}(\tilde{M}_n^2 - M^2)$ asymptotisch gemischt normalverteilt ist mit bedingter Varianz

$$\tilde{\rho}^{2,e} = \left(1, -2(C_1, \dots, C_d)D^{-1}\right) \int_0^1 \tilde{\Sigma}_s ds \left(1, -2(C_1, \dots, C_d)D^{-1}\right)^T. \quad (5.67)$$

Dabei ist $\tilde{\Sigma}_s$ wie folgt definiert

$$\tilde{\Sigma}_s = \begin{pmatrix} \tilde{v}(s) & \tilde{v}_1(s) & \cdots & \tilde{v}_d(s) \\ \tilde{v}_1(s) & \tilde{v}_{11}(s) & \cdots & \tilde{v}_{1d}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{v}_d(s) & \tilde{v}_{d1}(s) & \cdots & \tilde{v}_{dd}(s) \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

mit

$$\tilde{v}(s) = \frac{32}{3} \sigma^8(s, X_s), \quad (5.69)$$

$$\tilde{v}_i(s) = 4\sigma_i^2(s, X_s)\sigma^6(s, X_s), \quad 1 \leq i \leq d, \quad (5.70)$$

$$\tilde{v}_{ij}(s) = 2\sigma_i^2(s, X_s)\sigma_j^2(s, X_s)\sigma^4(s, X_s), \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (5.71)$$

Indem sie einen Ertrags-basierten Schätzer $\tilde{\rho}_n^{2,e}$ von $\tilde{\rho}^{2,e}$ konstruierten, konnten Dette, Podolskij und Vetter (2006) den folgenden standard Zentralen Grenzwertsatz formulieren

$$\frac{\sqrt{n}(\tilde{M}_n^2 - M^2)}{\tilde{\rho}_n^e} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1). \tag{5.72}$$

Mit diesem Zentralen Grenzwertsatz war es ihnen dann möglich einen Test für die Nullhypothese zu konstruieren. Zusätzlich führten Dette, Podolskij und Vetter (2006) einen parametrischen Bootstrap ein, der dem oben vorgestellten gleicht. Auch sie bezweckten damit die Performance bei endlichen Stichproben zu verbessern.

5.3.2 Monte-Carlo Simulationen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Performance der Bootstrap Prozedur für das Problem auf diverse lineare Hypothesen zu testen.

Zuerst demonstrieren wir das simulierte Level des Range-basierten Tests, indem wir den parametrischen Bootstrap anwenden. In den Tabellen 5.1-5.3 präsentieren wir die Resultate für die Nullhypothese

$$H_0 : \sigma^2(t, X_t) = \alpha X_t^2 \tag{5.73}$$

und verschiedene Driftfunktionen $a(t, x)$. Wir generieren den Prozess X durch die stochastische Differentialgleichung (5.1) mit $\sigma^2(t, x) = x^2$ und dem Startwert $X_0 = 1$. Diese Wahl des Startwerts gilt für den gesamten Abschnitt. Die Stichprobengröße, oder genauer die Anzahl von Ranges ist $n = 100, 200, 500$, während die Anzahl an Beobachtungen, um die jeweilige Range zu berechnen, $m = 10, 20, 50$ ist. Wir benutzen 1000 Simulationsdurchläufe und $B = 500$ Bootstrap Wiederholungen, um die Wahrscheinlichkeiten einer fälschlichen Ablehnung zu simulieren. Wir beobachten eine ziemlich akkurate Approximation für alle Driftfunktionen, sogar für kleine Datenmengen. Überraschenderweise hängen die Ergebnisse nicht wesentlich von m ab. In Tabelle 5.7 präsentieren wir die Level Approximation für den Ertrags-basierten Test von Dette, Podolskij und Vetter (2006), welcher dem Fall $m = 1$ entspricht. Wir beobachten hierbei ähnliche Ergebnisse wie sie in den Tabellen 5.1-5.3 zu finden sind.

Nun präsentieren wir Ergebnisse für die Nullhypothese

$$H_0 : \sigma^2(t, X_t) = \alpha_1 + \alpha_2 X_t^2. \tag{5.74}$$

Dabei wird der Prozess X durch die stochastische Differentialgleichung (5.1) mit $\sigma^2(t, x) = 1 + x^2$ erzeugt. In den Tabellen 5.4-5.6 finden sich die Simulationsergebnisse für das Level des Range-basierten Tests, während Tabelle 5.8 die Ergebnisse des Ertrags-basierten Tests enthält. Auch hier zeigt sich, dass das Level nicht entscheidend von m abhängt.

Als nächstes demonstrieren wir die Power der Bootstrap Methode. In den Tabellen 5.9-5.11 präsentieren wir die simulierten Wahrscheinlichkeiten die Nullhypothese einer konstanten Volatilität abzulehnen, wobei wir verschiedene Alternativen betrachten. Die Driftfunktion haben

wir als $a(t, x) = (2 - x)/10$ gewählt und das übrige Simulationsdesign ist wie oben. Wir beobachten eine sehr hohe Power des Range-basierten Tests sogar für $n = 100$. Weiterhin wächst die Power mit m . Um diese Ergebnisse vergleichbar zu machen, zeigen wir in Tabelle 5.15 die entsprechenden Resultate für den Ertrags-basierten Test. Auch in dieser Tabelle zeigt sich eine gute Power, wobei sie bei allen Frequenzen nicht größer ist als bei der Range-basierten Methode. Dies ist jedoch nicht überraschend, da der Ertrags-basierte Ansatz dem Fall $m = 1$ entspricht.

Dieser Sachverhalt ändert sich, wenn wir die Power für die Nullhypothese

$$H_0 : \sigma^2(t, X_t) = \alpha X_t^2 \quad (5.75)$$

betrachten. In den Tabellen 5.12-5.14 können wir beobachten, dass die Power des Range-Tests sehr stark von der Alternative abhängt. Während wir sehr gute Ergebnisse für die Alternative $\sigma^2(t, x) = 1$ erhalten, ist die Power für den Test gegen die Alternative $\sigma^2(t, x) = 5|x|^{3/2}$ ziemlich niedrig und ähnliches gilt auch für den Ertrags-basierten Test, dessen Performance sich in Tabelle 5.16 findet. Wie dem auch sei, die niedrige Power für die Alternative $\sigma^2(t, x) = 5|x|^{3/2}$ ist nicht überraschend. Natürlich entdeckt der Test für kleine Werte von X , zur Erinnerung es gilt $X_0 = 1$, nur sehr schwierig Unterschiede zwischen Volatilitätsfunktionen der Form $|x|^{3/2}$ und x^2 . Weiterhin wollen wir erwähnen, dass die Power in m wächst, was impliziert, dass der Range-Test mehr Power hat als der Ertrags-basierte Test.

Abschließend demonstrieren wir das Level und die Power für den Abstandstest. Als erstes müssen wir darauf hinweisen, dass wir die Bootstrap Methode nicht anwenden können, da wir die Daten nicht unter $H_0 : \omega \in \Omega_0(\epsilon)$ generieren können. Deshalb benutzen wir den Zentralen Grenzwertsatz aus Abschnitt 5.2.3 als Approximation für die Verteilung von $\frac{M^2}{[\sigma^2, \sigma^2]}$. In den Tabellen 5.17 und 5.18 präsentieren wir Ergebnisse für die Nullhypothese

$$H_0 : \frac{M^2}{[\sigma^2, \sigma^2]} \leq 0, 1 \quad (5.76)$$

mit $\sigma^2(t, x) = (1 + x)^2$, $a(t, x) = 0$ und $\sigma_1^2(t, x) = x^2$. Wir benutzen 5000 Simulationsläufe um die Ablehnrwahrscheinlichkeiten zu simulieren. In jedem Durchgang müssen wir zuerst berechnen, ob die Nullhypothese gilt, was einer Level Simulation entspricht, oder nicht, was dann einer Power Simulation gleichkommt. Unsere Wahl von $\epsilon = 0, 1$ stellt sicher, dass ungefähr die gleiche Anzahl von Level und Power Simulationen vorkommen. Die Anzahl an Ranges und deren Größe haben wir wie oben gewählt. Wie durch Ungleichung (5.57) erwartet, ist das Verhalten des Tests eher konservativ für alle Datenmengen. Weiterhin sinkt das simulierte Level sowohl in m als auch in n . Die Power Ergebnisse sind jedoch vernünftig und wachsen in m und n . Jedoch möchten wir darauf hinweisen, dass die entsprechenden Ergebnisse der Bootstrap Methode für die Hypothese $H_0 : M^2 = 0$, zu finden in Tabellen 5.12-5.14, etwas besser sind, als die Ergebnisse in Tabelle 5.18. Dies kann mit der besseren Performance der Bootstrap Methode, im Vergleich zu der Approximation mit der Normalverteilung, erklärt werden.

Tabelle 5.1

$\sigma^2(t, x) = x^2$	$n = 100, m = 10$			$n = 200, m = 10$			$n = 500, m = 10$		
$a(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
0	20,1	12,0	7,0	21,5	10,9	4,5	20,8	9,8	4,8
0,2	20,7	11,3	5,2	21,9	11,8	6,9	21,9	11,3	6,4
$x/10$	21,6	10,9	5,4	20,2	10,1	5,6	20,3	10,0	5,3
$(2 - x)/10$	20,6	9,6	5,0	19,1	9,9	4,1	22,7	12,6	6,4
tx	25,8	13,8	7,4	23,7	12,5	7,1	23,5	12,3	7,1

Tabelle 5.2

$\sigma^2(t, x) = x^2$	$n = 100, m = 20$			$n = 200, m = 20$			$n = 500, m = 20$		
$a(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
0	17,4	10,1	5,3	19,0	9,7	5,5	19,7	10,1	5,5
0,2	21,6	11,5	6,5	22,8	12,1	6,1	20,4	11,2	6,6
$x/10$	17,9	9,7	5,1	22,9	11,5	5,3	22,7	11,6	6,4
$(2 - x)/10$	20,7	10,9	5,1	22,8	12,6	6,8	21,2	11,4	6,6
tx	26,4	14,1	7,7	25,7	12,5	6,4	20,5	11,1	5,8

Tabelle 5.3

$\sigma^2(t, x) = x^2$	$n = 100, m = 50$			$n = 200, m = 50$			$n = 500, m = 50$		
$a(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
0	17,9	9,6	5,4	21,0	10,2	5,3	20,5	10,4	4,8
0,2	19,8	10,1	5,1	21,7	11,6	5,8	20,0	10,1	5,3
$x/10$	24,5	11,5	6,2	23,9	12,4	7,3	19,9	11,4	6,3
$(2 - x)/10$	20,5	10,3	4,8	21,2	10,2	5,5	20,8	10,1	3,9
tx	24,5	14,2	7,4	25,1	13,0	7,3	22,0	11,2	5,4

Tabellen 5.1-5.3: Simuliertes Level des parametrischen Bootstrap Tests basierend auf der Statistik $\sqrt{n}M_N^2/\rho_N$ für die Hypothese $H_0 : \sigma^2(t, X_t) = \alpha X_t^2$ mit $n = 100, 200, 500, m = 10, 20, 50$ und verschiedenen Driftfunktionen.

Tabelle 5.4

$\sigma^2(t, x) = 1 + x^2$	$n = 100, m = 10$			$n = 200, m = 10$			$n = 500, m = 10$		
$a(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
0	18,6	9,5	4,1	20,8	9,5	5,4	21,1	10,1	5,9
0,2	22,4	12,0	6,3	19,7	10,0	5,6	24,1	11,2	6,5
$x/10$	21,0	10,5	5,0	19,8	10,2	5,4	19,0	9,8	5,0
$(2 - x)/10$	20,4	10,4	5,6	20,4	10,3	5,2	20,3	10,2	4,7
tx	21,0	10,2	5,4	23,5	12,3	7,0	20,3	9,4	4,5

Tabelle 5.5

$\sigma^2(t, x) = 1 + x^2$	$n = 100, m = 20$			$n = 200, m = 20$			$n = 500, m = 20$		
$a(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
0	20,7	10,2	5,0	19,8	9,6	5,0	21,0	10,7	5,4
0,2	20,5	10,2	5,0	21,2	11,1	6,1	21,1	11,2	6,3
$x/10$	20,9	10,2	5,2	20,7	10,6	5,4	19,4	10,2	4,3
$(2 - x)/10$	17,7	7,6	3,5	17,6	8,1	4,9	20,1	10,0	6,2
tx	23,0	11,4	6,6	21,6	11,6	5,9	25,7	12,8	6,2

Tabelle 5.6

$\sigma^2(t, x) = 1 + x^2$	$n = 100, m = 50$			$n = 200, m = 50$			$n = 500, m = 50$		
$a(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
0	20,2	9,9	5,6	18,9	9,5	5,3	22,2	11,6	6,1
0,2	22,4	10,8	6,0	20,1	11,1	5,4	21,5	10,5	5,2
$x/10$	18,8	8,1	4,1	21,1	11,4	5,8	20,9	10,6	6,9
$(2 - x)/10$	19,5	9,3	5,5	18,9	8,6	3,8	19,1	9,8	4,7
tx	25,7	13,9	6,5	23,9	11,6	6,6	21,4	11,7	5,1

Tabellen 5.4-5.6: Simuliertes Level des parametrischen Bootstrap Tests basierend auf der Statistik $\sqrt{n}M_N^2/\rho_N$ für die Hypothese $H_0 : \sigma^2(t, X_t) = \alpha_1 + \alpha_2 X_t^2$ mit $n = 100, 200, 500$, $m = 10, 20, 50$ und verschiedenen Driftfunktionen.

Tabelle 5.7

$\sigma^2(t, x) = x^2$	$n = 100$			$n = 200$			$n = 500$		
$a(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
0	19,8	11,8	6,9	21,0	12,1	5,8	20,2	10,5	5,8
0,2	22,4	11,3	5,5	20,2	8,8	5,0	23,0	11,4	6,2
$x/10$	22,6	11,4	5,9	21,3	9,8	4,8	20,1	10,4	5,5
$(2 - x)/10$	20,9	10,2	5,1	18,8	9,8	4,3	22,4	12,5	6,2
tx	26,6	14,7	8,4	23,8	13,4	8,3	23,1	12,4	6,3

Tabelle 5.7: Simuliertes Level des parametrischen Bootstrap Tests basierend auf der Statistik $\sqrt{n}\tilde{M}_n^2/\tilde{\rho}_n$ für die Hypothese $H_0 : \sigma^2(t, X_t) = \alpha X_t^2$ mit $n = 100, 200, 500$ und verschiedenen Driftfunktionen.

Tabelle 5.8

$\sigma^2(t, x) = 1 + x^2$	$n = 100$			$n = 200$			$n = 500$		
$a(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
0	19,4	8,6	4,3	20,3	9,1	4,6	20,4	10,2	5,3
0,2	22,4	12,9	6,9	19,3	11,0	6,7	23,5	11,2	5,8
$x/10$	21,7	11,1	5,3	21,3	10,6	4,9	21,4	10,2	5,3
$(2 - x)/10$	22,4	10,9	5,8	20,1	9,9	4,9	18,4	9,3	4,8
tx	21,9	12,3	6,8	23,2	13,3	7,1	22,2	10,7	5,6

Tabelle 5.8: Simuliertes Level des parametrischen Bootstrap Tests basierend auf der Statistik $\sqrt{n}\tilde{M}_n^2/\tilde{\rho}_n$ für die Hypothese $H_0 : \sigma^2(t, X_t) = \alpha_1 + \alpha_2 X_t^2$ mit $n = 100, 200, 500$ und verschiedenen Driftfunktionen.

Tabelle 5.9

$a(t, x) = (2 - x)/10$	$n = 100, m = 10$			$n = 200, m = 10$			$n = 500, m = 10$		
$\sigma^2(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
$1 + x^2$	93,0	88,4	84,7	96,9	95,1	93,0	98,9	98,0	97,2
x^2	99,4	98,3	97,2	99,9	99,9	99,8	100,0	100,0	100,0
$5 x ^{3/2}$	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
$5 x $	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
$(1 + x)^2$	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Tabelle 5.10

$a(t, x) = (2 - x)/10$	$n = 100, m = 20$			$n = 200, m = 20$			$n = 500, m = 20$		
$\sigma^2(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
$1 + x^2$	94,2	89,7	86,2	96,7	95,2	92,9	99,6	99,4	98,2
x^2	99,8	99,5	98,6	99,8	99,7	99,7	100,0	100,0	100,0
$5 x ^{3/2}$	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
$5 x $	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
$(1 + x)^2$	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Tabelle 5.11

$a(t, x) = (2 - x)/10$	$n = 100, m = 50$			$n = 200, m = 50$			$n = 500, m = 50$		
$\sigma^2(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
$1 + x^2$	94,1	90,8	88,3	97,5	95,8	93,9	99,5	98,8	97,8
x^2	99,6	99,1	98,8	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
$5 x ^{3/2}$	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
$5 x $	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
$(1 + x)^2$	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

Tabellen 5.9-5.11: Simulierte Power des parametrischen Bootstrap Tests basierend auf der Statistik $\sqrt{n}M_N^2/\rho_N$ für die Hypothese $H_0 : \sigma^2(t, X_t) = \alpha$ mit $n = 100, 200, 500, m = 10, 20, 50$ und verschiedenen Alternativen.

Tabelle 5.12

$a(t, x) = (2 - x)/10$	$n = 100, m = 10$			$n = 200, m = 10$			$n = 500, m = 10$		
$\sigma^2(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
$1 + x^2$	69,8	55,3	40,5	68,2	54,4	46,3	72,7	61,1	55,6
1	91,9	86,6	79,8	95,9	92,2	88,4	98,4	97,0	95,3
$5 x ^{3/2}$	33,8	18,5	11,1	39,0	20,0	11,5	42,0	23,3	12,4
$5 x $	55,3	38,3	22,6	63,1	44,4	30,0	79,0	61,8	45,1
$(1 + x)^2$	68,4	50,1	33,4	75,9	60,6	48,2	79,2	68,3	57,1

Tabelle 5.13

$a(t, x) = (2 - x)/10$	$n = 100, m = 20$			$n = 200, m = 20$			$n = 500, m = 20$		
$\sigma^2(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
$1 + x^2$	69,6	53,6	40,3	68,8	57,6	48,6	73,5	65,2	57,3
1	92,5	87,6	82,6	97,1	94,0	91,6	99,2	98,4	96,7
$5 x ^{3/2}$	34,0	18,1	9,5	34,6	20,6	10,5	36,2	19,7	9,7
$5 x $	55,1	34,7	20,8	63,5	45,8	29,3	79,0	61,9	46,3
$(1 + x)^2$	70,4	50,4	34,3	74,5	60,3	44,6	80,3	67,9	56,0

Tabelle 5.14

$a(t, x) = (2 - x)/10$	$n = 100, m = 50$			$n = 200, m = 50$			$n = 500, m = 50$		
$\sigma^2(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
$1 + x^2$	69,1	55,2	44,3	71,0	59,6	49,0	73,5	64,8	57,5
1	95,3	90,0	85,0	97,7	94,9	92,8	99,5	98,6	97,9
$5 x ^{3/2}$	31,6	16,6	7,6	33,3	16,0	8,1	35,9	20,7	11,5
$5 x $	49,3	32,2	17,6	63,2	46,9	30,7	77,0	62,7	47,8
$(1 + x)^2$	72,1	51,3	33,1	76,8	63,8	50,0	79,7	69,9	60,3

Tabellen 5.12-5.14: Simulierte Power des parametrischen Bootstrap Tests basierend auf der Statistik $\sqrt{n}M_N^2/\rho_N$ für die Hypothese $H_0 : \sigma^2(t, X_t) = \alpha X_t^2$ mit $n = 100, 200, 500, m = 10, 20, 50$ und verschiedenen Alternativen.

Tabelle 5.15

$a(t, x) = (2 - x)/10$	$n = 100$			$n = 200$			$n = 500$		
$\sigma^2(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
$1 + x^2$	80,5	73,3	67,9	88,0	84,0	80,2	94,1	92,4	90,3
x^2	94,3	91,4	88,9	98,9	97,6	96,4	100,0	99,6	99,4
$5 x ^{3/2}$	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
$5 x $	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
$(1 + x)^2$	99,8	99,6	98,8	100,0	100,0	99,9	100,0	100,0	100,0

Tabelle 5.15: Simulierte Power des Parametrischen Bootstrap Tests basierend auf der Statistik $\sqrt{n}\tilde{M}_N^2/\tilde{\rho}_n$ für die Hypothese $H_0 : \sigma^2(t, X_t) = \alpha$ mit $n = 100, 200, 500$ und verschiedenen Alternativen.

Tabelle 5.16

$a(t, x) = (2 - x)/10$	$n = 100$			$n = 200$			$n = 500$		
$\sigma^2(t, x)$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
$1 + x^2$	58,8	44,5	35,6	58,3	46,4	39,0	65,8	56,8	51,5
1	80,7	73,1	67,2	86,6	82,0	77,8	94,0	90,6	88,0
$5 x ^{3/2}$	36,0	20,2	11,7	37,0	20,0	10,2	36,4	20,2	12,2
$5 x $	51,2	34,4	24,3	54,2	34,8	25,0	60,3	45,3	35,4
$(1 + x)^2$	57,0	39,7	28,9	64,0	47,8	37,7	66,0	55,5	48,6

Tabelle 5.16: Simulierte Power des parametrischen Bootstrap Tests basierend auf der Statistik $\sqrt{n}\tilde{M}_n^2/\tilde{\rho}_n$ für die Hypothese $H_0 : \sigma^2(t, X_t) = \alpha X_t^2$ mit $n = 100, 200, 500$ und verschiedenen Alternativen.

Tabelle 5.17

$a(t, x) = 0$	$n = 100$			$n = 200$			$n = 500$		
$\sigma^2(t, x) = (1 + x)^2$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
m=10	8,4	4,4	2,7	7,1	3,1	1,4	4,4	2,0	1,1
m=20	8,0	3,8	1,5	6,0	2,4	1,1	4,9	1,6	0,6
m=50	6,9	3,3	1,6	6,4	2,6	1,3	3,8	1,4	0,5

Tabelle 5.17: Simuliertes Level des Abstandtests für die Hypothese $H_0 : \frac{M^2}{[\sigma^2, \sigma^2]} \leq 0,1$ mit $\sigma_1^2(t, x) = x^2$, $n = 100, 200, 500$ und $m = 10, 20, 50$.

Tabelle 5.18

$a(t, x) = 0$	$n = 100$			$n = 200$			$n = 500$		
$\sigma^2(t, x) = (1 + x)^2$	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
m=10	46,6	36,7	31,1	56,2	45,3	38,6	69,6	61,9	55,8
m=20	48,7	39,2	32,9	60,9	51,2	44,3	69,7	61,3	55,0
m=50	52,7	43,1	35,9	61,6	52,2	45,1	73,5	65,8	59,5

Tabelle 5.18: Simulierte Power des Abstandtests für die Hypothese $H_0 : \frac{M^2}{[\sigma^2, \sigma^2]} \leq 0,1$ mit $\sigma_1^2(t, x) = x^2$, $n = 100, 200, 500$ und $m = 10, 20, 50$.

Kapitel 6

Appendix

Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Erstes Auftreten
X_t	Brownsches Semimartingal zur Zeit t	Seite 5
a	Driftfunktion	Seite 5
σ	Volatilitätsfunktion	Seite 5
W	Brownsche Bewegung	Seite 5
IV_t	Integrierte Volatilität	Seite 5
RV_t	Realisierte Volatilität	Seite 5
$V(X, r)_t^n$	Power Variationsstatistik	Seite 6
$V(X, r, s)_t^n$	Bipower Variationsstatistik	Seite 6
J_t	Sprungprozess zur Zeit t	Seite 6
ϵ_t	Prozess des Rauschens zur Zeit t	Seite 7
$RPV(r)_t^n$	Range-basierter Power Variationsschätzer	Seite 8
M_t^2	Prozess zur Abstandsmessung	Seite 8
α^{min}	Vektor, der M_t^2 minimiert	Seite 8
$\xrightarrow{\mathcal{D}_{st}}, \xrightarrow{\mathcal{G}_{st}}$	Zeichen für stabile Konvergenz	Seite 11
\xrightarrow{P}	Konvergenz in Wahrscheinlichkeit	Seite 12
∇g	Gradient von g	Seite 12
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$	Filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum	Seite 13
$\Delta_i^n X$	Inner-Tag Ertrag von X_t für den Zeitraum $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$	Seite 13
μ_r	r -tes absolutes Moment einer standardnormalverteilten ZV	Seite 13
$V(X, r, s)_t$	Grenzwert von $V(X, r, s)_t^n$	Seite 14
$U(r, s)_t$	Grenzprozess im ZGWS von $\sqrt{n}(V(X, r, s)_t^n - V(X, r, s)_t)$	Seite 14
$\rho^2(r, s)_t$	Bedingte Varianz von $U(r, s)_t$	Seite 15
$\rho^2(r, s)_t^n$	Schätzer von $\rho^2(r, s)_t$	Seite 15
S_n, T_n	Normierte Versionen von $\sqrt{n}(V(X, r, s)_t^n - V(X, r, s)_t)$	Seite 15
N_t	Zählprozess zur Zeit t	Seite 16
$MPV_{(r_1, \dots, r_k), t}^n$	Realisierte Multipower Variationsstatistik	Seite 17
$C_{1,r}, C_{2,sym}$	Rechts- bzw. symmetrisches zweiseitiges Konfidenzintervall	Seite 17

Symbol	Bedeutung	Erstes Auftreten
$V^*(X, r, s)^n$	i.i.d. Bootstrap Version von $V(X, r, s)^n$	Seite 20
$\rho^{*2}(r, s)$	i.i.d. Bootstrap Version von $\rho^2(r, s)$	Seite 20
$\rho^{*2}(r, s)^n$	i.i.d. Bootstrap Version von $\rho^2(r, s)^n$	Seite 20
S_n^*	i.i.d. Bootstrap Version von S_n	Seite 20
T_n^*	i.i.d. Bootstrap Version von T_n	Seite 20
$V^{WB}(X, r, s)^n$	Wild Bootstrap Version von $V(X, r, s)^n$	Seite 23
$\rho_{WB}^2(r, s)$	Wild Bootstrap Version von $\rho^2(r, s)$	Seite 23
$\rho_{WB}^2(r, s)^n$	Wild Bootstrap Version von $\rho^2(r, s)^n$	Seite 23
S_n^{WB}	Wild Bootstrap Version von S_n	Seite 23
T_n^{WB}	Wild Bootstrap Version von T_n	Seite 23
η	Externe ZV	Seite 23
μ_m^{WB}	m-tes absolutes Moment der externen ZV	Seite 23
$\Phi(x)$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung	Seite 26
$\phi(x)$	Dichtefunktion der Standardnormalverteilung	Seite 26
q_1, k_2, k_3	Konstanten in der Edgeworth expansion	Seite 26
plim	Grenzwert in Wahrscheinlichkeit	Seite 27
μ	Sprungmaß	Seite 54
ν	Kompensator von μ	Seite 54
X_{s-}	Linksseitiger Grenzwert von X zur Zeit s	Seite 56
$\bar{V}(X, p)_t^n$	Abgeschnittene realisierte Power Variation	Seite 56
$T(X, p)_t^n$	Neue Klasse von Teststatistiken für Sprünge	Seite 56
$\rho^2(p)_t$	Bedingte Varianz in ZGWS von $T(X, p)_t^n$	Seite 57
$\rho^2(p)_t^n$	Schätzer von $\rho^2(p)_t$	Seite 57
$S(p)_t^n, \hat{S}(p)_t^n$	Normierte Versionen von $T(X, p)_t^n$	Seite 57
U	Standardnormalverteilte ZV	Seite 58
P^η	Verteilung der externen ZV	Seite 58
δ	Dirac Maß	Seite 58
$T^{BS}(X)_t^n$	Teststatistik für Sprünge (Barndorff-Nielsen und Shephard)	Seite 59
$T^{BS,r}(X)_t^n$	Teststatistik für Sprünge (Barndorff-Nielsen und Shephard)	Seite 60
$T^{AJ}(X)_t^n$	Teststatistik für Sprünge (Aït-Sahalia und Jacod)	Seite 60
γ_n	Folge mit $\gamma_n \rightarrow 0$	Seite 60
Z_t	Semimartingal mit Rauschen	Seite 62
Z_i^n	Statistik um verunreinigte Daten vorzubehandeln	Seite 63
$T^{Rauschen}(Z, p)_t^n$	Analogon zu $T(X, p)_t^n$ im Modell mit Rauschen	Seite 63
$\Gamma(p)_t^n$	Varianzschätzer im Modell mit Rauschen	Seite 64
$S^{Rauschen}(p)_t^n$	Normierte Version von $T^{Rauschen}(Z, p)_t^n$	Seite 64
$BT(1, 1)_t^n$	Bipower Schätzer im Modell mit Rauschen	Seite 66
NV_t^n	Schätzer für die Varianz des Rauschens	Seite 66
$\tilde{T}(X, p)_t^n$	$T(X, p)_t^n$ ohne den Indikator	Seite 79
$\tilde{S}(p)_t^n$	$\hat{S}(p)_t^n$ ohne den Indikator	Seite 80
$\bar{T}^{Rauschen}(Z, p)_t^n$	$T^{Rauschen}(Z, p)_t^n$ ohne den Indikator	Seite 82
$\bar{\Gamma}(p)_t^n$	$\Gamma(p)_t^n$ ohne den Indikator	Seite 83

Symbol	Bedeutung	Erstes Auftreten
$C^{1,2}$	Fkt. ist ein- bzw. zweimal stetig differenzierbar (1. bzw. 2. Variable)	Seite 87
$[f, g]$	Inneres Produkt für quadratisch integrierbare Funktionen	Seite 88
C_0, C_i, D_{ij}	Größen um M^2 darzustellen	Seite 88
$s_{i,n,m}$	Range von X_t im Intervall $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$	Seite 88
$\lambda_{r,m}$	Diskretes r-tes absolutes Moment der Range einer Br. Bewegung	Seite 89
$MN(0, \eta^2)$	Gemischte Normalverteilung mit Varianz η^2	Seite 90
$C_0^{n,m}, C_i^{n,m}, D_{ij}^n$	Schätzer von C_0, C_i, D_{ij}	Seite 91
M_N^2	Schätzer von M^2	Seite 91
ρ^2	Bedingte Varianz des Limes von $\sqrt{n}(M_N^2 - M^2)$	Seite 93
ρ_N^2	Schätzer von ρ^2	Seite 94
$\tilde{\rho}^2$	Bedingte Varianz im ZGWS für Abstandshypothesen	Seite 95
$\tilde{\rho}_N^2$	Schätzer von $\tilde{\rho}^2$	Seite 95
α_N^{min}	Schätzer von α^{min}	Seite 96
X_i^{*j}	Bootstrapdaten	Seite 96
$\tilde{M}_n^2, \tilde{C}_0^n, \tilde{C}_i^n$	Ertrags-basierte Analogons zu $M_N^2, C_0^{n,m}, C_i^{n,m}$	Seite 97
$\tilde{\rho}^{2,e}$	Ertrags-basiertes Analogon zu ρ^2	Seite 97
$\tilde{\rho}_n^{2,e}$	Schätzer von $\tilde{\rho}^{2,e}$	Seite 98

Literaturverzeichnis

- [1] Achieser N.I. (1956), *Theory of approximation*, New York, Frederick Ungar Publishing.
- [2] Ait-Sahalia Y. (1996), *Testing continuous-time models of the spot interest rate*, Review of Financial Studies, 9, 385–426.
- [3] Ait-Sahalia Y. (2002), *Telling from discrete data whether the underlying continuous-time model is a diffusion*, Journal of Finance, 57, 2075–2112.
- [4] Ait-Sahalia Y., Jacod J. (2008), *Testing for jumps in a discretely observed process*, demnächst in Annals of Statistics.
- [5] Aldous D.J., Eagleson G.K. (1978), *On mixing and stability of limit theorems*, The Annals of Probability, 6 (2), 325–331.
- [6] Andersen T.G., Bollerslev T. (1998), *Answering the skeptics: yes, standard volatility models do provide accurate forecasts*, International Economic Review, 39, 885–905.
- [7] Andersen T.G., Bollerslev T., Christoffersen P., Diebold F.X. (2005), *Practical volatility and correlation modeling for financial market risk management*, NBER Working Paper Nr. 11069 und in M. Carey und R. Stulz (Eds.), *Risk for Financial Institutions*, Chicago, University of Chicago Press.
- [8] Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X. (2002), *Parametric and nonparametric measurements of volatility*, in Y. Ait-Sahalia und L.P. Hansen (Eds.), *Handbook of Financial Econometrics*, North-Holland, Elsevier.
- [9] Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P. (1998), *The distribution of exchange rate volatility*, Journal of the American Statistical Association, 96, 42–55.
- [10] Bakshi G., Cao C., Chen Z. (1997), *Empirical performance of alternative option pricing models*, Journal of Finance, 52, 2003–2049.
- [11] Bakshi G., Cao C., Chen Z. (2000), *Pricing and hedging long-term options*, Journal of Econometrics, 94, 277–318.

- [12] Barndorff-Nielsen O.E., Graversen S.E., Jacod J., Podolskij M., Shephard N. (2006), *A central limit theorem for realised power and bipower variations of continuous semimartingales*, In Y. Kabanov, R. Lipster und J. Stoyanov (Eds.), *From Stochastic Analysis to Mathematical Finance, The Shiryaev Festschrift*, Berlin, Springer-Verlag, 33–68.
- [13] Barndorff-Nielsen O.E., Graversen S.E., Jacod J., Shephard N. (2006), *Limit theorems for bipower variation in financial econometrics*, *Econometric Theory*, 22, 677–719.
- [14] Barndorff-Nielsen O.E., Hansen P.R., Lunde A., Shephard N. (2004), *Regular and modified kernel-based estimators of integrated variance: the case with independent noise*, unveröffentlichter Artikel, erhältlich unter http://www.finance.ox.ac.uk/file_links/finecon_papers/2004fe20.pdf.
- [15] Barndorff-Nielsen O.E., Hansen P.R., Lunde A., Shephard N. (2006), *Designing realised kernels to measure the ex-post variation of equity prices in the presence of noise*, Working Paper, Nuffield College, University of Oxford, erhältlich unter <http://www.nuffield.ox.ac.uk/users/shephard/realised.pdf>, demnächst in *Econometrica*.
- [16] Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2002), *Econometric analysis of realised volatility and its use in estimating stochastic volatility models*, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 64, 253–280.
- [17] Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2004a), *Power and bipower variation with stochastic volatility and jumps*, *Journal of Financial Econometrics*, 2, 1–48.
- [18] Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2004b), *Econometric analysis of realised covariation: high frequency based covariance, regression, and correlation in financial economics*, *Econometrica*, Vol. 72, Nr. 3, 885–925.
- [19] Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2006), *Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation*, *Journal of Financial Econometrics*, 4, 1–30.
- [20] Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2007), *Variation, jumps, market frictions and high frequency data in financial econometrics*, In R. Blundel, P. Torsten und W.K. Newey (Eds.), *Advances in economics and econometrics: theory and applications, ninth world congress*, Cambridge University Press.
- [21] Bay X., Russell J.R., Tiao G.C. (2000), *Beyond Merton's utopia: effects of non-normality and dependence on the precision of variance estimates using high-frequency financial data*, unveröffentlichter Artikel, Graduate School of Business, University of Chicago.
- [22] Black F., Scholes M. (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, *Journal of Political Economy*, 81, 637–654.

- [23] Carr P., Wu L. (2003), *What type of process underlies options? A simple robust test*, Journal of Finance, 58, 2581–2610.
- [24] Christensen K., Podolskij M. (2006), *Range-based estimation of quadratic variation*, Working Paper, Ruhr-Universität Bochum, erhältlich unter <https://eldorado.uni-dortmund.de/bitstream/2003/23072/1/tr37-06.pdf>.
- [25] Christensen K., Podolskij M. (2007), *Realised range-based estimation of integrated variance*, Journal of Econometrics, 141, 2, 323–349.
- [26] Constantinides G.M. (1992), *A theory of the nominal term structure of interest rates*, Review of Financial Studies, 5, 531–552.
- [27] Cont R., Mancini C. (2007), *Nonparametric tests for analyzing the fine structure of price fluctuations*, Columbia University Financial Engineering Report No. 2007-13, erhältlich unter <http://ssrn.com/abstract=1081491>.
- [28] Corradi V., White H. (1999), *Specification tests for the variance of a diffusion*, Journal of Time Series Analysis., 20(3), 253–270.
- [29] Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. (1985), *A theory of the term structure of interest rate*, Econometrica, 53, 385–407.
- [30] Davidson R., Flachaire E. (2001), *The wild Bootstrap, tamed at last*, Working Paper, Darp58, STICERD, London School of Economis.
- [31] Dette H., Podolskij M. (2008), *Testing the parametric form of the volatility in continuous time diffusion models - a stochastic process approach*, Journal of Econometrics, 143, 1, 56–73.
- [32] Dette H., Podolskij M., Vetter M. (2006), *Estimation of integrated volatility in continuous time financial models with applications to goodness-of-fit testing*, Scandinavian Journal of Statistics, 33, 259–278.
- [33] Dette H., von Lieres und Wilkau C. (2003), *On a test for a parametric form of volatility in continuous time financial models*, Finance and Stochastics., 7, 363–384.
- [34] Duffie J.D., Harrison J.M. (1993), *Arbitrage pricing of Russian options and perpetual lookback options*, The Annals of Applied Probability, 3, 641–651.
- [35] Duffie D., Pan J., Singleton K. (2000), *Transform analysis and asset pricing for affine jump diffusions*, Econometrica, 68, 1343–1376.
- [36] Efron B. (1979), *Bootstrap methods: another look at the jackknife*, Annals of Statistics, 7, 1–26.

- [37] Fan J., Wang Y. (2007), *Multi-scale jump and volatility analysis for high-frequency financial data*, Journal of the American Statistical Association, 102, 480, 1349–1362.
- [38] Feller W. (1951), *The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables*, Annals of Mathematical Statistics, 22(3), 427–432.
- [39] Gonçalves S., Meddahi N. (2005), *Bootstrapping realized volatility*, Working Paper, Université de Montréal.
- [40] Hall P. (1992), *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*, New York, Springer-Verlag.
- [41] Hall P., Heyde C.C. (1980), *Martingale limit theory and its application*, New York, Academic Press.
- [42] Hansen P.R., Lunde A. (2006), *Realised variance and market microstructure noise*, Journal of Business and Economic Statistics, 24(2), 127–161.
- [43] Hodges J.L., Lehmann E.L. (1954), *Testing the approximative validity of statistical hypotheses*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 16, 261–268.
- [44] Horowitz J. (2001), *The bootstrap in econometrics*, in J.J. Heckman und E.E. Leamer (Eds.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 5, 3159–3228, New York, Elsevier Science.
- [45] Howison S., Rafailidis A., Rasmussen H. (2004), *On the pricing and hedging of volatility derivatives*, Applied Mathematical Finance, 11, 317–346.
- [46] Jacod J. (1994), *Limit of Random Measures Associated with the Increments of a Brownian Semimartingale*, Preprint 120, Laboratoire de Probabilités, Univ. P. et M. Curie.
- [47] Jacod J. (1997), *On continuous conditional Gaussian martingales and stable convergence in law*, Seminaire de Probabilités XXXI, 232–246.
- [48] Jacod J. (2008), *Asymptotic properties of realized power variations and related functionals of semimartingales*, Stochastic Processes and their Applications 118(4), 517–559.
- [49] Jacod J., Li Y., Mykland P.A., Podolskij M., Vetter M. (2007), *Microstructure noise in the continuous case: the pre-averaging approach*, Working Paper, erhältlich unter ftp://ftp.econ.au.dk/creates/rp/07/rp07_43.pdf, demnächst in Stochastic Processes and their Applications.
- [50] Jacod J., Protter P. (1998), *Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations*, The Annals of Probability, 26, 267–307.
- [51] Jacod J., Shiryaev A.N. (2003), *Limit theorems for stochastic processes*, Berlin, Springer-Verlag.

- [52] Jiang G.J., Oomen R.C. (2005), *A new test for jumps in asset prices*, Technical Report, The University of Warwick, Warwick Business School.
- [53] Karatzas I. (1988), *On pricing of American options*, Applied Mathematics and Optimization, 17, 37–60.
- [54] Karatzas I., Shreve S.E. (1991), *Brownian motion and stochastic calculus*, New York, Springer-Verlag.
- [55] Katz M.L. (1963), *Note on the Berry-Esseen Theorem*, Annals of Mathematical Statistics, Vol. 34, Nr. 3, 1107–1108.
- [56] Lee S.S., Mykland P.A. (2007), *Jumps in real-time financial markets: a new nonparametric test and jump dynamics*, demnächst in Review of Financial Studies.
- [57] Mammen E. (1993), *Bootstrap and wild bootstrap for high dimensional linear models*, Annals of Statistics, 21, 255–285.
- [58] Mancini C. (2001), *Disentangling the jumps of the diffusion in a geometric jumping Brownian motion*, Giornale dell’Istituto Italiano degli Attuari LXIV, 19–47.
- [59] Mancini C. (2004), *Estimation of the characteristics of the jumps of a general Poisson-diffusion model*, Scandinavian Actuarial Journal, 1, 42–52.
- [60] Martens M., van Dijk D. (2007), *Measuring volatility with the realized range*, Journal of Econometrics, 138, 181–207.
- [61] Merton R.C. (1976), *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, Journal of Financial Economics, 3, 125–144.
- [62] Parkinson M. (1980), *The extreme value method for estimating the variance of the rate of return*, Journal of Business, 53, 61–65.
- [63] Podolskij M. (2006), *New theory on estimation of integrated volatility with applications*, PhD Thesis, Ruhr-Universität Bochum, Fakultät für Mathematik.
- [64] Podolskij M., Vetter M. (2006), *Estimation of volatility functionals in the simultaneous presence of microstructure noise and jumps*, Working Paper, erhältlich unter <http://www.ruhr-uni-bochum.de/mathematik3/team/mitarbeiter/vetter/index.html>, demnächst in Bernoulli.
- [65] Podolskij M., Vetter M. (2008), *Bipower-type estimation in the noisy diffusion setting*, Working Paper, erhältlich unter ftp://ftp.econ.au.dk/creates/rp/08/rp08_25.pdf.
- [66] Renyi A. (1963), *On stable sequences of events*, Sankya, Series A 25, 293–302.

- [67] Shao J., Tu D. (1995), *The Jackknife and Bootstrap*, New York, Springer-Verlag.
- [68] Vasicek O. A. (1977), *An equilibrium characterization of the term structure*, *Journal of Financial Economics* , 5, 177–188.
- [69] Wu C.F.J. (1986), *Jackknife, bootstrap and other resampling methods in regression analysis*, *Annals of Statistics* 14, 1261–1295.
- [70] Zhang L. (2006), *Efficient estimation of stochastic volatility using noisy observations: a multi-scale approach*, *Bernoulli*, 12, 6, 1019–1043.
- [71] Zhang L., Mykland P.A., Aït-Sahalia Y. (2005), *A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high-frequency data*, *Journal of the American Statistical Association*, 472, 1394–1411.

Danksagung

„Meine alte Olivetti ist Zeuge, wie fleißig ich lüge und von Fassung zu Fassung der Wahrheit um einen Tippfehler näher bin.“ Günter Grass

Ich schreibe zwar weder auf einer Olivetti, noch lüge ich bewußt beim Schreiben, dennoch fand ich das Zitat sehr passend, zumal mich das dazugehörige Bild von Günter Grass über meinem Schreibtisch während meiner gesamten Studien- und Promotionszeit begleitet hat. Aber auch eine Vielzahl von Leuten hat mich während dieser Zeit begleitet, unterstützt und mir stets geholfen. Ich möchte an dieser Stelle die Möglichkeit nutzen, um mich bei diesen zu bedanken. Der erste und größte Dank gilt natürlich meinen Eltern. Sie haben mir die bestmögliche Ausbildung ermöglicht und mich bei all meinen Plänen und Vorhaben nach Leibeskräften unterstützt. Ich konnte stets mit allen Problemen und Sorgen nach Hause kommen und mir dabei sicher sein, Hilfe und Rückendeckung zu bekommen. Dieser Dank gilt natürlich auch meiner restlichen Familie, hier insbesondere meiner Oma und Tante.

Der nächste große Dank gilt meinem Doktorvater Prof. Dr. Holger Dette und meinem Betreuer Dr. Mark Podolskij. Beiden bin ich für die großartige Betreuung, eine stets offene Tür, viele hilfreiche Diskussionen und das nette Arbeitsklima sehr dankbar. In diesem Zusammenhang möchte ich mich auch für Unterstützung bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft (SFB 475, Komplexitätsreduktion in multivariaten Datenstrukturen) bedanken.

Ein mir sehr wichtiges Dankeschön gilt ebenfalls meinen guten und langjährigen Freunden. Im Speziellen möchte ich Matthias (für Asyl, eine tolle WG-Zeit und seine bestechenden Lebensweisheiten), Torben (für das Wissen einen Leidensgenossen zu haben, auf den man sich jederzeit 100%-ig verlassen kann), Florian (für viele entspannte und lustige Stunden am Wasser und dem Wissen, trotz mangelndem Einsatz, dabei nicht als Schneider nach Hause zu gehen), Lisa (für langjährige Freundschaft und das dabei oft geliehene offene Ohr), Vanessa (für juristischen Rat und [noch wichtiger] die gute Laune, die sie dabei mit bezauberndem Lächeln verbreitete), Gört (als altem Mitstreiter der „guten Seite“) und Paul (für eine schöne Studienzeit und traditionell lustige Ausflüge mit dem Zelt) danken.

Auch wenn es sich hier vielleicht komisch liest, möchte ich auch meinen Mathematiklehrern aus der Schulzeit, Herrn Albers und Herrn Behne, danken, da sie mein Interesse an Mathematik weckten und mich auf die Möglichkeit eines Fernstudiums hinwiesen, bzw. hervorragend darauf vorbereiteten, was meine Studienzeit beträchtlich gesenkt hat.

Mein letzter Dank gilt der Person, die wahrscheinlich die „Hauptschuld“ an meinem zügigen Studium und der Entscheidung zu promovieren trägt und nebenbei noch die attraktivste und beste Korrekturleserin ist, die man sich wünschen kann. Ich erinnere mich gerne an die tolle Zeit während des Studiums und die witzigen Dialoge der letzten Monate.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Daniel Ziggel
Geburtsdatum	21.08.1981
Geburtsort	Herdecke (Ruhr)

Ausbildung

08/88 - 06/92	Gem. Grundschule Bruckhausen, Hünxe
08/92 - 06/01	Otto-Hahn-Gymnasium, Dinslaken
06/01	Abitur
10/01 - 09/02	Fernstudium „Früheinstieg ins Mathematikstudium“ an der TU Kaiserslautern
10/02 - 09/05	Diplomstudiengang Wirtschaftsmathematik an der TU Kaiserslautern
08/05	Diplom in Wirtschaftsmathematik

Zivildienst

07/01 - 04/02	Zivildienst im AWO-Kinderheim, Hiesfeld
---------------	---

Beschäftigung

08/04 - 09/04	Praktikum bei der WestLB im Risikomanagement, Düsseldorf
11/04 - 02/05	Praktikum bei der WestAM im Assetmanagement, Düsseldorf
08/05 - 09/05	Praktikum bei zeb im Assetmanagement, Münster
01/06 - 08/08	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum