

---

---

FORMALE ANALYSE- UND VERIFIKATIONSPARADIGMEN  
FÜR AUSGEWÄHLTE VERTEILTE SPLICING-SYSTEME

---

---

**Dissertation**

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktoringenieur (Dr.-Ing.)

vorgelegt an der Technischen Universität Dresden  
Fakultät Informatik

eingereicht von

**Dipl.-Inf. Christian Hofmann**

geboren am 30.05.1979 in Dresden

Tag der Verteidigung: 09.10.2008

Gutachter:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Horst Reichel  
(*Technische Universität Dresden*)

Prof. Dr. rer. nat. habil. Jürgen Dassow  
(*Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg*)

Prof. Dr.-Ing. Michael Schroeder  
(*Technische Universität Dresden*)

Dresden im November 2008



## Danksagung

An erster Stelle sei Herrn Professor Horst Reichel herzlichst für die Übernahme und Betreuung meiner thematischen Aufgabenstellung und die vielfältige von ihm entgegengebrachte Unterstützung gedankt.

Mein weiterer Dank gilt sowohl Herrn Professor Jürgen Dassow als auch Herrn Professor Michael Schroeder für die Übernahme der weiteren Gutachten.

Ein ganz besonderer Dank gilt Frau Dr. Monika Sturm für die wissenschaftliche Betreuung meiner Arbeit und die konstruktive Kritik. Mit ihrer Erfahrung stand sie mir immer tatkräftig zur Seite.

Für die mir entgegengebrachte Liebe, immerwährende Unterstützung und den orthografischen Feinschliff meiner Arbeit danke ich meiner Ulrike recht herzlich.

Insbesondere meinen Eltern möchte ich an dieser Stelle Danke sagen. Sie haben mich von jeher in jeder Hinsicht unterstützt.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	DNA-Computing . . . . .	7
1.2	Formale Analyse und Verifikation . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>15</b>
2.1	Formale Sprachen und CHOMSKY-Grammatiken . . . . .	16
2.2	Transitionssysteme und Simulationskonzepte . . . . .	18
2.3	Splicing-Operation . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Verteilte kommunizierende Splicing-Systeme</b>	<b>23</b>
3.1	Systembeschreibung . . . . .	23
3.2	Ausgewählte universelle TT-EH-Systeme . . . . .	26
3.2.1	Das System TT6 . . . . .	27
3.2.2	Das System TT2 . . . . .	29
3.2.3	Das System TT3 . . . . .	31
3.3	Strukturelle operationelle Semantik für TT-Systeme . . . . .	32
3.4	Formale Verifikation von TT-EH-Systemen . . . . .	37
3.5	Formale Verifikation grammatikbasierender TT-EH-Systeme . . . . .	51
3.5.1	Korrektheit . . . . .	51
3.5.2	Vollständigkeit . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Zeitgesteuerte verteilte Splicing-Systeme</b>	<b>59</b>
4.1	Systembeschreibung . . . . .	59
4.2	TVDH-System vom Grad Zwei (TVDH2) . . . . .	62
4.3	Strukturelle operationelle Semantik für TVDH-Systeme . . . . .	64
4.4	Formale Verifikation von TVDH-Systemen . . . . .	66
4.5	Formale Verifikation grammatikbasierender TVDH-Systeme . . . . .	72
4.5.1	Korrektheit . . . . .	73
4.5.2	Vollständigkeit . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Splicing-Membran-Systeme</b>	<b>79</b>
5.1	Systembeschreibung . . . . .	79
5.2	Das ESP-System $\mathcal{M}$ . . . . .	83
5.3	SOS für geschlossene Splicing-Membran-Systeme . . . . .	85
5.4	Formale Verifikation von ESP-Systemen . . . . .	88
5.5	Formale Verifikation grammatikbasierender ESP-Systeme . . . . .	98

5.5.1	Korrektheit . . . . .	99
5.5.2	Vollständigkeit . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>107</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>111</b>
<b>A</b>	<b>Tableauregeln des Systems <math>\Gamma_{2 \cdot n+1}</math></b>	<b>119</b>
<b>B</b>	<b>Tableaubeweis TT6</b>	<b>121</b>
<b>C</b>	<b>Tableaubeweis TT2</b>	<b>137</b>
<b>D</b>	<b>Tableauregeln des Systems <math>\Gamma</math> aus Satz 4.7</b>	<b>145</b>
<b>E</b>	<b>Tableaubeweis TVDH2</b>	<b>147</b>
<b>F</b>	<b>Tableaubeweis M</b>	<b>171</b>

## KAPITEL 1

# Einleitung

Seit Mitte des vergangenen Jahrhunderts beherrschen elektronische Rechner bzw. integrierte Schaltkreise in zunehmendem Maße unser alltägliches Leben. Besonders aufgrund einer rasanten Entwicklung und Miniaturisierung der zugrunde liegenden Hardware ist nahezu jeder Bereich von Automatisierungen betroffen. Neben der konventionellen Rechnerarchitektur – basierend auf der Berechnung *in silico* – etablierten sich in den letzten Dekaden zunehmend alternative Berechnungsparadigmen. Ausgehend von der Charakterisierung der Konzepte und Mechanismen natürlicher Abläufe basieren diese insbesondere auf biochemischen, neuronalen und physikalischen Prozessen. Diese Methoden, zusammengefasst in dem Gebiet des *Natural Computing*, können dabei aufgrund unterschiedlicher Konzepte in verschiedene Teilbereiche gegliedert werden. Das Teilgebiet des *molekularen Rechnens* beschreibt formal die Möglichkeit zum Rechnen mit Molekülen unter Anwendung molekularbiologischer, also biochemischer Operationen. Modelle des molekularen Rechnens werden einerseits zur Modellierung und Analyse von Abläufen in lebenden Zellen andererseits als unkonventionelle Rechenmodelle zur Lösung anwendungsspezifischer Aufgabenstellungen genutzt.

Im *DNA-Computing*, dem prominentesten Vertreter des molekularen Rechnens, wird das Erbmolekül Desoxyribonukleinsäure (DNS bzw. DNA) als Datenträger sowie die in der Natur existierenden, teils enzymatischen, biochemischen Reaktionen und physikalischen Abläufe auf DNA-Molekülen als Operationen genutzt. Vorteile dieses Berechnungskonzeptes ergeben sich u. a. durch eine hohe Datendichte, die Langlebigkeit der Moleküle und damit der Persistenz der Daten sowie einer massiven Datenparallelität, da eine Operation gleichzeitig auf eine Vielzahl von DNA-Strängen angewendet werden kann. Eine kurze Einführung in das Gebiet des DNA-Computing sowie dessen Bezug zu Eigenschaften der in dieser Arbeit vorgestellten verteilten Splicing-Systeme wird in Abschnitt 1.1 gegeben.

Die im nachfolgenden Abschnitt näher beschriebene Rekombinationsmöglichkeit von DNA wurde erstmals von T. Head in [Hea87] als *Splicing-Operation*

sprachtheoretisch formalisiert. Sie bildet die Grundlage der in dieser Arbeit analysierten und verifizierten ausgewählten verteilten Splicing-Systeme. Unter Ausnutzung der massiven Datenparallelität beschreiben diese Systeme alternative Berechnungsmodelle, etwa zur effizienten Lösung kombinatorischer Suchprobleme, oder sie werden zur Modellierung biochemischer Prozesse genutzt. Während die verteilten kommunizierenden Splicing-Systeme – kurz TT-EH-Systeme – (u. a. in [CKP96],[Päu97],[PRM98],[SH01],[HS04]) in Kapitel 3 und die zeitgesteuerten verteilten Splicing-Systeme mit dynamischen Splicing-Regeln – TVDH-Systeme – (u. a. in [Päu97],[MRV03],[Ver04b] oder [MVR05]) in Kapitel 4 die Berechnung *in vitro*, also im Reagenzglas ausführen, basieren die in Kapitel 5 vorgestellten Splicing-Membran-Systeme – oder kurz ESP-Systeme – ([Päu98],[DP98],[Päu02],[Ver04a],[VM05] etc.) auf dem Berechnungskonzept *in vivo*, d. h. in der lebenden Zelle. Allen drei Systemparadigmen ist indessen gemein, dass eine Berechnung der Generierung einer formalen Sprache entspricht. Dies wird durch sukzessive Anwendung der Splicing-Operation auf eine initial gegebene Axiomenmenge mit einer zwischengeschalteten Verteilung der jeweils erzeugten Sprachen erreicht.

Neben der Definition von Systemen zur Lösung spezifischer Aufgabenstellungen nimmt die Entwicklung von Systemen mit universeller Berechnungsstärke einen wichtigen Punkt ein. Dabei sind die in dieser Arbeit betrachteten universellen verteilten Splicing-Systeme in ihren Komponenten unterspezifiziert, so dass die zu lösende Aufgabenstellung, kodiert als Chomsky-Typ-0-Grammatik, dem System als Parameter übergeben wird.

Die Vollständigkeit und Korrektheit von entsprechenden Systemen wird jedoch nicht durch die formale Notation der mathematischen Definition gesichert. Ebenso kann die Fehlerfreiheit nicht unmittelbar aus Simulationen der molekularbiologischen Abläufe oder Laborimplementationen abgeleitet werden. Bereits die ökonomischen Aspekte in Bezug auf Labor- und Materialkosten bedingen die Abwesenheit von Inkorrektheiten. Weiterhin erfordert die Modellierung und nachfolgende Analyse von biochemischen Abläufen in der lebenden Zelle bzw. der Dynamik entsprechender biomolekularer Zellsysteme ebenfalls die Anwendbarkeit formaler Methoden, z. B. der in Abschnitt 1.2 beschriebenen.

Bisherige Arbeiten zur formalen Analyse und Verifikation auf dem Gebiet des molekularen Rechnens beschäftigten sich einerseits mit der formalen Verifikation anwendungsspezifischer Systeme des DNA-Computing andererseits mit der formalen Analyse unter Verwendung ausgesuchter Verifikationsmethoden im Gebiet des Membrane-Computing. So wird beispielsweise in [PS02] mittels Induktionstechniken jeweils die Vollständigkeit und Korrektheit zweier auf dem Sticker-Modell beruhender Systeme bewiesen. Sie beschreiben DNA-basierte polynomielle Lösungsalgorithmen für das Untermengensummen- so-



wie das Rucksackproblem. Sowohl in [GMP02] als auch in [MAHR04] wurde die durch Lipton eingeführte DNA-basierte Lösung des SAT-Problems in dem restriktiven Modell nach Lipton bzw. Adleman durch Spezifikation und Verifikation mithilfe der Theorembeweiser PVS bzw. ACL2 als korrekt und vollständig nachgewiesen. In [GP05a] bzw. [GP05b] wird durch Abstraktion und Formalisierung molekularbiologischer Operationen im Sticker-Modell mittels PVS und mithilfe der Floyd-Hoare-Logik zum Nachweis partieller Korrektheit ein Framework zum Beweis von speziellen Programmen in diesem Modell definiert. Anschließend wird ein Algorithmus zur Lösung des Problems der exakten Überdeckung bzw. des Pairwise-Disjoint-Families-Problems spezifiziert und verifiziert.

In [PPS03a] wird ein Membran-System mit unstrukturierten Symbolobjekten – auch als Transitions-P-System bezeichnet – zur Berechnung der Menge der Quadratzahlen  $\{n^2 \mid n \geq 1\}$  und in [PPS03b] der Menge  $\{2^n + n^2 + n \mid n \geq 1\}$  beschrieben, wobei das jeweilige Ergebnis einer Berechnung durch die Anzahl der Objekte in einer Ausgabemembran bestimmt wird. Durch anschließende Analyse, sowohl von Invarianten als auch des Inhalts jeder Membran in jeder erreichbaren Konfiguration des jeweiligen Systems, kann die Korrektheit und Vollständigkeit gezeigt werden. In [PS03] wird eine Familie von Transitions-P-Systemen zur Lösung des SAT-Problems der Aussagenlogik mit linearem Zeitaufwand definiert, wobei mithilfe der Definition und dem Beweis von Invarianten der Systeme die Korrektheit und Vollständigkeit bewiesen wird. Eine Familie von Transitions-P-Systemen zur Lösung des Rucksackproblems in linearer Zeit wird in [PR04] inklusive eines Korrektheitsbeweises angegeben.

Alternativ zur Untersuchung spezieller Membran-Systeme zur Lösung spezifischer Aufgabenstellungen wird u. a. in [PP99] eine Kodierung von Membran-Systemen im Ambienten-Kalkül angegeben, wodurch ein gegebenes System unter Anwendung von Formalismen dieses Kalküls, z. B. des in [CDG<sup>+</sup>03] beschriebenen Model-Checking, analysiert werden kann. Einen wiederum anderen Ansatz beschreibt die in [ACL05] definierte natürliche algebraische Spezifikation von Membran-Systemen mit Symbolobjekten und Membranauflösung. Mithilfe des MAUDE-Systems ermöglicht diese das Linearzeit-Model-Checking bezüglich endlicher Teilzustandsräume. Für die gleiche Systemklasse wird in [ALC06] bzw. in [ACL06] eine strukturelle operationelle Semantik spezifiziert, welche den deduktiven Charakter von Membran-Systemen ausnutzt. Eine Transition besteht darin aus einem maximal parallelen Rewriting-Schritt, einem Kommunikations- und einem Membranauflösungsschritt und wird durch entsprechende Inferenzregeln abgeleitet. Ein Interpreter sowie das LTL-Model-Checking wird durch eine Implementation in MAUDE ermöglicht. Eine Überarbeitung der strukturellen operationellen Semantik aus [ALC06] bzw. [ACL06] ist in [ACL07] einschließlich des Beweises der operationellen Korrespondenz gegeben. Weiterhin ist eine Spezifikation und Interpretati-

on von Membran-Systemen mit Symport/Antiport-Regeln unter Verwendung der Rewriting-Logik von MAUDE in [QFSY04] beschrieben.

Insbesondere auch im Gebiet der Systembiologie besitzt der Einsatz von formalen Verifikationsansätzen eine fundamentale Bedeutung. Die in [CM06] und [RGB<sup>+</sup>06] beschriebenen Ansätze wurden in diesem Rahmen entwickelt. In [CM06] wird unter der Annahme, dass biologische Prozesse nur mit partiellem Wissen modelliert und simuliert werden können, eine Logik zum Ableiten von Informationen auf partiellen Informationen verschiedener Beobachter eines Systems eingeführt. Beispielsweise für die Modellierung der Virenabwehr als offenes System ermöglicht diese dynamisch, epistemische und räumliche Logik den Beweis von bestimmten Eigenschaften. In [RGB<sup>+</sup>06] wurde ein Ansatz zum probabilistischen Model-Checking von speziellen Membran-Systemen mit Protein-Protein-Interaktionsregeln mittels PRISM gegeben und am Beispiel des Zellzyklus in Eukaryoten demonstriert.

Für eine restriktive Klasse von Membran-Systemen mit Symbolobjekten wird in [DILX05] die Entscheidbarkeit des Model-Checking-Problems für zwei verschiedene in der Arbeit eingeführte temporale Logiken untersucht. Mittels SPIN wurde weiterhin ein Beispielsystem verifiziert. Für Systeme mit Promotoren wird in [LDIY05] die Entscheidbarkeit des Model-Checking-Problems in Bezug auf verschiedene temporale Logiken untersucht. Indessen erlaubt die in [FQY04] eingeführte Kodierung von Symbolobjekt-Membran-Systemen im  $\pi$ -Kalkül ohne kommutative Parallelkomposition die Anwendung formaler Methoden der Prozesstheorie. Wie in [QYM04] beschrieben, lassen sich ebenfalls die theoretischen Konzepte und praktischen Werkzeuge der Petri-Netze durch Simulation von Membran-Systemen einsetzen. Ebenso mittels Petri-Netzen werden in [Fri06] Symbolobjekt-Membran-Systeme mit maximaler Parallelität und Prioritäten studiert.

Ein automatentheoretischer Ansatz wird beispielsweise in [CG06a] durch die Definition von Multimengen-Mealy-Automaten, kurz MMA, verfolgt. Diese beschreiben zustandsbasierte Systeme, die auf Multimengen von Objekten arbeiten und mit ihrer Umgebung interagieren. Neben der Definition von Bisimulationen zwischen zwei MMA und dem beobachtbaren Verhalten eines entsprechenden Automaten wird ferner eine koalgebraische Betrachtung vorgestellt. Die MMA aus [CG06a] werden in [CG06b] in ihren Kommunikationsmöglichkeiten erweitert, wobei die maximale Parallelität und der Nichtdeterminismus separat behandelt werden.

Obgleich diese Arbeiten bereits ein breites Spektrum abdecken, existieren bislang jedoch keine entsprechenden Verifikationsansätze für DNA-Computing-Systeme, die auf der Anwendung der Splicing-Operation basieren. So ermöglicht die Definition von strukturellen operationellen Semantiken analog zu

[ALC06], [ACL06] bzw. [ACL07] eine genaue formale Analyse der durch verteilte Splicing-Systeme erzeugten Wörter und somit von formalen Sprachen. Mithilfe der Definition von Simulations- oder Bisimulationsrelationen ergibt sich für zwei gegebene Systeme die Äquivalenz der jeweils erzeugten Sprachen, falls beide Systeme bisimilar sind, d. h. wechselseitig die entsprechenden Ausgaben simulieren können. Außerdem können durch die entsprechende Untersuchung temporaler Eigenschaften eines Systems die im Labor oder in der Zelle ablaufenden Prozesse analysiert werden. Von besonderer Bedeutung ist die Analyse zweier Systeme mit verschiedenen zugrunde liegenden Berechnungsparadigmen. Der Nachweis der Äquivalenz eines in-vitro- sowie eines in-vivo-Systems erlaubt somit die Simulation von Abläufen in der lebenden Zelle im Reagenzglas. Ein Beweis von Sicherheitseigenschaften ist mit diesen Methoden jedoch nur für Systeme mit endlichem Zustandsraum möglich. Ebenso fehlt die Möglichkeit des Nachweises der Korrektheit von grammatikbasierenden Systemen mit möglicherweise universeller Berechnungsstärke. Dabei ist durch Spezifikation eines entsprechenden Systems, welches für jede Chomsky-Typ-0-Grammatik  $G$  die Wortableitung bezüglich  $G$  simuliert, zu zeigen, dass jedes Wort, das durch das auf  $G$  basierende System erzeugt wird, zu der durch  $G$  beschriebenen Sprache gehört.

Bislang existieren allerdings keine entsprechenden allgemeinen Verifikationsansätze für grammatikbasierende DNA-Computing-Systeme mit universeller Berechnungsstärke sowie zum Nachweis von Sicherheitseigenschaften. Die Korrektheit und Vollständigkeit entsprechender Systeme mit universeller Berechnungsstärke ergibt sich zwar unmittelbar aus den Universalitätsbeweisen, diese werden jedoch in der Literatur ausschließlich konstruktiv geführt. Durch Spezifikation eines entsprechenden Systems, welches für jede Chomsky-Typ-0-Grammatik  $G$  die Wortableitung bezüglich  $G$  simuliert, wird gezeigt, dass jedes Wort der Sprache, die durch  $G$  beschrieben wird, auch durch das auf  $G$  basierende System erzeugt werden kann. Es ergibt sich damit die Vollständigkeit des universellen Systems. Um die Korrektheit eines entsprechenden Systems zu zeigen, wird jede mögliche Ableitung des zu untersuchenden Systems betrachtet. Ausgehend von einem Axiom des Systems, welches die Startvariable der Grammatik repräsentiert, wird dieser Top-Down-Ansatz angewandt. Aufgrund der Komplexität der universellen Systeme, insbesondere aufgrund der massiv parallelen Anwendung der Splicing-Operation, ist dieser Ansatz jedoch, wie in dieser Arbeit gezeigt werden kann, fehleranfällig.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert. In **Kapitel 2** werden zunächst notwendige elementare Notationen und Definitionen eingeführt. Neben den Grundlagen der formalen Sprach- und Prozesstheorie wird die Abstraktion der in Abschnitt 1.1 beschriebenen molekularbiologischen Rekombination als Splicing-Operation auf formalen Sprachen definiert.

Die verteilten kommunizierenden Splicing-Systeme werden in **Kapitel 3** formal definiert. Dabei werden jeweils zwei verschiedene Splicing- und Filterparadigmen beschrieben sowie drei Systeme mit universeller Berechnungsstärke eingeführt. Nachfolgend wird eine strukturelle operationelle Semantik für diese TT-EH-Systeme definiert und Simulationsbeziehungen zwischen Systemen untersucht. Mittels des in Abschnitt 3.4 eingeführten Tableaubeweisverfahrens wird der Nachweis von Sicherheitseigenschaften ermöglicht. Eine Erweiterung zum Beweis der Korrektheit von grammatikbasierenden verteilten kommunizierenden Splicing-Systemen wird im Anschluss eingeführt. Die Untersuchung dieser Klasse von Splicing-Systemen wird durch die Korrektheits- und Vollständigkeitsbeweise von zwei der eingeführten Systeme (TT2 und TT6) abgeschlossen.

In **Kapitel 4** werden die zeitgesteuerten verteilten Splicing-Systeme mit dynamischen Splicing-Regeln vorgestellt. Anschließend wird das universelle TVDH-System aus [MRV03] eingeführt. Die im Folgenden definierte strukturelle operationelle Semantik dieser Systemklasse ermöglicht u. a. die Analyse temporaler Eigenschaften und Abhängigkeiten zwischen Systemen. Entsprechend Abschnitt 3.4 wird ein Tableaubeweisverfahren für TVDH-Systeme eingeführt und als adäquat bewiesen. Eine entsprechende Erweiterung erlaubt die Verifikation grammatikbasierender kommunizierender verteilter Splicing-Systeme mit dynamischen Splicing-Regeln. Angewandt auf das universelle System aus [MRV03] kann abschließend die Korrektheit dieses Systems bewiesen werden.

Die Splicing-Membran-Systeme werden in **Kapitel 5** formal eingeführt und im Anschluss wird in Abschnitt 5.2 das in [Päu02] definierte universelle System  $\text{ELSP}_2(\text{spl}, \text{in}, (1, 2, 2, 1))$  vorgestellt. Analog zu den Kapiteln 3 und 4 wird nachfolgend zunächst eine strukturelle operationelle Semantik für eine Klasse von Splicing-Membran-Systemen definiert und danach ein Tableaubeweisverfahren zum Nachweis von Sicherheitseigenschaften eingeführt. Eine Erweiterung dieses Beweisverfahrens ermöglicht für bestimmte grammatikbasierende Splicing-Membran-Systeme den Nachweis oder die Widerlegung der Korrektheit. Für das System  $\text{ELSP}_2(\text{spl}, \text{in}, (1, 2, 2, 1))$  kann beispielsweise in Abschnitt 5.5 die Inkorrektheit gezeigt werden. Eine korrigierte Version dieses Systems, einschließlich eines Korrektheitsbeweises, beschließt dieses Kapitel.

Eine kurze Zusammenfassung und Bewertung der Ergebnisse wird in **Kapitel 6** gegeben.

## 1.1 DNA-Computing

Im interdisziplinären Gebiet des DNA-Computing wird, wie bereits erwähnt, die Desoxyribonukleinsäure als Datenträger eingesetzt. Bausteine der DNA sind Nukleotide, die jeweils aus einer Phosphorsäure, einem Zuckermolekül – der Desoxyribose – und einer der Basen Adenin, Cytosin, Guanin oder Thymin zusammengesetzt sind. Da Nukleotide aufgrund ihrer gebundenen Base unterschieden werden, haben sich die Abkürzungen A (Adenin), C (Cytosin), G (Guanin) und T (Thymin) etabliert. In Abbildung 1.1 ist die Struktur eines Nukleotids mit der Base Adenin als Teil eines DNA-Strangs skizziert. Dabei wird von links nach rechts die Phosphatgruppe  $PO_4$ , die Desoxyribose und die Base Adenin spezifiziert. Wegen ihrer Bindungen werden die fünf Kohlenstoffatome des Zuckermoleküls mit 1' bis 5' markiert, wobei die Phosphatgruppe an das 5'-Kohlenstoffatom und die Base an das 1'-Kohlenstoffatom gebunden sind.

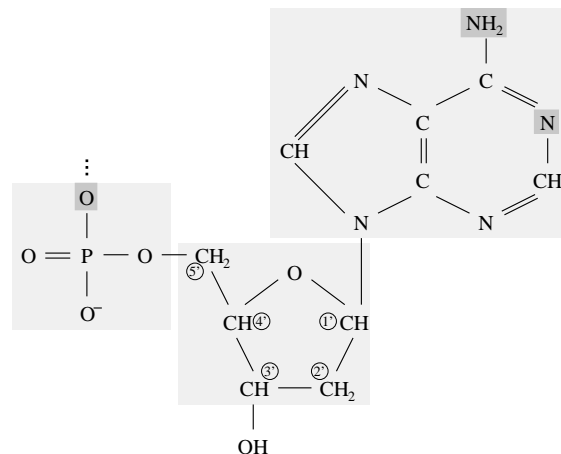


Abbildung 1.1: Darstellung eines Nukleotids in einem DNA-Strang aus [HS04]

Das ebenfalls in der Abbildung markierte Sauerstoffatom der Phosphatgruppe ist wiederum an die Desoxyribose eines weiteren Nukleotids gebunden, wodurch ein DNA-Einzelstrang gebildet wird. Das 3'-Kohlenstoffatom eines Zuckermoleküls kann beispielsweise durch eine Hydroxylgruppe OH belegt oder mittels einer Phosphatgruppe an das 5'-Kohlenstoffatom eines weiteren Nukleotids im Strang gebunden sein. Aufgrund dieser Bindungen spricht man von einem 3'- und einem 5'-Ende eines Nukleotids bzw. eines Strangs. Es ergibt sich damit für jeden DNA-Einzelstrang eine Leserichtung vom 5'- zum 3'-Ende.

Die Nukleotide A und T bzw. C und G sind jeweils paarweise zueinander komplementär (*Watson-Crick-Komplementarität* von DNA). Aufgrund dessen kann sich unter bestimmten Bedingungen aus zwei benachbarten, antiparallel komplementären DNA-Einzelsträngen unter Bildung von Wasserstoffbrückenbindungen zwischen den einzelnen Basenpaaren doppelsträngige DNA bilden. Für die Base Adenin werden dafür beispielsweise die in Abbildung 1.1 markierten Stickstoff- und Wasserstoffatome der Base genutzt.

Für einen DNA-Doppelstrang existieren genau zwei Enden, welche möglicherweise Einzelstrangüberhänge besitzen. Ein Ende wird genau dann *sticky* genannt, falls ein Einzelstrangüberhang an diesem Ende existiert, ansonsten *blunt*.

Im Gebiet des DNA-Computing wird zwischen der Betrachtung von Prozessen in der lebenden Zelle, der Berechnung *in vivo*, und der Berechnung *in vitro*, d. h. im Reagenzglas unterschieden. Die im Folgenden aufgeführten molekularbiologischen Operationen auf DNA-Molekülen entsprechen den Abläufen in Zellen, sind jedoch analog im Reagenzglas ausführbar.

Unter *Annealing* versteht man die bereits beschriebene Bildung von Wasserstoffbrückenbindungen zwischen zwei antiparallel komplementären DNA-Einzelsträngen oder DNA-Einzelstrangüberhängen zu DNA-Doppelsträngen. Durch Temperaturerhöhung können DNA-Doppelstränge in die enthaltenen DNA-Einzelstränge aufgespalten werden. Dieser Prozess wird als *Melting* bzw. *Denaturierung* bezeichnet. Die durch Enzyme, die sogenannte Ligase, gesteuerte Reaktion *Ligation* realisiert die Verkettung von DNA-Doppelsträngen, falls die entsprechenden Enden kompatibel sind. Zwei blunt-Enden sind generell kompatibel. Zwei sticky-Enden sind genau dann kompatibel, wenn die jeweiligen Einzelstrangüberhänge die gleiche Länge besitzen und komplett antiparallel komplementär sind. Ebenfalls enzymatisch läuft die *Restriktionsspaltung* bzw. *Digestion* ab. Unter Verwendung von Restriktionsenzymen wird ein DNA-Doppelstrang an allen durch das Enzym spezifizierten Teilsequenzen zerschnitten. Abhängig vom jeweiligen Restriktionsenzym entstehen somit neue sticky- oder blunt-Enden. In der *Polymerisation* werden die 5'-Enden eines DNA-Doppelstranges zu blunt-Enden aufgefüllt und entsprechende 3'-Einzelstrangüberhänge abgebaut, so dass alle resultierenden DNA-Doppelstränge zwei blunt-Enden besitzen. Die *Polymerase Kettenreaktion* – kurz *PCR* – ist eine zyklische Abfolge der biochemischen Reaktionen Melting, Annealing und Polymerisation zur Vervielfältigung von DNA. Weitere mögliche Operationen sind u. a. das *Labeling*, die *Affinity Purification*, die *Vereinigung*, die *Gel-Elektrophorese* oder die *Aliquotierung*. Eine ausführlichere Beschreibung der Operationen und möglicher Seiteneffekte ist in [HS04] bzw. [PRS98] gegeben.

Eine initiale Adaption der Rekombinationsmöglichkeiten von DNA wurde in [Hea87] durch die in einem *Splicing-System* angewandte *Splicing-Operation* definiert. Die Rekombination basiert auf der sequentiellen Anwendung der Digestion, Annealing und Ligation, so dass beispielsweise aus den zwei DNA-Strängen



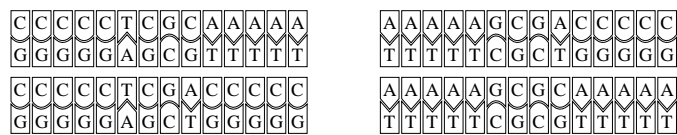
mit Einwirkung der beiden Restriktionsenzyme TaqI und SciNI



die folgenden vier Stränge



entstehen. Durch Annealing und Ligation mit einer geeigneten Ligase können sich nun alle vier Stränge paarweise anlagern, so dass die folgenden vier DNA-Doppelstränge möglich sind.



Erweiterungen, u. a. durch [Päu96] mit Splicing-Regeln als Wörter formaler Sprachen, führten zu der Definition in [PRS98] bzw. [HS04], welche in Abschnitt 2.3 beschrieben wird. Eine Modifikation der Splicing-Operation wird beispielsweise in [Loo06] vorgeschlagen.

Unabhängig von der sprachtheoretischen Formalisierung der Splicing-Operation gilt L. Adleman mit einer molekularbiologischen Lösung eines kombinatorischen Suchproblems *in vitro* in [Adl94] als Begründer des DNA-Computing. In dieser Arbeit konnte durch geeignete Kodierung von Knoten und Kanten eines gegebenen gerichteten Graphen mithilfe von DNA-Strängen unter Anwendung der vorgestellten Operationen eine Instanz des gerichteten Hamilton-Pfad-Problems in linearer Zeit gelöst werden. Gleichzeitig wurde damit der Nachweis der Praktikabilität im Labor gezeigt.

Neueste Arbeiten befassen sich u. a. mit der Optimierung und der praktischen Anwendung entsprechender problemspezifischer Algorithmen unter Nutzung physikalischer und biochemischer Abläufe, so z. B. der Lösung des Untermengensummenproblems in [PS02], des 3-SAT-Problems in [Joh06], des

Rucksackproblems ([HBK<sup>+</sup>07]) oder auch dem Einsatz in der Kryptographie ([APRS02]). In [LPJ<sup>+</sup>03] wird überdies ein Ansatz zum parallelen Theorembeweisen unter Ausnutzung der massiven Parallelität molekularer Reaktionen vorgestellt. Neben diesen Arbeiten steht insbesondere die Entwicklung universeller, d. h. zu Turingmaschinen äquivalenter, in-vitro-Systeme im Vordergrund. Ansätze sind u. a. das Filtering-Modell von Adleman, Lipton und Amos, DNA-Pascal, die Insertion-Deletion-Systeme und die Splicing-Systeme (u. a. in [PRS98], [HS04] oder [RS97a]). Eine Erweiterung dieser beschreibt die Klasse der verteilten Splicing-Systeme, zu der die in dieser Arbeit untersuchten verteilten kommunizierenden Splicing-Systeme und die zeitgesteuerten verteilten Splicing-Systeme mit dynamischen Splicing-Regeln gehören. Erstere bestehen aus einer endlichen Anzahl von Reagenzgläsern, in denen die Splicing-Operation durch die Abfolge der Digestion, des Annealing und der Ligation ausgeführt wird. Mittels Filterstufen wird eine Verteilung von Teilergebnissen zwischen den Reagenzgläsern ermöglicht. Erstmals in [CKP96] definiert, konnte in dieser Arbeit die universelle Berechnungsstärke dieser Systeme mit endlichen Axiomen- und Splicing-Regelmengen gezeigt werden. Dafür sind mit einem Terminalalphabet  $\Sigma$ ,  $|\Sigma| + 8$  Komponenten, also Reagenzgläser, notwendig. Für eine feste, vom Terminalalphabet unabhängige Anzahl mit zehn in [ZFM97], neun in [FMZ00], sieben in [Päu97], sechs in [SH01] sowie eine korrigierte Version in [HS04], drei in [PRM98] und letztendlich zwei Komponenten konnte dieses Ergebnis verbessert werden. Ein auf einer alternativen Filtermethode definiertes System ist in [CVV06] gegeben.

Die zeitgesteuerten verteilten Splicing-Systeme mit dynamischen Splicing-Regeln, oder kurz TVDH-Systeme, bestehen ebenfalls aus einer endlichen Anzahl von Reagenzgläsern. Eine Kommunikation ist jedoch nur zyklisch zwischen aufeinander folgenden Reagenzgläsern möglich. Die biochemische Grundlage dieser Systeme bilden die Reaktionsbedingungen von Enzymen und Ligasen, welche zu verschiedenen Zeitpunkten aktiv oder passiv sein können. Somit ist zu einem bestimmten Zeitpunkt nur eine Teilmenge der Splicing-Regeln anwendbar. TVDH-Systeme wurden in [Päu97] eingeführt. Die Universalität dieser Systemklasse mit einer endlichen Anzahl von Komponenten wurde u. a. in [PRS98] für sieben Komponenten bewiesen. Durch wiederholte Einschränkung der Komponentenanzahl konnte beispielsweise in [MRV03] für TVDH-Systeme mit zwei und durch Simulation dieser Systeme in [MRV04] mit einer Komponente die Turingmächtigkeit gezeigt werden. Eine ausführliche Zusammenfassung ist u. a. in [MVR05] und eine Erweiterung in [Ver05] gegeben.

Im Unterschied zu den in-vitro-Systemen des DNA-Computing abstrahieren die erstmals in [Päu98] definierten Splicing-Membran-Systeme von Prozessen in der lebenden Zelle. Sie bestehen aus verschiedenen, durch Membranen voneinander abgegrenzten Bereichen mit Mengen von DNA-Molekülen.



Dabei ist jede Membran semipermeabel, so dass einige Moleküle bestimmte Membranen passieren können. In jeder Membran kann durch massiv parallele Rekombination mittels Splicing die Menge der Moleküle verändert werden, welche abhängig von der umgebenden Membran nach außen oder innen transportiert werden können. Die universelle Berechnungsstärke konnte in [Päu98] für vier, für drei z. B. in [PP01], für zwei u. a. in [Päu02] und [Ver04a] sowie für eine Membran in [VM05] gezeigt werden, wobei im letzten Fall die Durchlässigkeit der Membranen weiteren Beschränkungen unterliegt.

Die Splicing-Membran-Systeme beschreiben nur eine kleine Teilmenge der Systeme des Gebiets *Membrane Computing*, einem Teilgebiet des molekularen Rechnens. Neben ersten Arbeiten auf diesem Gebiet ([Päu98],[DP98]) sind u. a. in [Päu02], [PR02], [Zan02] und [Päu04] einige Modelle und deren Universalitätsbeweise angegeben oder zusammengefasst. Anwendungsspezifische Membran-Systeme sind z. B. für das Rucksackproblem in [PR04] und [PM05], das 3-SAT-Problem in [LZ05] bzw. SAT-Problem in [PS03] gegeben.

Für die in dieser Arbeit untersuchten verteilten Splicing-Systeme gilt, dass jedes Molekül in einer ausreichenden Anzahl vorliegt, so dass jeweils jede mögliche Rekombination ausführbar ist. Molekularbiologisch kann dies durch wiederholte Anwendung der Polymerase Kettenreaktion, der PCR, erreicht werden. Der Inhalt eines Reagenzglases oder einer Membran kann somit beliebig vervielfältigt werden. Sowohl für die verteilten kommunizierenden Splicing-Systeme als auch die Splicing-Membran-Systeme gilt weiterhin die Annahme, dass bereits vor der einmaligen Anwendung der Splicing-Operation in einem Reagenzglas bzw. einer Membran vorliegende Moleküle auch im Anschluss wieder zur Verfügung stehen. Einerseits können sich die durch Digestion entstandenen Teile eines Moleküls wieder gegenseitig anlagern und somit das Ausgangsmolekül bilden andererseits kann der jeweilige Inhalt vor Anwendung der Splicing-Operation vervielfältigt, teilweise entfernt (z. B. durch Pipettieren im Reagenzglas) und anschließend wieder hinzugefügt werden.

## 1.2 Formale Analyse und Verifikation

Mit der zunehmenden Verteilung und wachsenden Komplexität aktueller Hard- und Software erhöht sich auch der Aufwand der Validierung des Designs dieser Systeme oder macht diese sogar unmöglich. In der Praxis werden deshalb oftmals Simulations- und Testszenarien eingesetzt. Da mit diesen Methoden nur einzelne mögliche Verhaltensweisen eines Systems analysiert werden können, ist eine ganzheitliche Aussage über das System nicht möglich. Das heißt, im Allgemeinen kann somit nicht der Beweis der Fehlerfreiheit erbracht werden. Insbesondere für sicherheitskritische Systeme, jedoch in zu-

nehmenden Maße auch für kommerziell kritische Systeme werden deshalb formale Methoden zum Nachweis der Fehlerfreiheit angewendet.

Mittels formaler Analyse bzw. formaler Verifikation wird unter Verwendung mathematischer Formalismen die Existenz bzw. Abwesenheit bestimmter Eigenschaften sowie das temporale Verhalten eines Systems untersucht. Weiterhin wird darunter der Nachweis der Korrektheit eines Systems oder einer Systemklasse, d. h. der formale Beweis, dass ein zu untersuchendes System alle in einer gegebenen Spezifikation geforderten Eigenschaften erfüllt, verstanden. In diesem Abschnitt werden einführend die in dieser Arbeit vorgestellten Analyse- und Verifikationsmethoden in knapper Form vorgestellt. Eine ausführlichere Darstellung ist beispielsweise in [Sch04] und [HR02] gegeben.

Eine formale Beschreibung einer bestimmten Berechnungsvorschrift ergibt sich aus der jeweiligen Syntax und der entsprechenden Semantik, wobei die Syntax alle zur Berechnungsvorschrift gehörenden Konstrukte definiert und die Semantik den syntaktisch korrekten Konstrukten eine Bedeutung zuordnet. Die *operationelle Semantik* bzw. *strukturelle operationelle Semantik* ([Plo81]) definiert die Semantik über die sukzessive Zustandsänderung einer zum System analogen abstrakten Maschine, wobei die Zustände durch Transitionsregeln abgeleitet werden. Diese Regeln beschreiben somit einen abstrakten Interpreter. Mithilfe dieser Definition können folglich Eigenschaften entsprechender Systeme für verschiedene Zustände untersucht sowie Relationen zwischen Systemen definiert werden.

Die zustandsbasierte Betrachtung von Systemen ermöglicht ebenfalls die Modellprüfung (*Model-Checking*) entsprechender Systeme. Die Modellprüfung ist ein vollautomatischer Verifikationsansatz, um in einem gegebenen Modell  $\mathcal{M}$  eine durch eine adäquate Logik spezifizierte Eigenschaft  $\phi$  zu prüfen. Die zu beweisende Eigenschaft wird im Model-Checking durch einen Term einer *temporalen Logik* spezifiziert. Eine Besonderheit temporaler Logiken besteht darin, dass der Wahrheitswert eines entsprechenden Ausdrucks nicht statisch ist, sondern in verschiedenen Zuständen eines Modells unterschiedliche Wahrheitswerte annehmen kann. Die *Linearzeitlogik LTL* (*Linear Time Temporal Logic*) und die *verzweigende temporale Logik CTL* (*Computation Tree Logic*) sind zwei Vertreter dieser Klasse von Logiken. Die Verifikation wird durch eine erschöpfende Betrachtung des Zustandsraums des Modells realisiert, wobei für jeden Zustand der Wahrheitswert der zu prüfenden Eigenschaft analysiert wird. Es gilt  $\mathcal{M} \models \phi$ , falls das Modell  $\mathcal{M}$  die Eigenschaft  $\phi$  erfüllt, andernfalls  $\mathcal{M} \not\models \phi$ . Eine detaillierte Beschreibung des Model-Checking sowie eine Einführung in die temporalen Logiken ist u. a. in [HR02] und [CGP01] gegeben.

Ein alternativer Ansatz zum modellbasierten Model-Checking wird durch das *Theorembeweisen* beschrieben. In diesem beweisbasierten Verifikationsansatz ist die Systembeschreibung als Formelmengende  $\Gamma$  einer geeigneten Logik gegeben. Für eine Spezifikation  $\phi$  ist mithilfe eines logischen Formalismus die Folgerung  $\Gamma \vdash \phi$  zu beweisen. Aufgrund der Ausdrucksfähigkeit der verwendeten Logiken werden diese Beweise oftmals interaktiv geführt, was jedoch Fachwissen des Nutzers erfordert. Es existieren auch automatische, allerdings ausdruckschwächere, Theorembeweiser. Vertreter sind beispielsweise die interaktiven Theorembeweiser Isabelle, PVS, HOL und ACL2.



## KAPITEL 2

# Mathematische Grundlagen

Die Menge der natürlichen Zahlen  $\{0, 1, 2, \dots\}$ , definiert durch die PEANOSchen Axiome, wird im Folgenden mit  $\mathbb{N}$  und die Menge  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$  mit  $\mathbb{N}^+$  notiert. Abkürzend kann die endliche Menge  $\{0, \dots, n\}$  mit  $\mathbb{N}_n$  und die Menge  $\{1, \dots, n\}$  mit  $\mathbb{N}_n^+$  notiert werden.

Eine Menge bzw. Teilmenge wird wie in [BSMM99] definiert und es gelten die dort angegebenen Operationen und Grundgesetze der Mengenalgebra, wobei  $|M| \in \mathbb{N}$  die Kardinalität und  $\mathcal{P}(M)$  die Potenzmenge der Menge  $M$  beschreibt. Eine *Multimenge*  $M$  über einer Menge  $X$  ist eine Abbildung  $M : X \rightarrow \mathbb{N}$  mit der Multiplizität  $M(x), x \in X$ . Der *Support* von  $M$  ist die Menge  $\text{supp}(M) = \{x \in X \mid M(x) \geq 1\}$  und es gilt für  $x \in X$ , dass  $x \in M$ , falls  $x \in \text{supp}(M)$ .

Gleichermaßen gilt die Definition von Relationen, kartesischen Produkten und Funktionen aus [BSMM99]. Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  wird monoton wachsend genannt, falls für beliebige  $a_1, a_2 \in A$  mit  $a_1 < a_2$  auch  $f(a_1) \leq f(a_2)$  gilt, und stark monoton wachsend, falls  $f(a_1) < f(a_2)$ .

### Definition 2.1 (partielle Funktion)

Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  heißt *partielle Funktion*, falls jedes Element aus  $A$  mit höchstens einem Element der Menge  $B$  in Relation steht. Für  $a \in A$  mit  $\neg \exists b \in B. (a, b) \in f$  ist die partielle Funktion undefiniert, notiert mit  $f(a) = \perp$ . Eine partielle Funktion  $f$  wird mit  $f : \subseteq A \rightarrow B$  angegeben.  $\diamond$

Für die Beweisführung der formalen Korrektheit von Systemen werden nachfolgend u. a. Tableau-Beweise eingeführt. Ein Tableau-Beweis ist eine Ableitung von Aussagen zu Teilaussagen unter Anwendung einer endlichen Familie von Beweisregeln der Form

$$\begin{array}{c} \text{(REGELNAME)} \\ \hline \text{Prämissen} \\ \hline \text{Folgerung} \end{array} \quad (2.1)$$

und wird zielgerichtet geführt. In Anlehnung an [TS00] wird ein Tableau als Baum dargestellt, wobei die Knoten mit Aussagen beschriftet werden; ein Knoten  $\nu$  beschreibt die Folgerung und die direkten Folgeknoten von  $\nu$  die Prämissen einer Beweisregel. Die Wurzel eines Tableaus ergibt die Folgerung der gesamten Ableitung. Weitere Notationen und Definitionen sind u. a. in [TS00] und [Sti01] gegeben.

## 2.1 Formale Sprachen und CHOMSKY-Grammatiken

Im folgenden Abschnitt werden die für diese Arbeit wesentlichen Definitionen der Wortkombinatorik, der formalen Sprachen und der Grammatiken eingeführt. Eine ausführliche Darstellung ist beispielsweise in [RS97b] gegeben.

Sei  $V$  ein Alphabet,  $V^*$  beschreibt das durch  $V$  und die Wortverkettung  $\cdot : V^* \times V^* \rightarrow V^*$  erzeugte freie Monoid mit dem leeren Wort  $\varepsilon$  als neutralem Element und  $V^+ = V^* \setminus \{\varepsilon\}$ . Eine beliebige Teilmenge von Zeichenreihen aus  $V^*$  wird als (formale) Sprache bezeichnet, jedes Element dieser Menge als Wort. Für ein Wort  $w \in V^*$  definiert  $|w| : V^* \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $|\varepsilon| = 0$ ;  $|aw'| = |w'| + 1$ ,  $w' \in V^*$ ,  $a \in V$  die Länge von  $w$  und  $|w|_A : V^* \rightarrow \mathbb{N}$  bzw.  $|w|_a : V^* \rightarrow \mathbb{N}$  die Länge des Wortes  $w$  begrenzt auf das Alphabet  $A$ , respektive das Symbol  $a$ . Die Mengenoperationen  $\cup$ ,  $\cap$  und  $\setminus$  gelten entsprechend ihrer Mengendefinition für zwei Sprachen. Für zwei Sprachen  $L_1$  und  $L_2$  mit  $L_1, L_2 \subseteq V^*$  ist die Konkatenation  $\cdot : \mathcal{P}(V^*) \times \mathcal{P}(V^*) \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$  definiert mit  $L_1 \cdot L_2 = \{x \cdot y \mid x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$ .

### Definition 2.2 ( $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ -markiertes Wort)

Sei  $V$  ein Alphabet,  $\mathcal{P}, \mathcal{S} \subseteq V$  zwei Alphabete von Präfix- bzw. Suffixsymbolen und  $V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}} = V \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{S})$ , dann ist mit den Sprachen Pre über  $\mathcal{P}$ , Suf über  $\mathcal{S}$  und  $V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*$  ein Wort  $w$  über  $V$   $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ -markiert, falls  $w \in (\text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf})$  gilt.  $\diamond$

Falls die Alphabete  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{S}$  nicht näher spezifiziert sind, spricht man auch von einem *endenmarkierten Wort*.

### Definition 2.3 (KLEENESche Hülle, Iteration)

Die Iteration über einer Sprache  $L$  ist durch

$$\begin{aligned} L^0 &= \{\varepsilon\} \\ L^{i+1} &= L \cdot L^i \\ L^* &= \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i \quad \text{bzw.} \quad L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i \end{aligned}$$

definiert und wird als reflexive, transitive KLEENESche Hülle bzw. für  $L^+$  als transitive KLEENESche Hülle bezeichnet.  $\diamond$

**Definition 2.4 (pre, suf, seg)**

Die Funktionen  $\text{pre} : V^* \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$ ,  $\text{suf} : V^* \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$  und  $\text{seg} : V^* \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$  berechnen die Menge aller Präfixe, Suffixe bzw. Segmente, d. h. aller zusammenhängenden Teilwörter eines Wortes  $w \in V^*$  und sind definiert durch

$$\begin{aligned} \text{pre}(w) &= \{x \in V^* \mid \exists y \in V^*. w = x \cdot y\} \setminus \{\varepsilon\} \\ \text{suf}(w) &= \{y \in V^* \mid \exists x \in V^*. w = x \cdot y\} \setminus \{\varepsilon\} \\ \text{seg}(w) &= \{z \in V^* \mid \exists x, y \in V^*. w = x \cdot z \cdot y\} \setminus \{\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Die Funktionen  $\text{pre}^l(w)$  und  $\text{suf}^l(w)$  berechnen das Präfix bzw. Suffix der Länge  $l$  eines Wortes  $w$ , falls  $|w| \geq l$ , und es gilt  $\text{pre}^l(w) = \varepsilon$  bzw.  $\text{suf}^l(w) = \varepsilon$ , falls  $|w| < l$  sowie  $\text{pre}^0(w) = \varepsilon$  und  $\text{suf}^0(w) = \varepsilon$ .  $\diamond$

**Definition 2.5 (Rechtsrotation,  $\varphi^\circ$ )**

Sei  $V$  ein Alphabet und  $w \in V^*$ , dann berechnet die Funktion  $\varphi^\circ(w)$  die Menge aller Wörter, die sich durch zeichenweise Rechtsrotation aus  $w$  ergeben. Sie ist definiert mit  $\varphi^\circ(w) = \circ(\{w\})$ , wobei  $\circ(X)$  die kleinste Sprache mit  $X \subseteq \circ(X)$  und  $w \in \circ(X) \rightarrow \nu(w) \in \circ(X)$  sowie  $\nu(\varepsilon) = \varepsilon$  und  $\nu(xy) = (yx)$  für  $x \in V, y \in V^*$  ist.  $\diamond$

Eine CHOMSKY-Grammatik  $G$  ist ein Quadrupel  $(V, \Sigma, P, S)$  mit dem endlichen Alphabet der Nichtterminalsymbole  $V$ , der endlichen Menge der Terminalsymbole  $\Sigma$  mit  $V \cap \Sigma = \emptyset$ , der endlichen Menge der Produktionsregeln  $P \subseteq ((V \cup \Sigma)^* \cdot V^+ \cdot (V \cup \Sigma)^*) \times ((V \cup \Sigma)^*)$  und dem Startsymbol  $S \in V$ . Tupel der Form  $(u, v) \in P$  werden oftmals auch als Relation  $u \rightarrow v \in P$  mit  $|u|_V > 0$  notiert.

**Definition 2.6 (Ableitungsschritt)**

Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine Grammatik, dann ist die Relation  $\vdash_G \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ , definiert durch

$$x \vdash_G y \quad \text{gdw.} \quad \exists w, z \in (V \cup \Sigma)^*. (x = wuz \wedge y = wvz \wedge (u, v) \in P),$$

ein Ableitungsschritt von  $G$ .  $\diamond$

Wir notieren mit  $\vdash_G^*$  die reflexive, transitive Hülle und mit  $\vdash_G^+$  die transitive Hülle der Relation  $\vdash_G$ . Eine endliche Folge  $(S, w_1, \dots, w_n)$  mit  $n \in \mathbb{N}^+$ ,  $w_1, \dots, w_{n-1} \in ((V \cup \Sigma)^* \cdot V^+ \cdot (V \cup \Sigma)^*)$ ,  $w_n \in \Sigma^*$  und  $S \vdash_G w_1 \vdash_G \dots \vdash_G w_n$  heißt Ableitung von  $w_n$  unter  $G$ .

**Definition 2.7 (Sprache einer Grammatik)**

Sei  $G = (V, \Sigma, P, S)$  eine Grammatik, dann ist die durch  $G$  erzeugte Sprache  $L$  definiert mit  $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \vdash_G^+ w\}$ .  $\diamond$

Abhängig von der Struktur der Produktionsregeln erzeugen Grammatiken verschiedene hierarchisch geordnete Sprachklassen mit unterschiedlicher Berechnungsstärke. In der CHOMSKY-*Hierarchie* unterscheidet man vier verschiedene Klassen: die Klasse der rekursiv aufzählbaren Sprachen (Typ 0), die Klasse der kontextsensitiven Sprachen (Typ 1), die Klasse der kontextfreien Sprachen (Typ 2) sowie die Klasse der regulären Sprachen (Typ 3). Für die Sprachklassen gilt  $\text{Typ } 3 \subset \text{Typ } 2 \subset \text{Typ } 1 \subset \text{Typ } 0$ .

Im Folgenden spielen insbesondere die rekursiv aufzählbaren Sprachen eine entscheidende Rolle, da nur diese universelle Berechnungsstärke im Sinne der CHURCHSchen These besitzen und die Struktur der Produktionsregeln der Typ-0-Grammatiken keiner Restriktion unterliegen.

**Definition 2.8 (KURODA-Normalform)**

Für jede Typ-0-Grammatik  $G$  existiert eine äquivalente Grammatik  $G' = (V, \Sigma, P', S)$  in Kuroda-Normalform mit  $L(G) = L(G')$ , so dass alle Regeln in  $P'$  eine der Formen  $(A, a)$ ,  $(A, \varepsilon)$ ,  $(A, BC)$  oder  $(AB, CD)$  mit  $A, B, C, D \in V, a \in \Sigma$  aufweisen.  $\diamond$

Ein Beweis für die Existenz einer Grammatik in Kuroda-Normalform ist beispielsweise in [HS04] zu finden.

## 2.2 Transitionssysteme und Simulationskonzepte

**Definition 2.9 (beschriftetes Transitionssystem)**

Ein beschriftetes Transitionssystem (LTS) über der Aktionsmenge  $Act$  ist ein Tupel  $(Q, T)$ , wobei  $Q$  eine Menge von Zuständen und  $T \subseteq Q \times Act \times Q$  eine Transitionsrelation beschreibt.  $\diamond$

Statt  $(q, \alpha, q')$  mit  $q, q' \in Q$  und  $\alpha \in Act$  wird die Schreibweise  $q \xrightarrow{\alpha} q'$  verwendet;  $q$  ist die Quelle und  $q'$  das Ziel der Transition. Jede Konfiguration eines Systems beschreibt im Folgenden den Zustand zu einem bestimmten Zeitpunkt. Eine Ableitung von  $q_0$  nach  $q_n$  ist eine endliche Sequenz  $q_0 \xrightarrow{\alpha_1} q_1 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_n} q_n$  mit den Aktionen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Transitionen zwischen Zuständen in einem durch eine strukturelle operationelle Semantik erzeugten Transitionssystem werden, wie in [AFV01] beschrieben, induktiv durch eine Menge von Transitionsregeln, analog zu den Beweisregeln (2.1), abgeleitet.

**Definition 2.10 (starke (Bi-)Simulation)**

Seien  $(Q, T)$  und  $(Q', T')$  zwei gegebene LTS, so ist eine nicht leere binäre



Relation  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}'$  genau dann eine starke Simulation, wenn für  $p, p' \in \mathcal{Q}, q, q' \in \mathcal{Q}', \alpha \in \text{Act}$  und  $p\mathcal{S}q$  gilt, dass aus  $p \xrightarrow{\alpha} p'$  die Existenz eines  $q' \in \mathcal{Q}'$  mit  $q \xrightarrow{\alpha} q'$  und  $p'\mathcal{S}q'$  folgt. Eine starke Simulation  $\mathcal{S}$  ist eine starke Bisimulation, falls  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}^{-1}$ , also die inverse Relation von  $\mathcal{S}$ , jeweils starke Simulationen sind.  $\diamond$

Der Zustand  $q$  simuliert stark  $p$ , wenn eine Relation  $\mathcal{S}$  existiert und  $p\mathcal{S}q$  gilt. Zwei Zustände  $p \in \mathcal{Q}$  und  $q \in \mathcal{Q}'$  heißen *stark bisimilar* bzw. *stark äquivalent*, notiert mit  $p \sim q$ , falls eine starke Bisimulation  $\mathcal{S}$  mit  $p\mathcal{S}q$  existiert.

Eine Aktion  $\xrightarrow{\alpha}$  wird beobachtbar genannt, falls  $\alpha \in \text{Act}$ . Eine unbeobachtbare Aktion wird durch  $\xrightarrow{\tau}$  beschrieben. Ein Experiment  $e$  ist eine endliche Sequenz  $e = \alpha_1 \dots \alpha_n$  von beobachtbaren Aktionen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Die Relation  $\Rightarrow$  ist definiert als die möglicherweise leere Sequenz von unbeobachtbaren Aktionen  $p \xrightarrow{\tau} \dots \xrightarrow{\tau} q$ , formal  $\Rightarrow \stackrel{\text{def}}{=} \xrightarrow{\tau^*}$ , die reflexive und transitive Hülle von  $\xrightarrow{\tau}$ . Weiterhin sei für  $e = \alpha_1 \dots \alpha_n$  die Relation  $\xRightarrow{e} \stackrel{\text{def}}{=} \xrightarrow{\alpha_1} \Rightarrow \dots \Rightarrow \xrightarrow{\alpha_n} \Rightarrow$  definiert.

**Definition 2.11 (schwache (Bi-)Simulation)**

Seien  $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$  und  $(\mathcal{Q}', \mathcal{T}')$  zwei gegebene LTS, so ist die nicht leere Relation  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}'$  über  $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$  und  $(\mathcal{Q}', \mathcal{T}')$  genau dann eine schwache Simulation, wenn aus  $p\mathcal{S}q$  und  $p \xrightarrow{e} p'$  die Existenz eines  $q' \in \mathcal{Q}'$  mit  $q \xRightarrow{e} q'$  und  $p'\mathcal{S}q'$  für  $p, p' \in \mathcal{Q}$  und  $q, q' \in \mathcal{Q}'$  folgt. Eine schwache Simulation  $\mathcal{S}$  ist eine schwache Bisimulation, falls  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{S}^{-1}$  schwache Simulationen sind.  $\diamond$

Es kann jedoch auch leicht gezeigt werden, dass  $\mathcal{S}$  eine schwache Simulation ist, wenn  $p\mathcal{S}q$  und  $p \xrightarrow{\tau} p'$ , dann existiert ein  $q' \in \mathcal{Q}'$  mit  $q \Rightarrow q'$  und  $p'\mathcal{S}q'$  oder wenn  $p \xrightarrow{\alpha} p'$ , dann existiert ein  $q' \in \mathcal{Q}'$  mit  $q \xrightarrow{\alpha} q'$  und  $p'\mathcal{S}q'$ . Wenn eine schwache Bisimulation  $\mathcal{S}$  mit  $p\mathcal{S}q$  und  $p \in \mathcal{Q}$  sowie  $q \in \mathcal{Q}'$  existiert, werden  $p$  und  $q$  *schwach bisimilar*, *schwach äquivalent* bzw. *beobachtbar äquivalent* genannt, notiert mit  $p \approx q$ .

## 2.3 Splicing-Operation

Im folgenden Abschnitt wird die mathematische Theorie der Splicing-Operation und der auf ihr basierenden Systeme formal definiert. Ausführliche Definitionen sind u. a. auch in [PRS98], [RS97a] und [HS04] gegeben.

**Definition 2.12 (Splicing-Regel)**

Sei  $V$  ein Alphabet und es gelte  $\#, \$ \notin V$ , dann wird eine Splicing-Regel formal mit  $r = u_1\#u_2\$u_3\#u_4$  mit  $u_1, u_2, u_3, u_4 \in V^*$  und  $|u_1 \cdot u_2| \geq 1$  und  $|u_3 \cdot u_4| \geq 1$  angegeben.  $\diamond$

Eine alternative (grafische) Darstellungsmöglichkeit einer Splicing-Regel  $r = u_1\#u_2\$u_3\#u_4$  ist gegeben durch

$$\begin{array}{c|c} (r) & \\ \hline u_1 & u_2 \\ \hline u_3 & u_4 \end{array}$$

**Definition 2.13 ((E)H-System)**

Ein *H-System* ist ein Tripel  $\gamma = (V, A, R)$  mit dem Alphabet  $V$ , einer formalen Sprache  $A \subseteq V^*$ , der Axiomenmenge und der Menge der Splicing-Regeln  $R \subseteq V^* \cdot \{\#\} \cdot V^* \cdot \{\$\} \cdot V^* \cdot \{\#\} \cdot V^*$  mit  $\#, \$ \notin V$ . Ist zusätzlich noch eine Menge  $\Sigma \subseteq V$  gegeben, so spricht man von einem *extendeden H-System*, kurz *EH-System*, formal beschrieben durch  $\gamma = (V, \Sigma, A, R)$ .  $\diamond$

Ein *H-System*  $\gamma = (V, A, R)$  bzw. *EH-System*  $\gamma = (V, \Sigma, A, R)$  ist ein *endenmarkiertes H-* bzw. *EH-System*, falls für zwei Alphabete  $\mathcal{P}, \mathcal{S}$  von Präfix- bzw. Suffixsymbolen, dem Alphabet  $V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}} = V \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{S})$  und den Sprachen  $\text{Pre}, \text{Suf}, \text{Pre}', \text{Suf}'$  über  $\mathcal{P}$  bzw.  $\mathcal{S}$  und  $V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*$  alle Wörter  $w \in V^+$   $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ -markiert oder allgemein endenmarkiert sind und für  $R$  gilt

$$\begin{aligned} R \subseteq & (((\text{Pre} \cup \{\varepsilon\}) \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \{\#\} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot (\text{Suf} \cup \{\varepsilon\}) \cdot \{\$\} \cdot \\ & (\text{Pre} \cup \{\varepsilon\}) \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \{\#\} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot (\text{Suf} \cup \{\varepsilon\})) \\ \cup & (\{\varepsilon\} \cdot \{\#\} \cdot \text{Pre}' \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot (\text{Suf} \cup \{\varepsilon\}) \cdot \{\$\} \cdot \\ & \{\varepsilon\} \cdot \{\#\} \cdot \text{Pre}' \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot (\text{Suf} \cup \{\varepsilon\})) \\ \cup & ((\text{Pre} \cup \{\varepsilon\}) \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}' \cdot \{\#\} \cdot \{\varepsilon\} \cdot \{\$\} \cdot \\ & (\text{Pre} \cup \{\varepsilon\}) \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}' \cdot \{\#\} \cdot \{\varepsilon\})) \end{aligned}$$

mit  $\text{Pre}' = \text{Pre} \setminus \{\varepsilon\}$  und  $\text{Suf}' = \text{Suf} \setminus \{\varepsilon\}$ .  $\gamma$  ist *endlichkomponentig*, falls alle Mengen  $V, A, R$  und  $\Sigma$  endlich sind.

**Definition 2.14 (Ableitungsschritt eines (E)H-Systems)**

Sei  $\gamma = (V, A, R)$  bzw.  $\gamma = (V, \Sigma, A, R)$  ein *H-* bzw. *EH-System*, dann ist die Relation  $\vdash_r \subseteq (V^* \times V^*) \times (V^* \times V^*)$ , definiert mit

$$\begin{aligned} & x, y, w, z \in V^+ \wedge \\ & r = u_1\#u_2\$u_3\#u_4 \in R \wedge \\ (x, y) \vdash_r (w, z) \Leftrightarrow & x = x_1u_1u_2x_2 \wedge y = y_1u_3u_4y_2 \wedge \\ & w = x_1u_1u_4y_2 \wedge z = y_1u_3u_2x_2 \wedge \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*, \end{aligned}$$

ein *Ableitungsschritt* von  $\gamma$ . Wir schreiben  $\vdash_r^+$  für die *transitive Hülle* und  $\vdash_r^*$  für die *reflexive, transitive Hülle* von  $\vdash_r$ .  $\diamond$

**Definition 2.15 (Splicing-Operation auf (E)H-Systemen)**

Für ein H-System  $\gamma = (V, A, R)$  bzw. EH-System  $\gamma = (V, \Sigma, A, R)$  und eine formale Sprache  $\mathcal{L} \subseteq V^*$  definieren wir die Splicing-Operation  $\sigma : \mathcal{P}(V^*) \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$  mit  $\sigma(\mathcal{L}) = \{w \in V^* \mid \exists x, y \in \mathcal{L}. \exists r \in R. \exists z \in V^*. (((x, y) \vdash_r (w, z)) \vee ((x, y) \vdash_r (z, w)))\}$ .  $\diamond$

Für ein H-System  $\gamma = (V, A, R)$  bzw. EH-System  $\gamma = (V, \Sigma, A, R)$  und  $\sigma : \mathcal{P}(V^*) \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$  ist das  $k$ -fach iterierte Splicing  $\sigma^k$  mit  $k \in \mathbb{N}$  rekursiv definiert mit  $\sigma^0(A) = A$  und  $\sigma^{i+1}(A) = \sigma^i(A) \cup \sigma(\sigma^i(A))$  für  $i \in \mathbb{N}$ . Weiterhin wird  $\sigma^*(A) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma^i(A)$  definiert.

**Definition 2.16 (Sprache eines (E)H-Systems)**

Die erzeugte Sprache  $L$  von  $\gamma_1 = (V, A, R)$  bzw.  $\gamma_2 = (V, \Sigma, A, R)$  wird durch  $L(\gamma_1) = \sigma^*(A)$  bzw.  $L(\gamma_2) = \sigma^*(A) \cap \Sigma^+$  definiert.  $\diamond$

Die in der Arbeit vorgestellten und untersuchten Systeme sind im Allgemeinen Mehrtubesysteme, d. h. sie bestehen aus einer fest definierten Anzahl von Reagenzgläsern, den Komponenten des Systems. Ein System mit  $n$  verschiedenen Komponenten wird deshalb auch  $n$ -komponentiges System genannt. Für ein Alphabet  $V$  und ein  $n$ -komponentiges System  $\Gamma$ , wobei für jede Komponente  $\mathcal{L}_i \subseteq V^*$  gilt, ist eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  gegeben mit  $\mathcal{C}_\Gamma = (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$ . Die initiale Konfiguration eines Systems wird mit  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)}$ , jede Folgekonfiguration mit  $\mathcal{C}_\Gamma^{(i)}$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots\}$  beschrieben. Die  $i$ te Projektion wird mit  $\mathcal{C}_\Gamma^i = \mathcal{L}_i$  notiert, d. h.  $\mathcal{C}_\Gamma^{(j),i}$  beschreibt die  $i$ te Projektion der  $j$ ten Konfiguration.

Für ein Membransystem mit  $n$  Membranen ist die Membranstruktur  $\mu$  wie in Definition 2.17 gegeben. Die Relation  $\mu$  kann alternativ als Baum, VENN-Diagramm oder durch einen korrekt geklammerten Ausdruck  $w \in \{[i, ]_j \mid i, j \in \mathbb{N}\}^+$  nach Definition 2.18 dargestellt werden. Sei  $(i, j) \in \mu$ , so ist  $i$  der Vaterknoten von  $j$  bzw.  $j$  der Tochterknoten von  $i$ .

**Definition 2.17 (Membranstruktur  $\mu$ )**

Eine Membranstruktur mit  $n$  Membranen ist eine Relation über den natürlichen Zahlen, so dass die Struktur  $(\{1, \dots, n\}, \mu)$  einen Baum  $\mathfrak{T}$  nach Definition 1.7 in [BdV04] beschreibt, d. h.

- mit der Knotenmenge  $\{1, \dots, n\}$  und dem eindeutigen Wurzelknoten 1 sowie  $\forall i \in \{2, \dots, n\}. (1, i) \in \mu^*$ ,
- $\forall j \in \{2, \dots, n\}. \exists^{-1}i \in \{1, \dots, n-1\}. (i, j) \in \mu$  und
- $\mu$  ist azyklisch, also  $\forall i \in \{1, \dots, n\}. \neg(i, i) \in \mu^*$ .  $\diamond$

**Definition 2.18**

Sei  $\mu$  eine Membranstruktur mit  $n$  Membranen, dann kann  $\mu$  wie folgt als korrekt geklammerter Ausdruck  $\mu'$  dargestellt werden.

$$\begin{aligned} \mu' &= [{}_1 \cdot \mu_1 \cdot]_1 \\ \mu_i &= \begin{cases} \varepsilon & \text{falls } \{j \mid \exists(i, j) \in \mu\} = \emptyset \\ [{}_{j_1} \cdot \mu_{j_1} \cdot]_{j_1} \cdots [{}_{j_k} \cdot \mu_{j_k} \cdot]_{j_k} & \text{sonst, mit} \\ & \{j \mid \exists(i, j) \in \mu\} = \{j_1, \dots, j_k\} \end{cases} \end{aligned}$$

◇

## Verteilte kommunizierende Splicing-Systeme

Verteilte Splicing-Systeme basieren auf dem Konzept des Rechnens mit Molekülen *in vitro* und bestehen im Allgemeinen aus einer endlichen Anzahl von Reagenzgläsern, den sogenannten Komponenten des Systems. Jede Komponente beschreibt unter Verwendung globaler Parameter ein H-System bzw. ein EH-System nach Definition 2.13 zur gezielten Rekombination des jeweiligen Reagenzglasinhalts.

### 3.1 Systembeschreibung

Die Menge der verteilten kommunizierenden Splicing-Systeme (engl. test tube systems), oder kurz TT-Systeme bzw. TT-EH-Systeme genannt, beschreibt eine Teilmenge der Klasse der verteilten Splicing-Systeme, wobei jede Komponente des Systems mithilfe von Filtern mit jeder anderen Komponente des Systems kommunizieren kann, d. h. DNA-Stränge austauschen kann.

Ein verteiltes kommunizierendes Splicing-System  $\Gamma$  vom Grad  $n$  mit  $n \geq 1$  ist ein TT-System mit  $n$  Komponenten und wird formal durch ein  $n + 2$  Tupel  $(V, \Sigma, (A_1, R_1, F_1), \dots, (A_n, R_n, F_n))$  beschrieben. Die Mengen  $V$  und  $\Sigma$  spezifizieren die Symbolmenge bzw. die Menge der Terminalsymbole des Systems  $\Gamma$  mit der Bedingung  $\Sigma \subseteq V$ . Jedes Tripel  $(A_i, R_i, F_i)$  beschreibt die  $i$ te Komponente von  $\Gamma$  mit der Menge der initialen Axiome  $A_i \subseteq V^+$ , der Menge der in Definition 2.12 eingeführten Splicing-Regeln  $R_i \subseteq V^* \cdot \{\#\} \cdot V^* \cdot \{\$\} \cdot V^* \cdot \{\#\} \cdot V^*$  mit  $\#, \$ \notin V$  und des der  $i$ ten Komponente vorgeschalteten Filters, definiert durch die Menge von Filterregeln mit  $F_i \subseteq V$  bzw.  $F_i \subseteq V^* \times V^*$ , abhängig von der nachfolgend beschriebenen Filterdefinition des Systems. Die Mengen  $V, \Sigma, A_i$  und  $R_i$  spezifizieren jeweils ein EH-System nach Definition 2.13 mit der entsprechenden Splicing-Operation  $\sigma_i$ . Ein TT-EH-System vom Grad  $n$  ist *endlichkomponentig*, falls für jede Komponente

die Menge der Axiome, der Splicing-Regeln und der Filterregeln endlich ist, und *endenmarkiert*, falls für alle Komponenten das erzeugte EH-System endenmarkiert ist. In einem Ableitungsschritt werden zunächst alle anwendbaren Splicing-Regeln auf den aktuellen Inhalt der entsprechenden Komponente nichtdeterministisch appliziert und im Anschluss entsprechend der jeweiligen Filter verteilt. Wörter, die keinem Filter einer anderen Komponente genügen, verbleiben in der jeweiligen Komponente.

Aus der Literatur bekannte verteilte kommunizierende Splicing-Systeme können prinzipiell anhand der Filterdefinition und der Definition eines Ableitungsschrittes (Berechnungsschrittes) in verschiedene Klassen unterteilt werden. Der Filter einer Komponente wird entweder durch ein Alphabet  $A \subseteq V$  beschrieben, wobei alle Wörter der Sprache  $A^*$  über dem Alphabet  $A$  durch den jeweiligen Filter akzeptiert werden oder der Filter wird durch eine Menge von Tupeln über Wörtern definiert, welche die Präfixe bzw. Suffixe der akzeptierten Wörter spezifizieren. Für das Alphabet  $V$  und eine endliche Menge von Filterregeln  $F \subset \{(p_a, p_e) \mid p_a, p_e \in V^*\}$  wird die Sprache der akzeptierten Wörter definiert mit  $S = \{w \in V^* \mid \exists (p_a, p_e) \in F. (p_a \in \text{pre}(w) \wedge p_e \in \text{suf}(w))\}$ . Ein Ableitungsschritt eines TT-Systems ist entweder als Einfach-Splicing-Ableitungsschritt wie in Definition 3.1 oder als Mehrfach-Splicing-Ableitungsschritt wie in Definition 3.2 definiert.

**Definition 3.1 (Einfach-Splicing-Ableitungsschritt)**

Für ein TT-System  $\Gamma$  vom Grad  $n$  ist die Ableitungsrelation  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) \vdash_{\Gamma} (\mathcal{L}'_1, \dots, \mathcal{L}'_n)$  für einen Einfach-Splicing-Ableitungsschritt definiert durch

$$\mathcal{L}'_i = \left( \left( \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sigma_j^1(\mathcal{L}_j) \right) \cap S_i \right) \cup \left( \sigma_i^1(\mathcal{L}_i) \setminus \left( \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n S_j \right) \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

wobei die Sprachen  $S_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  die durch die jeweiligen Filter akzeptierten Sprachen sind.  $\diamond$

Im Einfach-Splicing-Ableitungsschritt  $\vdash_{\Gamma}$  wird der Inhalt jeder Komponente durch einmalige Anwendung der Splicing-Operation erweitert und anschließend entsprechend der Filter verteilt, wobei alle Wörter einer Komponente  $i$ , die dem Filter der Komponente  $j$  mit  $j \neq i$  genügen, in die  $j$ te Komponente kommuniziert werden und alle Wörter, die keinem Filter  $j, j \neq i$  entsprechen, in der jeweiligen Komponente verbleiben.

**Definition 3.2 (Mehrfach-Splicing-Ableitungsschritt)**

Für ein TT-System  $\Gamma$  vom Grad  $n$  ist die Ableitungsrelation  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) \Vdash_{\Gamma}$

$(\mathcal{L}'_1, \dots, \mathcal{L}'_n)$  für einen Mehrfach-Splicing-Ableitungsschritt definiert durch

$$\mathcal{L}'_i = \left( \left( \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sigma_j^*(\mathcal{L}_j) \right) \cap S_i \right) \cup \left( \sigma_i^*(\mathcal{L}_i) \setminus \left( \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n S_j \right) \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

wobei die Sprachen  $S_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  die durch die jeweiligen Filter akzeptierten Sprachen sind.  $\diamond$

In einem Mehrfach-Splicing-Ableitungsschritt  $\Vdash_\Gamma$  wird, analog zum Einfach-Splicing-Ableitungsschritt, zunächst der Inhalt jeder Komponente modifiziert und später entsprechend der Filter verteilt, wobei die Splicing-Operation vor jeder Verteilung zunächst erschöpfend angewendet wird, d. h. solange, bis keine Veränderung der Komponente mehr stattfindet. Die durch ein TT-System erzeugte Sprache  $L(\Gamma)$  ergibt sich o. B. d. A. aus allen Wörtern  $w$  über dem Terminalalphabet in der  $n$ ten Komponente (Definition 3.3), unabhängig von der Filterdefinition bzw. der Definition eines Ableitungsschritts.

**Definition 3.3 (Sprache eines TT-Systems)**

Die durch ein TT-System  $\Gamma$  vom Grad  $n, n \geq 1$  mit Einfach-Splicing-Ableitungsschritt erzeugte Sprache ist definiert durch

$$L(\Gamma) = \Sigma^+ \cap \{w \in \mathcal{L}_n \mid \exists (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n). ((A_1, \dots, A_n) \vdash_\Gamma^* (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n))\}$$

und mit Mehrfach-Splicing-Ableitungsschritt mittels

$$L(\Gamma) = \Sigma^+ \cap \{w \in \mathcal{L}_n \mid \exists (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n). ((A_1, \dots, A_n) \Vdash_\Gamma^* (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n))\}.$$

$\diamond$

**Beispiel 3.1 ( $\Gamma_{2 \cdot n+1}$ )**

Das verteilte Splicing-System  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$  mit dem Grad drei ist definiert durch  $\Gamma_{2 \cdot n+1} = (\{X, Y, Z'', Z, Z', Y', n\}, \{n\}, (\{XnY, Zn^2Y', Zn^2Y\}, R_1, \{(X, Y)\}), (\{XnY', Z', Z''\}, R_2, \{(X, Y')\}), (\emptyset, \emptyset, \{(n, n)\}))$  mit

$$R_1 : \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \varepsilon \\ Z \end{array} \Big| \begin{array}{c} Y \\ nnY' \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{c} \varepsilon \\ Z \end{array} \Big| \begin{array}{c} Y \\ nnY \end{array} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \begin{array}{c} \varepsilon \\ Z' \end{array} \Big| \begin{array}{c} Y' \\ \varepsilon \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{c} \varepsilon \\ \varepsilon \end{array} \Big| \begin{array}{c} Y' \\ Z'' \end{array} \end{array} \end{array} \end{array}$$

und dem Einfach-Splicing-Ableitungsschritt  $(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3) \vdash_{\Gamma_{2 \cdot n+1}} (\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2, \mathcal{L}'_3)$  mit  $S_k = \{w \in V^* \mid \exists (p_a, p_e) \in F_k. (p_a \in \text{pre}(w) \wedge p_e \in \text{suf}(w))\}$  und

$$\mathcal{L}'_i = \left( \left( \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \sigma_j^1(\mathcal{L}_j) \right) \cap S_i \right) \cup \left( \sigma_i^1(\mathcal{L}_i) \setminus \left( \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 S_j \right) \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, 3\}.$$

$\diamond$

**Satz 3.1** ( $L(\Gamma_{2 \cdot n+1})$  aus Beispiel 3.1)

Das System  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$  aus Beispiel 3.1 erzeugt die Sprache  $L(\Gamma_{2 \cdot n+1}) = \{w \mid w \in \{n\}^+ \wedge |w| \bmod 2 = 1\}$ .  $\diamond$

**Beweis 3.1** (Satz 3.1)

Die Korrektheit des Systems  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$  aus Beispiel 3.1 kann induktiv über die Konfigurationen des Systems gezeigt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(0)} &= (\{XnY, ZnnY, ZnnY'\}, \{XnY', Z', Z''\}, \emptyset) \\ \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(1)} &= \left( C_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(0),1} \cup \{Zn^4Y', Zn^4Y, ZY, Xn^3Y\}, \right. \\ &\quad \left. C_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(0),2} \cup \{Xn, Z'Y', XZ'', nY', Xn^3Y'\}, \emptyset \right) \\ \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(2)} &= \left( C_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(1),1} \cup \{Zn^6Y', Zn^6Y, Xn^5Y\}, \right. \\ &\quad \left. C_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(1),2} \cup \{Xn^3, n^3Y', Xn^5Y'\}, \{n\} \right) \end{aligned}$$

und für alle  $i \in \mathbb{N}, i \geq 3$  gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(i)} &= \left( C_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(i-1),1} \cup \{Zn^{2 \cdot i+2}Y', Zn^{2 \cdot i+2}Y, Xn^{2 \cdot i+1}Y\}, \right. \\ &\quad C_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(i-1),2} \cup \{Xn^{2 \cdot i-1}, n^{2 \cdot i-1}Y', Xn^{2 \cdot i+1}Y\}, \\ &\quad \left. C_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(i-1),3} \cup \{n^{2 \cdot i-3}\} \right) \end{aligned}$$

□

In [CKP96] konnte gezeigt werden, dass TT-Systeme mit endlichen Mengen von Axiomen und endlichen Mengen von Splicing-Regeln universelle Berechnungsstärke besitzen, wobei für eine Grammatik mit dem Terminalalphabet  $\Sigma$  die Anzahl der Komponenten  $|\Sigma| + 8$  beträgt. Die Universalität konnte jedoch auch für eine feste, von  $\Sigma$  unabhängige, Anzahl mit neun [FMZ00], sechs [HS04], drei [PRM98] und zwei Komponenten [HSV08] gezeigt werden.

**3.2 Ausgewählte universelle TT-EH-Systeme**

Im Folgenden werden drei universelle TT-Systeme mit endlich vielen Komponenten und jeweils endlichen Axiomen-, Filterregel- und Splicing-Regelmengen vorgestellt. Die beiden Systeme TT6 (3.2.1) und TT2 (3.2.2) basieren auf dem Einfach-Splicing-Ableitungsschritt; die jeweiligen Filterregelmengen sind formal als Tupel über Wörtern definiert, welche die Präfixe bzw. Suffixe der akzeptierten Wörter spezifizieren. Im System TT3 (3.2.3) sind die Filterregelmengen, wie in 3.1 beschrieben, Alphabete, wobei alle Wörter der



Sprache über dem Alphabet durch den jeweiligen Filter akzeptiert werden. Eine Transition im System TT3 ist ein Mehrfach-Splicing-Ableitungsschritt.

Allen universellen verteilten kommunizierenden Splicing-Systemen ist eine Unterspezifikation ihrer Komponenten gemein. D. h., die Spezifikation der Axiomen-, Filter- sowie Splicing-Regelmengen der Komponenten ist abhängig von einem systemweiten Parameter, welcher die jeweils zu lösende Aufgabenstellung formal beschreibt. Für die Systeme TT6, TT2 und TT3 wird diese durch eine Chomsky-Typ-0-Grammatik spezifiziert.

### 3.2.1 Das System TT6

Das verteilte kommunizierende Splicing-System TT6 besteht aus sechs durch Filter miteinander verbundenen Komponenten und beschreibt ein universelles Modell zur Lösung algorithmischer Aufgabenstellungen. Sei  $G_{KNF} = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  eine Chomsky-Grammatik in Kuroda-Normalform, dann ist  $\Gamma = (V, \Sigma, (A_1, R_1, F_1), \dots, (A_6, R_6, F_6))$  ein auf  $G$  basierendes, endlichkomponentiges TT6-EH-System, wobei  $A_i \subset V^+$  die endliche Menge der Axiome,  $R_i \subset V^* \cdot \{\#\} \cdot V^* \cdot \{\$\} \cdot V^* \cdot \{\#\} \cdot V^*$  die endliche Menge der Splicing-Regeln und  $F_i \subset V^* \times V^*$  die endliche Menge der Filterregeln für die Komponente  $i$  ist. Jedes Quadrupel  $(V, \Sigma, A_i, R_i)$  beschreibt ein endlichkomponentiges, endenmarkiertes EH-System.

#### Definition 3.4 (TT6-EH-System)

Für eine Grammatik  $G_{KNF} = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  mit  $\Sigma = \{s_1, \dots, s_n\}$  und  $V_G = \{N_1, \dots, N_m\}$  ist  $\Gamma = (V, \Sigma, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$  gegeben mit:

$$\begin{aligned}
V &= V_G \cup \Sigma \cup \{\alpha, \beta, B, X, X', Y, Y', Y'_\alpha, Y'_\beta, Z, Z', Z''\} \\
&\quad \text{mit } \{\alpha, \beta, B, X, X', Y, Y', Y'_\alpha, Y'_\beta, Z, Z', Z''\} \cap (V_G \cup \Sigma) = \emptyset \\
T_1 &= (A_1, R_1, F_1) \\
&\quad A_1 = \{XBS_GY\} \cup \{ZvY' \mid \exists u \in V_G^+. (u, v) \in P_G\} \\
&\quad F_1 = \{(X, Y)\} \\
T_2 &= (A_2, R_2, F_2) \\
&\quad A_2 = \{ZY'_\alpha, ZY'_\beta, X'Z, ZY\} \cup \bigcup_{i=1}^{m+m+1} \{Z\beta\alpha^i\beta Y'\} \cup \\
&\quad \quad \bigcup_{i=1}^m \{Xs_iZ\} \cup \bigcup_{i=1}^m \{XN_iZ\} \cup \{XBZ\} \\
&\quad F_2 = \{(X, Y')\} \\
T_3 &= (A_3, R_3, F_3) & T_5 &= (A_5, R_5, F_5) \\
&\quad A_3 = \{ZY', X\alpha Z\} & A_5 &= \{Z'Z', Z''Z''\} \\
&\quad F_3 = \{(X', Y'_\alpha)\} & F_5 &= \{(\varepsilon, BY)\} \\
T_4 &= (A_4, R_4, F_4) & T_6 &= (A_6, R_6, F_6) \\
&\quad A_4 = \{ZY', X\beta Z\} & A_6 &= \emptyset \\
&\quad F_4 = \{(X', Y'_\beta)\} & R_6 &= \emptyset \\
& & F_6 &= \{(s_i, s_j) \mid i, j \in \mathbb{N}_n^+\}
\end{aligned}$$

und mit  $\mathbb{N}_n^+ = \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathbb{N}_m^+ = \{1, \dots, m\}$  den Mengen von Splicing-Regeln:

$$\begin{aligned}
R_1 & : \frac{\varepsilon \mid uY}{Z \mid vY'} \quad \forall (u, v) \in P_G \quad (r_{11}^{(u,v)}) \\
R_2 & : \frac{\varepsilon \mid s_i Y'}{Z \mid \beta \alpha^i \beta Y'} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n^+ \quad (r_{21}^i) \quad \frac{\varepsilon \mid N_i Y'}{Z \mid \beta \alpha^{n+i} \beta Y'} \quad \forall i \in \mathbb{N}_m^+ \quad (r_{22}^i) \quad \frac{\varepsilon \mid BY'}{Z \mid \beta \alpha^{n+m+1} \beta Y'} \quad (r_{23}) \\
R_3 & : \frac{\varepsilon \mid \beta Y'}{Z \mid Y'_\beta} \quad (r_{24}) \quad \frac{\varepsilon \mid \alpha Y'}{Z \mid Y'_\alpha} \quad (r_{25}) \quad \frac{X \mid \varepsilon}{X' \mid Z} \quad (r_{26}) \quad \frac{X \beta \alpha^i \beta \mid \varepsilon}{X s_i \mid Z} \quad (r_{27}^i) \quad \forall i \in \mathbb{N}_n^+ \\
R_4 & : \frac{X \beta \alpha^{n+i} \beta \mid \varepsilon}{X N_i \mid Z} \quad \forall i \in \mathbb{N}_m^+ \quad (r_{28}^i) \quad \frac{X \beta \alpha^{n+m+1} \beta \mid \varepsilon}{X B \mid Z} \quad (r_{29}) \quad \frac{\varepsilon \mid Y'}{Z \mid Y} \quad (r_{210}) \\
R_5 & : \frac{\varepsilon \mid Y'_\alpha}{Z \mid Y'} \quad (r_{31}) \quad \frac{X' \mid \varepsilon}{X \alpha \mid Z} \quad (r_{32}) \quad R_4 : \frac{\varepsilon \mid Y'_\beta}{Z \mid Y'} \quad (r_{41}) \quad \frac{X' \mid \varepsilon}{X \beta \mid Z} \quad (r_{42}) \\
R_5 & : \frac{\varepsilon \mid BY}{Z' Z' \mid \varepsilon} \quad (r_{51}) \quad \frac{X \mid \varepsilon}{\varepsilon \mid Z'' Z''} \quad (r_{52}) \quad \diamond
\end{aligned}$$

Für ein TT6-EH-System  $\Gamma = (V, \Sigma, (A_1, R_1, F_1), \dots, (A_6, R_6, F_6))$  ist eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  gegeben durch ein 6-Tupel  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_6)$  mit  $\mathcal{L}_i \subseteq V^*$ . Ein Ableitungsschritt bzw. eine Transition wird mit  $\mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma \mathcal{C}'_\Gamma$  wie in Definition 3.1 für  $n = 6$  definiert, wobei die Mengen  $S_i$  gegeben sind mit  $S_i = \{w \in V^* \mid \exists (p_a, p_e) \in F_i. (p_a \in \text{pre}(w) \wedge p_e \in \text{suf}(w))\}$  für alle  $i \in \{1, \dots, 6\}$ . Die erzeugte Sprache ist  $L(\Gamma) = \Sigma^+ \cap \{w \in \mathcal{L}_6 \mid \exists (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_6). ((A_1, \dots, A_6) \vdash_\Gamma^* (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_6))\}$ .

Das System simuliert die Ableitung eines Wortes mittels einer Grammatik  $G_{\text{KNF}} = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  wie folgt. Für ein Wort  $w = w' \cdot u$  (ohne Beachtung der Hilfssymbole) in der ersten Komponente wird durch die entsprechende Splicing-Regel  $r_{11}^{(u,v)}$  die Anwendung einer Ableitung am rechten Wortende von  $w$  simuliert und das resultierende Wort  $w' \cdot v$  in die zweite Komponente kommuniziert. In der zweiten Komponente kann dieses Wort durch Anwendung der Regel  $r_{210}$  wieder in die erste Komponente kommuniziert werden, wodurch eine weitere Anwendung einer Produktionsregel am Wortende möglich ist. Durch Kodierung der Grammatiksymbole  $s_i \in \Sigma, i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\beta \alpha^i \beta$ ,  $N_i \in V_G, i \in \{1, \dots, m\}$  mit  $\beta \alpha^{n+i} \beta$  und des Markierungssymbols

$B$  mit  $\beta\alpha^{n+m+1}\beta$  durch die Splicing-Regeln  $r_{21}^i, r_{22}^i$  sowie  $r_{23}$  und unter Zuhilfenahme der Komponenten drei und vier kann ein kodiertes Symbol vom rechten Ende eines Wortes an das linke Ende rotiert werden. Mittels Dekodierung durch die Regeln  $r_{27}^i, r_{28}^i$  und  $r_{29}$  der zweiten Komponente wird die Symbolrotation beendet. Die fünfte Komponente dient der Entfernung der im System verwendeten Hilfssymbole und die sechste Komponente der Sammlung der Berechnungsergebnisse.

### 3.2.2 Das System TT2

Das verteilte kommunizierende Splicing-System TT2 besteht im Gegensatz zum System TT6 aus nur zwei miteinander kommunizierenden Komponenten, wobei die zu lösende Aufgabenstellung ebenfalls in Form einer Typ-0-Grammatik in Kuroda-Normalform angegeben wird.

Das System  $\Gamma = (V, \Sigma, (A_1, R_1, F_1), (A_2, R_2, F_2))$  ist ein auf  $G_{\text{KNF}} = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  basierendes TT2-EH-System mit endlichem Alphabet  $V = V_G \cup \Sigma \cup \{B, X, Y', Z, Z', Z''\} \cup \{L_i, G_i \mid i \in \{1, \dots, |\Sigma| + |V_G| + 1\}\}$  mit  $|V| = 3 \cdot (|V_G| + |\Sigma|) + 8$ , dem endlichen Terminalalphabet  $\Sigma$  sowie den endlichen Axiomenmengen  $A_1, A_2 \subset V^+$ , den endlichen Splicing-Regelmengen  $R_1, R_2 \subset V^* \cdot \{\#\} \cdot V^* \cdot \{\$\} \cdot V^* \cdot \{\#\} \cdot V^*$  nach Definition 2.12 und den endlichen Filterregelmengen  $F_1, F_2 \subset V^* \times V^*$ . Jedes Quadrupel  $(V, \Sigma, A_i, R_i)$  beschreibt ein endlichkomponentiges, endenmarkiertes EH-System nach Definition 2.13.

#### Definition 3.5 (TT2-EH-System)

Wir definieren  $\Gamma = (V, \Sigma, T_1, T_2)$  ein auf  $G_{\text{KNF}} = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  basierendes, endlichkomponentiges TT2-EH-System mit  $\Sigma = \{s_1, \dots, s_n\}, V_G = \{N_1, \dots, N_m\}$  und den wie folgt spezifizierten Komponenten:

$$\begin{aligned}
V &= V_G \cup \Sigma \cup \{B, X, Y', Z, Z', Z''\} \cup \bigcup_{i=1}^{n+m+1} \{L_i, G_i\} \\
&\text{mit } \left( \{B, X, Y', Z, Z', Z''\} \cup \bigcup_{i=1}^{n+m+1} \{L_i, G_i\} \right) \cap (V_G \cup \Sigma) = \emptyset \\
T_1 &= (A_1, R_1, F_1) \\
A_1 &= \{XBS_GY'\} \cup \{ZvY' \mid \exists u \in V_G^+. (u, v) \in P_G\} \cup \\
&\quad \bigcup_{i=1}^{n+m+1} \{ZG_i\} \cup \bigcup_{i=1}^n \{L_i s_i Z\} \cup \bigcup_{i=1}^m \{L_{n+i} N_i Z\} \cup \\
&\quad \{L_{n+m+1} BZ\} \\
F_1 &= \{(X, Y')\} \\
T_2 &= (A_2, R_2, F_2) \\
A_2 &= \{ZY', XZ, Z'Z', Z''Z''\} \\
F_2 &= \bigcup_{i=1}^{n+m+1} \{L_i, G_i\}
\end{aligned}$$

und mit  $\mathbb{N}_n^+ = \{1, \dots, n\}$  den Splicing-Regel-Mengen:

$$\begin{array}{l}
R_1 : \frac{(r_{11}^{(u,v)})}{Z \mid \frac{\varepsilon \mid uY'}{vY'}} \forall (u,v) \in P_G \quad \frac{(r_{12}^i)}{Z \mid \frac{\varepsilon \mid s_i Y'}{G_i}} \forall i \in \mathbb{N}_n^+ \quad \frac{(r_{13}^i)}{Z \mid \frac{\varepsilon \mid N_i Y'}{G_{n+i}}} \forall i \in \mathbb{N}_m^+ \\
\frac{(r_{14})}{Z \mid \frac{\varepsilon \mid BY'}{G_{n+m+1}}} \quad \frac{(r_{15}^i)}{L_i s_i \mid \frac{X \mid \varepsilon}{Z}} \forall i \in \mathbb{N}_n^+ \quad \frac{(r_{16}^i)}{L_{n+i} N_i \mid \frac{X \mid \varepsilon}{Z}} \forall i \in \mathbb{N}_m^+ \\
\frac{(r_{17})}{L_{n+m+1} B \mid \frac{X \mid \varepsilon}{Z}} \\
R_2 : \frac{(r_{21}^i)}{Z \mid \frac{\varepsilon \mid G_i}{Y'}} \forall i \in \mathbb{N}_{n+m+1}^+ \quad \frac{(r_{22}^i)}{X \mid \frac{L_i \mid \varepsilon}{Z}} \forall i \in \mathbb{N}_{n+m+1}^+ \quad \frac{(r_{23})}{Z' Z' \mid \frac{\varepsilon \mid G_{n+m+1}}{\varepsilon}} \\
\frac{(r_{24})}{\varepsilon \mid \frac{L_{n+m+1} B \mid \varepsilon}{Z'' Z''}} \quad \diamond
\end{array}$$

Eine Transition eines TT2-EH-Systems  $\Gamma = (V, \Sigma, (A_1, R_1, F_1), (A_2, R_2, F_2))$  von einer Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$  mit  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subseteq V^*$  zu einer Konfiguration  $\mathcal{C}'_\Gamma$  ist ein Einfach-Splicing-Ableitungsschritt  $\mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma \mathcal{C}'_\Gamma$ , wobei die Sprachen  $S_1, S_2$  durch die Filterregelmengen  $F_1, F_2$  definiert sind, welche aus Tupeln von Prä- und Suffixen bestehen. Die von  $\Gamma$  generierte Sprache ist gegeben mit  $L(\Gamma) = \Sigma^+ \cap \{w \in \mathcal{L}_2 \mid \exists (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2). ((A_1, A_2) \vdash_\Gamma^* (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2))\}$ .

Adäquat zu TT6-EH-Systemen realisieren TT2-EH-Systeme die Ableitung von Wörtern mittels einer Grammatik  $G_{\text{KNF}} = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  durch Termersetzung am rechten Wortende gemäß den Ableitungsregeln aus  $P_G$  und einer Wortrotation. Mittels der durch  $(u, v) \in P_G$  erzeugten Regel  $r_{11}^{(u,v)}$  kann durch gezielte Rekombination ein Vorkommen eines Teilwortes  $u \in V_G^+$  am rechten Ende eines Wortes  $w$  (ohne Beachtung der Hilfssymbole) durch das Teilwort  $v \in V_G^*$  ersetzt werden. Durch die Regeln  $r_{12}^i, i \in \{1, \dots, n\}; r_{13}^i, i \in \{1, \dots, m\}$  und  $r_{14}$  kann das rechte Symbol eines Wortes in der ersten Komponente entfernt und am linken Wortende unter Verwendung der Regeln  $r_{15}^i, i \in \{1, \dots, n\}; r_{16}^i, i \in \{1, \dots, m\}$  sowie  $r_{16}$  angefügt werden. Durch den Filter der zweiten Komponente, beschrieben durch die Filterregelmenge  $\{(L_i, G_i) \mid i \in \{1, \dots, n+m+1\}\}$ , wird sichergestellt, dass das am linken Wortende hinzugefügte Zeichen am rechten Wortende entfernt wurde. Neben der Entfernung bzw. Modifikation der Hilfssymbole dient die zweite Komponente der Kollektion der Berechnungsergebnisse des jeweiligen Systems.

### 3.2.3 Das System TT3

Ein auf einer Typ-0-Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  basierendes TT3-EH-System  $\Gamma = (V, \Sigma, (A_1, R_1, F_1), (A_2, R_2, F_2), (A_3, R_3, F_3))$  mit  $A_1, A_2, A_3 \subset V^+$ ,  $R_1, R_2, R_3 \subset V^* \cdot \{\#\} \cdot V^* \cdot \{\$\} \cdot V^* \cdot \{\#\} \cdot V^*$  nach Definition 2.12 und  $F_1, F_2, F_3 \subseteq V$  besteht aus drei miteinander kommunizierenden Komponenten. Dabei beschreibt  $V$  das Alphabet,  $A_1, A_2, A_3$  die endlichen Mengen von Axiomen,  $R_1, R_2, R_3$  die endlichen Mengen von Splicing-Regeln und  $F_1, F_2, F_3$  die endlichen Mengen von Filterregeln.

#### Definition 3.6 (TT3-EH-System)

Für  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  ist  $\Gamma = (V, T_1, T_2, T_3)$  ein endlichkomponentiges TT3-EH-System mit  $V_G \cup \Sigma \cup \{B\} = \{l_1, \dots, l_n\}$  und den Komponenten:

$$\begin{aligned}
 V &= V_G \cup \Sigma \cup \{B, X, Y, \alpha, \beta, \gamma, X', Y_\alpha, Y_\beta, Z\} \\
 &\quad \text{mit } \{B, X, Y, \alpha, \beta, \gamma, X', Y_\alpha, Y_\beta, Z\} \cap (V_G \cup \Sigma) = \emptyset \\
 T_1 &= (A_1, R_1, F_1) \\
 &\quad A_1 = \{XS_GBY, XBS_GY, ZY_\alpha, ZY_\beta, X'Z, ZZ\} \cup \\
 &\quad \quad \{Z\beta\alpha^i\beta Y \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \\
 &\quad \quad \{ZvY \mid \exists u \in V_G^+ \cdot (u, v) \in P_G\} \cup \{Xl_iZ \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \\
 &\quad F_1 = V_G \cup \Sigma \cup \{B, X, Y, \alpha, \beta, \gamma\} \\
 T_2 &= (A_2, R_2, F_2) & T_3 &= (A_3, R_3, F_3) \\
 &\quad A_2 = \{ZY, X\beta Z\} & &\quad A_3 = \{ZY, X\alpha Z\} \\
 &\quad F_2 = V_G \cup \Sigma \cup & &\quad F_3 = V_G \cup \Sigma \cup \\
 &\quad \quad \{B, \alpha, \beta, \gamma, X', Y_\beta\} & &\quad \{B, \alpha, \beta, \gamma, X', Y_\alpha\}
 \end{aligned}$$

und den Splicing-Regel-Mengen:

$$\begin{aligned}
 R_1 &: \frac{\overset{(r_{11}^{u,v})}{\varepsilon} \mid uY}{Z \mid vY} \quad \forall (u, v) \in P_G & \frac{\overset{(r_{12}^i)}{\varepsilon} \mid l_i Y}{Z \mid \beta\alpha^i\beta Y} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} & \frac{\overset{(r_{13})}{\varepsilon} \mid \beta Y}{Z \mid Y_\beta} \\
 &\frac{\overset{(r_{14})}{\varepsilon} \mid \alpha Y}{Z \mid Y_\alpha} & \frac{\overset{(r_{15})}{X} \mid \varepsilon}{X' \mid Z} & \frac{\overset{(r_{16}^i)}{X\beta\alpha^i\beta} \mid \varepsilon}{Xl_i \mid Z} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\
 &\frac{\overset{(r_{17})}{\varepsilon} \mid Y}{Z \mid \gamma\beta\beta Y} & \frac{\overset{(r_{18})}{\varepsilon} \mid \gamma Y}{ZZ \mid \varepsilon} & \frac{\overset{(r_{19})}{X\beta\beta B} \mid \varepsilon}{\varepsilon \mid ZZ} \\
 R_2 &: \frac{\overset{(r_{21})}{\varepsilon} \mid Y_\beta}{Z \mid Y} & \frac{\overset{(r_{22})}{X'} \mid \varepsilon}{X\beta \mid Z} & R_3 &: \frac{\overset{(r_{31})}{\varepsilon} \mid Y_\alpha}{Z \mid Y} & \frac{\overset{(r_{32})}{X'} \mid \varepsilon}{X\alpha \mid Z} & \diamond
 \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu den Systemen TT2 und TT6 sind die Filter durch Alphabete spezifiziert, über die die jeweils durch den Filter akzeptierte Sprache definiert ist. Eine Transition zwischen zwei Konfigurationen  $\mathcal{C}_\Gamma = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3), \mathcal{C}'_\Gamma$  mit  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3 \subseteq V^*$  eines TT3-EH-Systems  $\Gamma$ , notiert mit  $\mathcal{C}_\Gamma \Vdash_\Gamma \mathcal{C}'_\Gamma$ , entspricht einem Mehrfach-Splicing-Ableitungsschritt aus Definition 3.2. Eine ausführliche Beschreibung des Systems sowie einer Erweiterung sind in [PRM98] angegeben.

### 3.3 Strukturelle operationelle Semantik für TT-Systeme

Mittels struktureller operationeller Semantiken (SOS) wird eine formale Beschreibung von Berechnungssystemen definiert, welche einen abstrakten Interpreter beschreibt und somit die Studie von Beziehungen zwischen zwei gegebenen Systemen sowie die formale Prüfung von bestimmten Eigenschaften in einem System ermöglicht. Beispielsweise ist die Analyse der durch ein TT-EH-System erzeugten Sprache aufgrund ihrer Definition nicht hinreichend, um Aussagen über ein System zu treffen, da, wie Beispiel 3.2 veranschaulicht, bereits erzeugte Wörter aus der letzten Komponente des Systems wieder entfernt werden können. Die operationelle Semantik wird durch die Angabe einer abstrakten Syntax des Systems und der Definition von Konfigurationen und Transitionen zwischen diesen spezifiziert.

#### Beispiel 3.2 ( $\Gamma_0$ )

Für das System  $\Gamma_0 = (\{\{n\}, \{n\}, (\{n\}, \emptyset, \{(n, n)\}), (\emptyset, \emptyset, \{(n, n)\})$ ) sind Berechnungsergebnisse in der akzeptierenden Komponente nicht persistent, da

$$\mathcal{C}_\Gamma^{(i)} = \begin{cases} (\{n\}, \emptyset) & \text{falls } i \bmod 2 = 0, i \in \mathbb{N}^+ \\ (\emptyset, \{n\}) & \text{falls } i \bmod 2 = 1, i \in \mathbb{N}^+ \end{cases}$$

gilt. ◇

In der strukturellen operationellen Semantik der verteilten kommunizierenden Splicing-Systeme mit Einfach-Splicing-Ableitungsschritten wird die Definition einer Konfiguration leicht modifiziert. Für ein gegebenes System  $\Gamma = (V, \Sigma, (A_1, R_1, F_1), \dots, (A_n, R_n, F_n))$  vom Grad  $n$  ist eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  gegeben durch eine Sequenz  $\langle L, K \rangle^n$ , wobei  $L \in \{1, \dots, n\}$  ein Label und  $K \subseteq V^*$  ist. Die Menge  $K$  definiert den Inhalt einer Komponente, also eine Sprache über Wörtern des Alphabets  $V$ . Eine Zwischenkonfiguration  $\mathcal{C}'_\Gamma$  ist gegeben durch eine Sequenz  $\langle L, K' \rangle^n$  mit einem Label  $L \in \{1, \dots, n\}$  und der Menge der Kommunikationsregeln  $K' \subseteq L \times V^+$  der Form  $(l, w)$ , wobei  $l$  die Zielkomponente und  $w$  das zu kommunizierende Wort beschreibt. Weiterhin werden die Funktionen  $\text{com}_i : L \times V^+ \rightarrow V^*$  mit  $\text{com}_i(K') = \{w \mid (i, w) \in K'\}$  und  $\pi : \mathbb{N} \times \langle L, K \rangle^n \rightarrow V^*$  mit  $\pi(i, \langle L_1, K_1 \rangle, \dots, \langle L_n, K_n \rangle) = K_i$  definiert.

---

**Transitionsregeln 3.1** Transitionsregeln für die strukturelle operationelle Semantik von verteilten kommunizierenden Splicing-Systemen
 

---

$$\begin{array}{c}
 \text{(Trans)} \\
 \frac{\mathcal{C}_\Gamma \rightarrow \mathcal{C}'_\Gamma \quad \mathcal{C}'_\Gamma \rightarrow \mathcal{C}''_\Gamma \quad \begin{array}{l} \zeta = (\pi(n, \mathcal{C}''_\Gamma) \setminus \pi(n, \mathcal{C}_\Gamma)) \cap \Sigma^+ \\ \xi = (\pi(n, \mathcal{C}_\Gamma) \setminus \pi(n, \mathcal{C}''_\Gamma)) \cap \Sigma^+ \end{array}}{\mathcal{C}_\Gamma \xrightarrow{(\zeta, \xi)} \mathcal{C}''_\Gamma} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \text{(\tau)} & & \text{(\rightarrow_1)} \\
 \frac{\mathcal{C}_\Gamma \xrightarrow{(\emptyset, \emptyset)} \mathcal{C}''_\Gamma}{\mathcal{C}_\Gamma \xrightarrow{\tau} \mathcal{C}''_\Gamma} & & \frac{\langle 1, K_1 \rangle \rightarrow \langle 1, K'_1 \rangle \quad \dots \quad \langle n, K_n \rangle \rightarrow \langle n, K'_n \rangle}{\langle 1, K_1 \rangle, \dots, \langle n, K_n \rangle \rightarrow \langle 1, K'_1 \rangle, \dots, \langle n, K'_n \rangle} \\
 \\
 \text{(\rightarrow_2)} & & \text{(\rightarrow)} \\
 \frac{\langle i, K_i \rangle \rightarrow \langle i, K'_i \rangle}{\langle i, K_i \rangle \rightarrow \langle i, K'_i \rangle} & & \frac{K'_i = \bigcup_{j=1}^n \text{com}_i(K_j)}{\langle 1, K_1 \rangle, \dots, \langle n, K_n \rangle \rightarrow \langle 1, K'_1 \rangle, \dots, \langle n, K'_n \rangle}
 \end{array}
 \end{array}$$

---


$$K'_i = \bigcup_{j=1, j \neq i}^n \{(j, w) \mid (w \in (K_i \cup \sigma_i(K_i)) \wedge w \in S_j)\} \cup \{(i, w) \mid (w \in (K_i \cup \sigma_i(K_i)) \wedge w \notin \bigcup_{j=1, j \neq i}^n S_j)\} \text{ in } \rightarrow_2$$


---

Für TT-EH-Systeme vom Grad  $n$ , basierend auf der nach Definition 3.1 beschriebenen Einfach-Splicing-Ableitungsrelation, der nach Definition 3.3 erzeugten Sprache sowie mit  $A_n = R_n = \emptyset$ , ist die strukturelle operationelle Semantik durch ein beschriftetes Transitionssystem mit der Aktionsmenge  $\mathcal{Act} \subseteq \mathcal{P}(V^+) \times \mathcal{P}(V^+)$ , der Menge der Konfigurationen  $\mathcal{C}_\Gamma$  des Systems  $\Gamma$  und den Transitionsregeln 3.1 mit  $K'_i = \bigcup_{j=1, j \neq i}^n \{(j, w) \mid (w \in (K_i \cup \sigma_i(K_i)) \wedge w \in S_j)\} \cup \{(i, w) \mid (w \in (K_i \cup \sigma_i(K_i)) \wedge w \notin \bigcup_{j=1, j \neq i}^n S_j)\}$  in  $\rightarrow_2$  gegeben.

Da die  $n$ te Komponente die Berechnungsergebnisse beinhaltet und in allen anderen Komponenten nur Zwischenergebnisse gespeichert werden, besteht der beobachtbare Teil einer Transition von einer Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  zu einer Folgekonfiguration  $\mathcal{C}''_\Gamma$  genau aus den Mengen von Wörtern über dem Terminalalphabet  $\Sigma$ , die zur  $n$ ten Komponente während einer Kommunikationstransition hinzugefügt (Menge  $\zeta$ ) bzw. aus der  $n$ ten Komponente herausgefiltert (Menge  $\xi$ ) werden. Eine Transition wird daher notiert mit  $\mathcal{C}_\Gamma \xrightarrow{(\zeta, \xi)} \mathcal{C}''_\Gamma$  und es gilt  $\zeta = (\pi(n, \mathcal{C}''_\Gamma) \setminus \pi(n, \mathcal{C}_\Gamma)) \cap \Sigma^+$  sowie  $\xi = (\pi(n, \mathcal{C}_\Gamma) \setminus \pi(n, \mathcal{C}''_\Gamma)) \cap \Sigma^+$ . Eine Transition ist unbeobachtbar, falls  $\mathcal{C}_\Gamma \xrightarrow{(\emptyset, \emptyset)} \mathcal{C}''_\Gamma$  gilt. Ein unbeobachtbares (internes) Ereignis wird mit  $\mathcal{C}_\Gamma \xrightarrow{\tau} \mathcal{C}''_\Gamma$  spezifiziert und durch die Regel  $(\tau)$  inferiert.

Die Berechnung eines verteilten kommunizierenden Splicing-Systems mit Einfach-Splicing-Berechnungsschritten ist die sequentielle Hintereinanderausführung

rung der gleichzeitigen Anwendung der Splicing-Operation auf alle Komponenten des Systems und die anschließende, durch Filter gesteuerte, Verteilung (Kommunikation). Eine Transition wird durch die Regel Trans in eine Splicing-Transition  $\rightarrow$  und eine Kommunikationstransition  $\rightarrow$  unterteilt.

Die Splicing-Transition  $\rightarrow$  realisiert die gleichzeitige Anwendung der Splicing-Operation auf alle Komponenten des Systems und ist aufgrund der Definition einer Konfiguration durch die Regeln  $(\rightarrow_1)$  und  $(\rightarrow_2)$  gegeben. Die resultierende Zwischenkonfiguration  $\mathcal{C}'_\Gamma$  wird anschließend durch die Regel  $(\rightarrow)$  mit  $K'_i = \bigcup_{j=1}^n \text{com}_i(K_j)$  abgeleitet.

Im Gegensatz zur strukturellen operationellen Semantik für P-Systeme mit Symbolobjekten aus [ACL06] wird im folgenden Transitionssystem für verteilte kommunizierende Splicing-Systeme zwischen beobachtbarer und unbeobachtbarer Kommunikation unterschieden.

### Satz 3.2 (Vollständigkeit SOS)

Für jede Konfiguration  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$  und jeden Einfach-Splicing-Ableitungsschritt  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) \vdash_\Gamma (\mathcal{L}'_1, \dots, \mathcal{L}'_n)$  eines TT-EH-Systems  $\Gamma$  gilt entweder  $\langle 1, \mathcal{L}_1 \rangle, \dots, \langle n, \mathcal{L}_n \rangle \xrightarrow{\tau} \langle 1, \mathcal{L}'_1 \rangle, \dots, \langle n, \mathcal{L}'_n \rangle$  oder es existieren zwei Sprachen  $\zeta, \xi \subseteq V^*$ , so dass  $\langle 1, \mathcal{L}_1 \rangle, \dots, \langle n, \mathcal{L}_n \rangle \xrightarrow{(\zeta; \xi)} \langle 1, \mathcal{L}'_1 \rangle, \dots, \langle n, \mathcal{L}'_n \rangle$  gilt.  $\diamond$

### Satz 3.3 (Korrektheit SOS)

Für jede Konfiguration  $\langle 1, \mathcal{L}_1 \rangle, \dots, \langle n, \mathcal{L}_n \rangle$  eines Systems  $\Gamma$  und jede Transition  $\langle 1, \mathcal{L}_1 \rangle, \dots, \langle n, \mathcal{L}_n \rangle \xrightarrow{\tau} \langle 1, \mathcal{L}'_1 \rangle, \dots, \langle n, \mathcal{L}'_n \rangle$  bzw.  $\langle 1, \mathcal{L}_1 \rangle, \dots, \langle n, \mathcal{L}_n \rangle \xrightarrow{(\zeta; \xi)} \langle 1, \mathcal{L}'_1 \rangle, \dots, \langle n, \mathcal{L}'_n \rangle$  gilt  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) \vdash_\Gamma (\mathcal{L}'_1, \dots, \mathcal{L}'_n)$ .  $\diamond$

### Beweis 3.2 (Satz 3.2, Satz 3.3)

Für ein TT-EH-System vom Grad  $n$  ist ein Einfach-Splicing-Ableitungsschritt  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) \vdash_\Gamma (\mathcal{L}'_1, \dots, \mathcal{L}'_n)$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  definiert mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_i &= \left( \left( \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n \sigma_j^1(\mathcal{L}_j) \right) \cap S_i \right) \cup \left( \sigma_i^1(\mathcal{L}_i) \setminus \left( \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n S_j \right) \right) \\ &= \left( \left( \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n (\mathcal{L}_j \cup \sigma_j(\mathcal{L}_j)) \right) \cap S_i \right) \cup \left( (\mathcal{L}_i \cup \sigma_i(\mathcal{L}_i)) \setminus \left( \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n S_j \right) \right) \\ &= \left( \left( \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n \mathcal{L}_j \right) \cap S_i \right) \cup \left( \left( \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n \sigma_j(\mathcal{L}_j) \right) \cap S_i \right) \cup \\ &\quad \left( \mathcal{L}_i \setminus \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n S_j \right) \cup \left( \sigma_i(\mathcal{L}_i) \setminus \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n S_j \right). \end{aligned}$$



Eine Transition in der SOS  $\langle 1, K_1 \rangle, \dots, \langle n, K_n \rangle \xrightarrow{(\zeta, \xi)} \langle 1, K'_1 \rangle, \dots, \langle n, K'_n \rangle$  ist definiert mit zwei Transitionen  $\langle 1, K_1 \rangle, \dots, \langle n, K_n \rangle \rightarrow \langle 1, K'_1 \rangle, \dots, \langle n, K'_n \rangle$  und  $\langle 1, K'_1 \rangle, \dots, \langle n, K'_n \rangle \rightarrow \langle 1, K''_1 \rangle, \dots, \langle n, K''_n \rangle$ . Es ist zu zeigen, dass mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  für  $\mathcal{L}_i = K_i$  gilt, dass  $\mathcal{L}'_i = K''_i$ . Es gilt  $\forall i \in \mathbb{N}_n^+. K''_i = \bigcup_{k=1}^n \text{com}_i(K'_k)$  aufgrund Regel ( $\rightarrow$ ) und somit

$$\begin{aligned}
K''_i &= \bigcup_{k=1}^n \text{com}_i(K'_k) = \bigcup_{k=1}^n \{w \mid (i, w) \in K'_k\} \\
&\stackrel{(\rightarrow_2)}{=} \bigcup_{k=1}^n \{w \mid (i, w) \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \{(j, w) \mid w \in K_k \wedge w \in S_j\}\} \cup \\
&\quad \bigcup_{k=1}^n \{w \mid (i, w) \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \{(j, w) \mid w \in \sigma_k(K_k) \wedge w \in S_j\}\} \cup \\
&\quad \bigcup_{k=1}^n \{w \mid (i, w) \in \{(k, w) \mid w \in K_k \wedge w \notin \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n S_j\}\} \cup \\
&\quad \bigcup_{k=1}^n \{w \mid (i, w) \in \{(k, w) \mid w \in \sigma_k(K_k) \wedge w \notin \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n S_j\}\} \\
&= \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \{w \mid w \in K_j \wedge w \in S_i\} \cup \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \{w \mid w \in \sigma_j(K_j) \wedge S_i\} \cup \\
&\quad \{w \mid w \in K_i \wedge w \notin \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n S_j\} \cup \{w \mid w \in \sigma_i(K_i) \wedge w \notin \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n S_j\} \\
&= \mathcal{L}'_i
\end{aligned}$$

□

### Beispiel 3.3 (Fortsetzung Beispiel 3.1)

Für das System  $\Gamma_{2.n+1}$  aus Beispiel 3.1 gilt:

$$\frac{\frac{\overline{\langle 1, K_1 \rangle \rightarrow \langle 1, K'_1 \rangle} \quad \overline{\langle 2, K_2 \rangle \rightarrow \langle 2, K'_2 \rangle} \quad \overline{\langle 3, \emptyset \rangle \rightarrow \langle 3, \emptyset \rangle}}{\mathcal{C}_{\Gamma_{2.n+1}} \rightarrow \mathcal{C}'_{\Gamma_{2.n+1}}} \quad \overline{\mathcal{C}'_{\Gamma_{2.n+1}} \rightarrow \mathcal{C}''_{\Gamma_{2.n+1}}}}{\mathcal{C}_{\Gamma_{2.n+1}} \xrightarrow{(\emptyset, \emptyset)} \mathcal{C}''_{\Gamma_{2.n+1}}} \quad \mathcal{C}_{\Gamma_{2.n+1}} \xrightarrow{\tau} \mathcal{C}''_{\Gamma_{2.n+1}}}$$

mit  $K_1 = \{XnY, ZnnY', ZnnY\}, K_2 = \{XnY', Z', Z''\}, K'_1 = \{(1, ZnnY), (1, ZY), (1, Zn^4Y'), (2, Xn^3Y'), (1, Xn^3Y), (1, Zn^2Y'), (1, XnY), (1, Zn^4Y)\},$

$K'_2 = \{(2, Xn), (2, Z'Y'), (2, XnY'), (2, Z'), (2, Z''), (2, XZ''), (2, nY')\}$  und den folgenden Konfigurationen  $\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}} = \langle 1, K_1 \rangle, \langle 2, K_2 \rangle, \langle 3, \emptyset \rangle$ ,  $\mathcal{C}'_{\Gamma_{2 \cdot n+1}} = \langle 1, K'_1 \rangle, \langle 2, K'_2 \rangle, \langle 3, \emptyset \rangle$  sowie  $\mathcal{C}''_{\Gamma_{2 \cdot n+1}} = \langle 1, \{XnY, Zn^4Y', Zn^2Y, Zn^2Y', Xn^3Y, Zn^4nY, ZY\} \rangle, \langle 2, \{XnY', XZ'', nY', Xn^3Y', Z'Y', Z', Z'', Xn\} \rangle, \langle 3, \emptyset \rangle$ . Die nachfolgende, beobachtbare Transition ist  $\mathcal{C}''_{\Gamma_{2 \cdot n+1}} \xrightarrow{\{\{n\}, \emptyset\}} \mathcal{C}'''_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}$  mit  $\mathcal{C}'''_{\Gamma_{2 \cdot n+1}} = \langle 1, \{ZnnY', ZY, Zn^6Y', XnY, Zn^2Y, Xn^3Y, Zn^4Y, Xn^5Y, Zn^4Y', Zn^6Y\} \rangle, \langle 2, \{XnY', XnnnY', Xn^5Y', Xnnn, n^3Y', nY', Xn, Z', XZ', Z'Y'\} \rangle, \langle 3, \{n\} \rangle$ .

◇

Mithilfe der formalen Spezifikation von Transitionen mittels eines beschrifteten Transitionssystems für TT-EH-Systeme wird der Nachweis von Verhaltensgleichheit durch die Adaption der (Bi-)Simulationsdefinitionen (Definitionen 2.10 und 2.11) ermöglicht. Die beiden Systeme  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$  aus Beispiel 3.1 und  $\Gamma'_{2 \cdot n+1}$  aus Beispiel 3.4 sind schwach bisimilar (Satz 3.4) und nicht stark bisimilar (Satz 3.5), obgleich  $L(\Gamma_{2 \cdot n+1}) = L(\Gamma'_{2 \cdot n+1})$  gilt. Weiterhin erlaubt eine Implementation der SOS in der Spezifikationsprache eines Rewrite-Systems wie beispielsweise MAUDE die Realisierung eines Interpreters für TT-EH-Systeme, also einer Simulation dieser Systeme.

### Beispiel 3.4

Für das TT-EH-System  $\Gamma'_{2 \cdot n+1} = (\{X, Y, Z, Y', Z', Y'', n\}, \{n\}, (\{XnY, ZnY', ZY''\}, R_1, \{(X, Y)\}), (\{ZnY\}, R_2, \{(X, Y')\}), (\{Z', Z''\}, R_3, \{(X, Y'')\}), (\emptyset, \emptyset, \{(n, n)\}))$

$$R_1 : \begin{array}{c|c} (r_{11}) & \\ \hline n & Y \\ \hline Z & nY' \end{array} \quad \begin{array}{c|c} (r_{12}) & \\ \hline n & Y \\ \hline Z & Y'' \end{array} \quad R_2 : \begin{array}{c|c} (r_{21}) & \\ \hline n & Y' \\ \hline Z & nY \end{array} \quad R_3 : \begin{array}{c|c} (r_{31}) & \\ \hline \varepsilon & Y'' \\ \hline Z' & \varepsilon \end{array} \quad \begin{array}{c|c} (r_{32}) & \\ \hline X & \varepsilon \\ \hline \varepsilon & Z' \end{array}$$

gilt  $L(\Gamma'_{2 \cdot n+1}) = \{w \mid w \in \{n\}^+ \wedge |w| \bmod 2 = 1\}$ .

◇

### Satz 3.4 ( $\Gamma_{2 \cdot n+1} \approx \Gamma'_{2 \cdot n+1}$ )

Es gilt  $\Gamma_{2 \cdot n+1} \approx \Gamma'_{2 \cdot n+1}$ , d. h. es existiert eine schwache Bisimulation  $\mathcal{S}$ , so dass die beiden initialen Konfigurationen von  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$  und  $\Gamma'_{2 \cdot n+1}$  schwach bisimilar sind  $(\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \approx_{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}^{(0)})$ .

◇

### Beweis 3.3 (Satz 3.4)

Für  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$  gilt:

$$\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \xrightarrow{\tau} {}_1 \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(1)} \xrightarrow{\{\{n\}, \emptyset\}} {}_2 \cdots \xrightarrow{\{\{n^{2 \cdot i-3}\}, \emptyset\}} {}_i \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(i)}$$

und für  $\Gamma'_{2 \cdot n+1}$ :

$$\mathcal{C}_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \xrightarrow{(-\tau)} {}_3 \mathcal{C}_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}^{(3)} \xrightarrow{\{\{n\}, \emptyset\}} {}_4 \mathcal{C}_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}^{(4)} \xrightarrow{\tau} {}_5 \cdots \xrightarrow{\{\{n^{i-3}\}, \emptyset\}} {}_i \mathcal{C}_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}^{(i)}$$

und somit gilt für  $j \in \{0, 1, 2\}$  und alle  $i \in \mathbb{N}^+$ , dass  $\mathcal{S} = \left\{ \left( \mathcal{C}_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}^{(j)}, \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \right), \left( \mathcal{C}_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}^{(2 \cdot i+1)}, \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(i)} \right), \left( \mathcal{C}_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}^{(2 \cdot i)}, \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(i)} \right) \right\}$ .

□

**Satz 3.5** ( $\Gamma_{2 \cdot n+1} \not\sim \Gamma'_{2 \cdot n+1}$ )

Es existiert keine starke Bisimulation  $\mathcal{S}$  zwischen den initialen Zuständen der Systeme  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$  und  $\Gamma'_{2 \cdot n+1}$ , d. h.  $\Gamma_{2 \cdot n+1} \not\sim \Gamma'_{2 \cdot n+1}$ .

◇

**Beweis 3.4 (Satz 3.5)**

Angenommen es existiert eine starke Bisimulation  $\mathcal{S}$  mit  $\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \sim_{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}^{(0)}$ ,

so gilt  $\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(1)} \sim_{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}^{(1)}$  und es muss nach Definition 2.10 und  $\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(1)} \xrightarrow{\{\{n\}, \emptyset\}}$

$\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(2)}$  ein  $\mathcal{C}'_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}$  mit  $\mathcal{C}'_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}} \xrightarrow{\{\{n\}, \emptyset\}} \mathcal{C}'_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}$  und  $\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(2)} \sim_{\mathcal{S}} \mathcal{C}'_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}$  existieren.

Es existiert jedoch nur  $\mathcal{C}'_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}} \xrightarrow{\tau} \mathcal{C}_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}^{(2)}$ , was ein Widerspruch ist.

□

Mittels Modellprüfungsverfahren (Model-Checking) ist außerdem eine formale Analyse von temporalen Eigenschaften, wie z. B. der Eigenschaft, dass ein Berechnungsergebnis in der akzeptierenden Komponente verbleibt bzw. verschiedene Berechnungsergebnisse in einer zeitlichen Korrelation zueinander stehen, möglich. Für Spezifikationen in dem System MAUDE ermöglicht ein LTL Model-Checker [EMS02] die formale Modellprüfung für die in der Linearzeitlogik LTL spezifizierten Eigenschaften.

Im Allgemeinen besitzen verteilte kommunizierende Splicing-Systeme und somit auch ihre Modelle einen unendlichen Zustandsraum. Jedoch bedingt die Anwendung eines Model-Checkers die Endlichkeit der Menge der Zustände. Deshalb kann mittels eines Modellprüfungsalgorithmus jeweils nur ein endlicher Teilzustandsraum betrachtet werden. Eine Einschränkung ist beispielsweise durch Berücksichtigung der Kardinalität aller Komponenten eines Zustands möglich, in dem nur die Zustände betrachtet werden, deren Bewertung einen Maximalwert nicht überschreitet. Da die Kardinalität der Summe aller Komponenten für jeden Folgezustand eine stark monoton wachsende Funktion spezifiziert, ergibt sich ein zusammenhängender Teilzustandsraum des Zustandsraums des vollständigen Modells.

### 3.4 Formale Verifikation von TT-EH-Systemen

Die in Abschnitt 3.3 eingeführte strukturelle operationelle Semantik für TT-EH-Systeme vom Grad  $n$  mit Einfach-Splicing-Ableitungen und  $A_n = R_n =$

$\emptyset$  ermöglicht die formale Analyse der Verhaltensgleichheit zweier Systeme sowie das Model-Checking auf TT-EH-Systemen durch Beschränkung des Zustandsraums. Da der Zustandsraum eines zu untersuchenden Systems  $\Gamma$  möglicherweise nicht endlich ist, ist eine Prüfung auf Invarianten bzw. Sicherheitseigenschaften mittels Model-Checking nur möglich, wenn in dem System eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  existiert, für die  $\forall \alpha \in \mathcal{Act}. \forall \mathcal{C}'_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C}'_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma = \mathcal{C}'_\Gamma$  gilt. Für TT-EH-Systeme ist eine Sicherheitseigenschaft beispielsweise die Nichtableitbarkeit eines gegebenen Wortes  $w$  bzw. einer Menge von Wörtern  $W$ . Eine Prüfung kann somit auf das Komplement des Wortproblems mit  $w \notin L(\Gamma)$  bzw.  $W \cap L(\Gamma) = \emptyset$  zurückgeführt werden. Da jedoch das Wortproblem in verteilten kommunizierenden Splicing-Systemen nicht entscheidbar ist (Satz 3.6), ist dieser Nachweis ebenfalls nicht entscheidbar.

**Satz 3.6 (Wortproblem in TT-EH-Systemen)**

*Das Wortproblem in TT-EH-Systemen ohne Einschränkung der Anzahl der Komponenten oder der Splicing-Regelmengen ist nicht entscheidbar.  $\diamond$*

**Beweis 3.5 (Satz 3.6)**

*Aufgrund der Universalität und der Nicht-Entscheidbarkeit des Wortproblems von Typ-0-Sprachen ist das Wortproblem in TT-EH-Systemen nicht entscheidbar.  $\square$*

Nachfolgend wird ein Tableaubeweisverfahren eingeführt, das im Fall der Terminierung zur Lösung des Wortproblems bzw. zum Nachweis von Sicherheitseigenschaften in endenmarkierten Einfach-Splicing-TT-EH-Systemen dient. Anschließend wird eine Klasse von verteilten kommunizierenden Splicing-Systemen definiert, für welche dieses Beweisverfahren entscheidbar ist. Um zunächst temporale Abhängigkeiten in einem erzeugten Tableau zu ignorieren, werden nur Systeme mit nicht kommunizierbaren Axiomen betrachtet, d. h. es gilt  $\forall i \in \{1, \dots, n\}. \forall a \in A_i. a \notin \bigcup_{j=1, j \neq i}^n S_j$  mit den Filtern  $S_j$ .

Aus Definition 3.1 folgt für ein Einfach-Splicing-TT-EH-System  $\Gamma = (V, \Sigma, (A_1, R_1, F_1), \dots, (A_n, R_n, F_n))$  mit nicht kommunizierbaren Axiomen, der initialen Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} = (A_1, \dots, A_n)$ , den Konfigurationen  $\mathcal{C}_\Gamma, \mathcal{C}'_\Gamma$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma \mathcal{C}'_\Gamma$  und für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  sowie ein beliebiges Wort  $w \in V^+$  die Äquivalenz  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i \leftrightarrow ((3.1) \vee (3.2) \vee (3.3) \vee (3.4) \vee (3.5))$  mit

$$w \in A_i \tag{3.1}$$

$$w \in \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n (\mathcal{C}_\Gamma^j \cap S_i) \tag{3.2}$$

$$w \in \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n (\sigma_j(\mathcal{C}_\Gamma^j) \cap S_i) \tag{3.3}$$

$$w \in (\mathcal{C}_\Gamma^i \setminus \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n S_j) \tag{3.4}$$

$$w \in (\sigma_i(\mathcal{C}_\Gamma^i) \setminus \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n S_j) \tag{3.5}$$

mit  $S_i = \{w \in V^* \mid \exists(p_a, p_e) \in F_i. (p_a \in \text{pre}(w) \wedge p_e \in \text{suf}(w))\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

Die für die  $i$ te Komponente eines gegebenen Systems erzeugten Regeln sind durch die Tableauregeln 3.1 gegeben. Aufgrund der Forderung, dass kein Axiom einer Komponente einer Filterregel einer anderen Komponente genügt und die initiale Konfiguration über alle Axiomenmengen definiert ist, gilt für jede Komponente  $k$ , jedes Axiom  $a \in A_k$  und jede Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma \in \{\mathcal{C}_\Gamma^{(c)} \mid c \in \mathbb{N}\}$  die Aussage (3.1), weswegen die Tableauregeln  $(i, a)$  keine Prämisse besitzen.

---

**Tableauregeln 3.1** für die  $i$ te Komponente eines gegebenen TT-EH-Systems vom Grad  $n$

---

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
(i, a) \\
\frac{}{a \in \mathcal{C}_\Gamma^i}
\end{array}
\quad
\forall w \in V^+. \pi(p, s, w). \frac{w \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{w \in \mathcal{C}_\Gamma^j}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(r^1) \\
\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^+. \pi(p, s, x_1 u_1 u_4 y_2). \frac{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^j}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(r^2) \\
\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^+. \pi(p, s, y_1 u_3 u_2 x_2). \frac{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^j}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(i, \neg \mathcal{F}_i) \quad (\wedge\text{-ELIM}) \\
\forall w \in V^+. \bigwedge_{(p,s) \in \mathcal{F}_i} \neg \pi(p, s, w). \frac{w \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{w \in \mathcal{C}_\Gamma^i} \quad \frac{A \quad B}{A \wedge B}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(r^3) \\
\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^+. \chi(i, x_1 u_1 u_4 y_2). \frac{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
(r^4) \\
\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^+. \chi(i, y_1 u_3 u_2 x_2). \frac{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i}
\end{array}$$

für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit dem Prädikat  $\pi(p, s, w) = p \in \text{pre}(w) \wedge w \in \text{suf}(w)$ , für jedes Axiom  $a \in A_i$ , alle  $j \in \{1, \dots, n\}. i \neq j$ , alle Filterregeln  $(p, s) \in F_j$ , alle Splicing-Regeln  $r = u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4 \in R_i$  und für  $\chi(i, w) = \bigwedge_{(p,s) \in \mathcal{F}_i} \neg \pi(p, s, w)$  mit  $\mathcal{F}_i = \bigcup_{j=1, j \neq i}^n F_j$

---

Für jedes Wort  $w$  in der  $i$ ten Komponente der Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$ , das durch den Filter der Komponente  $j$  akzeptiert wird, folgt aufgrund (3.2), dass  $w$  in der Folgekonfiguration  $\mathcal{C}'_\Gamma$  in der  $j$ ten Komponente enthalten ist. Aufgrund der Quantifikation über alle Komponenten folgen die Tableauregeln  $(j, (p, s))$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  sowie alle  $(p, s) \in F_j$ . Analog gilt aufgrund (3.3), dass für zwei Wörter  $x = x_1u_1u_2x_2$  und  $y = y_1u_3u_4y_2$  sowie eine Splicing-Regel  $r = u_1\#u_2\$u_3\#u_4$  in der  $i$ ten Komponente durch Anwendung der Splicing-Operation  $\sigma_i$  das Wort  $w = x_1u_1u_4y_2$  bzw.  $w = y_1u_3u_2x_2$  in der  $j$ ten Komponente der Folgekonfiguration enthalten ist, falls  $w$  durch den Filter dieser Komponente akzeptiert wird. Somit ergeben sich für alle Splicing-Regeln der  $i$ ten Komponente und jede Filterregel  $(p, s) \in F_j$  mit  $j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$  die Tableauregeln  $(r^1)$  bzw.  $(r^2)$ .

Infolge (3.4) gilt, dass jedes Wort der  $i$ ten Komponente der Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$ , welches nicht durch einen Filter einer Komponente  $j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $j \neq i$  akzeptiert wird, auch in der Folgekonfiguration  $\mathcal{C}'_\Gamma$  in der  $i$ ten Komponente enthalten ist. Es gelten die Regeln  $(i, \neg\mathcal{F}_i)$  der Tableauregeln 3.1.

Die Tableauregeln  $(r_3)$  und  $(r_4)$  ergeben sich aus der ableitbaren Implikation (3.5)  $\rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma$ . Wenn durch Anwendung der Splicing-Operation  $\sigma_i$  zwei Wörter  $x_1u_1u_2x_2$  und  $y_1u_3u_4y_2$  in der  $i$ ten Komponente einer Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  unter Verwendung der Splicing-Regel  $u_1\#u_2\$u_3\#u_4$  zu  $x_1u_1u_4y_2$  bzw.  $y_1u_3u_2x_2$  rekombiniert werden können und durch keinen Filter einer anderen Komponente akzeptiert werden, so folgt, dass  $x_1u_1u_4y_2$  bzw.  $y_1u_3u_2x_2$  Elemente der  $i$ ten Komponente der Folgekonfiguration sind.

Für zwei Alphabete  $\mathcal{P}, \mathcal{S}$  von Präfix- bzw. Suffixsymbolen, den Sprachen Pre, Suf über  $\mathcal{P}$  bzw.  $\mathcal{S}$  und dem Alphabet  $V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}} = V \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{S})$  ergibt sich für die Einschränkung des Tableaubeweisverfahrens auf  $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ -markierte verteilte kommunizierende Splicing-Systeme einerseits die Einschränkung des Typs von  $w$  in der Allquantifizierung der Regeln  $(j, (p, s))$  und  $(i, \neg\mathcal{F}_i)$  auf  $\text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}$  andererseits die Abhängigkeit des Typs der allquantifizierten Variablen  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*$  in den Regeln  $(r^1), (r^2), (r^3)$  und  $(r^4)$  für eine Splicing-Regel  $r = u_1\#u_2\$u_3\#u_4$  mit

$$\begin{aligned} ((\text{pre}(u_1) \cap \text{Pre}') \neq \emptyset) &\rightarrow (x_1 = \varepsilon) & ((\text{suf}(u_2) \cap \text{Suf}') \neq \emptyset) &\rightarrow (x_2 = \varepsilon) \\ ((\text{pre}(u_3) \cap \text{Pre}') \neq \emptyset) &\rightarrow (y_1 = \varepsilon) & ((\text{suf}(u_4) \cap \text{Suf}') \neq \emptyset) &\rightarrow (y_2 = \varepsilon) \end{aligned}$$

mit  $\text{Pre}' = \text{Pre} \setminus \{\varepsilon\}$  und  $\text{Suf}' = \text{Suf} \setminus \{\varepsilon\}$  sowie mit  $\mathcal{PV} = \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*$  und  $\mathcal{SV} = V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}$ :

$$((\text{pre}(u_1) \cap \text{Pre}') = \emptyset) \rightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathcal{PV} & \text{falls } (\text{pre}(u_2) \cap \text{Pre}') = \emptyset \\ x_1 = \varepsilon & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
((\text{suf}(u_2) \cap \text{Suf}') = \emptyset) &\rightarrow \begin{cases} x_2 \in \mathcal{SV} & \text{falls } (\text{suf}(u_1) \cap \text{Suf}') = \emptyset \\ x_2 = \varepsilon & \text{sonst} \end{cases} \\
((\text{pre}(u_3) \cap \text{Pre}') = \emptyset) &\rightarrow \begin{cases} y_1 \in \mathcal{PV} & \text{falls } (\text{pre}(u_4) \cap \text{Pre}') = \emptyset \\ y_1 = \varepsilon & \text{sonst} \end{cases} \\
((\text{suf}(u_4) \cap \text{Suf}') = \emptyset) &\rightarrow \begin{cases} y_2 \in \mathcal{SV} & \text{falls } (\text{suf}(u_3) \cap \text{Suf}') = \emptyset \\ y_2 = \varepsilon & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

**Beispiel 3.5 (Erzeugung der Tableauregeln)**

Für das System *TT6* aus Definition 3.4 werden folgende Tableauregeln für Regel  $r_{210}$  mit  $\mathcal{PV} = \{\varepsilon, X, X', Z, Z'Z'\} \cdot V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*$  erzeugt:

$$\begin{aligned}
&\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{210}^1)}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \quad \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{\overset{(r_{210}^2)}{wBY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
&\quad \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{\overset{(r_{210}^3)}{wY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \\
&\quad \forall w \in \mathcal{PV} \cdot X \notin \text{pre}(w) \wedge B \notin \text{suf}(w) \cdot \frac{\overset{(r_{210}^4)}{wY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{wY \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \quad \diamond
\end{aligned}$$

Für ein System  $\Gamma$  vom Grad  $n$  und ein Wort  $w \in V^+$  ist  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$ , für eine beliebige Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  und ein  $i \in \{1, \dots, n\}$ , eine atomare Aussage. Ein Knoten im Tableau, definiert durch eine atomare Aussage oder die Konjunktion von zwei atomaren Aussagen, ist entweder ein Terminal- oder Nichtterminalknoten. Ein Knoten ist genau dann ein ableitbarer Terminalknoten, wenn eine Regel  $(i, a)$  für ein  $a \in A_i$  anwendbar ist, bzw. genau dann ein nicht ableitbarer Terminalknoten, wenn keine Tableauregel anwendbar ist. Ein Nichtterminalknoten heißt ableitbar, falls für eine atomare Aussage eine Regel  $(j, (p, s)), (r^1), (r^2), (r^3)$  oder  $(r^4)$  anwendbar und der Folgeknoten ableitbar ist bzw. falls für eine Konjunktion von zwei atomaren Aussagen  $A, B$  jeweils  $A$  und  $B$  ableitbare Terminal- oder Nichtterminalknoten sind.

Der Tableaubeweis wird wie folgt geführt. Für einen Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  im Tableau des Systems  $\Gamma$  vom Grad  $n$ , eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$ , eine Komponente  $i \in \{1, \dots, n\}$  und ein Wort  $w \in \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}$  ist durch Anwendung der Tableauregeln zu prüfen, ob der Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  ableitbar ist. Für einen Nichtterminalknoten wird jede mögliche Tableauregel angewendet und die Prüfung der Ableitbarkeit für jeden resultierenden Knoten fortgesetzt. Falls  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  ableitbar ist, so folgt  $\exists \mathcal{C}_\Gamma \cdot \mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma \cdot w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$ . Für den ableitbaren

Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^n$  mit  $w \in \Sigma^+$  gilt  $w \in L(\Gamma)$ . Andererseits gilt für einen terminierenden Tableaubeweis und einen nicht ableitbaren Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$ , die Aussage  $\neg \exists \mathcal{C}_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma. w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$ .

**Satz 3.7**

Für ein TT-EH-System  $\Gamma$  vom Grad  $n$  mit nicht kommunizierbaren Axiomen, jede Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$ , alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und für jedes Wort  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  gilt  $\forall \mathcal{C}'_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}'_\Gamma. w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i$ .  $\diamond$

**Beweis 3.6 (Satz 3.7)**

Aufgrund der Forderung nicht kommunizierbarer Axiome und Definition 3.1 gilt der Satz 3.7 für jedes Axiom einer jeden Komponente. Andernfalls gilt  $(w \notin \bigcup_{i=1}^n A_i) \rightarrow \exists \mathcal{C}_\Gamma, \mathcal{C}'_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma \mathcal{C}'_\Gamma. (w \notin \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i)$  und mit der Annahme  $\forall \mathcal{C}_\Gamma. \forall \kappa \in \{1, \dots, n\}. \forall \mathcal{C}'_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}'_\Gamma. (w \in \mathcal{C}_\Gamma^\kappa \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^\kappa)$  folgt entweder

- $w \in \mathcal{C}_\Gamma^j, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $j \neq i$  und aufgrund der Annahme folgt  $\forall \mathcal{C}''_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}''_\Gamma. w \in \mathcal{C}''_\Gamma^j$  oder
- $\exists x, y \in \mathcal{C}_\Gamma^j$  mit  $x, y \in V^+, j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$  und  $(x, y) \vdash_r (w, z)$  für ein  $r \in R_j$  und es gilt  $\forall \mathcal{C}''_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}''_\Gamma. (x \in \mathcal{C}''_\Gamma^j \wedge y \in \mathcal{C}''_\Gamma^j)$  oder
- $\exists x, y \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  mit  $x, y \in V^+$  und  $(x, y) \vdash_r (w, z)$  für eine Splicing-Regel  $r \in R_i$  und es gilt  $\forall \mathcal{C}''_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}''_\Gamma. (x \in \mathcal{C}''_\Gamma^i \wedge y \in \mathcal{C}''_\Gamma^i)$ .

□

**Korollar 3.1**

Für ein System  $\Gamma$  vom Grad  $n$  mit nicht kommunizierbaren Axiomen und für zwei Konfigurationen  $\mathcal{C}_\Gamma, \mathcal{C}'_\Gamma$  sowie zwei Wörter  $x, y \in V^+$  mit  $x \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  und  $y \in \mathcal{C}'_\Gamma^i$  gilt  $\exists \mathcal{C}''_\Gamma. (x \in \mathcal{C}''_\Gamma^i \wedge y \in \mathcal{C}''_\Gamma^i)$ .  $\diamond$

Da für ein System mit nicht kommunizierbaren Axiomen Satz 3.7 und Korollar 3.1 gelten, können Ableitungen der Form

$$\frac{w \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge w' \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{w \in \mathcal{C}_\Gamma^i} \quad \text{bzw.} \quad \frac{w \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{w \in \mathcal{C}_\Gamma^i}$$

für jedes mögliche  $w'$  ausgelassen werden. Falls für einen Nichtterminalknoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  eine Tableauregel mit einer allquantifizierten Variable  $v$  anwendbar ist, jedoch  $v \notin \text{seg}(w)$ , so genügt der Nachweis der Existenz eines  $v$  in der Prämisse.



**Satz 3.8 (Vollständigkeit des Tableaubeweisverfahrens)**

Das Tableaubeweisverfahren ist vollständig, d. h. für ein gegebenes System  $\Gamma$  vom Grad  $n$  und eine beliebige Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma$  gilt für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  und jedes Wort  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$ , dass  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  einen ableitbaren Knoten im Tableaubeweisverfahren von  $\Gamma$  spezifiziert.  $\diamond$

**Beweis 3.7 (Satz 3.8)**

Der Beweis wird durch Induktion über die Anzahl der notwendigen Ableitungen geführt. Für den Induktionsanfang ist für alle  $i$  zu zeigen, dass für jedes Wort  $w$  mit  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  und  $\mathcal{C}_\Gamma = \mathcal{C}_\Gamma^{(0)}$  der Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  ableitbar ist. Da für jedes Axiom  $a \in A_i$  eine Regel  $(i, a)$  existiert, gilt nach der Definition eines ableitbaren Knotens, dass  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  ableitbar ist.

Angenommen es gilt für ein  $\mathcal{C}_\Gamma$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma$ , alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und alle  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$ , dass  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  ein ableitbarer Knoten im Tableau ist. Es ist zu zeigen, dass für  $\mathcal{C}'_\Gamma$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma \mathcal{C}'_\Gamma$ , alle  $i$  und alle  $w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i$  der Knoten  $w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i$  im Tableau ableitbar ist. Aufgrund Definition 3.1 und der Einschränkung auf nicht kommunizierbare Axiome gilt die Äquivalenz  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall w \in V^+ . (((3.1) \vee (3.2) \vee (3.3) \vee (3.4) \vee (3.5)) \leftrightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i)$  und damit  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall w \in V^+ . (((3.1) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i) \wedge ((3.2) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i) \wedge ((3.3) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i) \wedge ((3.4) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i) \wedge ((3.5) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i))$ , wobei  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall w \in V^+ . (w \in A_i \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i)$  auch für alle Axiome  $w \in A_i$  der Knoten  $w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i$  ableitbar ist. Weiterhin folgt aus

$$\begin{aligned} & \forall i \in \mathbb{N}_n^+ . \forall w \in V^+ . (w \in \left( \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n (\mathcal{C}_\Gamma^j \cap S_i) \right) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i) \\ \Leftrightarrow & \forall i \in \mathbb{N}_n^+ . \forall j \in \mathbb{N}_n^+ . i \neq j . \forall w \in V^+ . (w \in (\mathcal{C}_\Gamma^j \cap S_i) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i) \\ \Leftrightarrow & \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+ . i \neq j . \forall w \in V^+ . (w \in (\mathcal{C}_\Gamma^i \cap S_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^j) \\ \Leftrightarrow & \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+ . i \neq j . \forall w \in V^+ . (w \in \{w \mid w \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge \\ & \exists (p, s) \in F_j . \pi(p, s, w)\} \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^j) \\ \Leftrightarrow & \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+ . i \neq j . \forall w \in V^+ . (w \in \{w \mid \exists (p, s) \in F_j . \\ & (\pi(p, s, w) \wedge w \in \mathcal{C}_\Gamma^i)\} \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^j) \\ \Leftrightarrow & \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+ . i \neq j . \forall w \in V^+ . \forall (p, s) \in F_j . \\ & ((\pi(p, s, w) \wedge w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^j) \\ \Leftrightarrow & \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+ . i \neq j . \forall w \in V^+ . \forall (p, s) \in F_j . \pi(p, s, w) . (w \in \mathcal{C}_\Gamma^i \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^j) \end{aligned}$$

die Regelmenge  $(j, (p, s))$  und somit die Ableitbarkeit des Knotens  $w \in \mathcal{C}'_\Gamma^j$ , falls  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  und  $w \in S_j$  gilt. Es folgt außerdem aus

$$\begin{aligned} & \forall i \in \mathbb{N}_n^+ . \forall w \in V^+ . (w \in \left( \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n (\sigma_j(\mathcal{C}_\Gamma^j) \cap S_i) \right) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i) \\ \Leftrightarrow & \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+ . i \neq j . \forall w \in V^+ . (w \in (\sigma_j(\mathcal{C}_\Gamma^j) \cap S_i) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Gamma^i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. i \neq j. \forall w \in V^+. (w \in (\sigma_i(\mathcal{C}_\Gamma^i) \cap S_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^{ij}) \\
&\Leftrightarrow \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. i \neq j. \forall w \in V^+. (w \in \{w \mid \exists x, y \in \mathcal{C}_\Gamma^i. \exists z \in V^*. \exists r \in R_i. \\
&\quad ((x, y) \vdash_r (w, z) \vee (x, y) \vdash_r (z, w)) \wedge \\
&\quad \exists(p, s) \in F_j. \pi(p, s, w)\} \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^{ij}) \\
&\Leftrightarrow \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. i \neq j. \forall w \in V^+. ((\exists x, y \in \mathcal{C}_\Gamma^i. \exists z \in V^*. \exists r \in R_i. \\
&\quad ((x, y) \vdash_r (w, z) \vee (x, y) \vdash_r (z, w)) \wedge \exists(p, s) \in F_j. \pi(p, s, w)) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^{ij}) \\
&\Leftrightarrow \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. i \neq j. \forall w \in V^+. ((\exists x, y \in \mathcal{C}_\Gamma^i. \exists z \in V^*. \exists r \in R_i. \exists(p, s) \in F_j. \\
&\quad (\pi(p, s, w) \wedge ((x, y) \vdash_r (w, z) \vee (x, y) \vdash_r (z, w)))) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^{ij}) \\
&\Leftrightarrow \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. i \neq j. \forall r \in R_i. \forall(p, s) \in F_j. \forall w \in V^+. \forall x, y \in \mathcal{C}_\Gamma^i. \forall z \in V^*. \\
&\quad ((\pi(p, s, w) \wedge ((x, y) \vdash_r (w, z) \vee (x, y) \vdash_r (z, w))) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^{ij}) \\
&\Leftrightarrow (\forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. i \neq j. \forall r \in R_i. \forall(p, s) \in F_j. \forall w \in V^+. \forall x, y \in \mathcal{C}_\Gamma^i. \forall z \in V^*. \\
&\quad ((\pi(p, s, w) \wedge ((x, y) \vdash_r (w, z))) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^{ij})) \\
&\wedge (\forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. i \neq j. \forall r \in R_i. \forall(p, s) \in F_j. \forall w \in V^+. \forall x, y \in \mathcal{C}_\Gamma^i. \forall z \in V^*. \\
&\quad ((\pi(p, s, w) \wedge ((x, y) \vdash_r (z, w))) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^{ij})) \\
&\Leftrightarrow (\forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. i \neq j. \forall r = u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4 \in R_i. \forall(p, s) \in F_j. \\
&\quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \pi(p, s, x_1 u_1 u_4 y_2). \\
&\quad ((x_1 u_1 u_2 x_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \rightarrow x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{ij})) \\
&\wedge (\forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. i \neq j. \forall r = u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4 \in R_i. \forall(p, s) \in F_j. \\
&\quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \pi(p, s, y_1 u_3 u_2 x_2). \\
&\quad ((x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \rightarrow y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{ij}))
\end{aligned}$$

die Regelmengen  $(r^1)$  und  $(r^2)$  und somit die Ableitbarkeit jedes Knotens  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{ij}$ , falls  $w$  durch Anwendung der Splicing-Operation in  $\mathcal{C}_\Gamma^i$  aus  $x \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  und  $y \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  entstanden ist und anschließend entsprechend der Filter in die  $j$ te Komponente kommuniziert wurde, da  $x \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  und  $y \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  jeweils ableitbare Knoten im Tableau sind. Aus (3.4)  $\rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  folgt mit  $\mathcal{F}_i = \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n F_j$  und

$$\begin{aligned}
&\forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. (w \in \left( \mathcal{C}_\Gamma^i \setminus \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n S_j \right) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. ((w \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge w \notin \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n S_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. ((w \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge \bigwedge_{j=1 \wedge j \neq i}^n w \notin S_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. ((w \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge \bigwedge_{\substack{j=1 \wedge \\ j \neq i}}^n \neg \exists(p, s) \in F_j. \pi(p, s, w)) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. ((w \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge \\
&\quad \forall j \in \mathbb{N}_n^+. i \neq j. \forall (p, s) \in F_j. \neg \pi(p, s, w)) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. \forall j \in \mathbb{N}_n^+. i \neq j. \forall (p, s) \in F_j. \\
&\quad \neg \pi(p, s, w). (w \in \mathcal{C}_\Gamma^i \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. \bigwedge_{(p,s) \in \mathcal{F}_i} \neg \pi(p, s, w). (w \in \mathcal{C}_\Gamma^i \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i)
\end{aligned}$$

die Tableauregelmenge  $(i, \neg \mathcal{F}_i)$ . Da für jedes Wort, welches in der Komponente während einer Transition verbleibt, eine Tableauregel existiert, ist der Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  ableitbar, da  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  ableitbar ist. Mit  $\mathcal{F}_i = \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n F_j$  und

$$\begin{aligned}
&\forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. (w \in \left( \sigma_i(\mathcal{C}_\Gamma^i) \setminus \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n S_j \right) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. ((w \in \sigma_i(\mathcal{C}_\Gamma^i) \wedge w \notin \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n S_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. ((w \in \sigma_i(\mathcal{C}_\Gamma^i) \wedge \bigwedge_{j=1 \wedge j \neq i}^n w \notin S_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. ((w \in \sigma_i(\mathcal{C}_\Gamma^i) \wedge \\
&\quad \bigwedge_{j=1 \wedge j \neq i}^n \neg \exists (p, s) \in F_j. \pi(p, s, w)) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. ((w \in \sigma_i(\mathcal{C}_\Gamma^i) \wedge \\
&\quad \forall j \in \mathbb{N}_n^+. i \neq j. \forall (p, s) \in F_j. \neg \pi(p, s, w)) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. \bigwedge_{(p,s) \in \mathcal{F}_i} \neg \pi(p, s, w). (w \in \sigma_i(\mathcal{C}_\Gamma^i) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. \bigwedge_{(p,s) \in \mathcal{F}_i} \neg \pi(p, s, w). (w \in \{w \mid \exists x, y \in \mathcal{C}_\Gamma^i. \exists z \in V^*. \\
&\quad \exists r \in R_i. (((x, y) \vdash_r (w, z)) \vee ((x, y) \vdash_r (z, w)))\} \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. \bigwedge_{(p,s) \in \mathcal{F}_i} \neg \pi(p, s, w). \forall x, y \in \mathcal{C}_\Gamma^i. \forall z \in V^*. \forall r \in R_i. \\
&\quad (((x, y) \vdash_r (w, z)) \vee ((x, y) \vdash_r (z, w))) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. \bigwedge_{(p,s) \in \mathcal{F}_i} \neg \pi(p, s, w). \forall x, y \in \mathcal{C}_\Gamma^i. \forall z \in V^*. \forall r \in R_i. \\
&\quad ((x, y) \vdash_r (w, z)) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \\
&\wedge (\forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. \bigwedge_{(p,s) \in \mathcal{F}_i} \neg \pi(p, s, w). \forall x, y \in \mathcal{C}_\Gamma^i. \forall z \in V^*. \forall r \in R_i. \\
&\quad ((x, y) \vdash_r (w, z)) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Gamma^i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall r = u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4 \in R_i. \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\
&\quad \bigwedge_{(p,s) \in \mathcal{F}_i} \neg \pi(p, s, x_1 u_1 u_4 y_2). \\
&\quad ((x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \rightarrow x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i)) \\
&\wedge (\forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall r = u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4 \in R_i. \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\
&\quad \bigwedge_{(p,s) \in \mathcal{F}_i} \neg \pi(p, s, y_1 u_3 u_2 x_2). \\
&\quad ((x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i) \rightarrow y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i))
\end{aligned}$$

folgen die Tableauregelmengen  $(r^3)$  sowie  $(r^4)$ . Es gilt folglich für jedes Wort  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$ , das durch die Anwendung der Splicing-Operation auf  $x \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  und  $y \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  in der  $i$ ten Komponente entstanden ist, jedoch durch keinen Filter einer anderen Komponente akzeptiert wird, dass eine Regel existiert, die den Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  zu den Knoten  $x \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  und  $y \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  ableitet, die nach Induktionsvoraussetzung ableitbar sind.  $\square$

### Satz 3.9 (Korrektheit des Tableaubeweisverfahrens)

Das eingeführte Tableaubeweisverfahren ist korrekt, d. h. für ein gegebenes System  $\Gamma$  vom Grad  $n$ , ein beliebiges  $i \in \{1, \dots, n\}$  und einen ableitbaren Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  im Tableau gilt  $\exists \mathcal{C}_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma. w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$ .  $\diamond$

### Beweis 3.8 (Satz 3.9)

Um die Korrektheit zu beweisen, ist durch Fallunterscheidung zu zeigen, dass jede Anwendung einer Tableauregel einen zulässigen Rückwärtsschluss darstellt. Für ein beliebiges  $i \in \{1, \dots, n\}$ , eine beliebige Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  des Systems  $\Gamma$  und einen ableitbaren Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  im Tableau mit einer anwendbaren Regel  $(i, w)$  gilt die Ableitbarkeit nach ihrer Definition, da  $w$  ein Axiom in der  $i$ ten Komponente ist. Mit der Annahme, dass für alle  $\kappa \in \{1, \dots, n\}$  und den ableitbaren Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{\kappa}$  die Aussage  $\exists \mathcal{C}_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma. w \in \mathcal{C}_\Gamma^{\kappa}$  gilt, folgt für den ableitbaren Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  die Anwendbarkeit mindestens einer der folgenden Regeln

- $(i, (p, s))$  mit  $(p, s) \in F_i$ , wonach der Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{j}$  für mindestens ein  $j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$  ableitbar ist und aufgrund der Annahme für die Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma''$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma'' \vdash_\Gamma \mathcal{C}_\Gamma. w \in \mathcal{C}_\Gamma^{j}$  und nach Definition 3.1 auch  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  gilt
- $(r^1)$  bzw.  $(r^2)$  mit  $\pi(p, s, w)$  für ein  $(p, s) \in F_i$ , wonach die Knoten  $x \in \mathcal{C}_\Gamma^{j}$  und  $y \in \mathcal{C}_\Gamma^{j}$  für  $x, y \in V^+$  ableitbar sind, für eine Splicing-Regel  $r \in R_j (x, y) \vdash_r (w, z)$  bzw.  $(x, y) \vdash_r (z, w)$  gilt und aufgrund der Annahme für die Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma''$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma'' \vdash_\Gamma \mathcal{C}_\Gamma. x \in \mathcal{C}_\Gamma^{j}$  sowie  $y \in \mathcal{C}_\Gamma^{j}$  und nach Definition 3.1 auch  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  gilt

- $(i, \neg\mathcal{F}_i)$ , wonach der Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{''i}$  ableitbar ist und aufgrund der Annahme für die Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma''$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma'' \vdash_\Gamma \mathcal{C}_\Gamma$   $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{''i}$  und nach Definition 3.1 auch  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  gilt
- $(r^3)$  bzw.  $(r^4)$  mit  $w \notin \bigcup_{j=1 \wedge j \neq i}^n S_j$ , weswegen die Knoten  $x \in \mathcal{C}_\Gamma^{''i}$  und  $y \in \mathcal{C}_\Gamma^{''i}$  für  $x, y \in V^+$  ableitbar sind, für eine Splicing-Regel  $r \in R_i$   $(x, y) \vdash_r (w, z)$  bzw.  $(x, y) \vdash_r (z, w)$  gilt und aufgrund der Annahme für die Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma''$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma'' \vdash_\Gamma \mathcal{C}_\Gamma$   $x \in \mathcal{C}_\Gamma^{''i} \wedge y \in \mathcal{C}_\Gamma^{''i}$  und nach Definition 3.1 auch  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  gilt.

□

**Korollar 3.2 (Entscheidbarkeit des Tableaubeweisverfahrens)**

Da das angegebene Tableaubeweisverfahren ein Verfahren zur Lösung des Wortproblems darstellt, jedoch Satz 3.6 gilt, folgt unmittelbar, dass das Tableaubeweisverfahren nicht entscheidbar ist.  $\diamond$

Das Tableaubeweisverfahren kann derart modifiziert werden, dass der Nachweis der Nichtableitbarkeit einer Menge von Wörtern parallel geführt werden kann, d. h. dass für kein Wort einer Menge ein ableitbarer Knoten in einem entsprechenden Tableaubeweisverfahren existiert. Ein Knoten wird beschrieben durch  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i, w \in T$  bzw.  $(w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i), w_1 \in T_1, w_2 \in T_2$ , wobei  $T, T_1, T_2$  Typen definieren. Ein Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i, w \in T$  ist ein ableitbarer Terminalknoten, falls alle Wörter des Knotens ableitbar sind, bzw. ein nicht ableitbarer Terminalknoten, falls der Knoten kein Wort enthält, auf das eine Tableauregel anwendbar ist. Ein Knoten ist partiell ableitbar, falls eine disjunkte, jeweils nicht leere Zerlegung des Knotens in einen ableitbaren Terminal- bzw. Nichtterminalknoten und einen nicht ableitbaren Terminal- bzw. Nichtterminalknoten existiert, wobei ein Nichtterminalknoten mindestens ein Element besitzt, auf das eine von  $(a, i)$  verschiedene Tableauregel anwendbar ist. Eine Ableitung im Tableau ist die Anwendung aller möglichen Tableauregeln auf einen Nichtterminalknoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i, w \in T$  für einen Typ  $T$ , wobei die Menge der resultierenden Folgeknoten zusammengefasst werden

**Tableauregeln 3.2**

$$\frac{(\wedge\text{-ELIM}_R) \quad \delta_1(A \wedge B) \quad \pi_2(A \wedge B)}{A \wedge B} \quad \frac{(\wedge\text{-ELIM}_L) \quad \pi_1(A \wedge B) \quad \delta_2(A \wedge B)}{A \wedge B}$$

mit  $A \wedge B = \{(a \wedge b) \mid a \in A, b \in B\}$ ,  $\pi_1(A \wedge B) = \{a \mid (a \wedge b) \in A \wedge B\}$ ,  $\pi_2(A \wedge B) = \{b \mid (a \wedge b) \in A \wedge B\}$  und  $\delta_1(A \wedge B) = \{a \mid \exists b \in B. ((a \wedge b) \in A \wedge B. b \text{ ist ableitbar})\}$ ,  $\delta_2(A \wedge B) = \{b \mid \exists a \in A. ((a \wedge b) \in A \wedge B. a \text{ ist ableitbar})\}$

kann. Für einen Nichtterminalknoten  $(w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i), w_1 \in T_1, w_2 \in T_2$  wird die Menge der Tableauregeln 3.1 durch die Tableauregeln 3.2 erweitert. Eine Menge von Wörtern ist genau dann nicht ableitbar, falls der entsprechende Knoten im Tableau nicht partiell ableitbar ist.

**Satz 3.10**

Das Wortproblem in einem endlichkomponentigen  $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ -markierten verteilten kommunizierenden Splicing-System  $\Gamma = (V, \Sigma, (A_1, R_1, F_1), \dots, (A_n, R_n, F_n))$  ist entscheidbar, falls mit  $\text{Pre}' = \text{Pre} \setminus \{\varepsilon\}, \text{Suf}' = \text{Suf} \setminus \{\varepsilon\}$  für zwei endliche Sprachen  $\text{Pre}$  über  $\mathcal{P} \subseteq V$  und  $\text{Suf}$  über  $\mathcal{S} \subseteq V$ , für jede Komponente  $i$  und jede Splicing-Regel  $r = u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4 \in R_i$  entweder  $u_1 \in \text{Pre}' \wedge u_4 \in \text{Suf}'$  oder  $u_3 \in \text{Pre}' \wedge u_2 \in \text{Suf}'$  gilt.  $\diamond$

**Beweis 3.9 (Satz 3.10)**

Es gilt o. B. d. A. für jedes  $w \in (\text{Pre} \cup \text{Suf}) \mid w \mid \leq 1$ . Mit den zwei Splicing-Regelmengen  $\mathcal{R}_1 = \{r \mid r \in \bigcup_{i=1}^n R_i \wedge r = u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4 \wedge u_1 \in \text{Pre}' \wedge u_4 \in \text{Suf}'\}$  bzw.  $\mathcal{R}_2 = \bigcup_{i=1}^n R_i \setminus \mathcal{R}_1$  gilt für  $(x, y) \vdash_r (w, z)$  mit  $r \in \mathcal{R}_1$  aufgrund der Beschränkung  $w \in \text{Pre}' \cdot \text{Suf}'$  und  $\mid w \mid = 2$ . Aufgrund der Endlichkeit der Sprachen  $\text{Pre}$  und  $\text{Suf}$  existieren nur endlich viele Wörter  $w \in \text{Pre}' \cdot \text{Suf}'$ . Für  $z$  gilt mit  $V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}} = V \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{S})$

$$z \in \text{Pre}' \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}' \quad \text{falls} \quad x, y \in \text{Pre}' \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}' \quad (3.6)$$

$$z \in \text{Pre}' \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \quad \text{falls} \quad \begin{array}{l} x \in \text{Pre}' \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \wedge \\ y \in \text{Pre}' \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}' \end{array} \quad (3.7)$$

$$z \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}' \quad \text{falls} \quad \begin{array}{l} x \in \text{Pre}' \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}' \wedge \\ y \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}' \end{array} \quad (3.8)$$

$$z \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \quad \text{falls} \quad x \in \text{Pre}' \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \wedge y \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}', \quad (3.9)$$

und somit für (3.6)  $\mid z \mid \geq \mid x \mid$  und  $\mid z \mid \geq \mid y \mid$  sowie für (3.7), (3.8) und (3.9) jeweils  $\mid z \mid \geq \mid x \mid - 1$  und  $\mid z \mid \geq \mid y \mid - 1$ . Da für  $z \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}'$  keine nachfolgende Veränderung am Wortanfang und für  $z \in \text{Pre}' \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*$  keine nachfolgende Veränderung am Wortende existiert und  $z \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*$  keiner Splicing-Regel genügt, existieren für jedes abgeleitete Wort maximal zwei verkürzende Ableitungen. Für die Splicing-Regelmenge  $\mathcal{R}_2$  gilt dies analog. Für ein gegebenes Wort  $w$  kann somit jedes Wort der Länge  $\mid w \mid + 2$  abgeleitet und geprüft werden.  $\square$

**Satz 3.11**

Für das verteilte kommunizierende endenmarkierte Splicing-System  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$  aus Beispiel 3.1 gilt  $L(\Gamma_{2 \cdot n+1}) \cap \{w \in \{n\}^+ \mid \mid w \mid \bmod 2 = 0\} = \emptyset$ .  $\diamond$

**Beweis 3.10 (Satz 3.11)**

Der Beweis wird durch ein Tableau mit dem Startknoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^3, w \in \{n\}^+, \mid w \mid \bmod 2 = 0$  unter Verwendung der durch das System  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$  erzeugten Tableauregelmenge aus Anhang A mit  $\mathcal{P} = \{X, Z, Z'\}, \mathcal{S} = \{Y, Y', Z''\}$ ,

$V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}} = \{n\}$ ,  $\text{Pre} = \{X, Z, Z', \varepsilon\}$ ,  $\text{Suf} = \{Y, Y', Z'', \varepsilon\}$ ,  $\mathcal{PV} = \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*$ ,  $\mathcal{PV}^+ = \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^+$ ,  $\mathcal{SV} = V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}$  und  $\mathcal{SV}^+ = V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^+ \cdot \text{Suf}$  geföhrt. Nicht ableitbare Knoten werden im Beweis grau gekennzeichnet.

Mittels [Tableau 1](#) bzw. [Tableau 2](#) kann zunächst gezeigt werden, dass außer dem Wort  $Z'Y'$  bzw. dem Wort  $XZ''$  kein Wort  $w$ ,  $|w| \geq 2$  mit dem Präfix  $Z'$  bzw. dem Suffix  $Z''$  in der zweiten Komponente ableitbar ist.

Tableau 1		
$Z'w_2Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w_2 \in \{n\}^*$	$Z'w \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \mathcal{SV}^+, w \neq Y'$	$Z'w_1Y' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w_1 \in \{n\}^+$
$(Xw_1 \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge Z'w_2Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w_1 \in \mathcal{SV}, w_2 \in \{n\}^*, w = w_2w_1$	$(Z'Y' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge Z'w \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \mathcal{SV}^+, w \neq Y'$	$(Z'w_1Y' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge Z'w_2 \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w_1 \in \{n\}^+, w_2 \in \mathcal{SV}, w = w_1w_2$
$Z'w \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \mathcal{SV}^+, w \neq Y'$		

Tableau 2		
$Z'w_2Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*$	$wZ'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \mathcal{PV}^+, w \neq X$	$Xw_1Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w_1 \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^+$
$(w_1Y' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge Z'w_2Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*, w = w_1w_2$	$(XZ'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge wZ'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \mathcal{PV}^+, w \neq X$	$(Xw_1Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge w_2Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w_1 \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^+, w_2 \in \mathcal{PV}, w = w_2w_1$
$wZ'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \mathcal{PV}^+, w \neq X$		

Durch das folgende [Tableau 3](#) sind alle möglichen Ableitungen der Sprache  $w \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \{n\}^+, |w| \bmod 2 = 0$  aufgeführt. Um die Nichtableitbarkeit zu zeigen, ist jeweils ein Tableaubeweis für die Sprachen  $wY' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \{n\}^+, |w| \bmod 2 = 0$  ([Tableau 4](#)) und  $Xw \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \{n\}^+, |w| \bmod 2 = 0$  ([Tableau 5](#)) zu föhren.

Tableau 3		
$w \in \mathcal{C}_{\Gamma}^1, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$	$wY' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$	$Xw \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$
$(wY' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge Z' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$	$(Xw \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$	
$w \in \mathcal{C}_{\Gamma}^3, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$		
$w \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$	$Z'w_2 \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w_2 \in \{n\}^+$	$w_2Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w_2 \in \{n\}^+$
$(w_1Y' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge Z'w_2 \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w_1 \in \{n\}^*, w_2 \in \{n\}^+, w = w_2w_1$	$(Xw_1 \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge w_2Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w_1 \in \{n\}^*, w_2 \in \{n\}^+, w = w_1w_2$	
$w \in \mathcal{C}_{\Gamma}^3, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$		

Tableau 4		
$Z'w_2Y' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w_2 \in \{n\}^+$	$wY' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$	
$(w_1Y' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge Z'w_2Y' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w_1 \in \{n\}^*, w_2 \in \{n\}^+, w = w_1w_2$	$(wY' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge Z'Y' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$	
$wY' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$		
$w_2Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w_2 \in \{n\}^+$	$XwY' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$	
$(Xw_1Y' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge w_2Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w_1 \in \{n\}^*, w_2 \in \{n\}^+, w = w_2w_1$	$(XwY' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$	
$wY' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$		

Die Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^1, w \in \{n\}^+, |w| \bmod 2 = 0$ , abgeleitet durch die Tableauregelmenge  $(r_1^{3,(n,n)})$  bzw.  $(r_3^{3,(n,n)})$ , und  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^+, |w| \bmod 2 = 0$ , abgeleitet durch die Regeln  $(r_2^{3,(n,n)})$  bzw.  $(r_4^{3,(n,n)})$ , in [Tableau 3](#) sind nicht ableitbare Terminalknoten, da keine Tableauregeln anwendbar sind.

Tableau 5	
$Z'w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w_2 \in \{n\}^+$	$XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$
$(Xw_1Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z'w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $w_1 \in \{n\}^*, w_2 \in \{n\}^+, w = w_1w_2$	$(XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$
$Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$	
$Xw_2Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w_2 \in \{n\}^+$	$Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$
$(Xw_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Xw_2Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $w_1 \in \{n\}^*, w_2 \in \{n\}^+, w = w_2w_1$	$(Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XZ'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$
$Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^+,  w  \bmod 2 = 0$	

Durch die Nichtableitbarkeit der Knoten  $XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1, w \in \{n\}^*, |w| \bmod 2 = 0$  sowie  $XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^*, |w| \bmod 2 = 0$  ([Tableau 6](#) und [Tableau 7](#)) wird der Beweis vervollständigt; die Knoten  $Xw'Y \in \mathcal{C}_\Gamma^1, w' \in \{n\}^*, |w'| \bmod 2 = 1$  und  $XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^*, |w| \bmod 2 = 1$  bzw.  $XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^*, |w| \bmod 2 = 1$  und  $XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^3, w \in \{n\}^*, |w| \bmod 2 = 1$  sind nicht ableitbare Terminalknoten.

Tableau 6		
$Xw_1Y \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w_1 \in \{n\}^*$	$Xw'Y \in \mathcal{C}_\Gamma^1, w' \in \{n\}^*,$ $ w'  \bmod 2 = 1$	$XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^*,$ $ w  \bmod 2 = 1$
$(Xw_1Y \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Xw_2Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $w_1, w_2 \in \{n\}^*, w = w_1w_2$	$(Xw'Y \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZnnY \in \mathcal{C}_\Gamma^1),$ $w' \in \{n\}^*,  w'  \bmod 2 = 1$	$(XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z'Y \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $w \in \{n\}^*,  w  \bmod 2 = 1$
$XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1, w \in \{n\}^*,  w  \bmod 2 = 1$		
$XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^*,$ $ w  \bmod 2 = 1$	$XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^3, w \in \{n\}^*,$ $ w  \bmod 2 = 1$	$Z'w_2Y \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w_2 \in \{n\}^+$ $(Xw_1Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z'w_2Y \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $w_1 \in \{n\}^*, w_2 \in \{n\}^+, w = w_1w_2$
$XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1, w \in \{n\}^*,  w  \bmod 2 = 1$		

Tableau 7		
$Zw_2Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w_2 \in \{n\}^+$	$Xw'Y \in \mathcal{C}_\Gamma^1, w' \in \{n\}^*$ $ w'  \bmod 2 = 0$	$XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^*,$ $ w  \bmod 2 = 0$
$(Xw_1Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z'w_2Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $w_1 \in \{n\}^*, w_2 \in \{n\}^+, w = w_1w_2$	$(Xw'Y \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZnnY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1),$ $w' \in \{n\}^*,  w'  \bmod 2 = 0$	$(Xw_1Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z'Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $w \in \{n\}^*,  w  \bmod 2 = 1$
$XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^*,  w  \bmod 2 = 0$		
$XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^*,$ $ w  \bmod 2 = 0$	$XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1,$ $w \in \{n\}^*,$ $ w  \bmod 2 = 0$	$XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^3,$ $w \in \{n\}^*,$ $ w  \bmod 2 = 0$
$(XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XZ'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $w \in \{n\}^*,  w  \bmod 2 = 1$	$Zw_2Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w_2 \in \{n\}^+$ $(Xw_1Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Xw_2Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $w_1 \in \{n\}^*, w_2 \in \{n\}^+, w = w_2w_1$	
$XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \{n\}^*,  w  \bmod 2 = 0$		

□



### 3.5 Formale Verifikation grammatikbasierender TT-EH-Systeme

Während die in den Abschnitten 3.3 und 3.4 beschriebenen formalen Analysemethoden vollständig spezifizierte Systeme voraussetzen, wird in diesem Abschnitt die Korrektheit und Vollständigkeit von grammatikbasierenden verteilten kommunizierenden Splicing-Systemen mit möglicherweise universeller Berechnungsstärke (z. B. die Systeme TT6 (3.4) und TT2 (3.5)) untersucht. Korrektheit beschreibt dabei die Eigenschaft, dass jede Ausgabe des Systems korrekt bezüglich der Eingabe ist, und Vollständigkeit, dass jede korrekte Lösung einer Eingabe auch durch das System berechnet wird. Für ein grammatikbasierendes, worterzeugendes System ergibt sich damit die Forderung der wechselseitigen Mengeninklusion der jeweiligen Sprachen.

Nachfolgend wird im Abschnitt 3.5.1 ein Beweisverfahren für die Korrektheit von speziellen grammatikbasierenden Einfach-Splicing-TT-EH-Systemen definiert, welche eine Simulation der Wortableitung am Wortende mittels Symbolrotation unter Zugrundelegung einer gegebenen Chomsky-Grammatik ausführen. Dabei beschreibt jede Komponente ein endenmarkiertes EH-System. Die durch einen Filter akzeptierte Sprache ist durch Mengen von Tupeln spezifiziert, wobei alle Axiome einer Komponente keiner Filterregel einer anderen Komponente genügen. In Abschnitt 3.5.2 wird auf den Beweis der Vollständigkeit von grammatikbasierenden verteilten kommunizierenden Splicing-Systemen eingegangen.

#### 3.5.1 Korrektheit

Die Korrektheit eines auf einer Chomsky Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  basierenden TT-EH-Systems  $\Gamma$  kann bewiesen werden, indem gezeigt wird, dass jedes Wort in  $L(\Gamma)$  auch in der Sprache  $L(G)$  liegt, also  $L(\Gamma) \subseteq L(G)$  gilt. Da für ein TT-EH-System  $\Gamma$  vom Grad  $n$  o. B. d. A.  $L(\Gamma) = \Sigma^+ \cap \{w \in \mathcal{L}_n \mid \exists (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n). (A_1, \dots, A_n) \vdash_{\Gamma}^* (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)\}$  gilt, ist zu zeigen, dass jedes Wort über dem Terminalalphabet  $\Sigma$  in jeder Konfiguration  $\mathcal{C}_{\Gamma}$  der  $n$ ten Komponente auch ein Wort der durch die Grammatik beschriebenen Sprache ist.

Für den Nachweis der Korrektheit wird unter Verwendung des Tableaubeweisverfahrens aus Abschnitt 3.4 für jeden Knoten  $w \in \mathcal{C}_{\Gamma}^n, w \in \Sigma^+$  die Ableitbarkeit im Tableau untersucht. Für einen entsprechenden ableitbaren

Knoten ist anschließend einerseits zu prüfen, ob mindestens ein Terminalknoten die Startvariable  $S_G$  der Grammatik repräsentiert, und andererseits jede Folge von Ableitungsschritten in  $\Gamma$ , repräsentiert durch die Knoten im Tableau, einer Ableitung der Grammatik entspricht.

Für ein Symbol  $B \in V, B \notin (V_G \cup \Sigma)$ , das das linke Ende eines Wortes über den Grammatikalphabeten markiert, die Präfix- und Suffixalphabete  $\mathcal{P}, \mathcal{S}$  und eine bijektive Kodierungsfunktion  $\text{cod} : (V_G \cup \Sigma) \rightarrow V^+$  ist eine partielle Funktion  $\text{norm} : \subseteq V^+ \rightarrow V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^+$ ,

$$\text{norm}(a) = \begin{cases} \gamma'(w) & \text{für } w \in \varphi^\diamond(\rho(a)) \wedge w \in \gamma(\{B\} \cdot (V_G \cup \Sigma)^+) \\ \perp & \text{falls kein derartiges } w \text{ existiert} \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} \rho(a) &= \begin{cases} \rho(\text{suf}^{|a|-1}(a)) & \text{falls } \text{pre}^1(a) \in \mathcal{P} \\ \rho(\text{pre}^{|a|-1}(a)) & \text{falls } \text{suf}^1(a) \in \mathcal{S} \\ a & \text{sonst} \end{cases} \\ \gamma(w) &= \begin{cases} \{w, \text{cod}(w)\} & \text{falls } w \in (V_G \cup \Sigma \cup \{B\}) \\ \gamma(w_1) \cdot \gamma(w_2) & \text{falls } w = w_1 \cdot w_2 \end{cases} \\ \gamma'(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \gamma'(a \cdot w) &= \begin{cases} a \cdot \gamma'(w) & \text{falls } a \in (V_G \cup \Sigma) \\ \gamma'(w) & \text{falls } a = B \\ b \cdot \gamma'(w) & \text{falls } a = \text{cod}(b) \end{cases} \end{aligned}$$

definiert. Eine Ableitung im Tableau, ausgehend von einem ableitbaren Wurzelknoten  $k_1$  mit  $w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^n$  und  $w_1 \in \Sigma^+$ , ist *korrekt*, falls ein Terminalknoten  $k_m, m \geq 2$  existiert, für den eine anwendbare Tableauregel  $(i, a)$  mit dem die Startvariable  $S_G$  der zugrunde liegenden Grammatik repräsentierenden Axiom  $a$ , d. h.  $\text{norm}(a) = S_G$ , existiert und auf dem Pfad von  $k_1$  zu  $k_m$  mit  $m \in \mathbb{N}^+, m \geq 2$  existieren Knoten  $k_j : w_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{c_j}$  mit  $j \in \{2, \dots, m-1\}, c_j \in \{1, \dots, n\}$ , so dass  $S_G \rightarrow_G^* \dots \rightarrow_G^* \text{norm}(w_j) \rightarrow_G^* \dots \rightarrow_G^* w_1$ .

Die für eine Splicing-Regel  $r$  erzeugte Tableauregelmenge 3.1 kann unter bestimmten Bedingungen eingeschränkt werden, wodurch der Tableaubeweis vereinfacht werden kann. Beispielsweise wird für eine Splicing-Regel  $r = u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4 \in R_i$  einer Komponente  $i$  mit  $u_3 \in A_i, u_4 = \varepsilon, \text{pre}(u_3) \cap \text{Pre}' \neq \emptyset, \{u_3 w \mid w \in V^*\} \cap (\bigcup_{j=1}^n S_j) = \emptyset, \{u_3 w \mid w \in V^+\} \cap A_i = \emptyset$  und  $\forall r' = u'_1 \# u'_2 \$ u'_3 \# u'_4 \in R_i. r' \neq r. u_3 \notin \{\text{seg}(w) \mid w \in \bigcup_{j=1}^4 u'_j\}$  die Menge der Tableauregeln um die Regeln  $r'^1, r'^2, r'^3, r'^4, r'^5$  und  $r'^6$  für alle  $j \in \mathbb{N}_n^+, j \neq i$  und  $\pi(p, s, w) = p \in \text{pre}(w) \wedge w \in \text{suf}(w), \mathcal{F}_i = \bigcup_{j=1, j \neq i}^n F_j$  erweitert.

$$\begin{aligned}
& \forall x_1, x_2 \in V^*. \pi(p, s, x_1 u_1). \frac{(r^1) \quad x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge u_3 \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{x_1 u_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^j} \\
& \forall x_1, x_2 \in V^*. \frac{(r^2) \quad x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge u_3 \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^h} \\
& \forall x_1, x_2 \in V^*. \bigwedge_{(p,s) \in \mathcal{F}_i} \neg \pi(p, s, x_1 u_1). \frac{(r^3) \quad x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge u_3 \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{x_1 u_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^i} \\
& \forall x_1, x_2 \in V^*. \pi(p, s, x_1 u_1 u_2 x_2). \frac{(r^4) \quad x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^j} \\
& \forall x_1, x_2 \in V^*. \frac{(r^5) \quad x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^h} \\
& \forall x_1, x_2 \in V^*. \bigwedge_{(p,s) \in \mathcal{F}_i} \neg \pi(p, s, x_1 u_1 u_2 x_2). \frac{(r^6) \quad x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i \wedge u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^i}{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^h}
\end{aligned}$$

Für ein gegebenes endenmarkiertes Einfach-Splicing-TT-EH-System  $\Gamma$  vom Grad  $n$  mit den Präfix- und Suffixmengen  $\text{Pre}, \text{Suf}$  ist in einem Korrektheitsbeweis mittels Tableaubeweisverfahren, ausgehend von einer beliebigen Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  und einem frei gewählten Wort  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^n, w \in \Sigma^+$ , durch Anwendung der erzeugten Tableauregeln zu zeigen, dass  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^n$  einen ableitbaren Knoten im Tableaubeweisverfahren besitzt und dieser eine korrekte Ableitung besitzt.

**Satz 3.12**

Ein universelles grammatikbasierendes Einfach-Splicing-TT-EH-System ist korrekt, falls für jede Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  und jedes Wort  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^n$  mit  $w \in \Sigma^+$  eine korrekte Ableitung im Tableaubeweisverfahren existiert.  $\diamond$

**Beweis 3.11 (Satz 3.12)**

Es ist zu zeigen, dass für jedes Wort  $w \in \Sigma^+$  der letzten Komponente einer jeden Konfiguration mit einer korrekten Ableitung auch  $w \in L(G)$  für eine gegebene Grammatik  $G$  gilt. Aufgrund der Vollständigkeit des Tableaubeweisverfahrens (Satz 3.8) existiert kein  $w \in \Sigma^+$  mit  $w \in L(\Gamma)$ , so dass

$w \in \mathcal{C}_\Gamma^n$  keinen ableitbaren Knoten im Tableaubeweisverfahren besitzt. Da für jeden Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^n$ ,  $w \in \Sigma^+$  mit einer korrekten Ableitung  $S_G \rightarrow_G^* w$  gilt, folgt  $w \in L(G)$ .  $\square$

Unter Verwendung des Satzes 3.12 kann die Korrektheit der universellen, grammatikbasierenden Einfach-Splicing-TT-EH-Systeme TT2 aus dem Abschnitt 3.2.2 und TT6 aus dem Abschnitt 3.2.1 gezeigt werden, falls der jeweilige Tableaubeweis endlich ist.

**Satz 3.13 (Korrektheit TT2)**

Für jede Chomsky-Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  ist das auf  $G$  basierende TT2-EH-System  $\Gamma$  korrekt, d. h. es gilt  $L(\Gamma) \subseteq L(G)$ .  $\diamond$

**Beweis 3.12 (Satz 3.13)**

Für eine beliebige Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  mit  $V_G = \{N_1, \dots, N_m\}$  und  $\Sigma = \{s_1, \dots, s_n\}$ , den Alphabeten  $\mathcal{P} = \{X, Z, Z'\}$ ,  $\mathcal{S} = \{Y', Z, Z''\}$  und  $V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}} = \Sigma \cup V_G \cup \{B\}$ , den Sprachen  $\text{Pre} = \{\varepsilon, X, Z, Z'Z'\}$  über  $\mathcal{P}$ ,  $\text{Suf} = \{\varepsilon, Y', Z, Z''Z''\}$  über  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{PV} = \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*$ ,  $\mathcal{SV} = V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}$ ,  $\mathcal{PSV} = \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}$  werden die in Anhang C aufgeführten Tableauregeln erzeugt. Mittels [Tableau 1](#) wird gezeigt, dass jedes Wort  $w \in \Sigma$  der zweiten Komponente nur aus  $L_k B w G_k$  mit  $k = n + m + 1$  der zweiten Komponente abgeleitet werden kann und es gilt  $\text{norm}(L_k B w G_k) = \text{norm}(w)$  für jedes  $w \in \Sigma^+$ . Für jedes Wort  $L_j w G_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n + m + 1\}$ ,  $w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^+$ ,  $|w|_B = 1$  gilt, dass es abgeleitet wurde aus

- $X w_1 s_j Y'$  in der ersten Komponente, falls  $w = s_j w_1$  ([Tableau 3](#) und [Tableau 6](#)) oder
- $X w_2 w_2' Y'$  in der ersten Komponente, falls  $w_2' \rightarrow_G^+ w_2'' s_j$  und  $w = s_j w_2 w_2''$  ([Tableau 3](#)) oder
- $X w_3 N_i Y'$  in der ersten Komponente, falls  $w = N_i w_3$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j = n + i$  ([Tableau 4](#) und [Tableau 7](#)) oder
- $X w_4 w_4' Y'$  in der ersten Komponente, falls  $w_4' \rightarrow_G^+ w_4'' N_i$  und  $w = N_i w_4 w_4''$  mit  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j = n + i$  ([Tableau 4](#)) oder
- $X w_5 B Y'$  in der ersten Komponente, falls  $w = B w_5$ ,  $j = n + m + 1$  ([Tableau 5](#) und [Tableau 8](#)) oder
- $X w_6 B w_6' Y'$  in der ersten Komponente, falls  $w_6' \rightarrow_G^+ \varepsilon$  und  $w = B w_6$  mit  $j = n + m + 1$  ([Tableau 5](#)).

Für alle  $i \in \{1, \dots, n+m\}$  und für alle  $w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^+$  gilt

$$\begin{aligned} \text{norm}(Xw_1s_iY') &= \text{norm}(L_i s_i w_1 G_i) \\ \text{norm}(Xw_2w'_2Y') &\rightarrow_G^+ \text{norm}(L_i s_i w_2 w''_2 G_i) \\ \text{norm}(Xw_3N_iY') &= \text{norm}(L_{n+i} N_i w_3 G_{n+i}) \\ \text{norm}(Xw_4w'_4Y') &\rightarrow_G^+ \text{norm}(L_{n+i} N_i w_4 w''_4 G_{n+i}) \\ \text{norm}(Xw_5BY') &= \text{norm}(L_{n+m+1} B w_5 G_{n+m+1}) \\ \text{norm}(Xw_6Bw'_6Y') &\rightarrow_G^+ \text{norm}(L_{n+m+1} B w_6 G_{n+m+1}). \end{aligned}$$

Da nach [Tableau 2](#) entweder der ableitbare Terminalknoten  $XBS_GY \in \mathcal{C}_\Gamma^1$  existiert oder jedes Wort  $Xw_1w_2Y'$  mit  $w_1, w_2 \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*$ ,  $|w_1w_2| \geq 1$  in der ersten Komponente aus einem Wort  $L_iw_1w_2G_j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n+m+1\}$  in der zweiten Komponente oder einem Wort  $Xw_1w'_2Y'$  mit  $w'_2 \rightarrow_G^+ w_2$  in der ersten Komponente abgeleitet wurde, folgt [Satz 3.13](#).  $\square$

### Satz 3.14 (Korrektheit TT6)

Für jede Chomsky-Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  ist ein auf  $G$  basierendes TT6-EH-System  $\Gamma$  korrekt, d. h. es gilt  $L(\Gamma) \subseteq L(G)$ .  $\diamond$

### Beweis 3.13 (Satz 3.14)

Der Beweis wird analog zum Korrektheitsbeweis [3.12](#) des universellen Systems TT2 geführt. Für eine beliebige Typ-0-Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$ , den Alphabeten  $\mathcal{P} = \{X, X', Z, Z'\}$ ,  $\mathcal{S} = \{Y, Y', Z, Y'_\alpha, Y'_\beta, Z''\}$  und  $V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}} = \Sigma \cup V_G \cup \{B, \alpha, \beta\}$ , den Sprachen  $\text{Pre} = \{\varepsilon, X, X', Z, Z'Z'\}$  über  $\mathcal{P}$ ,  $\text{Suf} = \{\varepsilon, Y, Y', Z, Y'_\alpha, Y'_\beta, Z''\}$  über  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{PV} = \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*$  und  $\mathcal{SV} = V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}$  werden die in [Anhang B](#) aufgeführten Tableauregeln erzeugt. Da jeder ableitbare Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^6$ ,  $w \in \Sigma$  im Tableaubeweis eine korrekte Ableitung besitzt, gilt  $L(\Gamma) \subseteq L(G)$  für jede Grammatik  $G$ .  $\square$

## 3.5.2 Vollständigkeit

Zum Nachweis der Vollständigkeit eines grammatikbasierenden verteilten kommunizierenden Splicing-Systems  $\Gamma$  ist zu zeigen, dass jedes Wort der Sprache  $L(G)$  der Grammatik  $G$  durch das TT-EH-System  $\Gamma$  erzeugt werden kann, also  $L(G) \subseteq L(\Gamma)$  gilt. Für den Beweis des Satzes [3.15](#) zur Vollständigkeit des Systems TT2 werden zunächst die [Hilfssätze 3.1](#) und [3.2](#) eingeführt und bewiesen.

### Hilfssatz 3.1

Für eine Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  und ein auf  $G$  basierendes TT2-EH-System  $\Gamma$  folgt, dass für alle Regeln  $(u, v) \in P_G$  und für alle  $w_1, w_2 \in (V_G \cup \Sigma)^*$

$(XBw_1uw_2Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \rightarrow \exists \mathcal{C}'_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}'_\Gamma. XBw_1vw_2Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^1)$  gilt.  $\diamond$

**Beweis 3.14 (Hilfssatz 3.1)**

Durch die Anwendung der Sequenz  $r_{12}^i, r_{15}^i, r_{21}^i, r_{22}^i$  kann jedes Terminalsymbol  $s_i \in \Sigma, i \in \{1, \dots, n\}$  und über die Sequenz  $r_{13}^i, r_{16}^i, r_{21}^i, r_{22}^i$  jedes Nichtterminalsymbol  $N_i \in V_G, i \in \{1, \dots, m\}$  vom rechten Wortende an den linken Wortanfang des Wortes  $Bw_1uw_2$  rotiert werden, so dass eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma''$  mit  $Xw_2Bw_1uY' \in \mathcal{C}_\Gamma''^1$  existiert. Aufgrund der Splicing-Regel  $r_{11}^{(u,v)}$  und einer Rotation des Teilwortes  $w_1v$  an den Wortanfang folgt die Existenz einer Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma'''$  mit  $Xw_1vw_2BY' \in \mathcal{C}_\Gamma'''^1$ . Die Rotation des Symbols  $B$  mit der Sequenz  $r_{14}, r_{17}, r_{21}^{n+m+1}, r_{22}^{n+m+1}$  schließt den Beweis ab.  $\square$

**Hilfssatz 3.2**

Für eine Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  und ein auf  $G$  basierendes TT2-EH-System  $\Gamma$  gilt  $\forall w \in \Sigma^+. (XBwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \rightarrow \exists \mathcal{C}'_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}'_\Gamma. w \in \mathcal{C}'_\Gamma^2)$ .  $\diamond$

**Beweis 3.15 (Hilfssatz 3.2)**

Aufgrund der in Beweis 3.14 angegebenen Rotationsmöglichkeit existiert eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma''$  mit  $XwBY' \in \mathcal{C}_\Gamma''^1$ . Die sequentielle Anwendung der Splicing-Regeln  $r_{14}, r_{17}, r_{23}$  und  $r_{24}$  entfernt die jeweiligen Hilfssymbole.  $\square$

**Satz 3.15 (Vollständigkeit TT2)**

Für jede Chomsky-Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  und ein auf  $G$  basierendes TT2-EH-System  $\Gamma$  gilt  $\forall w \in L(G). \exists \mathcal{C}'_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}'_\Gamma. w \in \mathcal{C}'_\Gamma^2$ .  $\diamond$

**Beweis 3.16 (Satz 3.15)**

Aufgrund des Axioms  $XBS_GY'$  und der Splicing-Regeln  $r_{11}^{(S_G, v)}$  für  $v \in (V_G \cup \Sigma)^*, (S_G, v) \in P_G$  in der ersten Komponente sowie der Hilfssätze 3.1 und 3.2 gilt Satz 3.15.  $\square$

Der Beweis der Vollständigkeit des Systems TT6 (Satz 3.16) wird analog zum Vollständigkeitsbeweis des Systems TT2 geführt. Die Rotation eines Wortes, die Simulation der Wortableitung unter Verwendung einer anwendbaren Produktionsregel der zugrunde liegenden Grammatik sowie die Entfernung von Hilfssymbolen bei Wörtern über dem Terminalalphabet wird durch die beiden Hilfssätze 3.3 und 3.4 formalisiert.

**Hilfssatz 3.3**

Für eine Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  und ein auf  $G$  basierendes TT6-EH-System  $\Gamma$  folgt, dass für alle Regeln  $(u, v) \in P_G$  und für alle  $w_1, w_2 \in (V_G \cup \Sigma)^*$   $(XBw_1uw_2Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \rightarrow \exists \mathcal{C}'_\Gamma. \mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}'_\Gamma. XBw_1vw_2Y' \in \mathcal{C}'_\Gamma^2)$  gilt.  $\diamond$

**Beweis 3.17 (Hilfssatz 3.3)**

Da jedes Terminalsymbol  $s_i \in \Sigma$  durch die Sequenz  $r_{21}^i, r_{24}, r_{26}, r_{41}, r_{42}, (r_{25}, r_{26}, r_{31}, r_{32})^i, r_{24}, r_{26}, r_{41}, r_{42}, r_{27}^i$  und jedes Nichtterminalsymbol  $N_i \in V_G$  durch die endliche Sequenz  $r_{22}^i, r_{24}, r_{26}, r_{41}, r_{42}, (r_{25}, r_{26}, r_{31}, r_{32})^{i+n}, r_{24}, r_{26}, r_{41}, r_{42}, r_{28}^i$  vom rechten Wortende zum linken Wortanfang eines Wortes  $w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^+$  rotiert werden kann, existiert eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma''$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}_\Gamma''$  und  $Xw_2Bw_1uY' \in \mathcal{C}_\Gamma''^2$ . Durch Anwendung der Sequenz  $r_{210}, r_{11}^{(u,v)}$  und der Rotation von  $w_1$  resultiert eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma'''$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma'' \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}_\Gamma'''$  und  $Xw_1vw_2BY' \in \mathcal{C}_\Gamma'''^2$ . Die Sequenz  $r_{23}, r_{24}, r_{26}, r_{41}, r_{42}, (r_{25}, r_{26}, r_{31}, r_{32})^{n+m+1}, r_{24}, r_{26}, r_{41}, r_{42}, r_{29}$  von Splicing-Regeln beendet den Beweis.  $\square$

**Hilfssatz 3.4**

Für eine Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  und ein auf  $G$  basierendes TT6-EH-System  $\Gamma$  folgt  $\forall w. ((w \in \Sigma^+ \wedge XBwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2) \rightarrow \exists \mathcal{C}_\Gamma'. \mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma'. w \in \mathcal{C}_\Gamma'^6)$ .  $\diamond$

**Beweis 3.18 (Hilfssatz 3.4)**

Wie bereits in Beweis 3.17 angegeben, ist die Rotation von Symbolen aus  $V_G \cup \Sigma$  vom rechten Wortende zum linken Wortanfang eines Wortes möglich, d. h. es existiert  $\mathcal{C}_\Gamma'$  mit  $XwBY' \in \mathcal{C}_\Gamma'^2$ . Die Sequenz der Splicing-Regeln  $r_{210}, r_{51}, r_{52}$  beweist somit Hilfssatz 3.4.  $\square$

**Satz 3.16 (Vollständigkeit TT6)**

Für jede Chomsky-Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  und ein auf  $G$  basierendes TT6-EH-System  $\Gamma$  folgt  $\forall w \in L(G). \exists \mathcal{C}_\Gamma. w \in \mathcal{C}_\Gamma^6$ .  $\diamond$

**Beweis 3.19 (Satz 3.16)**

In der initialen Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  des Systems  $\Gamma$  kann jede Regel  $(S_G, v) \in P_G, v \in (V_G \cup \Sigma)^+$  durch Anwendung der Splicing-Regel  $r_{11}^{(S_G, v)}$  simuliert werden. Aufgrund der Hilfssätze 3.3 sowie 3.4 kann gefolgert werden, dass Satz 3.16 gilt.  $\square$





## Zeitgesteuerte verteilte Splicing-Systeme mit dynamischen Splicing-Regeln

Analog zu den verteilten kommunizierenden Splicing-Systemen aus Kapitel 3 basieren die zeitgesteuerten verteilten Splicing-Systeme mit dynamischen Splicing-Regeln (Time-Varying Distributed H Systems), oder TVDH-Systeme, auf dem Konzept des Rechnens mit Molekülen in vitro. Sie bestehen im Allgemeinen aus einer endlichen Menge von Komponenten, wobei jede Komponente unter Verwendung globaler Parameter ein H-System bzw. EH-System beschreibt. Die biochemische Grundlage dieser Systeme ist die Annahme, dass die verwendeten Splicing-Regeln auf Enzymen basieren, die bestimmten Reaktionsbedingungen unterliegen und somit zu bestimmten Zeitpunkten aktiv oder passiv sein können. Nachfolgend wird in Abschnitt 4.1 eine formale Definition von TVDH-Systemen und in Abschnitt 4.2 das universelle TVDH-System vom Grad zwei aus [MRV03] angegeben. Anschließend wird eine strukturelle operationelle Semantik für TVDH-Systeme spezifiziert und in Abschnitt 4.4 wird, analog zu Abschnitt 3.4, ein Verfahren zur Lösung des Wortproblems in TVDH-Systemen beschrieben. Eine Erweiterung dessen wird abschließend in Abschnitt 4.5 zur formalen Verifikation von grammatikbasierenden TVDH-Systemen genutzt.

### 4.1 Systembeschreibung

Ein zeitgesteuertes verteiltes Splicing-System mit dynamischen Splicing-Regeln vom Grad  $n, n \geq 1$  wird durch ein  $n + 3$  Tupel  $\Gamma = (V, \Sigma, A, R_1, \dots, R_n)$  mit dem Alphabet  $V$  und dem Terminalalphabet  $\Sigma, \Sigma \subseteq V$  beschrieben. Die Menge  $A$  mit  $A \subseteq V^+$  definiert die Menge der Axiome des Systems und jedes  $R_i \subseteq V^* \cdot \{\#\} \cdot V^* \cdot \{\$\} \cdot V^* \cdot \{\#\} \cdot V^*$ ;  $\#, \$ \notin V$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  eine Menge von Splicing-Regeln. Das Quadrupel  $(V, \Sigma, A, R_i)$  definiert für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  ein EH-System nach Definition 2.13, die Funktion  $\sigma_i$  die entsprechende Splicing-Operation. Ein TVDH-System ist *endlichkomponentig*,

falls für jede Komponente das entsprechende EH-System endlichkomponentig ist, und  $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ -markiert bzw. *endenmarkiert*, falls für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$   $(V, \Sigma, A, R_i)$  endenmarkierte EH-Systeme sind. In einem Ableitungsschritt zu einem beliebigen Zeitpunkt  $k \geq 1$  werden alle anwendbaren Splicing-Regeln  $R_{(k-1) \bmod n+1}$  auf die aktuelle Konfiguration angewendet – die Folgekonfiguration ergibt sich infolgedessen aus allen rekombinierten Wörtern.

Eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  eines TVDH-Systems  $\Gamma$  mit dem Alphabet  $V$  vom Grad  $n$  ist  $\mathcal{C}_\Gamma = (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$  mit  $\mathcal{L}_i \subseteq V^+$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit der initialen Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)}$ , gegeben durch das  $n$ -Tupel  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} = (A, \emptyset, \dots, \emptyset)$ . Für eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  gilt außerdem  $\mathcal{C}_\Gamma^i = \mathcal{L}_i$ . Ein Ableitungsschritt eines Systems ist in Definition 4.1 und die durch das System erzeugte Sprache in Definition 4.2 spezifiziert.

**Definition 4.1 (Ableitungsschritt)**

Für ein TVDH-System  $\Gamma$  vom Grad  $n$  ist die Relation zwischen zwei Konfigurationen  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) \vdash_\Gamma (\mathcal{L}'_1, \dots, \mathcal{L}'_n)$  ein Ableitungsschritt, definiert mit

$$\mathcal{L}'_{(i \bmod n+1)} = \sigma_i(\mathcal{L}_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

◇

**Definition 4.2 (Sprache eines TVDH-Systems)**

Die durch ein TVDH-System  $\Gamma$  erzeugte Sprache ist definiert mit

$$L(\Gamma) = \Sigma^+ \cap \{w \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{L}_i \mid \exists (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n). (A, \emptyset, \dots, \emptyset) \vdash_\Gamma^* (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)\}.$$

Alternativ gilt für  $k \geq 1, 1 \leq i \leq n$ :

$$L(\Gamma) = \left( \bigcup_{k \geq 1} L_k \right) \cap \Sigma^* \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} L_1 = A \\ L_{k+1} = \sigma_i(L_k) \quad i = (k-1) \bmod n + 1. \end{array}$$

◇

**Beispiel 4.1 ( $\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}$ )**

Das System  $\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}} = (\{X, Y, Z, Z', n\}, \{n\}, \{XnY, ZnnY, Z'\}, R_1, R_2)$  vom Grad zwei ist gegeben mit den Splicing-Regelmengen

$$R_1 : \begin{array}{cccc} (r_{11}) & (r_{12}) & (r_{13}) & (r_{14}) \\ \frac{n \mid Y}{Z \mid nnY} & \frac{n \mid Y}{n \mid Y} & \frac{X \mid \varepsilon}{\varepsilon \mid Z'} & \frac{Z' \mid \varepsilon}{Z' \mid \varepsilon} \end{array}$$

$$R_2 : \begin{array}{cccc} (r_{21}) & (r_{22}) & (r_{23}) & (r_{24}) \\ \frac{n \mid Y}{Z \mid nnY} & \frac{n \mid Y}{n \mid Y} & \frac{\varepsilon \mid Y}{Z' \mid \varepsilon} & \frac{Z' \mid \varepsilon}{Z' \mid \varepsilon} \end{array}$$

und der initialen Konfiguration  $\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(0)} = (\{XnY, ZnnY, Z'\}, \emptyset)$ .

◇

**Satz 4.1** ( $L(\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}})$  aus Beispiel 3.1)

Das System  $\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}$  aus Beispiel 4.1 erzeugt die Sprache  $L(\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}) = \{w \mid w \in \{n\}^+ \wedge |w| \bmod 2 = 1\}$ .  $\diamond$

**Beweis 4.1** (Satz 4.1)

Der Nachweis für  $L(\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}) = \{w \mid w \in \{n\}^+ \wedge |w| \bmod 2 = 1\}$  für das System  $\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}$  aus Beispiel 4.1 kann induktiv über die Konfigurationen des Systems gezeigt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(0)} &= (\{XnY, ZnnY, Z'\}, \emptyset) \\ \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(1)} &= \left( \emptyset, C_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(0),1} \cup \{Xn^3Y, Zn^4Y, ZY, XZ', nY\} \right) \\ \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(2)} &= \left( C_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(1),2} \cup \{Xn^5Y, Zn^6Y, n^3Y, n, Z, Zn^2, Zn^4, \right. \\ &\quad \left. Xn, Xn^3, XZ'Y, Z'Y\}, \emptyset \right) \end{aligned}$$

und für alle  $i \in \mathbb{N}^+$  mit  $i \geq 3, i \bmod 2 = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(i)} &= (\emptyset, (C_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(i-1),1} \setminus \{Zn^{2 \cdot j} \mid j \in \mathbb{N}, j < i\}) \cup \{Xn^{2 \cdot i+1}Y, \\ &\quad Zn^{2 \cdot i+2}Y, n^{2 \cdot i-1}Y, n^{2 \cdot i-3}\}) \end{aligned}$$

sowie für alle  $i \in \mathbb{N}^+$  mit  $i \geq 3, i \bmod 2 = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(i)} &= (C_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(i-1),2} \cup \{Xn^{2 \cdot i+1}Y, Zn^{2 \cdot i+2}Y, n^{2 \cdot i-1}Y, n^{2 \cdot i-3}, \\ &\quad Xn^{2 \cdot i-3}, Xn^{2 \cdot i-1}\} \cup \{Zn^{2 \cdot j} \mid j \in \mathbb{N}, j \leq i\}, \emptyset) \end{aligned}$$

□

In [PRS98] wurde gezeigt, dass TVDH-Systeme mit mindestens sieben Komponenten universelle Berechnungsstärke besitzen, da sie die Wortableitung jeder Typ-0-Grammatik simulieren können. Neben dem Nachweis der Universalität mittels Typ-0-Grammatiken wurde u. a. die Simulation von Turing-Maschinen sowie von Tag-Maschinen gezeigt. Als Folge einer sukzessiven Reduzierung der notwendigen Anzahl der Komponenten eines Systems zur Realisierung universeller Berechnungsstärke wurde in [MRV03] ein universelles TVDH-System vom Grad zwei vorgestellt (s. Abschnitt 4.2). In [MRV04] konnte wiederum gezeigt werden, dass durch Simulation dieses Systems eine Komponente für die Universalität ausreichend ist. Eine ausführliche Zusammenfassung ist u. a. in [MVR05] sowie eine Erweiterung in [Ver05] gegeben.

## 4.2 TVDH-System vom Grad Zwei (TVDH2)

Das endenmarkierte TVDH-System aus [MRV03] (TVDH2) besteht aus zwei Komponenten und beschreibt ein universelles Modell zur Lösung algorithmischer Aufgabenstellungen. Vergleichbar mit den universellen verteilten kommunizierenden Splicing-Systemen aus Kapitel 3 sind die jeweiligen Komponenten des Systems unterspezifiziert, d. h. die Axiomenmenge und die jeweiligen Splicing-Regel-Mengen sind abhängig von einem systemweiten Parameter, einer Chomsky-Typ-0-Grammatik, welcher die jeweils zu lösende Aufgabenstellung formal beschreibt. Für eine Chomsky-Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  ist  $\Gamma = (V, \Sigma, A, R_1, R_2)$  ein auf  $G$  basierendes, endlichkomponentiges, endenmarkiertes TVDH-System mit den zwei Alphabeten  $\mathcal{P} = \{X, Z, Z'', X_i, X'_j, X''_j, X', X'', C_1, D_2\}$  und  $\mathcal{S} = \{Y, Z, Z', Y_i, Y'_j, Y''_j, Y', Y'', C_2, D_1\}$  für  $i \in \{1, \dots, |V_G \cup \Sigma| + 1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, |V_G \cup \Sigma|\}$ , dem endlichen Alphabet  $V = V_G \cup \Sigma \cup \{B\} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{S}$ , den formalen Sprachen  $\text{Pre} = \mathcal{P}^1$ ,  $\text{Suf} = \mathcal{S}^1$ , dem Alphabet  $V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}} = V_G \cup \Sigma \cup \{B\}$ , dem Terminalalphabet  $\Sigma \subseteq V$ , der endlichen Axiomenmenge  $A \subset (\text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf})$  sowie den endlichen Mengen von Splicing-Regeln  $R_1$  der ersten und  $R_2$  der zweiten Komponente mit  $R_1, R_2 \subset \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \{\#\} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf} \cdot \{\$\} \cdot \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \{\#\} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}$ . Die jeweiligen Komponenten sind in Definition 4.3 gegeben.

### Definition 4.3 (TVDH-System vom Grad 2 (TVDH2))

Das auf  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  basierende TVDH-System  $\Gamma = (V, \Sigma, A, R_1, R_2)$  vom Grad zwei ist mit  $\Sigma = \{s_1, \dots, s_n\}$ ,  $V_G = \{N_1, \dots, N_m\}$ ,  $V_G \cup \Sigma \cup \{B\} = \{a_1, \dots, a_{n+m+1}\}$ ,  $\mathbf{a} \in \{a_1, \dots, a_{n+m+1}\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n+m+1\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n+m\}$  und  $k \in \{2, \dots, n+m+1\}$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 V &= V_G \cup \Sigma \cup \{B\} \cup \{X, Y, Z, Z', Z'', X_i, Y_i, X'_j, Y'_j, X''_j, Y''_j, X', Y', \\
 &\quad X'', Y'', C_1, C_2, D_1, D_2\} \\
 &\quad \text{mit } \{B, X, Y, Z, Z', Z'', X_i, Y_i, X'_j, Y'_j, X''_j, Y''_j, X', Y', X'', Y'', \\
 &\quad C_1, C_2, D_1, D_2\} \cap (V_G \cup \Sigma) = \emptyset \\
 A &= \{X S_G B Y\} \cup \{Z v Y_j \mid \exists (u \rightarrow v a_j) \in P_G\} \cup \{Z Y_i, Z Y'_j, Z Y''_j, X' Z, \\
 &\quad X'' Z, Z Y, X_i a_i Z, X'_j Z, X''_j Z, Z Y', Z Y'', X Z, X_j Z, C_1 Z', D_1, D_2, \\
 &\quad Z'' C_2\}
 \end{aligned}$$

und den Splicing-Regel-Mengen  $R_1, R_2$  mit  $A' = A \setminus \{X S_G B Y\}$ :

$$R_1 : \frac{\overset{(r_{11}^{(u, va_j)})}{\varepsilon}}{Z} \mid \frac{uY}{vY_j} \quad \forall (u, va_j) \in P_G \quad \frac{\overset{(r_{11'}^{(u, \varepsilon)})}{\varepsilon}}{Z} \mid \frac{a_i u Y}{Y_i} \quad \forall (u, \varepsilon) \in P_G \quad \frac{\overset{(r_{12}^i)}{\varepsilon}}{Z} \mid \frac{a_i Y}{Y_i}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{c} (r_{13}^k) \\ \mathbf{a} \mid Y_k \\ Z \mid Y'_{k-1} \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{14}^j) \\ \mathbf{a} \mid Y'_j \\ Z \mid Y''_j \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{15}) \\ X_1 \mid \mathbf{a} \\ X' \mid Z \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{16}) \\ X' \mid \mathbf{a} \\ X'' \mid Z \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{17}) \\ \mathbf{a} \mid Y'' \\ Z \mid Y \end{array} \\
\begin{array}{c} (r_{18}) \\ \mathbf{a} \mid BY'' \\ Z'' \mid \varepsilon \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{19}^j) \\ \mathbf{a} \mid Y''_j \\ Z \mid Y_j \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{110}) \\ C_1 \mid Z' \\ \varepsilon \mid D_1 \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{111}^\alpha) \\ \alpha \mid \varepsilon \\ \alpha \mid \varepsilon \end{array} & \forall \alpha \in A_1 \\
\begin{array}{c} (r_{21}^i) \\ X \mid \mathbf{a} \\ X_i a_i \mid Z \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{22}^k) \\ X_k \mid \mathbf{a} \\ X'_{k-1} \mid Z \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{23}^j) \\ X'_j \mid \mathbf{a} \\ X''_j \mid Z \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{24}) \\ \mathbf{a} \mid Y_1 \\ Z \mid Y' \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{25}) \\ \mathbf{a} \mid Y' \\ Z \mid Y'' \end{array} \\
\begin{array}{c} (r_{26}) \\ X'' \mid \mathbf{a} \\ X \mid Z \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{27}) \\ X'' \mid \mathbf{a} \\ \varepsilon \mid Z' \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{28}^j) \\ X''_j \mid \mathbf{a} \\ X_j \mid Z \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{29}) \\ Z'' \mid C_2 \\ D_2 \mid \varepsilon \end{array} & 
\begin{array}{c} (r_{210}^\alpha) \\ \alpha \mid \varepsilon \\ \alpha \mid \varepsilon \end{array} \quad \forall \alpha \in A' \quad \diamond
\end{array}
\end{array}$$

Die durch ein TVDH2-System  $\Gamma$  erzeugte Sprache ist gegeben mit  $L(\Gamma) = \Sigma^+ \cap \{w \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2) \mid \exists (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2). ((A, \emptyset) \vdash_\Gamma^* (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2))\}$ .

Das System simuliert die Ableitung eines Wortes unter Verwendung einer Chomsky-Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  nach der „Rotation und Simulation“-Methode. Ausgehend von dem Axiom  $XS_GBY$ , welches das Startsymbol der Grammatik  $G$  repräsentiert, kann mithilfe der Splicing-Regelmengen  $r_{11}^{(u, va_j)}$  und  $r_{11'}^{(u, \varepsilon)}$  jede Produktionsregel von  $G$  auf ein entsprechendes rechtes Wortende eines endenmarkierten Wortes angewendet werden. Um Wortableitung innerhalb eines Wortes zuzulassen, kann ein Wort zeichenweise rotiert werden, wobei der Wortanfang durch das Symbol  $B \notin V_G \cup \Sigma$  markiert wird.

Für ein Suffix  $a_i Y$  mit  $\{a_1, \dots, a_{n+m+1}\} = \Sigma \cup V_G \cup \{B\}$  am rechten Wortende eines Wortes  $w \in \text{Pre} \cdot V_{-p, S}^+ \cdot \text{Suf}$  wird durch Anwendung der Regel  $r_{12}^i$  das Symbol  $a_i$  durch das Markierungssymbol  $Y_i$  ersetzt. Nachfolgend wird das rechte Markierungssymbol  $X$  des Wortes  $w$  durch  $X_j a_j$  für jedes  $j \in \{1, \dots, n+m+1\}$  ersetzt. Durch die wiederholte Anwendung der Regeln  $r_{13}^i, r_{22}^i, r_{14}^{i-1}, r_{23}^{i-1}, r_{19}^{i-1}$  sowie  $r_{28}^{i-1}$  mit einem jeweils dekrementierten  $i$  in den alternierenden Komponenten eins und zwei entsteht u. a. das Wort  $X_1 a_i w' Y_1$  in der ersten Komponente. Die Rotation des Zeichens  $a_i$  vom rechten an das linke Wortende wird durch die sequentielle Anwendung der Splicing-Regeln  $r_{15}, r_{24}, r_{16}, r_{25}, r_{17}$  und  $r_{26}$  abgeschlossen.

Ein TVDH2-System realisiert die Wortableitung mithilfe einer Chomsky-Typ-0-Grammatik, ausgehend vom Startsymbol dieser Grammatik. Da dies für jede Typ-0-Grammatik gilt, besitzen TVDH2-Systeme universelle Berechnungsstärke im Sinne der CHURCHSchen These.

### 4.3 Strukturelle operationelle Semantik für TVDH-Systeme

Aufgrund Definition 4.2 kann für ein System  $\Gamma$ , ein Wort  $w \in L(\Gamma)$  und eine beliebige Komponente  $i \in \mathbb{N}$  eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  mit  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$  existieren, so dass für  $\mathcal{C}'_\Gamma$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma \mathcal{C}'_\Gamma$  entweder  $w \notin \mathcal{C}'_\Gamma^{i \bmod n+1}$  oder  $w \in \mathcal{C}'_\Gamma^{i \bmod n+1}$  gilt. Zwei TVDH-Systeme  $\Gamma$  und  $\Gamma'$  mit  $L(\Gamma) = L(\Gamma')$  können somit ein unterschiedliches zeitliches Verhalten aufweisen. Die strukturelle operationelle Semantik – kurz SOS – für TVDH-Systeme ermöglicht die formale Analyse dieser Systeme unter Beachtung aller erreichbaren Ableitungen des Systems. Sie wird durch Angabe der Syntax des Systems und der Definition von Konfigurationen sowie Transitionen zwischen diesen spezifiziert.

Für ein zeitgesteuertes verteiltes Splicing-System mit dynamischen Splicing-Regeln  $\Gamma = (V, \Sigma, A, R_1, \dots, R_n)$  vom Grad  $n$  mit  $A \cap \Sigma^+ = \emptyset$ , einer Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma = (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$  und der initialen Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} = (A, \emptyset, \dots, \emptyset)$  ist die strukturelle operationelle Semantik durch ein beschriftetes Transitionssystem mit der Aktionsmenge  $\text{Act} \subseteq \mathcal{P}(V^+) \times \mathcal{P}(V^+)$ , der Menge der Konfigurationen des Systems  $\Gamma$  und den Transitionen 4.1 gegeben.

Analog zur operationellen Semantik für TT-EH-Systeme aus Abschnitt 3.3 wird eine beschriftete Transition betrachtet und somit zwischen beobachtbarer und unbeobachtbarer Kommunikation unterschieden. In jeder Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  eines Systems  $\Gamma$  vom Grad  $n$  ist jeweils nur eine Komponente aktiv, d. h. für einen Zeitpunkt  $k \in \mathbb{N}$  gilt für jedes  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \neq (k \bmod n+1)$ , dass  $\mathcal{C}_\Gamma^j = \emptyset$ . Der beobachtbare Teil einer Transition von  $\mathcal{C}_\Gamma$  zu einer Konfiguration  $\mathcal{C}'_\Gamma$  ergibt sich damit aus allen Wörtern über dem Terminalalphabet  $\Sigma$  der zugrunde liegenden Grammatik, die durch Rekombination neu entstanden sind (Menge  $\zeta$ ) bzw. an keiner Rekombination beteiligt waren (Menge  $\xi$ ). Verallgemeinert ist eine Transition  $\mathcal{C}_\Gamma \xrightarrow{(\zeta, \xi)} \mathcal{C}'_\Gamma$  mit

$$\zeta = \left( \bigcup_{j=1}^n (\mathcal{C}'_\Gamma^{j \bmod n+1} \setminus \mathcal{C}_\Gamma^j) \right) \cap \Sigma^+ \quad \text{und} \quad \xi = \left( \bigcup_{j=1}^n (\mathcal{C}_\Gamma^j \setminus \mathcal{C}'_\Gamma^{j \bmod n+1}) \right) \cap \Sigma^+$$

gegeben, formalisiert durch Transitionenregel Trans mit  $K'_{i \bmod n+1} = \sigma_i(K_i)$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Eine Transition ist unbeobachtbar, falls  $\mathcal{C}_\Gamma \xrightarrow{(\emptyset, \emptyset)} \mathcal{C}'_\Gamma$  gilt.

Mithilfe dieser strukturellen operationellen Semantik wird, wie bereits in Abschnitt 3.3 für die verteilten kommunizierenden Splicing-Systeme, die formale Analyse der Verhaltensgleichheit entsprechender Systeme ermöglicht. Auf-

---

**Transitionsregeln 4.1** für die strukturelle operationelle Semantik von zeitgesteuerten verteilten Splicing-Systemen

---

$$\begin{array}{c}
\text{(Trans)} \\
\frac{\zeta = \left( \bigcup_{j=1}^n (K'_j \text{ mod } n+1 \setminus K_j) \right) \cap \Sigma^+ \quad \xi = \left( \bigcup_{j=1}^n (K_j \setminus K'_j \text{ mod } n+1) \right) \cap \Sigma^+}{(K_1, \dots, K_n) \xrightarrow{(\zeta, \xi)} (K'_1, \dots, K'_n)} \\
\text{(}\tau\text{)} \\
\frac{\mathcal{C}_\Gamma \xrightarrow{(\emptyset, \emptyset)} \mathcal{C}'_\Gamma}{\mathcal{C}_\Gamma \xrightarrow{\tau} \mathcal{C}'_\Gamma}
\end{array}$$

mit  $K'_i \text{ mod } n+1 = \sigma_i(K_i)$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$

---

grund der Typäquivalenz der Aktionsmengen in den operationellen Semantiken von TT-EH- sowie TVDH-Systemen kann beispielsweise die semantische Äquivalenz der Systeme  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$  aus Beispiel 3.1 und  $\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}$  aus Beispiel 4.1 unter Angabe einer starken Bisimulation zwischen den initialen Konfigurationen der beiden Systeme gezeigt werden. Ungeachtet zweier verschiedener Berechnungskonzepte, einerseits mittels mehrerer verteilter Reagenzgläser mit einer durch Filter gesteuerten Kommunikation und andererseits mittels eines Reagenzglases und einer Steuerung der jeweils aktiven Splicing-Regeln, wird somit ein Vergleich zweier Systeme ermöglicht. Wie schon in Abschnitt 3.3 für TT-EH-Systeme ausgeführt wurde, bietet eine Implementation in einem Rewrite-System die Möglichkeit eines abstrakten Interpreters und z. B. in dem MAUDE-System die Anwendung des integrierten LTL-Model-Checkers bezüglich einer in der Linearzeitlogik LTL spezifizierten Eigenschaft.

**Satz 4.2** ( $\Gamma_{2 \cdot n+1} \sim \Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}$ )

Für das TT-EH-System  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$  aus Beispiel 3.1 und das zeitgesteuerte verteilte Splicing-System  $\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}$  aus Beispiel 4.1 gilt  $\Gamma_{2 \cdot n+1} \sim \Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}$ , d. h. es existiert eine starke Bisimulation  $\mathcal{S}$ , so dass die beiden initialen Konfigurationen stark bisimilar sind.  $\diamond$

**Beweis 4.2 (Satz 4.2)**

Es gilt mit  $i \in \mathbb{N}^+$  und  $i \geq 2$  für  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$ :

$$\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \xrightarrow{\tau} {}_1 \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(1)} \xrightarrow{(\{n\}, \emptyset)} {}_2 \dots \xrightarrow{(\{n^{2 \cdot i-3}\}, \emptyset)} {}_i \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(i)}$$

sowie für  $\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}$  mit  $i \in \mathbb{N}^+$ ,  $i \geq 2$ :

$$\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(0)} \xrightarrow{\tau} {}_1 \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(1)} \xrightarrow{(\{n\}, \emptyset)} {}_2 \dots \xrightarrow{(\{n^{2 \cdot i-3}\}, \emptyset)} {}_i \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(i)}$$

und damit  $\mathcal{S} = \left\{ \left( \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(i)}, \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(i)} \right) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$ , so dass  $\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \sim_{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(0)}$ .  $\square$

**Satz 4.3** ( $\Gamma'_{2 \cdot n+1} \approx \Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}$ )

Die Systeme  $\Gamma'_{2 \cdot n+1}$  aus Beispiel 3.4 und  $\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}$  sind schwach bisimilar, d. h. es existiert eine schwache Bisimulation  $\mathcal{S}'$  mit  $\mathcal{C}_{\Gamma'_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \approx_{\mathcal{S}'} \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}}^{(0)}$ .  $\diamond$

**Beweis 4.3 (Satz 4.3)**

Da jede starke auch eine schwache Bisimulation beschreibt und  $\Gamma_{2 \cdot n+1} \approx \Gamma'_{2 \cdot n+1}$  gilt, existiert eine schwache Bisimulation  $\mathcal{S}'$ , so dass  $\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}} \approx \Gamma'_{2 \cdot n+1}$ .  $\square$

#### 4.4 Formale Verifikation von TVDH-Systemen

Im vorherigen Abschnitt wurde eine strukturelle operationelle Semantik für zeitgesteuerte verteilte Splicing-Systeme mit dynamischen Splicing-Regeln eingeführt. Diese ermöglicht einerseits die Studie von semantischen Äquivalenzen zwischen zwei Systemen durch Bisimulationsrelationen andererseits die Anwendung von Modellprüfungsverfahren bezüglich einer gegebenen Spezifikation. Um jedoch Systeme mit einem unendlichen Zustandsraum auf temporale Eigenschaften zu prüfen, ist eine Einschränkung dieser auf einen endlichen Teilzustandsraum notwendig.

Eine Verifikation von Sicherheitseigenschaften bzw. Invarianten, d. h. Eigenschaften, die für jeden Zustand eines Systems erfüllt sein müssen, ist nur dann durch einen Model-Checker möglich, wenn der vollständige Zustandsraum eines Systems endlich ist. In TVDH-Systemen ist eine Invariante beispielsweise die Nichtableitbarkeit eines bestimmten Wortes, d. h. die Fragestellung, ob ein bestimmtes Wort  $w$  in einem System  $\Gamma$  nicht erzeugt wird, also  $w \notin L(\Gamma)$  gilt.

**Satz 4.4 (Wortproblem in TVDH-Systemen)**

Das Wortproblem in TVDH-Systemen ohne Einschränkung der Splicing-Regelmengen ist nicht entscheidbar, jedoch semi-entscheidbar.  $\diamond$

**Beweis 4.4 (Satz 4.4)**

Aufgrund der Universalität von TVDH-Systemen vom Grad  $n$ ,  $n \geq 1$  und der Nicht-Entscheidbarkeit des Wortproblems für universelle berechenbare Typ-0-Sprachen ist das Wortproblem in TVDH-Systemen nicht entscheidbar, falls die Splicing-Regelmengen keiner Beschränkung unterliegen. Da die erzeugte



*Sprache rekursiv aufzählbar ist, existiert jedoch ein Semi-Entscheidungsverfahren.*

□

Das nachfolgend definierte Tableaubeweisverfahren beschreibt im Fall der Terminierung eine Methode zur Lösung des Wortproblems bzw. des Komplements des Wortproblems in endlichkomponentigen, endenmarkierten TVDH-Systemen. Aufgrund des Satzes 4.4 ist die Terminierung des Tableaubeweisverfahrens im Allgemeinen jedoch nicht gewährleistet.

Aus den beiden Definitionen 4.1 und 4.2 folgt für ein zeitgesteuertes verteiltes Splicing-System  $\Gamma = (V, \Sigma, A, R_1, \dots, R_n)$  vom Grad  $n, n \geq 1$  mit der initialen Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} = (A, \emptyset, \dots, \emptyset)$ , den Konfigurationen  $\mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa)}$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^\kappa \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa)}$ , definiert durch  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^0 \mathcal{C}_\Gamma^{(0)}, \mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^{\kappa+1} \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^\kappa \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa)} \vdash_\Gamma \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1)}$  für  $\kappa \in \mathbb{N}$ , und ein beliebiges Wort  $w \in V^+$

$$w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa), i \bmod n+1} \leftrightarrow \begin{cases} w \in A & \text{falls } \kappa = 0 \wedge i = 0 \\ w \in \sigma_i(\mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa-1), i}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die für die  $i$ te Komponente eines Systems erzeugten Regeln sind durch die Tableauregeln 4.1 gegeben. Ein Wort ist genau dann in der ersten Komponente der initialen Konfiguration, falls dieses Wort ein Axiom des Systems ist, gegeben durch die Regelmenge  $(a)$  für jedes Axiom  $a \in A$ . Hingegen gilt für jedes Wort  $w \in V^+$  in der Komponente  $i \bmod n+1, i \in \{1, \dots, n\}$  einer Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa)}, \kappa \geq 1$ , dass  $w$  durch Anwendung der Splicing-Operation  $\sigma_i$  unter Verwendung der Splicing-Regel  $r = u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4$  aus zwei Wörtern  $x, y \in V^+$  mit  $x = x_1 u_1 u_2 x_2$  und  $y = y_1 u_3 u_4 y_2$  in der  $(\kappa-1)$ ten Komponente

---

**Tableauregeln 4.1** für die  $i$ te Komponente eines gegebenen TVDH-Systems vom Grad  $n$

---

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} (r^1) \\ \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \frac{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(j), i} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(j), i}}{x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(j+1), i \bmod n+1}} \end{array} \quad \begin{array}{c} (a) \\ \frac{}{a \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0), 1}} \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} (\wedge\text{-ELIM}) \\ \frac{A \quad B}{A \wedge B} \end{array} \quad \begin{array}{c} (r^2) \\ \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \frac{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(j), i} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(j), i}}{y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(j+1), i \bmod n+1}} \end{array} \end{array}$$

für alle  $j \in \mathbb{N}$ , jedes  $a \in A$  sowie jede Splicing-Regel  $r = u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4 \in R_i$

---

entstanden ist und  $w = x_1u_1u_4y_2$  oder  $w = y_1u_3u_2x_2$  gilt. Die Tableauregeln  $(r^1)$  und  $(r^2)$  formalisieren das.

Für zwei Alphabete  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{S}$  von Präfix- und Suffixsymbolen ist die Einschränkung des Tableaubeweisverfahrens auf  $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ -markierte TVDH-Systeme mit den Sprachen  $\text{Pre} = \mathcal{P}^1$  und  $\text{Suf} = \mathcal{S}^1$  sowie dem Alphabet  $V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}} = V \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{S})$  durch Beschränkung des Typs der allquantifizierten Variablen  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*$  in den Regeln  $(r^1)$  und  $(r^2)$  für eine Splicing-Regel wie folgt gegeben. Mit  $\text{Pre}' = \text{Pre} \setminus \{\varepsilon\}$  und  $\text{Suf}' = \text{Suf} \setminus \{\varepsilon\}$  sowie  $\mathcal{PV} = \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*$  und  $\mathcal{SV} = V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}$  gilt für  $u_1$  bzw.  $u_3$  entweder  $x_1 = \varepsilon$  bzw.  $y_1 = \varepsilon$ , falls  $(\text{pre}(u_1) \cap \text{Pre}') \neq \emptyset$  resp.  $(\text{pre}(u_3) \cap \text{Pre}') \neq \emptyset$  gilt, oder  $x_1 \in \mathcal{PV}$  bzw.  $y_1 \in \mathcal{PV}$ , falls  $(\text{pre}(u_1) \cap \text{Pre}') = \emptyset$  bzw.  $(\text{pre}(u_3) \cap \text{Pre}') = \emptyset$  gilt. Weiterhin gilt  $x_2 = \varepsilon$  bzw.  $y_2 = \varepsilon$ , falls  $(\text{suf}(u_2) \cap \text{Suf}') \neq \emptyset$  resp.  $(\text{suf}(u_4) \cap \text{Suf}') \neq \emptyset$ , andernfalls  $x_2 \in \mathcal{SV}$  bzw.  $y_2 \in \mathcal{SV}$ .

**Beispiel 4.2 (Tableauregeln für  $r_{11}$  des Systems  $\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}$ )**

Für das System  $\Gamma_{2 \cdot n+1}^{\text{TVDH}}$  aus Beispiel 4.1 werden für die Regel  $r_{11}$  der ersten Komponente die Tableauregeln

$$\begin{aligned} (r_{11}^1) \\ \forall i \in \mathbb{N}. \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{wnY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^{(i),1} \wedge ZnnY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^{(i),1}}{wnnnY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^{(i+1),2}} \\ (r_{11}^2) \\ \forall i \in \mathbb{N}. \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{wnY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^{(i),1} \wedge ZnnY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^{(i),1}}{ZY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^{(i+1),2}} \end{aligned}$$

mit  $\mathcal{P} = \{X, Z, Z'\}$ ,  $V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}} = \{n\}$  und  $\mathcal{PV} = \mathcal{P}^1 \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^+$  erzeugt.  $\diamond$

In einem Tableaubeweis für ein System  $\Gamma$  vom Grad  $n$  und  $w \in V^+$  ist  $w \in \mathcal{C}_{\Gamma}^{(i),j}$  mit  $i \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, n\}$  eine atomare Aussage. Ein Knoten ist entweder eine atomare Aussage oder eine Konjunktion von zwei atomaren Aussagen. Ein Knoten ist ein ableitbarer Terminalknoten, falls eine Tableauregel  $(a)$  anwendbar ist, bzw. ein nicht ableitbarer Terminalknoten, falls keine weitere Tableauregel angewendet werden kann. Ein Knoten ist ein Nichtterminalknoten, falls mindestens eine der Tableauregeln verschieden von  $(a)$  angewendet werden kann, und ableitbar, wenn der Knoten entweder eine Konjunktion von zwei Aussagen  $A, B$  ist und sowohl  $A$  als auch  $B$  ableitbar sind oder für eine atomare Aussage ein ableitbarer Folgeknoten existiert.

Für ein Wort  $w \in \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}$  ist durch Anwendung der Tableauregeln zu prüfen, ob ein ableitbarer Knoten  $w \in \mathcal{C}_{\Gamma}^{(i),j}$  für mindestens ein  $i \in \mathbb{N}$  und ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  existiert. Dazu wird für jeden Nichtterminalknoten jede

mögliche Tableauregel angewendet und die Prüfung der Ableitbarkeit für jeden resultierenden Knoten fortgesetzt. Falls für ein  $i$  und ein  $j$  der Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$  ableitbar ist, folgt  $\exists i \in \mathbb{N}. \exists j \in \{1, \dots, n\}. \mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma^{(i)}. w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$ . Für den ableitbaren Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$  mit  $w \in \Sigma^+$  gilt somit  $w \in L(\Gamma)$ . Für den Fall, dass keine  $i$  und  $j$  existieren, so dass  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$  ein ableitbarer Knoten ist, gilt die Nichtableitbarkeit des Wortes  $w$ .

**Satz 4.5 (Vollständigkeit des Beweisverfahrens)**

Das Tableaubeweisverfahren für TVDH-Systeme ist vollständig, d. h. für ein gegebenes System  $\Gamma$  und jedes Wort  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$  mit  $i \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, n\}$  einer beliebigen Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma^{(i)}$  existiert ein ableitbarer Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$  im Beweisverfahren des Systems  $\Gamma$ .  $\diamond$

**Beweis 4.5 (Satz 4.5)**

Falls  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}$ , gilt  $w \in A$  und es folgt aufgrund der Definition eines ableitbaren Knotens unter Verwendung der Regel ( $w$ ) die Ableitbarkeit des Knotens  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}$  im Tableau. Angenommen, Satz 4.5 gilt für alle  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma^{(i)}$  für jeweils ein  $i \in \mathbb{N}$  und  $j \in \{1, \dots, n\}$ , so ist zu zeigen, dass für jedes Wort  $w' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),j \bmod n+1}$  der Knoten  $w' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),j \bmod n+1}$  im Tableau ableitbar ist. Nach den Definitionen 4.1 und 4.2 ergibt sich einerseits für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$  mit  $k \neq j$   $\mathcal{C}_\Gamma^{(i),k} = \emptyset$  andererseits für jedes  $w' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),j \bmod n+1}$   $w' \in \sigma_i(\mathcal{C}_\Gamma^{(i),j})$ . Nach Definition 2.15 existieren demzufolge zwei Wörter  $x$  und  $y$  in  $\mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$  und eine Splicing-Regel  $r$  in  $R_i$ , so dass  $(x, y) \vdash_r (w, z)$  oder  $(x, y) \vdash_r (z, w)$ . Da für jede Splicing-Regel  $r$  einer jeden Komponente die Tableauregeln ( $r^1$ ) bzw. ( $r^2$ ) existieren, ist für den Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),j \bmod n+1}$  im Tableau mindestens eine Regel anwendbar und beide Folgeknoten ableitbar und somit dieser Knoten nach Definition der Ableitbarkeit ebenfalls.  $\square$

**Satz 4.6 (Korrektheit des Beweisverfahrens)**

Das Tableaubeweisverfahren für TVDH-Systeme ist korrekt, d. h. für jeden im Tableau ableitbaren Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$  für beliebige  $i \in \mathbb{N}$  und  $j \in \{1, \dots, n\}$  gilt  $\exists \mathcal{C}'_\Gamma. \exists j \in \{1, \dots, n\}. \mathcal{C}'_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}'_\Gamma. w \in \mathcal{C}'_\Gamma^j$ .  $\diamond$

**Beweis 4.6 (Satz 4.6)**

Ein Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),j}$  ist genau dann ableitbar, wenn mit  $j = 1$  eine Regel ( $a$ ) mit  $a \in A$  anwendbar ist, woraus  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} = (A, \emptyset, \dots, \emptyset)$  mit  $w \in A$  folgt. Unter der Annahme, Satz 4.6 gilt für einen Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$ , ist zu zeigen, dass jede Anwendung einer Tableauregel einen zulässigen Rückwärtsschluss darstellt. Für einen ableitbaren Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),j \bmod n+1}$  gilt die Anwendbarkeit mindestens einer der Regeln

- $(r^1)$ , wodurch zwei ableitbare Knoten  $x \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$  und  $y \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$  mit  $\exists z.(x, y) \vdash_r (w, z)$  existieren und nach Definition 4.1 und der Annahme  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),j \bmod n+1}$  gilt
- oder  $(r^2)$ , weshalb zwei ableitbare Knoten  $x \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$  und  $y \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}$  mit  $\exists z.(x, y) \vdash_r (z, w)$  existieren und mittels Definition 4.1 und der Annahme  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),j \bmod n+1}$  gilt,

für ein  $r \in R_i$ .

□

Für den Nachweis der Nichtableitbarkeit einer Menge von Wörtern kann das Tableaubeweisverfahren analog zur Erweiterung aus Abschnitt 3.4 erweitert werden, so dass für eine Menge von Knoten parallel gezeigt werden kann, dass diese nicht ableitbar sind. Die Menge der Regeln des Beweisverfahrens wird deshalb um die Tableauregeln 4.2 ergänzt. Ein Knoten wird nun beschrieben durch  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}, w \in T$  bzw.  $(w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j} \wedge w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}), w_1 \in T_1, w_2 \in T_2$  mit den Typen  $T, T_1, T_2$  und  $i \in \mathbb{N}$  sowie  $j \in \{1, \dots, n\}$  und ist entweder ein Terminal- oder ein Nichtterminalknoten. Ein Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}, w \in T$  ist ein ableitbarer Terminalknoten, falls jedes Element des Knotens ableitbar ist bzw. ein nicht ableitbarer Terminalknoten, falls für kein Element des Knotens eine anwendbare Tableauregel existiert. Ein Knoten ist partiell ableitbar, falls eine disjunkte, jeweils nicht leere Zerlegung des Knotens in einen ableitbaren Terminal- bzw. Nichtterminalknoten und einen nicht ableitbaren Terminal- oder Nichtterminalknoten existiert. Eine Ableitung im Tableau ist die Anwendung aller möglichen Tableauregeln auf einen Nichtterminalknoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),j}, w \in T$ , wobei die Menge der resultierenden Folgeknoten wiederum zusammengefasst werden kann. Eine Menge von Wörtern ist genau dann nicht ableitbar, falls der entsprechende Knoten im Tableau nicht partiell ableitbar ist.

---

#### Tableauregeln 4.2

---

$$\begin{array}{c}
 (\wedge\text{-ELIM}_R) \\
 \frac{\delta_1(A \wedge B) \quad \pi_2(A \wedge B)}{A \wedge B}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 (\wedge\text{-ELIM}_L) \\
 \frac{\pi_1(A \wedge B) \quad \delta_2(A \wedge B)}{A \wedge B}
 \end{array}$$

mit  $A \wedge B = \{(a \wedge b) \mid a \in A, b \in B\}$ ,  $\pi_1(A \wedge B) = \{a \mid (a \wedge b) \in A \wedge B\}$ ,  $\pi_2(A \wedge B) = \{b \mid (a \wedge b) \in A \wedge B\}$  und  $\delta_1(A \wedge B) = \{a \mid \exists b \in B.((a \wedge b) \in A \wedge B. b \text{ ist ableitbar})\}$ ,  $\delta_2(A \wedge B) = \{b \mid \exists a \in A.((a \wedge b) \in A \wedge B. a \text{ ist ableitbar})\}$

---

**Korollar 4.1**

Satz 3.10 gilt analog auch für TVDH-Systeme, da der Beweis dieses Satzes unabhängig vom zugrunde liegenden verteilten Splicing-System ist.  $\diamond$

**Satz 4.7**

Für das TVDH-System  $\Gamma$  vom Grad 2, gegeben mit  $\Gamma = (\{A, C, D, Z, B, E, F, X, a, b\}, \{a, b\}, \{AaC, DaZ, BE, FbX\}, R_1, R_2)$  und

$$\begin{array}{l}
 R_1 : \quad \begin{array}{c} (r_1) \\ \frac{a \mid C}{D \mid aZ} \end{array} \quad \begin{array}{c} (r_2) \\ \frac{\varepsilon \mid E}{F \mid bX} \end{array} \quad \begin{array}{c} (r_3) \\ \frac{Aaa \mid C}{B \mid bbE} \end{array} \quad \begin{array}{c} (r_4) \\ \frac{\varepsilon \mid DaZ}{\varepsilon \mid DaZ} \end{array} \quad \begin{array}{c} (r_5) \\ \frac{FbX \mid \varepsilon}{FbX \mid \varepsilon} \end{array} \\
 \\
 R_2 : \quad \begin{array}{c} (r_6) \\ \frac{D \mid C}{\varepsilon \mid Z} \end{array} \quad \begin{array}{c} (r_7) \\ \frac{\varepsilon \mid DaZ}{\varepsilon \mid DaZ} \end{array} \quad \begin{array}{c} (r_8) \\ \frac{F \mid E}{\varepsilon \mid X} \end{array} \quad \begin{array}{c} (r_9) \\ \frac{FbX \mid \varepsilon}{FbX \mid \varepsilon} \end{array}
 \end{array}$$

gilt  $\neg \exists i \in \mathbb{N}. \mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma^{(i)}. AaabbE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),2}$ .  $\diamond$

**Beweis 4.7 (Satz 4.7)**

Der Beweis des Satzes 4.7 wird wie folgt geführt. Mittels [Tableau 1](#) wird zunächst bewiesen, dass für jede Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma^{(i)}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  außer  $\mathcal{C}_\Gamma^{(2)}$  das Wort  $AaaC$  kein Element der ersten Komponente der Konfiguration ist.

Tableau 1	
$AaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-3),2}, i \in \mathbb{N}^+, i \geq 3$	
$\frac{\left( DC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-3),2} \wedge AaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-3),2} \right), i \in \mathbb{N}^+, i \geq 3}{AaC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-2),1}, i \in \mathbb{N}^+, i \geq 3 \quad DaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-2),1}, i \in \mathbb{N}^+, i \geq 3}$	
$\frac{\left( AaC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-2),1} \wedge DaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-2),1} \right), i \in \mathbb{N}^+, i \geq 3}{Dc \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-1),2}, i \in \mathbb{N}^+, i \neq 2 \quad AaaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-1),2}, i \in \mathbb{N}^+, i \neq 2}$	
$\frac{\left( Dc \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-1),2} \wedge AaaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-1),2} \right), i \in \mathbb{N}^+, i \neq 2}{AaaC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1}, i \in \mathbb{N}, i \neq 2}$	

Analog zur Beweisführung in [Tableau 1](#) kann nun in [Tableau 2](#) gezeigt werden, dass keine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma^{(i)}$  mit  $i \in \mathbb{N}$  und  $i \neq 4$  existiert, so dass das Wort  $BbbE$  in der ersten Komponente vorkommt.

Tableau 2	
$\frac{BX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-5),2}, i \in \mathbb{N}^+, i \geq 5}{(FE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-5),2} \wedge BX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-5),2}), i \in \mathbb{N}^+, i \geq 5}$	
$\frac{BE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-4),1}, i \in \mathbb{N}^+, i \geq 5 \quad FbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-4),1}, i \in \mathbb{N}^+, i \geq 5}{(BE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-4),1} \wedge FbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-4),1}), i \in \mathbb{N}^+, i \geq 5}$	
$FE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-3),2}, i \in \mathbb{N}^+, i \geq 3, i \neq 4$	$BbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-3),2}, i \in \mathbb{N}^+, i \geq 3, i \neq 4$
$\frac{(FE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-3),2} \wedge BbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-3),2}), i \in \mathbb{N}^+, i \geq 3, i \neq 4}{\frac{BbE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-2),1}, i \in \mathbb{N}^+, i \geq 2, i \neq 4 \quad FbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-2),1}, i \in \mathbb{N}^+, i \geq 2, i \neq 4}{(BbE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-2),1} \wedge FbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-2),1}), i \in \mathbb{N}^+, i \geq 2, i \neq 4}}$	
$FE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-1),2}, i \in \mathbb{N}^+, i \neq 4$	$BbbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-1),2}, i \in \mathbb{N}^+, i \neq 4$
$\frac{(FE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-1),2} \wedge BbbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-1),2}), i \in \mathbb{N}^+, i \neq 4}{BbbE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1}, i \in \mathbb{N}, i \neq 4}$	

Da jedoch für jede beliebige Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma^{(i)}$  mit  $i \in \mathbb{N}^+$  das Wort  $AaabbE$  nur dann in der zweiten Komponente enthalten sein kann, falls in der vorherigen Konfiguration des Systems die Wörter  $AaaC$  bzw.  $BbbE$  in der ersten Komponente vorliegen (Tableau 3), dies jedoch aufgrund der soeben geführten Beweise nicht möglich ist, folgt die Nichtableitbarkeit des Wortes  $AaabbE$ , obwohl jeweils für  $AaaC$  und  $BbbE$  Ableitungen existieren.

Tableau 3	
$\frac{AaaC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-1),1}, i \in \mathbb{N}^+ \quad BbbE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-1),1}, i \in \mathbb{N}^+}{(AaaC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-1),1} \wedge BbbE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i-1),1}), i \in \mathbb{N}^+}$	
$AaabbE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),2}, i \in \mathbb{N}$	

□

## 4.5 Formale Verifikation grammatikbasierender TVDH-Systeme

Nachfolgend wird das in Abschnitt 4.4 eingeführte Tableaubeweisverfahren derart modifiziert, dass die Korrektheit und Vollständigkeit endenmarkierter, grammatikbasierender TVDH-Systeme bewiesen werden können. Diese Systeme sind in ihren Bestandteilen unterspezifiziert, d. h. die Alphabete sowie die Axiomen- und Splicing-Regelmengen der Komponenten sind abhängig von einer Chomsky-Grammatik, die die jeweils zu lösende Aufgabenstellung formal beschreibt. Ein Vertreter dieser Systeme ist das in Abschnitt 4.2 vorgestellte TVDH2-System mit universeller Berechnungsstärke.

Zum Nachweis der Korrektheit ist zu zeigen, dass die durch das TVDH-System  $\Gamma$  erzeugte Sprache ebenfalls durch die zugrunde liegende Grammatik  $G$  beschrieben wird. Für die Vollständigkeit muss geprüft werden, ob die durch die Grammatik beschriebene Sprache durch das entsprechende TVDH-System erzeugt werden kann. Es ergibt sich somit die wechselseitige Mengeneinklusioin der jeweiligen Sprachen, also  $L(\Gamma) \subseteq L(G)$  und  $L(G) \subseteq L(\Gamma)$ .

In Abschnitt 4.5.1 wird ein Beweisverfahren für grammatikbasierende TVDH-Systeme, basierend auf der Symbolrotation und der Wortableitung am Wortende definiert. Anschließend folgt der Vollständigkeitsbeweis dieser Systeme.

### 4.5.1 Korrektheit

Die Korrektheit eines auf einer Chomsky-Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  basierenden TVDH-Systems  $\Gamma$  kann bewiesen werden, indem gezeigt wird, dass jedes Wort in  $L(\Gamma)$  auch in der Sprache  $L(G)$  liegt. Aufgrund der Sprachdefinition  $L(\Gamma) = \Sigma^+ \cap \{w \in (\mathcal{L}_1 \cup \dots \cup \mathcal{L}_n) \mid \exists (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n). ((A, \emptyset, \dots, \emptyset) \vdash_{\Gamma}^* (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n))\}$  und der Definition 4.1 ist für jedes Wort über dem Terminalalphabet  $\Sigma$  in jeder Komponente  $i$  einer jeden Konfiguration  $\mathcal{C}_{\Gamma}^{(i), i \bmod n+1}$  zu zeigen, dass  $S \rightarrow_G^+ w$  gilt.

Unter Verwendung des Tableaubeweisverfahrens aus Abschnitt 4.4 wird für jeden Knoten  $w \in \mathcal{C}_{\Gamma}^{(i), i \bmod n+1}, w \in \Sigma^+$  die Ableitbarkeit durch ein Tableau untersucht. Für jeden ableitbaren Knoten ist anschließend einerseits zu prüfen, ob mindestens ein Terminalknoten die Startvariable  $S_G$  der Grammatik repräsentiert und andererseits jede Folge von Ableitungen in  $\Gamma$  einer Ableitung in  $G$  entspricht.

In Analogie zur Verifikation grammatikbasierender TT-EH-Systeme wird die partielle Funktion  $\text{norm} : \subseteq V^+ \rightarrow V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^+$  für ein das Wortende markierendes Symbol  $B \in V, B \notin (V_G \cup \Sigma)$ , die Prä- und Suffixalphabete  $\mathcal{P}, \mathcal{S}$  und eine Kodierungsfunktion  $\text{cod} : (V_G \cup \Sigma) \rightarrow V^+$  definiert mit

$$\text{norm}(a) = \begin{cases} \gamma'(w) & \text{für } w \in \varphi^{\circ}(\rho(a)) \wedge w \in \gamma(\{B\} \cdot (V_G \cup \Sigma)^+) \\ \perp & \text{falls kein derartiges } w \text{ existiert.} \end{cases}$$

Die Funktionen  $\rho, \gamma, \gamma'$  sind definiert mit

$$\rho(a) = \begin{cases} \rho(\text{suf}^{|a|-1}(a)) & \text{falls } \text{pre}^1(a) \in \mathcal{P} \\ \rho(\text{pre}^{|a|-1}(a)) & \text{falls } \text{suf}^1(a) \in \mathcal{S} \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\gamma(w) = \begin{cases} \{w, \text{cod}(w)\} & \text{falls } w \in (V_G \cup \Sigma \cup \{B\}) \\ \gamma(w_1) \cdot \gamma(w_2) & \text{falls } w = w_1 \cdot w_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \gamma'(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \gamma'(a \cdot w) &= \begin{cases} a \cdot \gamma'(w) & \text{falls } a \in (V_G \cup \Sigma) \\ \gamma'(w) & \text{falls } a = B \\ b \cdot \gamma'(w) & \text{falls } a = \text{cod}(b). \end{cases} \end{aligned}$$

Für einen ableitbaren Knoten  $w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i), i \bmod n+1}$ ,  $w_1 \in \Sigma^+$  ist eine Ableitung *korrekt*, falls ein Terminalknoten  $k_m$ ,  $m \geq 2$  mit der anwendbaren Tableauregel ( $S_G$ ), die die Startvariable der Grammatik repräsentiert, existiert, und auf dem Pfad von  $k_1$  zu  $k_m$ ,  $m \in \mathbb{N}^+$ ,  $m \geq 2$  Knoten  $k_j : w_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(c_j), c_j \bmod n+1}$ ,  $j \in \{2, \dots, m-1\}$ ,  $c_j \in \mathbb{N}$  existieren, so dass  $S_G \rightarrow_G^* \dots \rightarrow_G^* \text{norm}(w_j) \rightarrow_G^* \dots \rightarrow_G^* w_1$  gilt.

Die Korrektheit eines gegebenen endenmarkierten, grammatikbasierenden TVDH-Systems kann gezeigt werden, indem für jedes  $w \in \Sigma^+$  für jede Konfiguration durch Anwendung der Tableauregeln geprüft wird, ob der Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i), i \bmod n+1}$ ,  $w \in \Sigma^+$  ableitbar ist und mindestens eine korrekte Ableitung besitzt. Für einen ableitbaren Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(j), j \bmod n+1}$  mit einem  $w$  über dem Terminalalphabet der Grammatik, der keine korrekte Ableitung besitzt, beschreibt das entsprechende Tableau einen Gegenbeweis zur Korrektheitsannahme, da  $w \in L(\Gamma)$ , jedoch nicht  $w \in L(G)$  gilt.

#### Satz 4.8

Ein endenmarkiertes, grammatikbasierendes TVDH-System  $\Gamma$  ist korrekt, falls für jede Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma^{(i)}$  des Systems mit  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^* \mathcal{C}_\Gamma^{(i)}$  und jedes Wort  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i), i \bmod n+1}$  über dem Terminalalphabet eine korrekte Ableitung im Tableaubeweisverfahren existiert.  $\diamond$

#### Beweis 4.8 (Satz 4.8)

Aufgrund der Vollständigkeit des Tableaubeweisverfahrens aus Satz 4.5 existiert kein nicht ableitbarer Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i), i \bmod n+1}$  für ein  $i \in \mathbb{N}$  und ein  $w \in \Sigma^+$  mit  $w \in L(\Gamma)$ . Da für jeden Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i), i \bmod n+1}$  mit einer korrekten Ableitung nach Definition  $S_G \rightarrow_G^+ w$  folgt, gilt  $w \in L(G)$ .  $\square$

Unter Verwendung des Tableaubeweisverfahrens kann die Korrektheit des universellen, endenmarkierten, grammatikbasierenden TVDH-Systems aus Definition 4.3 bewiesen werden.

#### Hilfssatz 4.1

Für jedes grammatikbasierende TVDH2-System  $\Gamma = (V, \Sigma, A, R_1, R_2)$  gilt für jedes  $a \in (A \setminus \{X S_G B Y\}) \forall i \in \mathbb{N}. \mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^i \mathcal{C}_\Gamma^{(i)}. a \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i), i \bmod 2+1}$ .  $\diamond$



**Beweis 4.9 (Hilfssatz 4.1)**

Es gilt  $\mathcal{C}_\Gamma^{(0)} = (A, \emptyset)$  und somit, dass jedes Axiom in der ersten Komponente der initialen Konfiguration ist. Für eine beliebige Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma^{(i)}$  mit  $i \in \mathbb{N}, i \bmod 2 = 0$  sowie  $a \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1}, a \in (A \setminus \{XS_GBY\})$  folgt für jedes  $\mathcal{C}_\Gamma^{(i+1)}$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma^{(i)} \vdash_\Gamma \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1)}$  aufgrund der Regel  $r_{111}^a$   $a \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),2}$ . Für  $\mathcal{C}_\Gamma^{(i)}$  mit  $i \in \mathbb{N}, i \bmod 2 = 1$  sowie  $a \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),2}$  folgt für jedes  $\mathcal{C}_\Gamma^{(i+1)}$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma^{(i)} \vdash_\Gamma \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1)}$  aufgrund der Regel  $r_{210}^a$   $a \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),1}$ . □

**Satz 4.9 (Korrektheit TVDH2)**

Für jede Chomsky-Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  ist das auf  $G$  basierende TVDH2-System  $\Gamma$  korrekt, d. h. es gilt  $L(\Gamma) \subseteq L(G)$ . ◇

**Beweis 4.10 (Satz 4.9)**

Für eine beliebige Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  mit  $n = |V_G| + |\Sigma| + 1$ ,  $j \in \{1, \dots, n-1\}, i \in \{1, \dots, n\}$  und  $\mathcal{P} = \{X, Z, Z', X_i, X'_j, X''_j, X', X'', C_1, D_2\}, \mathcal{S} = \{Y, Z, Z', Y_i, Y'_j, Y''_j, Y', Y'', C_2, D_1\}, \mathbf{a} = (V_G \cup \Sigma \cup \{B\})$ , den zwei formalen Sprachen  $\text{Pre} = \mathcal{P}^1, \text{Suf} = \mathcal{S}^1$  sowie dem Alphabet  $V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}} = V_G \cup \Sigma \cup \{B\}$  werden die im Anhang E aufgeführten Tableauregeln für jedes  $\kappa \in \mathbb{N}$  erzeugt.

Der Tableaubeweis ist ebenfalls im Anhang E gegeben. Infolge des Hilfssatzes 4.1 und der Tatsache, dass, ausgehend vom Axiom  $XS_GBY$  an jeder Ableitung eines ableitbaren Knotens nur Axiome der Menge  $A \setminus \{XS_GBY\}$  beteiligt sind, ist die Tiefe einer Ableitung unbedeutend, weswegen diese im Tableaubeweis weggelassen wird. Mittels [Tableau 32](#) wird gezeigt, dass jedes Wort  $w \in \Sigma^+$  der ersten Komponente nur durch ein Wort  $X''wBY''$  der ersten Komponente abgeleitet werden kann, und es gilt  $\text{norm}(w) = \text{norm}(X''wBY'')$  nach Definition. Aufgrund [Tableau 30](#) und [Tableau 29](#) gilt weiterhin die Ableitung von  $X''wY''$  aus  $X_1wY_1$  sowie  $\text{norm}(X''wY'') = \text{norm}(X_1wY_1)$  für jedes  $w \in (V_G \cup \Sigma \cup \{B\})^+, |w|_B = 1$ . Jedes Wort  $X_ja_iwY_j$  in der ersten Komponente mit  $i, j \in \{1, \dots, n\}, j < i$  wird aus  $X_{j+1}a_iwY_{j+1}$  in der ersten Komponente durch die in [Tableau 24](#), [Tableau 23](#) und [Tableau 22](#) angegebene Sequenz abgeleitet. Es gilt trivialerweise  $\text{norm}(X_ja_iwY_j) = \text{norm}(X_{j+1}a_iwY_{j+1})$ . Jedes Wort  $X_i a_i w Y_i$  der ersten Komponente folgt nach [Tableau 27](#) und [Tableau 26](#) entweder aus

- $Xw'uY$  in der ersten Komponente, falls  $w = w'v$  und  $(u, va_i) \in P_G$ , wodurch  $\text{norm}(Xw'uY) \rightarrow_G \text{norm}(X_i a_i w'v Y_i)$  gilt, oder
- $Xwa_iuY$  in der ersten Komponente, falls  $(u, \varepsilon) \in P_G$ , wobei die Forderung  $\text{norm}(Xwa_iuY) \rightarrow_G (X_i a_i w Y_i)$  erfüllt ist, oder
- $Xwa_iY$  in der ersten Komponente des Systems mit  $\text{norm}(Xwa_iY) = \text{norm}(X_i a_i w Y_i)$ .

Da nach [Tableau 25](#) jedes vorkommende Wort mit Präfix  $X$  und Suffix  $Y$  entweder das Axiom  $XS_GBY$  oder ein aus  $X''wY''$  der ersten Komponente abgeleitetes Wort beschreibt und alle anderen Teiltableaus ([Tableau 21–Tableau 1](#)) keine ableitbaren Knoten beschreiben, gilt die Korrektheit von  $\Gamma$  für jede Grammatik  $G$ , also  $L(\Gamma) \subseteq L(G)$ . □

### 4.5.2 Vollständigkeit

Zum Nachweis der Vollständigkeit eines zeitgesteuerten verteilten Splicing-Systems  $\Gamma$  mit dynamischen Splicing-Regeln muss gezeigt werden, dass jedes Wort einer durch eine beliebige Grammatik  $G$  beschriebenen Sprache durch das System  $\Gamma$  erzeugt wird, formal  $L(G) \subseteq L(\Gamma)$ . Zunächst wird durch die [Hilfssätze 4.2](#) und [4.3](#) einerseits die Rotation eines Symbols andererseits die Ableitung gemäß einer Grammatikregel formalisiert und bewiesen. Die Korrektheit der TVDH2-Systeme wird im [Beweis 4.14](#) gezeigt.

#### Hilfssatz 4.2

Für eine Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  und ein auf  $G$  basierendes TVDH2-System  $\Gamma$  folgt  $\forall \mathbf{a} \in (V_G \cup \Sigma \cup \{B\})^+ \cdot \forall w \in (V_G \cup \Sigma \cup \{B\})^+ \cdot \exists \mathcal{C}'_\Gamma \cdot \mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}'_\Gamma \cdot (XwaY \in \mathcal{C}'_\Gamma \rightarrow XawY \in \mathcal{C}_\Gamma)$ . ◇

#### Beweis 4.11 (Hilfssatz 4.2)

Für  $\{a_1, \dots, a_{n+m+1}\} = (\Sigma \cup V_G \cup \{B\})$  und die Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma$  gilt für jedes  $i \in \{1, \dots, n+m+1\}$  aufgrund der Regelsequenz  $r_{12}^i, r_{21}^i$  ( $Xwa_iY \in \mathcal{C}'_\Gamma \rightarrow \exists \mathcal{C}'_\Gamma \cdot \mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}'_\Gamma \cdot X_i a_i w Y_i \in \mathcal{C}'_\Gamma$ ). Infolgedessen gilt für jedes  $k \in \{2, \dots, n+m+1\}$  mithilfe  $r_{13}^k, r_{22}^k, r_{14}^{k-1}, r_{23}^{k-1}, r_{19}^{k-1}$  und  $r_{28}^{k-1}$ , dass aus  $X_k a_i w Y_k \in \mathcal{C}'_\Gamma$  die Existenz einer Konfiguration  $\mathcal{C}''_\Gamma$  mit  $X_{k-1} a_i w Y_{k-1} \in \mathcal{C}''_\Gamma$  folgt. Abschließend gilt mit der Sequenz von Splicing-Regeln  $r_{15}, r_{24}, r_{16}, r_{25}, r_{17}$  sowie  $r_{26}$  ( $X_1 a_i w Y_1 \in \mathcal{C}''_\Gamma \rightarrow \exists \mathcal{C}'''_\Gamma \cdot \mathcal{C}''_\Gamma \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}'''_\Gamma \cdot X a_i w Y \in \mathcal{C}'''_\Gamma$ ). □

#### Hilfssatz 4.3

Für eine Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  und ein auf  $G$  basierendes TVDH2-System  $\Gamma$  folgt, dass für alle Regeln  $(u, v) \in P_G$  und für alle  $w_1, w_2 \in V_G \cup \Sigma^*$  ( $XBw_1uw_2Y \in \mathcal{C}'_\Gamma \rightarrow \exists \mathcal{C}'_\Gamma \cdot \mathcal{C}_\Gamma \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}'_\Gamma \cdot XBw_1vw_2Y \in \mathcal{C}'_\Gamma$ ). ◇

#### Beweis 4.12 (Hilfssatz 4.3)

Für  $XBw_1uw_2Y \in \mathcal{C}'_\Gamma$  mit  $w_1, w_2 \in (V_G \cup \Sigma)^*$ ,  $u \in (V_G \cup \Sigma)^* \cdot V_G \cdot (V_G \cup \Sigma)^*$ ,  $\{a_1, \dots, a_{n+m+1}\} = (V_G \cup \Sigma \cup \{B\})$  kann zunächst jedes Wort  $w_2$  symbolweise vom rechten Wortende an den linken Wortanfang rotiert werden. Es folgt die Existenz einer Folgekonfiguration  $\mathcal{C}'_\Gamma$  mit  $Xw_2Bw_1uY \in \mathcal{C}'_\Gamma$ . Für  $(u, va_i) \in P_G$  bzw.  $(u, \varepsilon) \in P_G$  mit  $w_1 = w'_1 a_i$  existiert durch Anwendung der Regel

$r_{11}^{(u,va_i)}$  bzw.  $r_{11'}^{i,(u,\varepsilon)}$  und dem Abschluss der Rotation des Symbols  $a_i$  analog zu Beweis 4.11 eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma''$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma' \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}_\Gamma''$  mit  $Xa_iw_2Bw_1vY \in \mathcal{C}_\Gamma''^1$  bzw.  $Xa_iw_2Bw_1'Y \in \mathcal{C}_\Gamma''^1$ . Die Rotation von  $v, w_1$  und des Symbols  $B$  beweist den Hilfssatz 4.3. □

#### Hilfssatz 4.4

Für eine Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  und ein auf  $G$  basierendes TVDH2-System  $\Gamma$  gilt  $\forall w \in \Sigma^+. (XBwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \rightarrow \exists \mathcal{C}_\Gamma'. \mathcal{C}_\Gamma' \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}_\Gamma'. w \in \mathcal{C}_\Gamma^1)$ . ◇

#### Beweis 4.13 (Hilfssatz 4.4)

Nach Hilfssatz 4.2 kann jedes Symbol vom rechten Wortende an den linken Wortanfang rotiert werden, weswegen eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma'$  mit  $X''wBY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^1$  existiert. Durch Anwendung der Splicing-Regeln  $r_{18}$  und  $r_{27}$  werden die Symbole  $X''$ ,  $B$  und  $Y''$  entfernt und es folgt die Existenz einer Konfiguration  $\mathcal{C}_\Gamma''$  mit  $\mathcal{C}_\Gamma' \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}_\Gamma''$  und  $w \in \mathcal{C}_\Gamma''^1$ . □

#### Satz 4.10 (Vollständigkeit TVDH2)

Für jede Chomsky-Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  und ein auf  $G$  basierendes TVDH2-System  $\Gamma$  gilt  $\forall w \in L(G). \exists \mathcal{C}_\Gamma'. \exists i \in \{1, \dots, n\}. \mathcal{C}_\Gamma^{(0)} \vdash_\Gamma^+ \mathcal{C}_\Gamma'. w \in \mathcal{C}_\Gamma^i$ , d. h.  $L(G) \subseteq L(\Gamma)$ . ◇

#### Beweis 4.14 (Satz 4.10)

Aufgrund der Rotation des Symbols  $B$  an den linken Wortanfang über die Sequenz von Splicing-Regeln aus Beweis 4.11 und unter Beachtung der drei Hilfssätze 4.2, 4.3 sowie 4.4 gilt Satz 4.10. □



## Splicing-Membran-Systeme

Im Gegensatz zu den in den Kapiteln 3 und 4 eingeführten Systemen basieren die extendierten Splicing-Membran-Systeme bzw. extendierten Splicing-P-Systeme auf dem Konzept des Rechnens mit Molekülen *in vivo*, d. h. in der lebenden Zelle. Ein extendiertes Splicing-Membran-System (ESP-System) besteht aus einer Menge hierarchisch angeordneter Membranen in einer Hauptmembran, der Skin-Membran, wobei jede Membran bestimmte Bereiche voneinander abgrenzt. Ein ESP-System beschreibt dabei die Abstraktion des Aufbaus und der biochemischen Abläufe in einer lebenden Zelle. Die innere Struktur von Zellteilen wird durch Wörter als Objekte einer Membran, die biochemischen Prozesse in einer Membran durch die Entwicklungsregeln eines ESP-Systems abstrahiert.

In Abschnitt 5.1 wird die Syntax und Semantik dieser Systeme eingeführt und nachfolgend in Abschnitt 5.2 ein extendiertes Splicing-Membran-System mit universeller Berechnungsstärke aus [Pău02] beschrieben. Anschließend wird die strukturelle operationelle Semantik von Splicing-Membran-Systemen definiert und in Abschnitt 5.4 ein Verfahren zur Lösung des Wortproblems in diesen Systemen vorgestellt. Entsprechend Abschnitt 3.4 und 4.4 wird dieses Verfahren zur formalen Verifikation universeller, grammatikbasierender Splicing-Membran-Systeme verwendet.

### 5.1 Systembeschreibung

Ein extendiertes Splicing-Membran-System vom Grad  $n, n \geq 1$  ist gegeben durch ein  $(2 \cdot n + 2)$ -Tupel  $\Pi = (V, \Sigma, \mu, M_1, \dots, M_n, R_1, \dots, R_n)$  mit dem Alphabet  $V$ , dem Terminalalphabet  $\Sigma \subseteq V$ , der der Definition 2.17 entsprechenden Membranstruktur  $\mu$  mit  $n$ , paarweise verschieden beschrifteten Membranen, den Axiomenmengen  $M_i \subseteq V^+$  und den Entwicklungsregelmengen  $R_i$  für die Membran  $i$ , wobei ein Element  $(r, (\text{tar}_1, \text{tar}_2))$  einer Entwicklungsregelmenge aus einer Splicing-Regel  $r$  (Definition 2.12) und zwei Zielinforma-

tionen  $\text{tar}_1, \text{tar}_2 \in \{\text{here}, \text{out}, \text{in}_L\}$  mit  $L \in \{1, \dots, n\}$  besteht. Im Folgenden wird o. B. d. A. fortlaufend jede der  $n$  Membranen durch eine natürliche Zahl aus  $\{1, \dots, n\}$  beschriftet; die Skin-Membran mit 1. Aufgrund der Struktur einer Entwicklungsregel mit Zielinformationen wird die Splicing-Operation für ESP-Systeme, wie in Definition 5.1 angegeben, modifiziert.

**Definition 5.1 (Splicing-Operation  $\varsigma$ )**

Sei  $V$  ein Alphabet,  $\mathcal{L} \subseteq V^+$  eine Sprache und  $R \subset (V^* \cdot \{\#\} \cdot V^* \cdot \{\$\} \cdot V^* \cdot \{\#\} \cdot V^*) \times (\text{Tar} \times \text{Tar})$  mit  $\text{Tar} = \{\text{here}, \text{in}_L, \text{out} \mid L \in \mathbb{N}\}$  und  $\#, \$ \notin V$  eine endliche Menge von Entwicklungsregeln. Die Splicing-Operation  $\varsigma$  ist definiert mit

$$\begin{aligned} \varsigma(\mathcal{L}, R) = & \{(x_1 u_1 u_4 y_2, \text{tar}_1) \mid \exists (u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R. \\ & \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\ & (x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{L} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{L})\} \\ \cup & \{(y_1 u_3 u_2 x_2, \text{tar}_2) \mid \exists (u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R. \\ & \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\ & (x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{L} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{L})\} \end{aligned}$$

◇

Ein Ableitungsschritt eines ESP-Systems besteht aus der nebenläufigen Anwendung der Splicing-Operationen  $\varsigma(\mathcal{L}_i, R_i)$  für jede Membran  $i$  mit den Objekten  $\mathcal{L}_i \subseteq V^+$  und der anschließenden Verteilung der resultierenden Wörter entsprechend der jeweiligen Zielinformation. Für ein Element  $(w, \text{tar})$  in  $\varsigma(\mathcal{L}_i, R_i)$  gilt mit  $\text{tar} = \text{here}$ , dass das Wort  $w$  in der Membran  $i$  verbleibt. Für  $\text{tar} = \text{in}_L$  wird  $w$  in die Membran  $L$  kommuniziert, falls in der Baumdarstellung der Membranstruktur ein Tochterknoten der Membran  $i$  mit Label  $L$  existiert, bzw. aus dem System entfernt, falls diese nicht existiert. Mit  $\text{tar} = \text{out}$  wird  $w$  in die umgebende Membran kommuniziert. Im Fall der Skin-Membran, also für  $i = 1$ , verlässt das Wort  $w$  das System. Wörter, die bereits vor Ausführung eines Ableitungsschrittes in einer Membran vorkommen, verbleiben währenddessen in der entsprechenden Membran. Falls für ein durch die Regel  $r$  erzeugtes Wort  $w$  mit der Zielinformation  $\text{tar}$  ebenfalls eine Regel  $r'$  mit  $\text{tar}'$  und  $\text{tar} \neq \text{tar}'$  existiert, wird das Wort  $w$  sowohl in die Membran  $\text{tar}$  als auch in die Membran  $\text{tar}'$  kommuniziert. Bezugnehmend auf [VM05] ergibt sich somit für die dort angegebene Klassifikation der Fall 2d, d. h. eine Kopie eines Wortes (Moleküls) verbleibt in einer Membran, falls  $w$  bereits in der Membran präsent ist oder eine Regel  $r'$  das Molekül  $w$  mit der Zielinformation  $\text{here}$  erzeugt.

Eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Pi$  eines ESP-Systems  $\Pi$  mit  $n$  Membranen wird durch ein  $(n + 1)$ -Tupel  $(\mathcal{E}, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$  beschrieben, wobei  $\mathcal{L}_i, \mathcal{E} \subseteq V^+$  die Inhalte

der Membranen  $i$  bzw. der Umgebung des Systems sind. Die initiale Konfiguration ist gegeben mit  $\mathcal{C}_\Pi^{(0)} = (\emptyset, M_1, \dots, M_n)$ . Unter Verwendung der Definition einer Konfiguration kann nun ein Ableitungsschritt formal, wie in Definition 5.2, bestimmt werden. Die durch ein ESP-System erzeugte Sprache ergibt sich aus allen Wörtern über dem Terminalalphabet, die das System verlassen (Definition 5.3).

**Definition 5.2 (Ableitungsschritt)**

Sei  $\Pi$  ein ESP-System. Die Relation  $(\mathcal{E}, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) \vdash_\Pi (\mathcal{E}', \mathcal{L}'_1, \dots, \mathcal{L}'_n)$  zwischen zwei Konfigurationen ist ein Ableitungsschritt, definiert mit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' &= \{w \mid (w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{L}_1, R_1)\} \\ \mathcal{L}'_i &= \mathcal{L}_i \cup \{w \mid (w, \text{here}) \in \varsigma(\mathcal{L}_i, R_i)\} \cup \\ &\quad \{w \mid (i \geq 2) \wedge \exists (j, i) \in \mu. ((w, \text{in}_i) \in \varsigma(\mathcal{L}_j, R_j))\} \cup \\ &\quad \bigcup_{j \in \{k \mid (i, k) \in \mu\}} \{w \mid (w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{L}_j, R_j)\}. \end{aligned} \quad \diamond$$

**Definition 5.3 (Sprache eines ESP-Systems)**

Sei  $\Pi$  ein ESP-System mit  $n$  Membranen, so erzeugt  $\Pi$  die Sprache  $L(\Pi) = \Sigma^+ \cap \{w \in \mathcal{E} \mid \exists (\mathcal{E}, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n). (\emptyset, M_1, \dots, M_n) \vdash_\Pi^* (\mathcal{E}, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)\}$ .  $\diamond$

Ein ESP-System ist *endlichkomponentig*, wenn die Alphabete  $V$  und  $\Sigma$  sowie für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$  die Mengen  $M_i$  und  $R_i$  endlich sind. Es ist  *$\mathcal{P}, \mathcal{S}$ -markiert* bzw. *endenmarkiert*, falls für zwei Alphabete  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{S}$  die Sprachen  $M_i$   $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ -markiert sind und die Splicing-Regel einer jeden Entwicklungsregel aus  $\bigcup_{i=1}^n R_i$  der Restriktion der Splicing-Regeln von endenmarkierten EH-Systemen unterliegt.

Sowohl die verteilten kommunizierenden Splicing-Systeme als auch die zeitgesteuerten verteilten Splicing-Systeme sind geschlossen, d. h. es existiert keine Interaktion mit ihrer Umgebung, da die Berechnungsergebnisse jeweils nur in den Komponenten der Systeme vorliegen. Indes sind die soeben definierten ESP-Systeme offen. Ein entsprechendes *geschlossenes* Splicing-Membran-System  $\hat{\Pi}$ , notiert mit  $\hat{\Pi}$ , ist wie in Definition 5.4 definiert. Die Skin-Membran besitzt folglich keine Entwicklungsregeln sowie keine initialen Objekte.

**Definition 5.4 (geschlossenes Splicing-Membran-System)**

Ein *geschlossenes ESP-System*  $\hat{\Pi} = (V, \Sigma, \mu, M_1, \dots, M_n, R_1, \dots, R_n)$  ist gegeben mit  $M_1 = R_1 = \emptyset$ . Eine entsprechende Konfiguration besteht somit aus einem  $n$ -Tupel  $\mathcal{C}_{\hat{\Pi}} = (\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n)$ , initial  $\mathcal{C}_{\hat{\Pi}}^{(0)} = (M_1, \dots, M_n)$ . Die Relation  $\vdash_{\hat{\Pi}}$  zwischen zwei Konfigurationen  $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n) \vdash_{\hat{\Pi}} (\mathcal{L}'_1, \dots, \mathcal{L}'_n)$  ist ein Ableitungsschritt und definiert mit  $\mathcal{L}'_i = \mathcal{L}_i \cup \{w \mid (w, \text{here}) \in \varsigma(\mathcal{L}_i, R_i)\} \cup \bigcup_{j \in \{k \mid (i, k) \in \mu\}} \{w \mid (w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{L}_j, R_j)\} \cup \{w \mid (i \geq 2) \wedge ((w, \text{in}_i) \in \varsigma(\mathcal{L}_j, R_j)) \wedge$

$(j, i) \in \mu\}$ . Die durch ein geschlossenes System erzeugte Sprache besteht aus allen  $w$ , für die eine Konfiguration  $(\mathcal{L}'_1, \dots, \mathcal{L}'_n)$  mit  $w \in \mathcal{L}'_1$  existiert.  $\diamond$

**Satz 5.1**

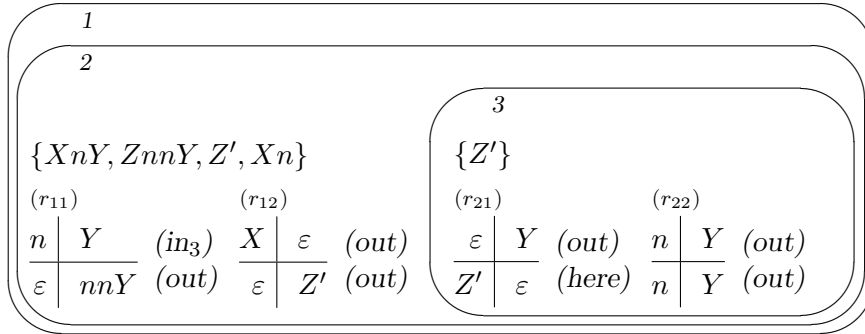
Für jedes offene ESP-System  $\Pi$  existiert ein geschlossenes ESP-System  $\widehat{\Pi}'$  mit  $L(\Pi) = L(\widehat{\Pi}')$ .  $\diamond$

**Beweis 5.1 (Satz 5.1)**

Für  $\Pi = (V, \Sigma, \mu, M_1, \dots, M_n, R_1, \dots, R_n)$  ergibt sich das geschlossene ESP-System  $\widehat{\Pi}'$  durch Erweiterung mit  $M'_{i+1} = M_i, R'_{i+1} = R_i$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ , so dass  $\widehat{\Pi}' = (V, \Sigma, [{}_1\mu']_1, M'_1, M'_2, \dots, M'_{n+1}, R'_1, R'_2, \dots, R'_{n+1})$  mit  $M'_1 = R'_1 = \emptyset$ , wobei  $\mu'$  durch elementweises Inkrementieren der Membrannummerierung aus  $\mu$  entstanden ist.  $\square$

**Beispiel 5.1 ( $\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}$ )**

Das System  $\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1} = (\{X, Y, Z', Z, n\}, \{n\}, [{}_1[{}_2[{}_3]_3]_2]_1, \emptyset, M_2, M_3, \emptyset, R_2, R_3)$  mit  $M_2 = \{XnY, ZnnY, Z', Xn\}$  und  $M_3 = \{Z'\}$  bzw.  $R_2 = \{r_{11}, r_{12}\}$  und  $R_3 = \{r_{21}, r_{22}\}$  wird durch das folgende VENN-Diagramm beschrieben.



**Satz 5.2 ( $L(\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1})$ )**

Das geschlossene extendierte Splicing-Membran-System aus Beispiel 5.1 erzeugt die Sprache  $L(\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}) = \{w \mid w \in \{n\}^+ \wedge |w| \bmod 2 = 1\}$ .  $\diamond$

**Beweis 5.2 (Satz 5.2)**

Der Beweis wird induktiv über die Konfigurationen des Systems geführt.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(0)} &= (\emptyset, \{XnY, ZnnY, Z', Xn\}, \{Z'\}) \\
\mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(1)} &= (\{ZY, XZ', nY, n\}, \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(0),2}, \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(0),3} \cup \{Zn^4Y, Xn^3Y\}) \\
\mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(2)} &= (\mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(1),1}, \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(1),2} \cup \{Zn^4, Xn^3, Zn^4Y, Xn^3Y\}, \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(1),3} \cup \{Z'Y\}) \\
\mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(3)} &= (\mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(2),1} \cup \{ZnnY, XnY, n^3, n^3Y\}, \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(2),2} \cup \{Z'Y\}, \\
&\quad \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(2),3} \cup \{Xn^5Y, Zn^6Y\})
\end{aligned}$$



$$\mathcal{C}_{\hat{\Pi}_{2,n+1}}^{(4)} = \left( \mathcal{C}_{\hat{\Pi}_{2,n+1}}^{(3),1} \cup \{XZ'Y\}, \mathcal{C}_{\hat{\Pi}_{2,n+1}}^{(3),2} \cup \{Xn^5Y, Xn^5, Zn^6Y, Zn^6\}, \mathcal{C}_{\hat{\Pi}_{2,n+1}}^{(3),3} \right)$$

und für alle  $i \in \mathbb{N}^+$  mit  $i \geq 5, i \bmod 2 = 1$ :

$$\mathcal{C}_{\hat{\Pi}_{2,n+1}}^{(i)} = \left( \mathcal{C}_{\hat{\Pi}_{2,n+1}}^{(i-1),1} \cup \{Xn^{i-2}Y, Zn^{i-1}Y, n^iY, n^i\}, \mathcal{C}_{\hat{\Pi}_{2,n+1}}^{(i-1),2}, \right. \\ \left. \mathcal{C}_{\hat{\Pi}_{2,n+1}}^{(i-1),3} \cup \{Zn^{i+3}Y, Xn^{i+2}Y\} \right)$$

sowie für alle  $i \in \mathbb{N}^+$  mit  $i \geq 6, i \bmod 2 = 0$ :

$$\mathcal{C}_{\hat{\Pi}_{2,n+1}}^{(i)} = \left( \mathcal{C}_{\hat{\Pi}_{2,n+1}}^{(i-1),1}, \mathcal{C}_{\hat{\Pi}_{2,n+1}}^{(i-1),2} \cup \{Zn^{i+2}Y, Zn^{i+2}, Xn^{i+1}Y, Xn^{i+1}\}, \right. \\ \left. \mathcal{C}_{\hat{\Pi}_{2,n+1}}^{(i-1),3} \right)$$

□

Die durch Membran- bzw. P-Systeme beschriebene Klasse von Berechnungsmodellen wurde 1998 durch G. PÄUN eingeführt und besteht aus einer Vielzahl von Systemen, basierend auf unterschiedlichen Konzepten. Eine ausführliche Einführung in das Gebiet wird in [Päu02] gegeben. Die in dieser Arbeit betrachteten ESP-Systeme berücksichtigen neben der Kommunikation zwischen Membranen ebenfalls die Struktur der Objekte einer jeden Membran, einschließlich der Operationen auf den Objekten. Neben der im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Klasse von ESP-Systemen mit gerichteter Kommunikation existieren auch ESP-Systeme mit ungerichteter Kommunikation. Ein Vertreter ist beispielsweise das im nachfolgenden Abschnitt vorgestellte ESP-System  $\mathcal{M}$ . Für ein durch Splicing in der Membran  $i$  entstandenes Objekt  $w$  mit der Zielinformation in  $w$  wird dabei  $w$  in eine Membran  $j$  kommuniziert, falls  $j$  in der Baumdarstellung ein Tochterknoten von  $i$  ist. Falls mehrere Tochterknoten existieren, wird ein entsprechender nichtdeterministisch gewählt.

## 5.2 Das ESP-System $\mathcal{M}$

Zum Nachweis der Universalität von extendierten Splicing-Membran-Systemen mit ungerichteter Kommunikation und beschränkter Entwicklungsmenge ist in [Päu02] das in Definition 5.5 beschriebene offene, endenmarkierte ESP-System  $\mathcal{M} = \text{ELSP}_2(\text{spl}, \text{in}, (1, 2, 2, 1))$  definiert. Es basiert auf einer Chomsky-Typ-0-Grammatik in KURODA-Normalform, gebildet aus kontextfreien und kontextsensitiven Regelmengen ( $P_{CF}$  und  $P_{CS}$ ), und besteht aus zwei hierarchisch angeordneten Membranen. Analog zu dem TVDH2-System aus Abschnitt 4.2 und den TT-EH-Systemen TT2 und TT6 aus den

Abschnitten 3.2.2 und 3.2.1 sind die Axiomen- und Entwicklungsregelmengen dahingehend unterspezifiziert, dass die zugrunde liegende Aufgabenstellung als Parameter übergeben werden kann.

**Definition 5.5 ( $\mathcal{M}$ )**

Sei  $G_{KNF} = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  eine Grammatik in KURODA-Normalform und  $P_\alpha = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in (\Sigma \cup V_G \cup \{B\})\}$ ,  $P_{CS} = \{(u, v) \mid (u, v) \in P_G, |u| = 2\}$ ,  $P_{CF} = P_G \setminus P_{CS}$ ,  $P = P_\alpha \cup P_{CF} \cup P_{CS}$ ,  $\{(u, v)_1, \dots, (u, v)_n\} = P_\alpha \cup P_{CF}$  sowie  $\{(u, v)_{n+1}, \dots, (u, v)_{n+m}\} = P_{CS}$ , dann ist das *extendierte Splicing-Membran-System*  $\mathcal{M}(G_{KNF}) = (V, \Sigma, [1[2]2]_1, M_1, M_2, R_1, R_2)$  gegeben mit

$$\begin{aligned} V &= V_G \cup \Sigma \cup \{b, B, X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2, Z_X, Z'_{X_1}, Z'_{X_2}, Z_Y, Z'_{Y_1}, Z'_{Y_2}, \\ &\quad Z_\varepsilon, Z'_\varepsilon\} \cup \{Z_{X_i}, Z_{Y_i} \mid i \in \{1, \dots, n+m\}\} \cup \\ &\quad \{Y'_i, Z_{Y'_i} \mid i \in \{n+1, \dots, n+m\}\} \\ M_1 &= \{XBS_GY, X_2Z'_{X_2}, Z'_{Y_1}Y_1, XZ_X, Z_\varepsilon, Z'_\varepsilon\} \cup \\ &\quad \{Z_{Y_i}b^iY_1 \mid i \in \{1, \dots, n+m\}\} \cup \{Z_{Y'_i}Y'_i \mid i \in \{n+1, \dots, n+m\}\} \\ M_2 &= \{Z'_{Y_2}Y_2, X_1Z'_{X_1}, Z_Y Y\} \cup \{X_1b^i v_i Z_{X_i} \mid i \in \{1, \dots, n+m\}\} \end{aligned}$$

und den Entwicklungsregeln:

$$\begin{aligned} R_1 &: \begin{array}{l} \begin{array}{c} (r_1) \\ \frac{\varepsilon}{Z_{Y_i}} \Big| \frac{uY}{\varepsilon} \begin{array}{l} (in) \\ (out) \end{array} \end{array} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n^+. (u, v)_i \in (P_\alpha \cup P_{CF}) \quad \begin{array}{c} (r_4) \\ \frac{\varepsilon}{X_1} \Big| \frac{Z'_{X_2}}{b} \begin{array}{l} (here) \\ (out) \end{array} \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} (r_2) \\ \frac{\varepsilon}{Z_{Y'_i}} \Big| \frac{u_2Y}{\varepsilon} \begin{array}{l} (here) \\ (out) \end{array} \end{array} \quad \forall i \in \{n+1, \dots, n+m\}. (u_1u_2, v)_i \in P_{CS} \\ \\ \begin{array}{c} (r_3) \\ \frac{\varepsilon}{Z_{Y_i}} \Big| \frac{u_1Y'_i}{\varepsilon} \begin{array}{l} (in) \\ (out) \end{array} \end{array} \quad \forall i \in \{n+1, \dots, n+m\}. (u_1u_2, v)_i \in P_{CS} \\ \\ \begin{array}{c} (r_5) \\ \frac{\varepsilon}{Z'_{Y_1}} \Big| \frac{bY_2}{\varepsilon} \begin{array}{l} (in) \\ (out) \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} (r_6) \\ \frac{\varepsilon}{X_1} \Big| \frac{Z_X}{\alpha} \begin{array}{l} (in) \\ (out) \end{array} \end{array} \quad \forall \alpha \in (\Sigma \cup V_G \cup \{B\}) \\ \\ \begin{array}{c} (r_7) \\ \frac{\varepsilon}{Z_\varepsilon} \Big| \frac{BY}{\varepsilon} \begin{array}{l} (here) \\ (out) \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} (r_8) \\ \frac{\varepsilon}{X} \Big| \frac{Z'_\varepsilon}{\varepsilon} \begin{array}{l} (out) \\ (out) \end{array} \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} (r_9) \\ \frac{\varepsilon}{Z'_{Y_2}} \Big| \frac{Y_1}{\varepsilon} \begin{array}{l} (here) \\ (out) \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} (r_{10}^i) \\ \frac{\varepsilon}{X} \Big| \frac{Z_{X_i}}{\varepsilon} \begin{array}{l} (out) \\ (out) \end{array} \end{array} \quad \forall i \in \{1, \dots, n+m\} \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
(r_{11}) \\
\frac{\varepsilon}{X_2 b} \left| \begin{array}{c} Z'_{X_1} \\ \varepsilon \end{array} \right. \begin{array}{c} (out) \\ (out) \end{array}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
(r_{12}) \\
\frac{\alpha}{Z_Y} \left| \begin{array}{c} Y_2 \\ \varepsilon \end{array} \right. \begin{array}{c} (out) \\ (out) \end{array}
\end{array}
\quad
\forall \alpha \in (\Sigma \cup V_G \cup \{B\})
\end{array}
\quad \diamond$$

Ein ESP-System  $\mathcal{M}$ , wie in Definition 5.5, ist mit den Alphabeten  $\mathcal{P} = \{Z_{Y_i}, X_1, Z_{Y'_i}, Z'_{Y_1}, X_1, Z_\varepsilon, X, Z'_{Y_2}, X_2, Z_Y\}$  und  $\mathcal{S} = \{Y, Z'_{X_2}, Y'_i, Y_2, Z_X, Z'_\varepsilon, Y_1, Z_{X_i}, Z'_{X_1}, Y_2\}$  mit  $i \in \{1, \dots, n+m\}$   $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ -markiert. Die durch ein auf einer Grammatik  $G_{\text{KNF}}$  in Kuroda-Normalform basierendes ESP-System  $\mathcal{M}$  erzeugte Sprache  $L(\mathcal{M}(G_{\text{KNF}}))$  besteht aus allen Wörtern über dem Terminalalphabet  $\Sigma$ , die das System durch Kommunikation aus der Skin-Membran verlassen.

Das System simuliert die Wortableitung unter Verwendung einer Chomsky-Grammatik  $G_{\text{KNF}} = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  in KURODA-Normalform mittels „Rotation und Simulation“. Zunächst wird die Menge der Produktionsregeln durch die Menge  $\{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in (V_G \cup \Sigma \cup \{B\})\}$  erweitert. Die resultierende Menge besteht aus  $n$  kontextfreien und  $m$  kontextsensitiven Regeln. Für ein Wort  $w = Xw'uY$  mit  $|u| = 1$  in der ersten Membran und einer Produktionsregel  $(u, v)_i, 1 \leq i \leq n$  wird durch die Anwendung der Splicing-Regel  $r_1^i$  das Wort  $u$  durch das Wort  $b^i Y_1$  ersetzt. Für eine kontextsensitive Regel  $(u_1 u_2, v)_i, n+1 \leq i \leq n+m, u = u_1 u_2$  wird durch sequentielle Anwendung der Splicing-Regeln  $r_2^i$  und  $r_3^i$  das Wort  $u$  ebenfalls durch ein Wort  $b^i Y_1$  ersetzt. Das resultierende Wort wird in die zweite Membran kommuniziert, wobei die Anzahl des Symbols  $b$  die jeweils verwendete Produktionsregel kodiert. Durch Anwendung der Regelmenge  $\{r_{10}^j \mid j \in \{1, \dots, n+m\}\}$  wird für jede Produktionsregel das Präfix  $X$  des zuvor erzeugten Wortes  $Xw'b^i Y_1$  durch  $X_1 b^j v_j$  für  $(u, v)_j, 1 \leq j \leq n+m$  substituiert und in die erste Membran übermittelt. Durch sukzessive, alternierende Entfernung von  $b$  am Wortanfang bzw. Wortende werden abschließend unzulässige Wortableitungen entfernt. Mithilfe der Splicing-Regeln  $r_7$  und  $r_8$  kann jedes Teilwort  $w$  von  $XwBY$  das ESP-System verlassen.

### 5.3 SOS für geschlossene Splicing-Membran-Systeme

Analog zur strukturellen operationellen Semantik (SOS) von TT-EH- bzw. TVDH-Systemen und zu [ACL07] wird die SOS für geschlossene ESP-Systeme mit gerichteter Kommunikation eingeführt. Für ein System  $\widehat{\Pi} = (V, \Sigma, \mu, M_1, \dots, M_n, R_1, \dots, R_n)$  ist eine Konfiguration  $C_{\widehat{\Pi}}$  als Membranstruktur, wie in Definition 5.6, induktiv gegeben. Eine endliche Folge von Membranstrukturen  $M_1, \dots, M_n$  wird mit  $M_*$  bzw.  $M_+$  beschrieben, falls die Folge mindestens ein Element besitzt.

---

**Transitionsregeln 5.1** Transitionsregeln für die strukturelle operationelle Semantik von Splicing-Membran-Systemen

---

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
(\rightarrow_1) & (\rightarrow_2) & (\rightarrow_3) \\
\frac{}{w \rightarrow_L w'} & \frac{w \rightarrow_L w'}{\langle L | w \rangle \rightarrow \langle L | w' \rangle} & \frac{w \rightarrow_L w' \quad M_+ \rightarrow M'_+}{\langle L | w; M_+ \rangle \rightarrow \langle L | w'; M'_+ \rangle} \\
\\
(\rightarrow_4) & & (\rightarrow_1) \\
\frac{M \rightarrow M' \quad M_+ \rightarrow M'_+}{M, M_+ \rightarrow M', M'_+} & & \frac{L \neq 1}{\langle L | w \rangle \rightarrow \langle L | w' \rangle} \\
\\
(\rightarrow_2) & & \\
\frac{M_{1_1}, \dots, M_{1_m} \rightarrow M'_{1_1}, \dots, M'_{1_m} \quad ((\bigcup_{i=1}^m \text{out}(\text{obj}(M_{1_i}))) \setminus \text{here}(w)) \cap \Sigma^+ = \zeta}{\langle 1 | w; M_{1_1}, \dots, M_{1_m} \rangle \xrightarrow{(\zeta, \emptyset)} \langle 1 | w''; M'_{1_1}, \dots, M'_{1_m} \rangle} & & \\
\\
(\rightarrow_3) & & \\
\frac{M_{L_1}, \dots, M_{L_m} \rightarrow M'_{L_1}, \dots, M'_{L_m}}{\langle L | w; M_{L_1}, \dots, M_{L_m} \rangle \rightarrow \langle L | w''; \uparrow(M'_{L_1}, \text{in}_{L_1}(w)), \dots, \uparrow(M'_{L_m}, \text{in}_{L_m}(w)) \rangle} & & \\
\\
(\rightarrow_4) & (\text{TRANS}) & (\tau) \\
\frac{M \rightarrow M' \quad M_+ \rightarrow M'_+}{M, M_+ \rightarrow M', M'_+} & \frac{\mathcal{C}_\Pi \rightarrow \mathcal{C}'_\Pi \quad \mathcal{C}'_\Pi \xrightarrow{(\zeta, \emptyset)} \mathcal{C}''_\Pi}{\mathcal{C}_\Pi \xrightarrow{(\zeta, \emptyset)} \mathcal{C}''_\Pi} & \frac{\mathcal{C}_\Pi \xrightarrow{(\emptyset, \emptyset)} \mathcal{C}''_\Pi}{\mathcal{C}_\Pi \xrightarrow{\tau} \mathcal{C}''_\Pi}
\end{array}
\end{array}$$

mit  $w' = \zeta(w, R_L) \cup \{(x, \text{here}) \mid x \in w\}$  in  $\rightarrow_1$ ,  $w' = \text{here}(w)$  in  $\rightarrow_1$ ,  $w'' = \bigcup_{i=1}^m \text{out}(\text{obj}(M_{1_i})) \cup \text{here}(w)$  in  $\rightarrow_2$  und  $w'' = \bigcup_{i=1}^m \text{out}(\text{obj}(M_{L_i})) \cup \text{here}(w)$  in  $\rightarrow_3$ .

---

**Definition 5.6 (Membranstruktur  $M_\Pi$  einer Konfiguration)**

Die Membranstruktur  $M_\Pi$  einer Konfiguration für ein Label  $L$  und eine Sprache  $w \subseteq V^+$  ist induktiv definiert durch

$$\begin{array}{ll}
\langle L | w \rangle & \text{für eine elementare Membran} \\
\langle L | w; M_1, \dots, M_n \rangle & \text{für eine aus } n \text{ Membranen} \\
& \text{zusammengesetzte Membran}
\end{array}$$

mit den Membranstrukturen  $M_1, \dots, M_n$ . ◇

Die SOS für ein System  $\Pi$  ist durch ein beschriftetes Transitionssystem mit der Aktionsmenge  $\mathcal{Act} \subseteq \mathcal{P}(V^+) \times \mathcal{P}(V^+)$  und den Transitionsregeln 5.1 gegeben. Die Funktionen  $\text{here}$ ,  $\text{out}$ ,  $\text{label}$ ,  $\text{obj}$  sowie  $\text{in}_L$  für ein Label  $L$  und die Aktualisierungsfunktion  $\uparrow$  mit  $\text{here}, \text{in}_L, \text{out} : (V^+ \times \{\text{here}, \text{in}_L, \text{out}\}) \rightarrow V^+$ ,  $\text{label} : M_\Pi \rightarrow \text{Label}$ ,  $\text{obj} : M_\Pi \rightarrow V^+$ ,  $\uparrow : M_\Pi \rightarrow M_\Pi$  sind definiert mit

$$\begin{aligned}
\text{here}(w) &= \{x \mid (x, \text{here}) \in w\} & \text{label}(\langle L \mid w; M_* \rangle) &= L \\
\text{in}_L(w) &= \{x \mid (x, \text{in}_L) \in w\} & \text{obj}(\langle L \mid w; M_* \rangle) &= w \\
\text{out}(w) &= \{x \mid (x, \text{out}) \in w\} & \uparrow(\langle L \mid w; M_* \rangle, w') &= (\langle L \mid (w \cup w'); M_* \rangle).
\end{aligned}$$

In Analogie zu den in den Abschnitten 3.3 und 4.3 eingeführten operationellen Semantiken für TT-EH- bzw. TVDH-Systeme, jedoch im Gegensatz zu [ACL07] bzw. auch [ACL06], ist eine Transition beschriftet, so dass eine Differenzierung zwischen beobachtbaren und unbeobachtbaren Aktionen möglich ist. Der beobachtbare Teil einer Transition von einer Konfiguration  $C_\Pi$  zu einer Folgekonfiguration  $C'_\Pi$  besteht aus der Menge von Wörtern  $\zeta$ , die in dieser Transition in die Hauptmembran kommuniziert werden. Um jedoch die Definition von (Bi-)Simulation zwischen den verschiedenen Klassen von Splicing-Systemen zu ermöglichen, besteht die Aktionsmenge  $\mathcal{Act}$  aus einem Tupel von  $\zeta$  und der leeren Menge.

Eine Transition besteht aus der sequentiellen Anwendung der Splicing-Transition ( $\rightarrow$ ) sowie der beschrifteten Kommunikationstransition ( $\rightarrow$ ) und wird durch die Regel (TRANS) in diese unterteilt. Unter Verwendung der Regeln ( $\rightarrow_1$ ), ( $\rightarrow_2$ ), ( $\rightarrow_3$ ) und ( $\rightarrow_4$ ) wird für jede Membran die entsprechende Splicing-Operation auf deren Inhalt angewandt, wobei jedem Objekt in der resultierenden Zwischenkonfiguration eine Zielinformation zugeordnet ist. Die anschließende beschriftete Kommunikationstransition wird zunächst durch die Transitionsregel ( $\rightarrow_2$ ) für die Skin-Membran und folgend induktiv für jede weitere Membran realisiert.

Die strukturelle operationelle Semantik für geschlossene ESP-Systeme, unter Zugrundelegung des beschrifteten Transitionssystems, ermöglicht die Beschreibung von Verhalten dieser Systeme und somit auch die Definition von Simulationsrelationen zwischen ESP-Systemen. Der Typ der Aktionsmenge erlaubt jedoch weiterhin den Vergleich mit anderen Klassen von verteilten Splicing-Systemen, so dass, wie in Satz 5.3, die Verhaltensgleichheit zwischen einem ESP-System und einem TT-EH-System formuliert und bewiesen werden kann.

**Satz 5.3** ( $\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1} \approx \Gamma_{2 \cdot n+1}$ )

Für das System  $\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}$  aus Beispiel 5.1 und das System  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$  aus Beispiel 3.1 gilt  $\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1} \approx \Gamma_{2 \cdot n+1}$ , d. h. es existiert eine schwache Bisimulation  $\mathcal{S}$  mit  $(\mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(0)}, \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(0)}) \in \mathcal{S}$ .  $\diamond$

**Beweis 5.3 (Satz 5.3)**

Für  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$  und  $i \in \mathbb{N}, i \geq 3$  gilt

$$\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \xrightarrow{\tau} \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(1)} \xrightarrow{(\{n\}, \emptyset)} \dots \xrightarrow{(\{n^{2 \cdot i-5}\}, \emptyset)} \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(i-1)} \xrightarrow{(\{n^{2 \cdot i-3}\}, \emptyset)} \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(i)} \xrightarrow{(\{n^{2 \cdot i-1}\}, \emptyset)} \dots$$

und für  $i \in \mathbb{N}, i \geq 3, i \bmod 2 = 0$  und das System  $\Pi$

$$\mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \xrightarrow{(\{n\}, \emptyset)} \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(1)} \xrightarrow{\tau} \dots \xrightarrow{\tau} \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(i)} \xrightarrow{(\{n^{2 \cdot i-1}\}, \emptyset)} \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(i+1)} \xrightarrow{\tau} \dots$$

und es gilt für  $j \in \{0, 1\}$  und alle  $i \in \mathbb{N}, i \geq 2$ , dass  $\mathcal{S} = \left\{ \left( \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(j)}, \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \right), \left( \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(i)}, \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(2 \cdot i-2)} \right), \left( \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(i)}, \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(2 \cdot i-3)} \right) \right\}$ .

□

**Satz 5.4** ( $\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1} \not\sim \Gamma_{2 \cdot n+1}$ )

Es existiert keine starke Bisimulation zwischen den initialen Zuständen der beiden Systeme, d. h.  $\neg \exists \mathcal{S}. \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \sim_{\mathcal{S}} \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(0)}$ .

◇

**Beweis 5.4 (Satz 5.4)**

Der Beweis folgt unmittelbar aus den Transitionen  $\mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \xrightarrow{\tau} \mathcal{C}_{\Gamma_{2 \cdot n+1}}^{(1)}$  und  $\mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(0)} \xrightarrow{(\{n\}, \emptyset)} \mathcal{C}_{\widehat{\Pi}_{2 \cdot n+1}}^{(1)}$ .

□

Mithilfe der Definition einer Membranstruktur und des induktiven Charakters der Transitionsregeln kann beispielsweise ein Simulator in einer funktionalen Programmiersprache implementiert oder mittels MAUDE eine formale Analyse von temporalen Eigenschaften durch Model-Checking erreicht werden. Um den Zustandsraum eines gegebenen Systems einzuschränken, kann z. B. die Kardinalität der Objektmengen aller Membranen beschränkt werden, um nachfolgend nur Zustände zu betrachten, deren Bewertung einen Maximalwert nicht überschreitet. Da die Summe der Kardinalitäten aller Membranen mit jeder Folgekonfiguration monoton steigend ist, wird nur eine endliche Anzahl von Zuständen generiert.

## 5.4 Formale Verifikation von ESP-Systemen

Wie bereits für die zuvor untersuchten TT-EH- bzw. TVDH-Systeme erlaubt auch die SOS aus Abschnitt 5.3 keine universelle Analyse von Sicherheitseigenschaften bzw. Invarianten (Zusicherungen, die für jeden Zustand eines Systems erfüllt sein müssen). Von besonderem Interesse ist dabei die Eigenschaft, ob ein Wort bzw. eine gegebene Sprache in dem System nicht erzeugt werden kann, d. h. für ein System  $\Pi$  und ein Wort  $w$  die Aussage  $w \notin L(\Pi)$  gilt. Aufgrund des Satzes 5.5 ist dieses Problem im Allgemeinen jedoch nicht entscheidbar.

**Satz 5.5 (Wortproblem in ESP-Systemen)**

Das Wortproblem in nicht beschränkten ESP-Systemen ist nicht entscheidbar, jedoch semi-entscheidbar.

◇

**Beweis 5.5**

Der Beweis für ESP-Systeme lässt sich leicht aus dem Beweis 4.4 ableiten.  $\square$

Für ein (offenes) ESP-System  $\Pi$  und ein Wort  $w$  beschreibt das folgende Tableaubeweisverfahren eine Methode zur Lösung des Problems  $w \stackrel{?}{\in} L(\Pi)$ , falls dieses, angewendet auf  $w$  und  $\Pi$ , terminiert.

Aus der Definition einer Konfiguration, den Definitionen 5.2 und 5.3 sowie der Eigenschaft, dass sowohl Axiome als auch bereits erzeugte Wörter in jeder Folgekonfiguration vorliegen, ergibt sich für ein ESP-System  $\Pi = (V, \Sigma, \mu, M_1, \dots, M_n, R_1, \dots, R_n)$  mit  $n \geq 1$  Membranen und der initialen Konfiguration  $\mathcal{C}_\Pi^{(0)} = (\emptyset, M_1, \dots, M_n)$  für die Konfigurationen  $\mathcal{C}_\Pi$  und  $\mathcal{C}'_\Pi$  mit  $\mathcal{C}_\Pi^{(0)} \vdash_\Pi^* \mathcal{C}_\Pi$  und  $\mathcal{C}_\Pi \vdash_\Pi \mathcal{C}'_\Pi$

$$w \in \mathcal{C}'_\Pi^1 \leftrightarrow (w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^2, R_1)$$

und für jedes  $i \in \{2, \dots, n+1\}$ :

$$\begin{aligned} w \in \mathcal{C}'_\Pi^i \leftrightarrow & (w \in M_{i-1} \vee (w, \text{here}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^i, R_{i-1}) \vee (w \in \mathcal{C}_\Pi^i) \vee \\ & ((i \geq 3) \wedge \exists(j, i-1) \in \mu. ((w, \text{in}_{i-1}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^{j+1}, R_j))) \vee \\ & \exists(i-1, j) \in \mu. (w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^{j+1}, R_j)). \end{aligned}$$

Für Systeme mit ungerichteter Kommunikation können für einen Knoten in der Membranstruktur mehrere Folgeknoten, also in ihr enthaltene Membranen, existieren, so dass für ein Tupel  $(w, \text{in})$  nichtdeterministisch eine dieser Membran gewählt wird. Aufgrund dessen sowie der Eigenschaft, dass aufgrund der Beständigkeit durch Splicing erzeugter Wörter das Wort  $w$  ebenfalls in der folgenden Transition erzeugt und nichtdeterministisch kommuniziert wird, ist für jede entsprechende Membran die Ableitbarkeit des Wortes  $w$  zu prüfen. Deshalb ergibt sich

$$w \in \mathcal{C}'_\Pi^1 \leftrightarrow (w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^2, R_1)$$

und für jedes  $i \in \{2, \dots, n+1\}$ :

$$\begin{aligned} w \in \mathcal{C}'_\Pi^i \leftrightarrow & (w \in M_{i-1} \vee (w, \text{here}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^i, R_{i-1}) \vee (w \in \mathcal{C}_\Pi^i) \vee \\ & ((i \geq 3) \wedge \exists(j, i-1) \in \mu. ((w, \text{in}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^{j+1}, R_j))) \vee \\ & \exists(i-1, j) \in \mu. ((w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^{j+1}, R_j))). \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich für jede *ite* Membran die Tableauregeln 5.1 und 5.2 mit

$$\text{parent}(\mu, i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1 \\ j + 1 & \text{falls } (j, i) \in \mu. \end{cases}$$

---

**Tableauregeln 5.1** für die  $i$ te Membran eines gegebenen ESP-Systems mit ungerichteter Kommunikation

---

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
(r_{\text{in}}^{1,i}) \\
\forall(i, j) \in \mu. \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \frac{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}}{x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{c}
(r_{\text{out}}^{2,i}) \\
\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \frac{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}}{x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{\text{parent}(\mu, i)}} \quad (a, i) \\
\frac{}{a \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}}
\end{array} \\
\\
(\wedge\text{-ELIM}) \quad \begin{array}{c}
(r_{\text{here}}^{3,i}) \\
\frac{A \quad B}{A \wedge B} \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \frac{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}}{x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{c}
(r_{\text{in}}^{4,i}) \\
\forall(i, j) \in \mu. \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \frac{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}}{y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{c}
(i, i') \quad \forall w \in V^+. \frac{w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}}{w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}} \quad \begin{array}{c}
(r_{\text{out}}^{5,i}) \\
\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \frac{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}}{y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{\text{parent}(\mu, i)}}
\end{array}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{c}
(r_{\text{here}}^{6,i}) \\
\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \frac{x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}}{y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}}
\end{array}
\end{array}$$

für jede Entwicklungsregel  $r = (u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2))$  mit  $r \in R_i$  und die Nebenbedingungen  $\text{tar}_1 = \text{in}$  in  $(r_{\text{in}}^{1,i})$ ,  $\text{tar}_1 = \text{out}$  in  $(r_{\text{out}}^{2,i})$ ,  $\text{tar}_1 = \text{here}$  in  $(r_{\text{here}}^{3,i})$ ,  $\text{tar}_2 = \text{in}$  in  $(r_{\text{in}}^{4,i})$ ,  $\text{tar}_2 = \text{out}$  in  $(r_{\text{out}}^{5,i})$  und  $\text{tar}_2 = \text{here}$  in  $(r_{\text{here}}^{6,i})$ .

---

Da jedes Axiom und jedes bereits erzeugte Wort in einer Membran zukünftig in dieser Membran vorliegt und somit für  $x, y \in V^+$  mit  $x \in \mathcal{C}_{\Pi}^i$  und  $y \in \mathcal{C}_{\Pi}^i \exists \mathcal{C}_{\Pi}^{\prime\prime}. (x \in \mathcal{C}_{\Pi}^{\prime\prime i} \wedge y \in \mathcal{C}_{\Pi}^{\prime\prime i})$  gilt, ist eine Untersuchung der zeitlichen Korrelation, äquivalent zum Tableaubeweissystem von TT-EH-Systemen, nicht notwendig.

Weil jedes Axiom  $a$  der  $i$ ten Membran in jeder Konfiguration vorkommt, besitzt die Regel  $(a, i)$  keine Prämisse. Aufgrund der Persistenz eines Wortes in einer Membran bezüglich einer Transition ergibt sich die Regel  $(i, i')$ . Außer der Regel  $(\wedge\text{-ELIM})$  ergeben sich alle weiteren Tableauregeln dadurch, dass für zwei Wörter  $x = x_1 u_1 u_2 x_2, y = y_1 u_3 u_4 y_2$  und eine Entwicklungsregel  $r = (u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2))$  in der  $i$ ten Membran durch Anwendung der



---

**Tableauregeln 5.2** ersetzen die Regeln  $(r_{\text{in}}^{1,i})$  und  $(r_{\text{in}}^{4,i})$  der Tableauregelmengensatz 5.1 für ESP-Systeme mit gerichteter Kommunikation

---

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \frac{(r_{\text{in}_L}^{1,i}) \quad x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}}{x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{L+1}}$$

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \frac{(r_{\text{in}_L}^{4,i}) \quad x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}}{y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{L+1}}$$

für jede Entwicklungsregel  $r = (u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2))$  mit  $r \in R_i$ , jedes Label  $L \in \{2, \dots, n\}$  mit  $(i, L) \in \mu$ , falls  $\text{tar}_1 = \text{in}_L$  in  $(r_{\text{in}_L}^{1,i})$  bzw.  $\text{tar}_2 = \text{in}_L$  in  $(r_{\text{in}_L}^{4,i})$

---

Splicing-Operation  $\varsigma$  die Wörter  $w_1 = x_1 u_1 u_4 y_2$  bzw.  $w_2 = y_1 u_3 u_2 x_2$  folgen, wobei  $w_1$  abhängig von  $\text{tar}_1$  und  $w_2$  abhängig von  $\text{tar}_2$  kommuniziert wird. Da für Systeme mit ungerichteter Kommunikation für ein Wort  $w$  mit der Zielinformation in indeterministisch eine der Zielmembranen, die einen Tochterknoten in der Membranstruktur besitzen, ausgewählt wird, existiert für jede dieser Membranen eine Tableauregel. Für Systeme mit gerichteter Kommunikation werden die Tableauregeln  $(r_{\text{in}}^{1,i})$  und  $(r_{\text{in}}^{4,i})$  durch die Tableauregeln 5.2 ersetzt.

Auch das Tableaubeweisverfahren von ESP-Systemen kann durch Beschränkung des Typs der Variablen  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*$  in den Regeln  $(r_{\text{in}}^{1,i}), (r_{\text{out}}^{2,i}), (r_{\text{here}}^{3,i}), (r_{\text{in}}^{4,i}), (r_{\text{out}}^{5,i}), (r_{\text{here}}^{6,i})$  bzw.  $(r_{\text{in}_L}^{1,i}), (r_{\text{in}_L}^{4,i})$  für  $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ -markierte ESP-Systeme mit den Alphabeten  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{S}$  von Präfix- und Suffixsymbolen eingeschränkt werden. Mit  $\text{Pre}' = \text{Pre} \setminus \{\varepsilon\}$  und  $\text{Suf}' = \text{Suf} \setminus \{\varepsilon\}$  sowie  $\mathcal{PV} = \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*$  und  $\mathcal{SV} = V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}$  gilt für  $u_1$  bzw.  $u_3$  entweder  $x_1 = \varepsilon$  bzw.  $y_1 = \varepsilon$ , falls  $(\text{pre}(u_1) \cap \text{Pre}') \neq \emptyset$  resp.  $(\text{pre}(u_3) \cap \text{Pre}') \neq \emptyset$  gilt, oder  $x_1 \in \mathcal{PV}$  bzw.  $y_1 \in \mathcal{PV}$ , falls  $(\text{pre}(u_1) \cap \text{Pre}') = \emptyset$  bzw.  $(\text{pre}(u_3) \cap \text{Pre}') = \emptyset$  gilt. Weiterhin gilt  $x_2 = \varepsilon$  bzw.  $y_2 = \varepsilon$ , falls  $(\text{suf}(u_2) \cap \text{Suf}') \neq \emptyset$  resp.  $(\text{suf}(u_4) \cap \text{Suf}') \neq \emptyset$ , andernfalls  $x_2 \in \mathcal{SV}$  bzw.  $y_2 \in \mathcal{SV}$ .

Für ein System  $\Pi$  mit  $n$  Membranen, ein Wort  $w \in V^+$ , eine beliebige Konfiguration  $\mathcal{C}_{\Pi}$  des Systems und ein  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  ist  $w \in \mathcal{C}_{\Pi}^i$  eine atomare Aussage im Beweisverfahren. Ein Knoten im Tableau ist entweder eine atomare Aussage oder eine Konjunktion von zwei atomaren Aussagen. Dabei ist ein Knoten mit einer atomaren Aussage ein ableitbarer Terminalknoten, falls eine Regel  $(a, i)$  für ein Axiom  $a \in M_i$  anwendbar ist, bzw. ein nicht ableitbarer Terminalknoten, falls keine Tableauregel anwendbar ist. Die verbleiben-

den Nichtterminalknoten sind genau dann ableitbar, wenn für eine atomare Aussage mindestens eine der Regeln  $(r_{\text{in}}^{1,i}), (r_{\text{out}}^{2,i}), (r_{\text{here}}^{3,i}), (r_{\text{in}}^{4,i}), (r_{\text{out}}^{5,i}), (r_{\text{here}}^{6,i})$ , bzw. im Fall der gerichteten Kommunikation  $(r_{\text{in}_L}^{1,i})$  oder  $(r_{\text{in}_L}^{4,i})$ , anwendbar und der Folgeknoten ableitbar ist, bzw. falls für eine Konjunktion von zwei atomaren Aussagen  $A, B$  jeweils  $A$  und  $B$  ableitbare Knoten sind.

In einem Tableaubeweis eines Systems  $\Pi$  wird für einen Knoten mit der atomaren Aussage  $w \in \mathcal{C}_\Pi^i$  mit  $w \in \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}$  für ein  $\mathcal{P},\mathcal{S}$ -markiertes System, und  $w \in V^+$  sonst, die Ableitbarkeit durch sukzessive Anwendung der Tableauregeln untersucht. Falls der Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Pi^i$  ableitbar ist, folgt  $\exists \mathcal{C}_\Pi \cdot \mathcal{C}_\Pi^{(0)} \vdash_\Pi^* \mathcal{C}_\Pi \cdot w \in \mathcal{C}_\Pi^i$ . Für jeden ableitbaren Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Pi^1$  mit  $w \in \Sigma^+$  folgt somit  $w \in L(\Pi)$ . Im Gegensatz dazu gilt für einen terminierenden Tableaubeweis und einen nicht ableitbaren Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Pi^i$  die Gültigkeit der Aussage  $\neg \exists \mathcal{C}_\Pi \cdot \mathcal{C}_\Pi^{(0)} \vdash_\Pi^* \mathcal{C}_\Pi \cdot w \in \mathcal{C}_\Pi^i$ .

Wie bereits erwähnt verbleiben sowohl Axiome als auch durch Splicing erzeugte und anschließend kommunizierte Wörter in den entsprechenden Membranen, sind also persistent. Somit besteht keine temporale Abhängigkeit zwischen zwei an einer Splicing-Operation teilnehmenden Wörtern, weshalb Ableitungen der Form

$$\frac{w \in \mathcal{C}_\Pi^i \wedge w' \in \mathcal{C}_\Pi^i}{w \in \mathcal{C}_\Pi^i} \quad \text{bzw.} \quad \frac{w \in \mathcal{C}_\Pi^i}{w \in \mathcal{C}_\Pi^i}$$

für jedes mögliche  $w'$  ausgelassen werden können. Falls für einen Nichtterminalknoten  $w \in \mathcal{C}_\Pi^i$  eine Tableauregel mit einer allquantifizierten Variable  $v$  anwendbar ist, jedoch  $v \notin \text{seg}(w)$ , so genügt der Nachweis der Existenz eines  $v$  in der Prämisse.

**Satz 5.6 (Vollständigkeit des Tableaubeweisverfahrens)**

Seien  $\Pi$  ein beliebiges ESP-System mit  $n$  Membranen und der Membranstruktur  $\mu$ ,  $\mathcal{C}_\Pi$  eine beliebige Konfiguration von  $\Pi$  mit  $\mathcal{C}_\Pi^{(0)} \vdash_\Pi^* \mathcal{C}_\Pi$  und  $w$  ein beliebiges Wort mit  $w \in \mathcal{C}_\Pi^i$  für jedes  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ . Das gegebene Tableaubeweisverfahren ist vollständig, d. h. angewendet auf  $\Pi$  und  $w \in \mathcal{C}_\Pi^i$  existiert ein ableitbarer Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Pi^i$  im Tableaubeweis.  $\diamond$

**Beweis 5.6 (Satz 5.6)**

Zum Nachweis der Korrektheit ist durch Induktion zu zeigen, dass für jeden möglichen Ableitungsschritt eines beliebigen Systems  $\Pi$  eine adäquate Ableitung im Tableaubeweis existiert.

Zunächst gilt für jede Membran  $i$ , jedes Axiom  $a \in M_i$  und jede Konfiguration  $\mathcal{C}_\Pi$  infolge der Persistenz der Membranhalte  $a \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1}$ . Aufgrund der Tableauregel  $(a, i)$  gilt ebenfalls die Ableitbarkeit des Knotens  $a \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1}$  im Beweis. Sei nun  $\mathcal{C}_\Pi$  eine Konfiguration mit  $\mathcal{C}_\Pi^{(0)} \vdash_\Pi^* \mathcal{C}_\Pi$ , so dass für jedes

$i \in \{1, \dots, n+1\}$  und jedes Wort  $w \in \mathcal{C}_\Pi^i$  auch  $w \in \mathcal{C}'_\Pi^i$  einen ableitbaren Knoten beschreibt. Es bleibt zu zeigen, dass für jede Folgekonfiguration  $\mathcal{C}'_\Pi$  mit  $\mathcal{C}_\Pi \vdash_\Pi \mathcal{C}'_\Pi$ , jedes  $i$  und jedes Wort  $w \in \mathcal{C}'_\Pi^i$  der Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Pi^i$  ableitbar ist. Das wird bewiesen, indem für jede mögliche Ableitung des Wortes  $w$  im System eine entsprechende Tableauregel existiert. Aufgrund der Implikationen auf Seite 89 gilt für Systeme mit ungerichteter Kommunikation:

$$\begin{aligned} & \forall w \in V^+. ((w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^2, R_1) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Pi^1) \wedge \\ \forall i \in \{2, \dots, n+1\}. & \forall w \in V^+. ((w \in M_{i-1} \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Pi^i) \wedge \\ & ((w, \text{here}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^i, R_{i-1}) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Pi^i) \wedge \\ & (w \in \mathcal{C}_\Pi^i \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Pi^i) \wedge \\ & (\exists(i-1, j) \in \mu. \\ & ((w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^{j+1}, R_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Pi^i))) \wedge \\ \forall i \in \{3, \dots, n+1\}. & \forall w \in V^+. \\ & \forall(j, i-1) \in \mu. ((w, \text{in}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^{j+1}, R_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Pi^i), \end{aligned}$$

bzw. für Systeme mit gerichteter Kommunikation:

$$\begin{aligned} & \forall i \in \{3, \dots, n+1\}. \forall w \in V^+. \forall(j, i-1) \in \mu. \\ & ((w, \text{in}_{i-1}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^{j+1}, R_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Pi^i). \end{aligned}$$

Aus  $\forall w \in V^+. \forall i \in \{2, \dots, n+1\}. (w \in M_{i-1} \rightarrow w \in \mathcal{C}_\Pi^i)$  folgt unmittelbar die Tableauregelmenge  $(a, i)$  und aus  $\forall w \in V^+. \forall i \in \{2, \dots, n+1\}. (w \in \mathcal{C}_\Pi^i \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Pi^i)$  die Menge  $(i, i')$ . Es folgen weiterhin aus

$$\begin{aligned} & \forall i \in \{2, \dots, n+1\}. \forall w \in V^+. ((w, \text{here}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^i, R_{i-1}) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Pi^i) \\ \Leftrightarrow & \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. ((w, \text{here}) \in \varsigma(\mathcal{C}_\Pi^{i+1}, R_i) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Pi^{i+1}) \\ \Leftrightarrow & \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. ((w, \text{here}) \in (\{(x_1 u_1 u_4 y_2, \text{tar}_1) \mid \\ & \exists(u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_i. \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\ & (x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1})\} \cup \{(y_1 u_3 u_2 x_2, \text{tar}_2) \mid \\ & \exists(u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_i. \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\ & (x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1})\}) \rightarrow w \in \mathcal{C}'_\Pi^{i+1}) \\ \Leftrightarrow & \forall i \in \mathbb{N}_n^+. (((\exists(u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_i. \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\ & \text{tar}_1 = \text{here}. (x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1})) \rightarrow x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}'_\Pi^{i+1}) \\ \wedge & ((\exists(u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_i. \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \text{tar}_2 = \text{here}. \\ & (x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1})) \rightarrow y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}'_\Pi^{i+1})) \\ \Leftrightarrow & \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall(u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_i. \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\ & \text{tar}_1 = \text{here}. ((x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1}) \rightarrow x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}'_\Pi^{i+1}) \\ \wedge & \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall(u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_i. \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\ & \text{tar}_2 = \text{here}. ((x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1}) \rightarrow y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}'_\Pi^{i+1}) \end{aligned}$$

die Tableauregelmengen  $(r_{\text{here}}^{3,i})$  sowie  $(r_{\text{here}}^{6,i})$  und infolge der Ableitbarkeit von  $x_1u_1u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}$  und  $y_1u_3u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}$  nach der Induktionsannahme, dass  $y_1u_3u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}$  bzw.  $x_1u_1u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}$  ableitbar sind. Aus

$$\begin{aligned}
& \forall i \in \{3, \dots, n+1\}. \forall w \in V^*. \forall (j, i-1) \in \mu. \\
& ((w, \text{in}) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}, R_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^i) \\
\Leftrightarrow & \forall i \in \{2, \dots, n\}. \forall w \in V^*. \forall (j, i) \in \mu. ((w, \text{in}) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}, R_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}) \\
\Leftrightarrow & \forall i \in \{2, \dots, n\}. \forall w \in V^*. \forall j \in \mathbb{N}_n^+. (j, i) \in \mu. \\
& ((w, \text{in}) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}, R_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}) \\
\Leftrightarrow & \forall j \in \mathbb{N}_n^+. \forall (j, i) \in \mu. \forall w \in V^*. ((w, \text{in}) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}, R_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}) \\
\Leftrightarrow & \forall j \in \mathbb{N}_n^+. \forall (j, i) \in \mu. \forall w \in V^*. ((w, \text{in}) \in (\{(x_1u_1u_4y_2, \text{tar}_1) \mid \\
& \exists (u_1\#u_2\$u_3\#u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_j. \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\
& (x_1u_1u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1} \wedge y_1u_3u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1})\} \cup \{(y_1u_3u_2x_2, \text{tar}_2) \mid \\
& \exists (u_1\#u_2\$u_3\#u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_j. \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\
& (x_1u_1u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1} \wedge y_1u_3u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1})\}) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}) \\
\Leftrightarrow & \forall j \in \mathbb{N}_n^+. \forall (j, i) \in \mu. ((\exists (u_1\#u_2\$u_3\#u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_j. \\
& \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \text{tar}_1 = \text{in}. (x_1u_1u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1} \wedge y_1u_3u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1})) \\
& \rightarrow x_1u_1u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}) \\
& \wedge ((\exists (u_1\#u_2\$u_3\#u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_j. \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\
& \text{tar}_2 = \text{in}. (x_1u_1u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1} \wedge y_1u_3u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1})) \rightarrow y_1u_3u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1})) \\
\Leftrightarrow & \forall j \in \mathbb{N}_n^+. \forall (j, i) \in \mu. \forall (u_1\#u_2\$u_3\#u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_j. \\
& \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \text{tar}_1 = \text{in}. ((x_1u_1u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1} \wedge y_1u_3u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}) \\
& \rightarrow x_1u_1u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}) \\
& \wedge \forall j \in \mathbb{N}_n^+. \forall (j, i) \in \mu. \forall (u_1\#u_2\$u_3\#u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_j. \\
& \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \text{tar}_1 = \text{in}. ((x_1u_1u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1} \wedge y_1u_3u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}) \\
& \rightarrow y_1u_3u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1})
\end{aligned}$$

folgt, dass für jede Transition eine entsprechende Tableauregel in den Mengen  $(r_{\text{in}}^{1,i})$  bzw.  $(r_{\text{in}}^{4,i})$  existiert und aufgrund der Induktionsannahme auch  $y_1u_3u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}$  bzw.  $x_1u_1u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}$  ableitbar sind. Für die verbleibenden beiden Implikationen folgt

$$\begin{aligned}
& \forall i \in \{2, \dots, n+1\}. \forall w \in V^+. ((\exists (i-1, j) \in \mu. ((w, \text{out}) \in \\
& \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}, R_j))) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^i) \wedge \forall w \in V^+. ((w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^2, R_1) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^1) \\
\Leftrightarrow & \forall w \in V^+. (\forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall (i, j) \in \mu. ((w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}, R_j) \rightarrow \\
& w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}) \wedge ((w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^2, R_1) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. i = \text{parent}(\mu, j). ((w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}, R_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^i) \\
&\Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. ((w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}, R_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{\text{parent}(\mu, j)}) \\
&\Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}_n^+. \forall w \in V^+. ((w, \text{out}) \in (\{(x_1 u_1 u_4 y_2, \text{tar}_1) \mid \\
&\quad \exists((u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_j. \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\
&\quad (x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1})\} \cup \{(y_1 u_3 u_2 x_2, \text{tar}_2) \mid \\
&\quad \exists((u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_j. \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\
&\quad (x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1})\}) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{\text{parent}(\mu, j)}) \\
&\Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}_n^+. ((\exists(u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_j. \text{tar}_1 = \text{out}. \\
&\quad \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. (x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}) \rightarrow \\
&\quad x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{\text{parent}(\mu, j)}) \\
&\wedge (\exists(u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_j. \text{tar}_2 = \text{out}. \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \\
&\quad (x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}) \rightarrow y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{\text{parent}(\mu, j)}) \\
&\Leftrightarrow \forall j \in \mathbb{N}_n^+. \forall (u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_j. \text{tar}_1 = \text{out} \\
&\quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. ((x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}) \rightarrow \\
&\quad x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{\text{parent}(\mu, j)}) \\
&\wedge \forall j \in \mathbb{N}_n^+. \forall (u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_j. \text{tar}_2 = \text{out} \\
&\quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. ((x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}) \rightarrow \\
&\quad y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{\text{parent}(\mu, j)}),
\end{aligned}$$

und somit die Tableauregelmengen  $(r_{\text{out}}^{2,i})$  und  $(r_{\text{out}}^{5,i})$ , wobei aufgrund der Ableitbarkeit von  $x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}$  und  $y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}$  auch  $x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{\text{parent}(\mu, j)}$  bzw.  $y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{\text{parent}(\mu, j)}$  ableitbare Knoten spezifizieren. Für Systeme mit gerichteter Kommunikation ergeben sich ebenfalls durch die folgende Äquivalenz die Tableauregelmengen  $(r_{\text{in}_L}^{1,i})$  sowie  $(r_{\text{in}_L}^{4,i})$ . Wiederum basierend auf der Induktionsannahme, also der Ableitbarkeit der Knoten  $x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}$  und  $y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}$ , gilt aufgrund der Definition eines ableitbaren Knotens die Ableitbarkeit von  $x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{L+1}$  bzw.  $y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{L+1}$ .

$$\begin{aligned}
&\forall i \in \{3, \dots, n+1\}. \forall w \in V^*. \forall (j, i-1) \in \mu. \\
&\quad ((w, \text{in}_{i-1}) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}, R_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \{2, \dots, n\}. \forall w \in V^*. \forall (j, i) \in \mu. ((w, \text{in}_i) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}, R_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \{2, \dots, n\}. \forall w \in V^*. \forall j \in \mathbb{N}_n^+. (j, i) \in \mu. \\
&\quad ((w, \text{in}_i) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{j+1}, R_j) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall L \in \{2, \dots, n\}. \forall w \in V^*. (i, L) \in \mu. \\
&\quad ((w, \text{in}_L) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}, R_i) \rightarrow w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{L+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall L \in \{2, \dots, n\}. \forall w \in V^*. (i, L) \in \mu. \\
&\quad ((w, \text{in}_L) \in (\{(x_1 u_1 u_4 y_2, \text{tar}_1) \mid \exists (u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_i. \\
&\quad \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. (x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1})\} \cup \\
&\quad \{(y_1 u_3 u_2 x_2, \text{tar}_2) \mid \exists (u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_i. \\
&\quad \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. (x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1})\}) \rightarrow \\
&\quad w \in \mathcal{C}'_\Pi^{L+1}) \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall L \in \{2, \dots, n\}. (i, L) \in \mu. \\
&\quad \forall (u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_i. \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \text{tar}_1 = \text{in}_L. \\
&\quad ((x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1}) \rightarrow x_1 u_1 u_4 y_2 \in \mathcal{C}'_\Pi^{L+1}) \\
&\wedge \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \forall L \in \{2, \dots, n\}. (i, L) \in \mu. \\
&\quad \forall (u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2)) \in R_i. \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in V^*. \text{tar}_2 = \text{in}_L. \\
&\quad ((x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1}) \rightarrow y_1 u_3 u_2 x_2 \in \mathcal{C}'_\Pi^{L+1})
\end{aligned}$$

Da für jede mögliche Ableitung eine entsprechende Tableauregel existiert und infolge der Definition jeder Knoten ableitbar ist, gilt die Vollständigkeit des Tableaubeweisverfahrens.  $\square$

### Satz 5.7 (Korrektheit des Tableaubeweisverfahrens)

Seien  $\Pi$  ein beliebiges ESP-System mit  $n$  Membranen und der Membranstruktur  $\mu$ , ein beliebiges  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ ,  $w$  ein frei gewähltes Wort und  $w \in \mathcal{C}_\Pi^i$  ein ableitbarer Knoten im Tableau. Das gegebene Tableaubeweisverfahren ist korrekt, d. h. für diesen ableitbaren Knoten gilt  $\exists \mathcal{C}_\Pi. \mathcal{C}_\Pi^{(0)} \vdash_\Pi^* \mathcal{C}_\Pi. w \in \mathcal{C}_\Pi^i$ .  $\diamond$

### Beweis 5.7 (Satz 5.7)

Zum Nachweis der Korrektheit des Tableaubeweisverfahrens ist die Korrektheit der Anwendung jeder Tableauregel für einen ableitbaren Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Pi^j$  zu zeigen.

Aufgrund der Definition eines ableitbaren Knotens folgt somit für  $w \in \mathcal{C}_\Pi^j$  die Anwendbarkeit mindestens eine der folgenden Regeln

- $(i, w)$ , woraus folgt, dass  $w$  ein Axiom der  $i$ ten Membran ist und damit mit  $j = i + 1$  aufgrund der Persistenz auch  $w \in \mathcal{C}_\Pi^j$  gilt, oder
- $(r_{\text{in}}^{1,i})$ , woraus einerseits die Ableitbarkeit der Knoten  $x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1}$  und  $y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1}$  mit  $(i, j + 1) \in \mu$  sowie unter Annahme der Korrektheit auch  $\exists \mathcal{C}_\Pi. \mathcal{C}_\Pi^{(0)} \vdash_\Pi^* \mathcal{C}_\Pi. (x_1 u_1 u_2 x_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1} \wedge y_1 u_3 u_4 y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{i+1})$  und andererseits die Existenz einer Entwicklungsregel  $(u_1 \# u_2 \$ u_3 \# u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2))$  mit  $\text{tar}_1 = \text{in}$  folgt. Somit gilt auch  $(w, \text{in}) \in \zeta(\mathcal{C}_\Pi^{i+1}, R_i)$  und wegen der nichtdeterministischen Verteilung gegebenenfalls auch  $w \in \mathcal{C}_\Pi^j$ .

- $(r_{\text{in}}^{4,i})$ ; dieser Fall gilt analog zu  $(r_{\text{in}}^{1,i})$ , jedoch für  $w = y_1u_3u_2x_2$  und  $\text{tar}_2 = \text{in}$ .
- $(r_{\text{out}}^{2,i})$ , wodurch einerseits die Ableitbarkeit der Knoten  $x_1u_1u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}$  und  $y_1u_3u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}$  mit  $i = 1$ , falls  $j = 1$ , sonst  $(j + 1, i) \in \mu$ , sowie unter Annahme der Korrektheit auch  $\exists \mathcal{C}_{\Pi} \cdot \mathcal{C}_{\Pi}^{(0)} \vdash_{\Pi}^* \mathcal{C}_{\Pi} \cdot (x_1u_1u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1} \wedge y_1u_3u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1})$  und andererseits die Existenz einer Entwicklungsregel  $(u_1\#u_2\$u_3\#u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2))$  mit  $\text{tar}_1 = \text{out}$  folgt. Deshalb gilt  $(w, \text{out}) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}, R_i)$  und somit auch  $w \in \mathcal{C}_{\Pi}^j$  mit  $\mathcal{C}_{\Pi} \vdash_{\Pi} \mathcal{C}_{\Pi}'$ .
- $(r_{\text{out}}^{5,i})$ , wodurch sich die gleiche Folgerung, wie für  $(r_{\text{out}}^{2,i})$ , jedoch mit  $w = y_1u_3u_2x_2$  und  $\text{tar}_2 = \text{out}$ , ergibt.
- $(r_{\text{here}}^{3,i})$  und daraus resultiert die Ableitbarkeit der Knoten  $x_1u_1u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^j$  und  $y_1u_3u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^j$  und mit der Annahme der Korrektheit auch  $\exists \mathcal{C}_{\Pi} \cdot \mathcal{C}_{\Pi}^{(0)} \vdash_{\Pi}^* \mathcal{C}_{\Pi} \cdot (x_1u_1u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1} \wedge y_1u_3u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1})$ . Da für jede Regel  $(r_{\text{here}}^{3,i})$  eine Entwicklungsregel  $(u_1\#u_2\$u_3\#u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2))$  mit  $\text{tar}_1 = \text{here}$  in  $R_i$  existiert, folgt  $(w, \text{here}) \in \varsigma(\mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}, R_i)$  und damit  $w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}$  mit  $w = x_1u_1u_4y_2$ .
- $(r_{\text{here}}^{6,i})$  mit der gleichen Folgerung, wie für  $(r_{\text{here}}^{3,i})$ , jedoch mit  $w = y_1u_3u_2x_2$  und  $\text{tar}_2 = \text{here}$ .

Beziehungsweise für Systeme mit gerichteter Kommunikation:

- $(r_{\text{in}_L}^{1,i})$ , und folglich gilt die Ableitbarkeit der Knoten  $x_1u_1u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^j$  und  $y_1u_3u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^j$ . Infolge der Annahme gilt wiederum  $\exists \mathcal{C}_{\Pi} \cdot \mathcal{C}_{\Pi}^{(0)} \vdash_{\Pi}^* \mathcal{C}_{\Pi} \cdot (x_1u_1u_2x_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1} \wedge y_1u_3u_4y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1})$  und die Existenz einer Entwicklungsregel  $(u_1\#u_2\$u_3\#u_4, (\text{tar}_1, \text{tar}_2))$ ,  $\text{tar}_1 = \text{in}_L$  mit  $(i, L) \in \mu$ , und damit auch  $w \in \mathcal{C}_{\Pi}^{i+1}$ .
- $(r_{\text{in}_L}^{4,i})$ , analog zu  $(r_{\text{in}_L}^{1,i})$ , jedoch mit  $w = y_1u_3u_2x_2$  und  $\text{tar}_2 = \text{in}_L$ .

□

### Korollar 5.1 (Entscheidbarkeit des Tableaubeweisverfahrens)

Da das angegebene Tableaubeweisverfahren ein Verfahren zur Lösung des Wortproblems darstellt, jedoch Satz 5.5 gilt, folgt unmittelbar, dass das Tableaubeweisverfahren nicht entscheidbar ist. ◇

Vergleichbar mit den Tableaubeweisverfahren für TT-EH- und TVDH-Systeme kann auch in diesem Fall der Nachweis der Nichtableitbarkeit einer

**Tableauregeln 5.3**

$$\begin{array}{c}
\text{(\wedge-ELIM}_R\text{)} \\
\frac{\delta_1(A \wedge B) \quad \pi_2(A \wedge B)}{A \wedge B}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{(\wedge-ELIM}_L\text{)} \\
\frac{\pi_1(A \wedge B) \quad \delta_2(A \wedge B)}{A \wedge B}
\end{array}$$

mit  $A \wedge B = \{(a \wedge b) \mid a \in A, b \in B\}$ ,  $\pi_1(A \wedge B) = \{a \mid (a \wedge b) \in A \wedge B\}$ ,  $\pi_2(A \wedge B) = \{b \mid (a \wedge b) \in A \wedge B\}$  und  $\delta_1(A \wedge B) = \{a \mid \exists b \in B. ((a \wedge b) \in A \wedge B. b \text{ ist ableitbar})\}$ ,  $\delta_2(A \wedge B) = \{b \mid \exists a \in A. ((a \wedge b) \in A \wedge B. a \text{ ist ableitbar})\}$

Menge von Wörtern durch eine Modifikation des Beweisverfahrens gleichzeitig geführt werden. Um nachzuweisen, dass für eine Menge von Wörtern  $T$  für jedes Element  $w \in T$  die jeweiligen Knoten  $w \in \mathcal{C}_{\Pi}^i$  nicht ableitbar sind, wird im modifizierten Beweissystem zunächst ein Knoten durch  $w \in \mathcal{C}_{\Pi}^i, w \in T$  bzw.  $(w_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^i \wedge w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^i), w_1 \in T_1, w_2 \in T_2$  für ein beliebiges  $i$  und die Sprachen  $T_1, T_2$  definiert. Ein jeweiliger Knoten ist ein ableitbarer bzw. nicht ableitbarer Terminalknoten, falls für jedes  $w \in T$  der Knoten  $w \in \mathcal{C}_{\Pi}^i$  ein ableitbarer bzw. nicht ableitbarer Terminalknoten ist. Ein Knoten ist partiell ableitbar, falls eine disjunkte, jeweils nicht leere Zerlegung des Knotens in einen ableitbaren Terminal- bzw. Nichtterminalknoten und einen nicht ableitbaren Terminal- bzw. Nichtterminalknoten existiert, wobei ein Nichtterminalknoten mindestens ein Element besitzt, auf das eine von  $(a, i)$  verschiedene Tableauregel anwendbar ist. Eine Ableitung im Tableau ist die Anwendung aller möglichen Tableauregeln auf einen Knoten  $w \in \mathcal{C}_{\Pi}^i, w \in T$ . Für einen Nichtterminalknoten  $(w_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^i \wedge w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^i), w_1 \in T_1, w_2 \in T_2$  wird die entsprechende Menge der Tableauregeln durch die Tableauregeln 5.3 erweitert. Eine Menge von Wörtern in einem gegebenen ESP-System  $\Pi$  ist genau dann nicht ableitbar, falls der entsprechende Knoten im Tableau nicht partiell ableitbar ist.

**5.5 Formale Verifikation grammatikbasierender ESP-Systeme**

Zum Nachweis der Korrektheit und Vollständigkeit von ESP-Systeme mit universeller Berechnungsstärke lassen sich die in den Abschnitten 5.3 und 5.4 definierten Ansätze nicht unmittelbar anwenden, da diese Systeme in ihren Komponenten unterspezifiziert sind. Im Folgenden wird durch Modifikation des im vorhergehenden Abschnitt eingeführten Tableaubeweisverfahrens ein Verfahren zur Prüfung der Korrektheit und Vollständigkeit grammatikbasierender, endlichkomponentiger, endenmarkierter Splicing-Membran-Systeme definiert, welche auf der Simulation der Wortableitung unter Zugrundele-



gung einer Grammatik basieren. Ein entsprechendes ESP-System ist genau dann korrekt, wenn jedes durch das System erzeugte Wort auch zu der von der Grammatik erzeugten Sprache gehört, bzw. vollständig, wenn jedes Wort der durch die Grammatik erzeugten Sprache auch durch das ESP-System erzeugt werden kann. Für eine Grammatik  $G$  und ein ESP-System  $\Pi$  also  $L(\Pi) \subseteq L(G)$  bzw.  $L(G) \subseteq L(\Pi)$  gilt. Für ein korrektes und vollständiges System gilt somit  $L(G) = L(\Pi)$ .

### 5.5.1 Korrektheit

Die Korrektheit eines auf einer Chomsky-Grammatik  $G = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  basierenden ESP-Systems  $\Pi$  mit  $n$  Membranen, die o. B. d. A. fortlaufend von  $1, \dots, n$  nummeriert sind, wird durch den Nachweis  $L(\Pi) \subseteq L(G)$  bewiesen. Da  $L(\Pi) = \Sigma^+ \cap \{w \in \mathcal{E} \mid \exists (\mathcal{E}, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n). ((\emptyset, M_1, \dots, M_n) \vdash_{\Pi}^* (\mathcal{E}, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n))\}$  gilt, ist zu zeigen, dass jedes Wort über dem Terminalalphabet  $\Sigma$  in der ersten Komponente einer Konfiguration auch ein Wort der durch die Grammatik beschriebenen Sprache ist. Für die Alphabete  $\mathcal{P} \subseteq V$  und  $\mathcal{S} \subseteq V$  ist das System  $\Pi$  endenmarkiert bzw.  $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ -markiert.

Unter Verwendung des Tableaubeweisverfahrens wird zunächst für jedes  $w \in \Sigma^+$  die Ableitbarkeit des Knotens  $w \in \mathcal{C}_{\Pi}^1$  geprüft. Für jeden ableitbaren Knoten ist im Anschluss einerseits zu prüfen, ob mindestens ein ableitbarer Terminalknoten die Startvariable  $S_G$  der Grammatik  $G$  repräsentiert, andererseits, ob die entsprechende Folge von Ableitungsschritten in  $\Pi$ , beschrieben durch die jeweiligen Knoten im Tableau, einer Ableitung der Grammatik entspricht.

Für eine bijektive Kodierungsfunktion  $\text{cod} : (V_G \cup \Sigma) \rightarrow V^+$ , welche jedem Symbol der Alphabete der Grammatik eineindeutig eine Zeichenreihe über dem Alphabet des ESP-Systems zuordnet, und das das linke Wortende markierende Symbol  $B \in V$  mit  $B \notin (V_G \cup \Sigma)$ , ist für ein  $\mathcal{P}, \mathcal{S}$ -markiertes System eine partielle Normierungsfunktion  $\text{norm} : \subseteq V^+ \rightarrow V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*$  gegeben mit

$$\text{norm}(a) = \begin{cases} \gamma'(w) & \text{für } w \in \varphi^{\circ}(\rho(a)) \wedge w \in \gamma(\{B\} \cdot (V_G \cup \Sigma)^+) \\ \perp & \text{falls kein derartiges } w \text{ existiert.} \end{cases}$$

Die Funktionen  $\rho, \gamma, \gamma'$  sind definiert mit

$$\rho(a) = \begin{cases} \rho(\text{suf}^{|a|-1}(a)) & \text{falls } \text{pre}^1(a) \in \mathcal{P} \\ \rho(\text{pre}^{|a|-1}(a)) & \text{falls } \text{suf}^1(a) \in \mathcal{S} \\ a & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\gamma(w) = \begin{cases} \{w, \text{cod}(w)\} & \text{falls } w \in (V_G \cup \Sigma \cup \{B\}) \\ \gamma(w_1) \cdot \gamma(w_2) & \text{falls } w = w_1 \cdot w_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \gamma'(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \gamma'(a \cdot w) &= \begin{cases} a \cdot \gamma'(w) & \text{falls } a \in (V_G \cup \Sigma) \\ \gamma'(w) & \text{falls } a = B \\ b \cdot \gamma'(w) & \text{falls } a = \text{cod}(b). \end{cases} \end{aligned}$$

Ausgehend von einem ableitbaren Wurzelknoten  $k_1$  mit  $w_1 \in \mathcal{C}_\Pi^1$  und  $w_1 \in \Sigma$  ist eine Ableitung *korrekt*, falls diese einen Terminalknoten  $k_m, m \geq 2$  besitzt, für den eine anwendbare Tableauregel  $(a, i)$  mit  $\text{norm}(a) = S_G$  existiert, und auf dem Pfad von  $k_1$  zu  $k_m$  mit  $m \in \mathbb{N}^+, m \geq 2$  Knoten  $k_j : w_j \in \mathcal{C}_\Pi^{c_j}$  mit  $j \in \{2, \dots, m-1\}, c_j \in \{1, \dots, n\}$  existieren, so dass  $\text{norm}(a) \xrightarrow*_G \dots \xrightarrow*_G \text{norm}(w_j) \xrightarrow*_G \dots \xrightarrow*_G w_1$ .

Der Verifikationsansatz ermöglicht weiterhin für den Fall, dass das zu untersuchende System nicht korrekt ist, die Ausgabe eines fehlerhaften, d. h. nicht korrekten, Pfades. Somit lässt sich unmittelbar ein Gegenbeispiel generieren.

### Satz 5.8

Sei  $\Pi$  ein universelles, grammatikbasierendes ESP-System, welches die Wortableitung durch Anwendung einer gegebenen Grammatik simuliert. Das System  $\Pi$  ist korrekt, falls für eine beliebige Konfiguration  $\mathcal{C}_\Pi$  und jedes Wort  $w \in \Sigma^+$  der Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Pi^1$  eine korrekte Ableitung im Tableaubeweisverfahren besitzt.  $\diamond$

### Beweis 5.8 (Satz 5.8)

Aufgrund der Vollständigkeit des Beweisverfahrens (Satz 5.6) existiert kein Wort  $w \in \Sigma^+$  mit  $w \in L(\Pi)$ , so dass  $w \in \mathcal{C}_\Pi^1$  für eine Konfiguration  $\mathcal{C}_\Pi$  keinen ableitbaren Knoten besitzt. Da für jeden ableitbaren Knoten  $k_1$  mit einer korrekten Ableitung  $\text{norm}(a) \xrightarrow*_G \dots \xrightarrow*_G \text{norm}(w_j) \xrightarrow*_G \dots \xrightarrow*_G w$  mit  $\text{norm}(a) = S_G$  gilt, folgt  $S_G \xrightarrow*_G w$  mit  $w \in \Sigma^+$  und nach Definition  $w \in L(G)$ .  $\square$

Zum Nachweis der universellen Berechnungsstärke von Splicing-Membran-Systemen mit eingeschränkten Entwicklungsregelmengen wurde in [Pău02] das System  $\mathcal{M} = \text{ELSP}_2(\text{spl}, \text{in}, (1, 2, 2, 1))$  definiert und ein Beweis der Vollständigkeit und Korrektheit des Systems angegeben. Dabei wurde durch Anführung aller möglichen Ableitungen in einem Top-Down-Ansatz, d. h. ausgehend von den Axiomen des Systems, gezeigt, dass für jede Chomsky-Typ-0-Grammatik in Kuroda-Normalform das System genau die durch die Grammatik beschriebene Sprache erzeugt. Um dieses Resultat zu bestätigen, wurde der in Anhang F gegebene Tableaubeweis mit der vorhergehend definierten Beweismethode geführt. Diese Überprüfung des Systems ergab jedoch, dass der in [Pău02] geführte Beweis nicht vollständig ist. Wie in Satz 5.9 formalisiert, kann die Korrektheit des Systems widerlegt werden. Der Beweis dieses

Satzes kann einerseits durch Spezifikation einer nicht korrekten Ableitung im Tableau im Beweis 5.9 andererseits durch ein entsprechendes Gegenbeispiel, wie in Beispiel 5.2, gegeben werden.

### Satz 5.9 (Korrektheit des Systems $\mathcal{M}$ )

Das universelle, grammatikbasierende ESP-System  $\mathcal{M}$  ist nicht korrekt, d. h. es existiert eine Grammatik  $G_{KNF}$ , so dass  $L(G_{KNF}) \neq L(\mathcal{M}(G_{KNF}))$ .  $\diamond$

### Beweis 5.9 (Satz 5.9)

Seien  $G_{KNF} = (V_G, \Sigma, P_G, S_G)$  eine Grammatik,  $B$  ein Symbol mit  $B \notin (V_G \cup \Sigma)$ ,  $\mathcal{A} = V_G \cup \Sigma \cup \{B\}$ ,  $P_\alpha = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ ,  $P_{CS} = \{(u, v) \mid (u, v) \in P_G, |u| = 2\} = \{(u_{n+1}, v_{n+1}), \dots, (u_{n+m}, v_{n+m})\}$ ,  $P_{CF} = P_G \setminus P_{CS}$ ,  $P = P_G \cup P_\alpha$ ,  $\{(u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)\} = P_\alpha \cup P_{CF}$  und  $\mathcal{P} = \{Z_{Y_i}, X_1, Z_{Y'_i}, Z'_{Y_1}, X_1, Z_\varepsilon, Z'_{Y_2}, X, X_2, Z_Y\}$ ,  $\mathcal{S} = \{Y, Z'_{X_2}, Y'_i, Y_2, Z_X, Z'_\varepsilon, Y_1, Z_{X_i}, Z'_{X_1}, Y_2\}$  mit  $i \in \{1, \dots, n+m\}$ ,  $\text{Pre} = \mathcal{P}^1$  und  $\text{Suf} = \mathcal{S}^1$  zwei formale Sprachen und  $V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}} = V \setminus (\mathcal{P} \cup \mathcal{S})$ , dann ergeben sich mit  $\mathcal{PV} = \text{Pre} \cdot V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*$  und  $\mathcal{SV} = V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \text{Suf}$  die in Anhang F aufgeführten Tableauregelmengen. Seien weiterhin  $M = (M_1 \cup M_2 \cup \{Z'_{Y_2} Y_1, Z_Y Y_2\} \cup \{X Z_{X_i}, X_2 b Z'_{X_1} \mid i \in \mathbb{N}_{n+m}^+\})$ ,  $R = \{Z'_{X_2}, Z_X, Z'_{X_1}, Z_{X_i}, Z'_\varepsilon \mid i \in \{1, \dots, n+m\}\}$  und  $S = \{Z'_{Y_1}, Z_{Y_i}, Z_{Y'_i}, Z'_{Y_2}, Z_Y, Z_\varepsilon \mid i \in \{1, \dots, n+m\}\}$ , dann wird ausgehend von einem Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Pi^1$ ,  $w \in \Sigma^+$  das entsprechende Tableau erzeugt. Aus Tableau 26 und Tableau 25 folgt, dass jedes Wort  $w$  über  $\Sigma$  aus einem Wort  $XwBY$  in der Hauptmembran abgeleitet wird. Aus den Tableaus 24–9 kann mit  $i, k \in \{1, \dots, n\}$  im Tableau unter anderem die Ableitungsfolge

$$\begin{aligned} Xv_i w Y \in \mathcal{C}_\Pi^2 &\rightarrow \dots \rightarrow X_2 b^{k+1} v_i w b^k Y_1 \in \mathcal{C}_\Pi^3 \rightarrow X_2 b^{k+1} v_i w u_k Y \in \mathcal{C}_\Pi^2 \rightarrow \\ X_2 b^{k+1} v_i w u_k Y_2 &\in \mathcal{C}_\Pi^3 \rightarrow X_2 b^{k+1} v_i w u_k Y_1 \in \mathcal{C}_\Pi^3 \rightarrow \dots \rightarrow \\ X_2 b^i v_i w u_k b^{i-k-1} Y_1 &\in \mathcal{C}_\Pi^3 \rightarrow X_2 b^i v_i w u_k b^{i-k} Y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^2 \rightarrow \\ X_1 b^i v_i w u_k b^{i-k} Y_2 &\in \mathcal{C}_\Pi^2 \rightarrow X w u_k b^{i-k} Y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^3 \rightarrow X w u_k b^{i-k} Y_1 \in \mathcal{C}_\Pi^3 \rightarrow \\ X w u_k u_{i-k} Y &\in \mathcal{C}_\Pi^2 \end{aligned}$$

hergeleitet werden, wobei in dieser Folge kein Knoten  $\kappa$  mit  $\text{norm}(\kappa) \xrightarrow{*}_G \text{norm}(Xv_i w Y)$  existiert. Unter Berücksichtigung der gleichen Tableaus existiert jedoch mit der erfüllbaren Annahme  $S_G \xrightarrow{*}_G \text{norm}(X w u_k u_{i-k} Y)$  auch die Ableitung

$$X w u_k u_{i-k} Y \in \mathcal{C}_\Pi^2 \rightarrow \dots \rightarrow X B S_G Y \in \mathcal{C}_\Pi^2.$$

Da ein ableitbarer Knoten  $w \in \mathcal{C}_\Pi^1$ ,  $w \in \Sigma^+$  mit einer nicht korrekten Ableitung existiert, ist das ESP-System nicht korrekt.  $\square$

### Beispiel 5.2

Für die Chomsky-Grammatik  $G_{KNF} = (\{S_G, A, C, a, c\}, \{a, c\}, \{(A, a), (C, c), (S_G, AC)\}, S_G)$  in Kuroda-Normalform ist das System  $\Pi = \mathcal{M}(G_{KNF})$  mit

$P_\alpha = \{(a, a)_1, (c, c)_2, (A, A)_3, (C, C)_4, (S_G, S_G)_5, (B, B)_6\}$ ,  $P_{CF} = \{(A, a)_7, (C, c)_8\}$ ,  $P_{CS} = \{(S_G, AC)_9\}$  und den in Definition 5.5 spezifizierten Komponenten gegeben. Aufgrund der Existenz einer Konfiguration  $\mathcal{C}_\Pi^{(i)}$  mit  $i \in \mathbb{N}^+$  und  $\mathcal{C}_\Pi^{(0)} \vdash_\Pi^+ \mathcal{C}_\Pi^{(i)}$  sowie mit  $\mathcal{C}_\Pi^{(i)} \vdash_\Pi \mathcal{C}_\Pi^{(i+1)}$  ergibt sich eine Ableitungsfolge

$$\begin{aligned} XBS_GY &\in \mathcal{C}_\Pi^{(0),2}, XBacY \in \mathcal{C}_\Pi^{(i),2}, X Bab^2Y_1 \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+1),3}, X Bab^2Y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+2),3}, \\ X_1b^3ABab^2Y_2 &\in \mathcal{C}_\Pi^{(i+3),2}, X_2b^3ABab^2Y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+4),2}, X_2b^3ABabY_1 \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+4),3}, \\ X_2b^3ABabY_2 &\in \mathcal{C}_\Pi^{(i+5),3}, X_1b^2ABabY_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+6),2}, X_2b^2ABabY_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+7),2}, \\ X_2b^2ABaY_1 &\in \mathcal{C}_\Pi^{(i+8),3}, X_2b^2ABaY_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+9),3}, X_2b^2ABaY \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+10),2}, \\ X_2b^2ABbY_1 &\in \mathcal{C}_\Pi^{(i+11),3}, X_2b^2ABbY_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+12),3}, X_1bABbY_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+13),2}, \\ X_2bABbY_2 &\in \mathcal{C}_\Pi^{(i+14),2}, X_2bABY_1 \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+15),3}, X_2bABY_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+16),3}, \\ X_1ABY_2 &\in \mathcal{C}_\Pi^{(i+17),2}, XABY_2 \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+18),3} \text{ und } XABY \in \mathcal{C}_\Pi^{(i+19),2}. \end{aligned}$$

Infolge der Existenz einer Konfiguration  $\mathcal{C}'_\Pi$  mit  $\mathcal{C}_\Pi^{(i+19)} \vdash_\Pi^* \mathcal{C}'_\Pi$  und  $a \in \mathcal{C}'_\Pi$  gilt  $a \in L(\mathcal{M}(G_{KNF}))$ . Da  $a \notin L(G_{KNF})$  folgt  $L(G) \neq L(\mathcal{M}(G_{KNF}))$ .  $\diamond$

Durch die Modifikation von drei Entwicklungsregeln und Hinzufügung von jeweils zwei neuen Axiomen pro Komponente und insgesamt vier Entwicklungsregeln können die im Tableaubeweis gefundenen Fehler beseitigt werden. Die notwendigen Erweiterungen sind in Definition 5.7 gegeben. Aufgrund der in Satz 5.10 gegebenen Korrektheit und in Satz 5.12 gegebenen Vollständigkeit des modifizierten Systems gilt Satz 5.3.1 aus [Přau02], da auch das erweiterte System einen Durchmesser (1, 2, 2, 1) besitzt.

### Definition 5.7

Die im Tableaubeweis des universell berechenbaren ESP-Systems  $\mathcal{M}$  aus Definition 5.5 gefundene Inkorrektheit kann durch die folgende Modifikation beseitigt werden. Sei  $\mathcal{M}(G_{KNF}) = (V, \Sigma, \mu, M_1, M_2, R_1, R_2)$ , dann ergibt sich das System  $\mathcal{M}'(G_{KNF}) = (V, \Sigma, \mu, M'_1, M'_2, R'_1, R'_2)$  mit

$$\begin{aligned} M'_1 &= M_1 \cup \{Z_{Y''}Y'', X'Z_{X'}\} \\ M'_2 &= M_2 \cup \{Z_{Y'}Y', X''Z_{X''}\} \\ R'_1 &= (R_1 \setminus \{r_6\}) \cup \{r'_6, r'_{10}, r'_{11}\} \\ R'_2 &= (R_2 \setminus \{r_9, r_{12}\}) \cup \{r'_9, r'_{12}, r'_{13}, r'_{14}\} \text{ mit } \forall \alpha \in (V_G \cup \Sigma \cup \{B\}) \text{ und} \\ &\quad \begin{array}{ccc} \begin{array}{c|c} \varepsilon & Z_{X'} \text{ (in)} \\ \hline X_1 & \alpha \text{ (out)} \end{array} & \begin{array}{c|c} \alpha & Y' \text{ (here)} \\ \hline Z_{Y''} & \varepsilon \text{ (out)} \end{array} & \begin{array}{c|c} \varepsilon & Z_X \text{ (here)} \\ \hline X'' & \alpha \text{ (out)} \end{array} \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} (r'_9) \\ \hline b \mid Y_1 \text{ (here)} \\ Z'_{Y_2} \mid \varepsilon \text{ (out)} \end{array} & 
\begin{array}{c} (r'_{12}) \\ \hline \alpha \mid Y_1 \text{ (here)} \\ Z_{Y'} \mid \varepsilon \text{ (out)} \end{array} & 
\begin{array}{c} (r'_{13}) \\ \hline \varepsilon \mid Y'' \text{ (out)} \\ Z_Y \mid \varepsilon \text{ (out)} \end{array} \\
\\
\begin{array}{c} (r'_{14}) \\ \hline \varepsilon \mid Z_{X''} \text{ (here)} \\ X' \mid \alpha \text{ (out)} \end{array} & & 
\end{array} \quad \diamond$$

**Satz 5.10 (Korrektheit  $\mathcal{M}'$ )**

Sei  $G_{KNF}$  eine beliebige Chomsky-Grammatik in Kuroda-Normalform, so gilt  $L(\mathcal{M}'(G_{KNF})) \subseteq L(G_{KNF})$ , d. h. das universelle ESP-System  $\mathcal{M}'$  ist korrekt.  $\diamond$

**Beweis 5.10 (Satz 5.10)**

Die Korrektheit des universell berechenbaren ESP-Systems  $\mathcal{M}$  kann mithilfe des Tableaubeweisverfahrens gezeigt werden. Ausgehend von einem ableitbaren Knoten  $w \in \mathcal{C}_{\Pi}^1$ ,  $w \in \Sigma^+$  folgt die Korrektheit aller Ableitungen und damit die Korrektheit des Systems, unabhängig von der zugrunde liegenden Grammatik.  $\square$

**5.5.2 Vollständigkeit**

Zum Nachweis der Vollständigkeit eines universellen, grammatikbasierenden ESP-Systems  $\Pi$  ist für jede Grammatik  $G$  zu zeigen, dass jedes Wort der durch  $G$  beschriebenen Sprache durch das System  $\Pi$  erzeugt werden kann, formal  $L(G) \subseteq L(\Pi)$ . Nachfolgend wird die Vollständigkeit einerseits des Systems  $\mathcal{M}$  aus Definition 5.5 in Satz 5.11 andererseits des modifizierten Systems  $\mathcal{M}'$  aus Definition 5.7 in Satz 5.12 bewiesen.

**Hilfssatz 5.1**

Sei  $G_{KNF}$  eine Grammatik in Kuroda-Normalform und  $\Pi = \mathcal{M}(G_{KNF})$  das auf  $G_{KNF}$  basierende ESP-System nach Definition 5.5, dann gilt mit  $\mathcal{A} = V_G \cup \Sigma \cup \{B\}$  die Aussage  $\forall \alpha \in \mathcal{A}. \forall w \in \mathcal{A}^+. \forall \mathcal{C}_{\Pi}. \exists \mathcal{C}'_{\Pi}. \mathcal{C}_{\Pi} \vdash_{\Pi}^+ \mathcal{C}'_{\Pi}. (Xw\alpha Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \rightarrow X\alpha w Y \in \mathcal{C}'_{\Pi}{}^2)$ .  $\diamond$

**Beweis 5.11 (Hilfssatz 5.1)**

Für jedes Symbol  $\alpha \in (V_G \cup \Sigma \cup \{B\})$  existiert eine Ableitungsregel  $(\alpha, \alpha)_i \in P_{\alpha}$  mit  $1 \leq i < n$ . Durch sequentielle Anwendung der Entwicklungsregeln  $r_1^i, r_9, r_{10}^i$  gilt für die resultierende Konfiguration  $\mathcal{C}'_{\Pi}$ , dass  $X_1 b^i \alpha w b^i Y_2 \in \mathcal{C}'_{\Pi}$ . Durch wiederholte Anwendung der Regelsequenz  $r_4, r_5, r_9, r_{11}$  folgt eine Konfiguration  $\mathcal{C}''_{\Pi}$  mit  $X_1 \alpha w Y_2 \in \mathcal{C}''_{\Pi}$ . Die Entwicklungsregeln  $r_6$  und  $r_{12}$  komplettieren die Rotation.  $\square$

**Hilfssatz 5.2**

Sei  $G_{KNF}$  eine Grammatik in Kuroda-Normalform und  $\Pi = \mathcal{M}(G_{KNF})$  das auf  $G_{KNF}$  basierende ESP-System nach Definition 5.5, dann gilt mit  $\mathcal{A} = V_G \cup \Sigma$  die Aussage  $\forall (u, v) \in P_G. \forall w_1, w_2 \in \mathcal{A}^*. \forall \mathcal{C}_\Pi. \exists \mathcal{C}'_\Pi. \mathcal{C}_\Pi \vdash_\Pi^+ \mathcal{C}'_\Pi. (XBw_1uw_2Y \in \mathcal{C}_\Pi^2 \rightarrow XBw_1vw_2Y \in \mathcal{C}'_\Pi^2)$ .  $\diamond$

**Beweis 5.12 (Hilfssatz 5.2)**

Sei  $XBw_1uw_2Y$  ein Wort in der zweiten Komponente einer Konfiguration  $\mathcal{C}_\Pi$  mit  $w_1, w_2 \in (V_G \cup \Sigma)^*$  und  $(u, v) \in P_G$ . Durch die in Beweis 5.11 beschriebene Rotation kann zunächst das Teilwort  $w_2$  an den Wortanfang rotiert werden. Für die kontextfreie Regel  $(u, v)_i \in P$  mit  $|V_G \cup \Sigma \cup \{B\}| < i \leq n$  wird durch Anwendung der Entwicklungsregel  $r_1^i$  das Teilwort  $u$  am rechten Wortende durch  $b^i$  ersetzt und anschließend mittels  $r_9$  und  $r_{10}^i$  das Teilwort  $b^i v$  an den Wortanfang gesetzt. Für eine kontextsensitive Regel  $(u_1 u_2, v)_i \in P$  mit  $n+1 \leq i \leq n+m$  wird diese Modifikation durch die Entwicklungsregelsequenz  $r_2^i, r_3^i, r_9, r_{10}^i$  erreicht. Durch wiederholte Anwendung der Regelsequenz  $r_4, r_5, r_9, r_{11}$  folgt eine Konfiguration  $\mathcal{C}'_\Pi$  mit  $X_1 v w_2 B w_1 Y_2 \in \mathcal{C}'_\Pi^2$  und mittels  $r_6$  und  $r_{12}$  außerdem  $X v w_2 B w_1 Y \in \mathcal{C}''_\Pi^2$  mit  $\mathcal{C}'_\Pi \vdash_\Pi^+ \mathcal{C}''_\Pi$ . Die Rotation des Teilwortes  $B w_1$  nach der in Beweis 5.11 beschriebenen Methode ergibt die Existenz von  $\mathcal{C}'''_\Pi$  mit  $\mathcal{C}''_\Pi \vdash_\Pi^+ \mathcal{C}'''_\Pi$  und  $XBw_1vw_2Y \in \mathcal{C}'''_\Pi^2$ .  $\square$

**Satz 5.11 (Vollständigkeit des Systems  $\mathcal{M}$ )**

Sei  $G_{KNF}$  eine Grammatik in Kuroda-Normalform und  $\Pi = \mathcal{M}(G_{KNF})$  das auf  $G_{KNF}$  basierende ESP-System, dann gilt  $\forall w \in L(G_{KNF}). \exists \mathcal{C}'_\Pi. \mathcal{C}_\Pi^{(0)} \vdash_\Pi^+ \mathcal{C}'_\Pi. w \in \mathcal{C}'_\Pi^1$ , d. h.  $L(G_{KNF}) \subseteq L(\Pi)$ .  $\diamond$

**Beweis 5.13 (Satz 5.11)**

Ausgehend von dem Axiom  $XBS_GY$  in der zweiten Komponente der initialen Konfiguration gilt aufgrund der Hilfssätze 5.1 und 5.2 für jedes  $w$  mit  $S_G \xrightarrow{+}_{G_{KNF}} w$  die Existenz einer Konfiguration  $\mathcal{C}'_\Pi$  mit  $XBwY \in \mathcal{C}'_\Pi^2$ . Durch Rotation des Teilwortes  $w$  an den Wortanfang und anschließende Anwendung der Regeln  $r_7$  und  $r_8$  folgt Satz 5.11.  $\square$

**Satz 5.12 (Vollständigkeit des Systems  $\mathcal{M}'$ )**

Sei  $G_{KNF}$  eine Grammatik in Kuroda-Normalform und  $\Pi = \mathcal{M}(G_{KNF})$  das darauf basierende ESP-System. Es gilt  $\forall w \in L(G_{KNF}). \exists \mathcal{C}'_\Pi. \mathcal{C}_\Pi^{(0)} \vdash_\Pi^+ \mathcal{C}'_\Pi. w \in \mathcal{C}'_\Pi^1$ , also  $L(G_{KNF}) \subseteq L(\Pi)$ .  $\diamond$

**Beweis 5.14 (Satz 5.12)**

Sei  $G_{KNF}$  eine beliebige Chomsky-Grammatik in Kuroda-Normalform und  $\Pi = \mathcal{M}'(G_{KNF})$  das auf der Grammatik basierende ESP-System. Die Hilfssätze 5.1 und 5.2 gelten analog für das System  $\mathcal{M}'(G_{KNF})$ , wobei jedoch in den jeweiligen Beweisen die Regelanwendung  $r_9$  mit  $r'_9$  bzw.  $r'_{12}$  ersetzt wird

und die Rotation eines Zeichens durch die Regelsequenz  $r'_{12}, r_{11}, r'_{10}, r'_6, r'_{14}, r'_{13}$  und  $r'_{11}$  vervollständigt wird. Somit gilt, ausgehend von dem Axiom  $XBS_GY$  in der ersten Membran, für jedes Wort  $w$  mit  $S_G \xrightarrow{+}_{G_{KNF}} w$  die Existenz der Konfiguration  $C'_{\Pi}, C''_{\Pi}$  mit  $XBwY \in C'^2_{\Pi}$  und  $XwBY \in C''^2_{\Pi}$ . Die sequentielle Anwendung der beiden Entwicklungsregeln  $r_7$  und  $r_8$  beweist Satz 5.12.  $\square$





## Zusammenfassung und Ausblick

Im Spektrum bisheriger Arbeiten zur formalen Analyse und Verifikation im Gebiet des molekularen Rechnens wurden in der vorliegenden Arbeit Ansätze für verteilte Splicing-Systeme definiert. Mithilfe dieser konnte das Model-Checking und die Definition von wechselseitigen Simulationsrelationen in bzw. zwischen entsprechenden Systemen erreicht werden. Weiterhin konnte auf diese Weise der Beweis bzw. Gegenbeweis bezüglich der Korrektheit und Vollständigkeit dieser Systeme, die möglicherweise universelle Berechnungsstärke besitzen, erbracht werden. Die Verfahren wurden dabei für die verteilten kommunizierenden Splicing-Systeme und die zeitgesteuerten verteilten Splicing-Systeme mit dynamischen Splicing-Regeln als Vertreter des Berechnungskonzeptes *in vitro* sowie für die Splicing-Membran-Systeme als Vertreter des *in-vivo*-Computing eingeführt und angewandt.

Sowohl für die verteilten kommunizierenden Splicing-Systeme aus Kapitel 3 als auch für die zeitgesteuerten verteilten Splicing-Systeme mit dynamischen Splicing-Regeln aus Kapitel 4 und die Splicing-Membran-Systeme aus Kapitel 5 wurde zunächst eine strukturelle operationelle Semantik für eine jeweilige Teilmenge der Systeme definiert und als adäquat bewiesen, wobei die Aktionsmengen, d. h. die in einer Transition beobachtbaren Aktionen, den gleichen Typ besitzen. Die in dieser Arbeit definierte strukturelle operationelle Semantik ermöglicht die Korrelation zwischen der durch ein System erzeugten Sprache und dem beobachtbaren Verhalten dieses Systems, indem die durch das System induktiv generierte Sprache jeweils initial leer ist. Dies wird durch Beschränkung der Definition der Semantik auf TT-EH-Systeme mit einer leeren Splicing-Regel- und Axiomenmenge in der letzten Komponente und auf TVDH-Systeme mit einer zu der durch das System erzeugten Sprache disjunkten Axiomenmenge ermöglicht. Durch die Restriktion auf geschlossene ESP-Systeme mit gerichteter Kommunikation gilt auch in diesem Fall diese wechselseitige Beziehung. Mittels Model-Checking mithilfe der strukturellen operationellen Semantik können somit temporale Eigenschaften dieser Systeme nachgewiesen werden bzw. das paarweise wechselseitige Verhalten von Systemen gleicher sowie verschiedener Berechnungsparadigmen studiert

werden. So konnte jeweils für zwei verschiedene TT-EH-Systeme, ein TVDH-System sowie ein geschlossenes ESP-System, die schwache Bisimilarität, also das übereinstimmende beobachtbare Verhalten, bewiesen werden.

Der Beweis von Invarianten in einem System ist im Allgemeinen jedoch hierdurch nicht möglich. Um dies zu gewährleisten, wurde in den Abschnitten 3.4, 4.4 und 5.4 jeweils ein Tableaubeweissystem definiert. Für ein gegebenes System können mit terminierenden Tableaubeweisen Sicherheitseigenschaften bewiesen werden. Im Fall der Verletzung einer zu prüfenden Eigenschaft liefert der Verifikationsansatz einen Gegenbeweis in Form eines Pfades, welcher die Ableitung im System spezifiziert. Für zwei Beispielsysteme konnte auf diese Weise die Korrektheit bewiesen werden.

Neben Systemen zur Lösung spezifischer Aufgabenstellungen wurden in dieser Arbeit ebenfalls frei programmierbare Systeme mit möglicherweise universeller Berechnungsstärke vorgestellt. Diese basieren auf der Simulation der Wortableitung unter Zugrundelegung einer gegebenen Chomsky-Typ-0-Grammatik. Zum Nachweis der Korrektheit dieser grammatikbasierenden Systeme wurden die jeweiligen Tableaubeweisverfahren der entsprechenden Systemklassen in den Abschnitten 3.5, 4.5 und 5.5 modifiziert. Unter Verwendung dieser modifizierten Beweisverfahren konnte in dieser Arbeit erstmals die Korrektheit der grammatikbasierenden verteilten kommunizierenden Splicing-Systeme TT6 aus [HS04] und TT2 aus [HSV08] bewiesen werden. Für das grammatikbasierende zeitgesteuerte verteilte Splicing-System TVDH2 aus [MRV03] mit dynamischen Splicing-Regeln konnte der in der Literatur, basierend auf einem Top-Down-Ansatz, gegebene Korrektheitsbeweis bestätigt werden. Hingegen konnte der in [Pău02] gegebene Korrektheitsbeweis für das Splicing-Membran-System  $\mathcal{M} = \text{ELSP}_2(\text{spl}, \text{in}, (1, 2, 2, 1))$  mit universeller Berechnungsstärke mithilfe des Tableaubeweissystems widerlegt werden. Entgegen der Korrektheitsannahme ergab dieser eine Inkorrektheit des Systems, wobei anhand des erzeugten Tableaus ein Gegenbeispiel generiert werden konnte. Die universelle Berechnungsstärke von ESP-Systemen mit einem Diameter  $(1, 2, 2, 1)$  konnte jedoch durch Modifikation bestimmter Systemkomponenten und einem anschließenden Tableaubeweis in dieser Arbeit gezeigt werden, so dass Satz 5.3.1 aus [Pău02] gültig ist. Für jedes entsprechende grammatikbasierende System wurde in den Abschnitten 3.5.2, 4.5.2 sowie 5.5.2 ferner die Vollständigkeit bewiesen.

Aufgrund der Turing-Vollständigkeit verteilter Splicing-Systeme ist der Nachweis von Invarianten im Allgemeinen nicht entscheidbar, wobei beispielsweise in Satz 3.10 eine Einschränkung bezüglich der Splicing-Regeln eines Systems spezifiziert werden konnte, für welche das Problem entscheidbar ist. Einerseits bleibt jedoch zu untersuchen, für welche Restriktionen bezüglich der Splicing-Regeln, bzw. im Fall der verteilten kommunizierenden Splicing-Systeme sowie

der Splicing-Membran-Systeme auch der Filterregeln bzw. Zielinformationen, das Wortproblem entscheidbar ist. Andererseits bleibt für diese Teilklassen die beschriebene Sprachklasse bezüglich der Chomsky-Hierarchie zu bestimmen.

Für die TT-EH-Systeme kann eine Erweiterung der strukturellen operationellen Semantik analog für nicht restriktive Systeme definiert werden, wobei jedoch das beobachtbare Verhalten nicht zwangsläufig die initiale Axiomenmenge der letzten Komponente berücksichtigt. Entsprechend verhält sich die Situation bezüglich nicht restriktiver TVDH-Systeme. Abhängig von der zugrunde liegenden Definition des beobachtbaren Verhaltens kann die angegebene Semantik der geschlossenen Splicing-Membran-Systeme für offene Systeme modifiziert werden. Zur formalen Beschreibung und Analyse von Splicing-Membran-Systemen mit ungerichteter Kommunikation ist gegenwärtig keine strukturelle operationelle Semantik definiert.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Analyse- und Verifikationsansätze für die verteilten kommunizierenden Splicing-Systeme wurden jeweils für entsprechende Systeme mit Einfach-Splicing definiert. Es bleibt zu untersuchen, inwiefern vergleichbare Ansätze für Mehrfach-Splicing-TT-EH-Systeme, wie das in Abschnitt 3.2.3 vorgestellte System TT3 aus [PRM98], definierbar sind.



## Literaturverzeichnis

- [ACL05] O. Andrei, G. Ciobanu und D. Lucanu. Executable Specifications of P Systems. In *Proceedings of 5th International Workshop (WMC 2004), Milan, Italy*, Bd. 3365 aus der Reihe LNCS, S. 126–145, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer Verlag.
- [ACL06] O. Andrei, G. Ciobanu und D. Lucanu. Structural Operational Semantics of P Systems. In *Proceedings of 6th International Workshop (WMC 2005), Vienna, Austria*, Bd. 3850 aus der Reihe LNCS, S. 31–48, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer Verlag.
- [ACL07] O. Andrei, G. Ciobanu und D. Lucanu. A rewriting logic framework for operational semantics of membrane systems. *Theoretical Computer Science*, 373(3):163–181, 2007.
- [Adl94] L.M. Adleman. Molecular Computation of Solutions to Combinatorial Problems. *Science*, 266(5187):1021–1024, November 1994.
- [AFV01] L. Aceto, W. Fokkink und C. Verhoef. Structural Operational Semantics. In J.A. Bergstra, A. Ponse und S.A. Smolka (Hrsg.), *Handbook of Process Algebra*, 3. Kapitel, S. 197–292. Elsevier Science B.V., 1. Auflage, 2001.
- [ALC06] O. Andrei, D. Lucanu und G. Ciobanu. Operational Semantics and Rewriting Logic in Membrane Computing. In *Proceedings of the 2nd Workshop on Structural Operational Semantics (SOS 2005)*, Bd. 156 aus der Reihe ENTCS, S. 57–78. Elsevier Science B.V., 2006.
- [APRS02] M. Amos, G. Păun, G. Rozenberg und A. Salomaa. Topics in the theory of DNA computing. *Theoretical Computer Science*, 287:3–38, 2002.
- [BdV04] P. Blackburn, M. de Rijke und Y. Venema. *Modal Logic*, Bd. 53 aus der Reihe *Cambridge Texts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2004.

- [BSMM99] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 4. Auflage, 1999.
- [CDG<sup>+</sup>03] W. Charatonik, S. Dal Zilio, A. Gordon, S. Mukhopadhyay und J. Talbot. Model checking mobile ambients. *Theoretical Computer Science*, 3(1–3):277–331, 2003.
- [CG06a] G. Ciobanu und V.M. Gontineac. Algebraic and Coalgebraic Aspects of Membrane Computing. In *Proceedings of 6th International Workshop (WMC 2005), Vienna, Austria*, Bd. 3850 aus der Reihe LNCS, S. 181–198, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer Verlag.
- [CG06b] G. Ciobanu und V.M. Gontineac. P Machines: An Automata Approach to Membrane Computing. In *Proceedings of 7th International Workshop (WMC 2006), Leiden, Netherlands*, Bd. 4361 aus der Reihe LNCS, S. 314–329, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer Verlag.
- [CGP01] E.M. Clarke, O. Grumberg und D.A. Peled. *Model Checking*. The MIT Press, 2001.
- [CKP96] E. Csuhaj-Varjú, L. Kari und G. Păun. Test tube distributed systems based on splicing. *Computers and AI*, 15:211–232, 1996.
- [CM06] M. Cavaliere und R. Mardare. Partial Knowledge in Membrane Systems: A Logical Approach. In *Proceedings of 7th International Workshop (WMC 2006), Leiden, Netherlands*, Bd. 4361 aus der Reihe LNCS, S. 279–297, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer Verlag.
- [CVV06] E. Csuhaj-Varjú und S. Verlan. Length-Separating Test Tube Systems. In *Proceedings of 12th International Meeting on DNA Computing (DNA12), Seoul, Korea*, Bd. 4287 aus der Reihe LNCS, S. 58–70, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer Verlag.
- [DILX05] Z. Dang, O.H. Ibarra, C. Li und G. Xie. On Model-Checking of P Systems. In *Proceedings of 4th International Conference (UC 2005), Sevilla, Spain*, Bd. 3699 aus der Reihe LNCS, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer Verlag.
- [DP98] J. Dassow und G. Păun. On the Power of Membrane Computing. TUCS Technischer Report 217, Turku Centre for Computer Science, November 1998.

- [EMS02] S. Eker, J. Meseguer und A. Sridharanarayanan. The MAUDE Model Checker. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 71:162–187, 2002.
- [FMZ00] C. Ferretti, G. Mauri und C. Zandron. Nine Test Tubes Generate any RE Language. *Theoretical Computer Science*, 231(2):171–180, 2000.
- [FQY04] C. Fu, Z. Qi und J. You. Encoding P System in Non-interleaving  $\pi$ -Calculus. In *Pre-Proceedings of 5th International Workshop (WMC 2004), Milan, Italy*, S. 233–244, 2004.
- [Fri06] P. Frisco. P Systems, Petri Nets, and Program Machines. In *Proceedings of 6th International Workshop (WMC 2005), Vienna, Austria*, Bd. 3850 aus der Reihe LNCS, S. 209–223, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer Verlag.
- [GMP02] C. Graciani-Díaz, F.J. Martín Mateos und M.J. Pérez-Jiménez. Specification of Adleman’s Restricted Model Using an Automated Reasoning System: Verification of Lipton’s Experiment. In *Proceedings of Unconventional Models of Computation: Third International Conference (UMC 2002)*, Bd. 2509 aus der Reihe LNCS, S. 126–136, Berlin, Heidelberg, 2002. Springer Verlag.
- [GP05a] C. Graciani-Díaz und M.J. Pérez-Jiménez. Automated Reasoning Systems and Molecular Computing. In *Recent results in Natural Computing*, S. 47–78. Fénix Editora, 2005.
- [GP05b] C. Graciani-Díaz und M.J. Pérez-Jiménez. Using Automated Reasoning Systems on Molecular Computing. In *DNA Computing: 10th International Workshop on DNA Computing (DNA10), Milan, Italy*, Bd. 3384 aus der Reihe LNCS, S. 128–137, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer Verlag.
- [HBK<sup>+</sup>07] C.V. Henkel, T. Bäck, J.N. Kok, G. Rozenberg und H.P. Spalink. DNA computing of solutions to knapsack problems. *Biosystems*, 88(1-2):156–162, 2007.
- [Hea87] T. Head. Formal language theory and DNA: an analysis of the generative capacity of specific recombinant behaviors. Bd. 49 aus der Reihe *Bulletin of Mathematical Biology*, S. 737–759, Berlin, Heidelberg, 1987. Springer Verlag.
- [Hof06] C. Hofmann. DNA-basierte Modelle – eine spieltheoretische Verifikation. In R. Freund und M. Oswald (Hrsg.), *Tagungsband 16. Theorietag Automaten und Formale Sprachen*, S. 78–81, Wien, Österreich, 2006. Technische Universität Wien.

- [Hof07] C. Hofmann. Operationelle Semantiken und Simulationskonzepte DNA-basierter Systeme. In M. Droste und M. Lohrey (Hrsg.), *Tagungsband 17. Theorietag Automaten und Formale Sprachen*, S. 79–83, Leipzig, 2007. Universität Leipzig.
- [HR02] M. Huth und M. Ryan. *Logic in Computer Science: Modelling and reasoning about systems*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2002.
- [HS04] T. Hinze und M. Sturm. *Rechnen mit DNA - Eine Einführung in Theorie und Praxis*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag München, 2004.
- [HSV08] C. Hofmann, M. Sturm und S. Voigt. About molecular computing in vitro with an optimized number of test tubes. (*to be published*), 2008.
- [Joh06] C.R. Johnson. Automating the DNA Computer: Solving n-Variable 3-SAT Problems. In *Proceedings of 12th International Meeting on DNA Computing (DNA12)*, Seoul, Korea, Bd. 4287 aus der Reihe LNCS, S. 360–373, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer Verlag.
- [LDIY05] C. Li, Z. Dang, O.H. Ibarra und H. Yen. Signaling P Systems and Verification Problems. In *Proceedings of 32nd International Colloquium, ICALP 2005, Lisbon, Portugal*, Bd. 3580 aus der Reihe LNCS, S. 1462–1473, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer Verlag.
- [Loo06] R. Loos. An alternative definition of splicing. *Theoretical Computer Science*, 358:75–87, 2006.
- [LPJ<sup>+</sup>03] In-Hee Lee, Ji-Yoon Park, Hae-Man Jang, Young-Gyu Chai und Byoung-Tak Zhan. DNA Implementation of Theorem Proving with Resolution Refutation in Propositional Logic. In *Proceedings of 8th International Workshop on DNA-Based Computers (DNA8)*, Sapporo, Japan, Bd. 2568 aus der Reihe LNCS, S. 156–167, Berlin, Heidelberg, 2003. Springer Verlag.
- [LZ05] A. Leporati und C. Zandron. A Family of P Systems Which Solve 3-SAT. In M.A. Gutiérrez-Naranjo, G. Păun und M.J. Pérez-Jiménez (Hrsg.), *Proceedings of the ESF Exploratory Workshop on Cellular Computing (Complexity Aspects)*, S. 247–256, Sevilla, 2005. Fénix Editora.
- [MAHR04] F.J. Martín-Mateos, J.A. Alonso, M.J. Hidalgo und J.L. Ruiz-Reina. Formal Verification of Molecular Computational Models



- in ACL2: A Case Study. In *Current Topics in Artificial Intelligence: 10th Conference of the Spanish Association for Artificial Intelligence, CCCAEPPIA 2003, and 5th Conference on Technology Transfer, TTIA 2003, San Sebastian, Spain*, Bd. 3040 aus der Reihe LNAI, S. 344–353, Berlin, Heidelberg, 2004. Springer Verlag.
- [MRV03] M. Margenstern, Y. Rogozhin und S. Verlan. Time-Varying Distributed H Systems of Degree 2 Can Carry Out Parallel Computations. In *DNA Computing: Proceedings of 8th International Workshop on DNA-Based Computers (DNA8), Sapporo, Japan*, Bd. 2568 aus der Reihe LNCS, S. 326–336, Berlin, Heidelberg, 2003. Springer Verlag.
- [MRV04] M. Margenstern, Y. Rogozhin und S. Verlan. Time-Varying Distributed H Systems with Parallel Computations: The Problem Is Solved. In *Proceeding of 9th International Workshop on DNA Based Computers (DNA9), Madison, WI, USA*, Bd. 2943 aus der Reihe LNCS, S. 48–54, Berlin, Heidelberg, 2004. Springer Verlag.
- [MVR05] M. Margenstern, S. Verlan und Y. Rogozhin. Time-Varying Distributed H Systems: An Overview. *Fundamenta Informaticae*, 64(1-4):291–306, 2005.
- [Pău96] G. Păun. On the splicing operation. *Discrete Applied Mathematics*, 70(1):57–79, 1996.
- [Pău97] G. Păun. DNA computing: Distributed splicing systems. In *Structures in Logic and Computer Science*, Bd. 1261 aus der Reihe LNCS, S. 353–370, Berlin, Heidelberg, 1997. Springer Verlag.
- [Pău98] G. Păun. Computing with membranes. Forschungsbericht 208, TUCS, Turku, Finland, 1998.
- [Pău02] G. Păun. *Membrane Computing – An Introduction*. Natural Computing Series. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [Pău04] G. Păun. Introduction to Membrane Computing. In *Proceedings of the Brainstorming Workshop on Uncertainty in Membrane Computing*, S. 17–65, 2004.
- [Plo81] G.D. Plotkin. A Structural Approach to Operational Semantics. Technischer Report DAIMI FN-19, University of Aarhus, 1981.
- [PM05] L. Pan und C. Martín-Vide. Solving Multidimensional 0-1 Knapsack Problem by P Systems with Input and Active Membranes. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 65(12):1578–1584, 2005.

- [PP99] I. Petre und L. Petre. Mobile ambients and p-systems. *Journal of Universal Computer Science*, 5(9):588–598, 1999.
- [PP01] A. Păun und M. Păun. On membrane computing based on splicing. In C. Martín-Vide und V. Mitrană (Hrsg.), *Where Mathematics, Computer Science, Linguistics and Biology Meet*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [PPS03a] A. Pérez-Jiménez, M.J. Pérez-Jiménez und F. Sancho-Caparrini. Computing a Partial Mapping by a P System: Design and Verification. Technischer Report 26, Rovira i Virgili University, Tarragona, 2003. Proceedings of Brainstorming Week on Membrane Computing.
- [PPS03b] A. Pérez-Jiménez, M.J. Pérez-Jiménez und F. Sancho-Caparrini. Formal Verification of a Transition P System Generating the Set  $\{2^n + n^2 + n \mid n > 1\}$ . Technischer Report 26, Rovira i Virgili University, Tarragona, 2003. Proceedings of Brainstorming Week on Membrane Computing.
- [PR02] G. Păun und G. Rozenberg. A guide to membrane computing. *Theoretical Computer Science*, 287(1):73–100, 2002.
- [PR04] M.J. Pérez-Jiménez und A. Riscos-Núñez. A Linear-Time Solution to the Knapsack Problem Using P Systems with Active Membranes. In *Proceedings of the 4th Workshop on Membrane Computing (WMC 2003), Tarragona, Spain*, Bd. 2933 aus der Reihe LNCS, S. 250–268, Berlin, Heidelberg, 2004. Springer Verlag.
- [PRM98] L. Priese, Y. Rogojine und M. Margenstern. Finite H-Systems with 3 Test Tubes are not Predictable. In *Proceedings of the Pacific Symposium on Biocomputing '98*, S. 547–558, 1998.
- [PRS98] G. Păun, G. Rozenberg und A. Salomaa. *DNA-Computing – New Computing Paradigms*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [PS02] M.J. Pérez-Jiménez und F. Sancho-Caparrini. Solving Knapsack Problems in a Sticker Based Model. In *Proceedings of DNA Computing: 7th International Workshop on DNA-Based Computers (DNA7), Tampa, FL, USA*, Bd. 2340 aus der Reihe LNCS, S. 161–171, Berlin, Heidelberg, 2002. Springer Verlag.
- [PS03] M.J. Pérez-Jiménez und F. Sancho-Caparrini. Verification of a Nondeterministic Transition P System Solving SAT Problem. Technischer Report 26, Rovira i Virgili University, Tarragona, 2003. Proceedings of Brainstorming Week on Membrane Computing.

- [QFSY04] Z. Qi, C. Fu, D. Shi und J. You. Specification and Execution of P Systems with Symport/Antiport Rules Using Rewriting Logic. In *Pre-Proceedings of the 5th Workshop on Membrane Computing (WMC 2004), Milano, Italy*, S. 363–371, 2004.
- [QYM04] Z. Qi, J. You und H. Mao. P Systems and Petri Nets. In *Proceedings of the 4th Workshop on Membrane Computing (WMC 2003), Tarragona, Spain*, Bd. 2933 aus der Reihe LNCS, S. 286–303, Berlin, Heidelberg, 2004. Springer Verlag.
- [RGB<sup>+</sup>06] F.J. Romero-Campero, M. Gheorghe, L. Bianco, D. Pescini, M.J. Pérez-Jiménez und R. Ceterchi. Towards Probabilistic Model Checking on P Systems Using PRISM. In *Proceedings of 7th International Workshop (WMC 2006), Leiden, Netherlands*, Bd. 4361 aus der Reihe LNCS, S. 477–495, Berlin, Heidelberg, 2006. Springer Verlag.
- [RS97a] G. Rozenberg und A. Salomaa (Hrsg.). *Handbook of Formal Languages (Linear Modeling: Background and Application)*, Bd. 2. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [RS97b] G. Rozenberg und A. Salomaa (Hrsg.). *Handbook of Formal Languages (Word, Language, Grammar)*, Bd. 1. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [Sch04] K. Schneider. *Verification of Reactive Systems: Formal Methods and Algorithms*. Texts in Theoretical Computer Science. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [SH01] M. Sturm und T. Hinze. Distributed Splicing of  $\mathcal{RE}$  with 6 Test Tubes. *Romanian Journal of Information*, 4(1–2):211–223, 2001.
- [Sti01] C. Stirling. *Modal and Temporal Properties of Processes*. Texts in Computer Science. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [TS00] A.S. Troelstra und H. Schwichtenberg. *Basic Proof Theory*, Bd. 43 aus der Reihe *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 2000.
- [Ver04a] S. Verlan. About Splicing P Systems with Immediate Communication and Non-extended Splicing P Systems. In *Proceedings of the 4th Workshop on Membrane Computing (WMC 2003), Tarragona, Spain*, Bd. 2933 aus der Reihe LNCS, S. 369–382, Berlin, Heidelberg, 2004. Springer Verlag.
- [Ver04b] S. Verlan. *Systèmes de Head et applications à la bio-informatique*. Dissertation, Université de Metz, Metz, Juni 2004.

- [Ver05] S. Verlan. A boundary result on enhanced time-varying distributed H systems with parallel computations. *Theoretical Computer Science*, 344(2-3):226–242, 2005.
- [VM05] S. Verlan und M. Margenstern. About Splicing P Systems with One Membrane. *Fundamenta Informaticae*, 65(3):279–290, 2005.
- [Zan02] C. Zandron. *A Model for Molecular Computing: Membrane Systems*. Dissertation, Dipartimento di Scienze dell’Informazione, Universita’ degli Studi di Milano, Milano, Italy, 2002.
- [ZFM97] C. Zandron, C. Ferretti und G. Mauri. A reduced distributed splicing system for  $\mathcal{RE}$  languages. In G. Păun und A. Salomaa (Hrsg.), *New Trends in Formal Languages*, Bd. 1218 aus der Reihe *LNCS*, S. 319–329. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.

KAPITEL A

Tableauregeln des Systems  $\Gamma_{2 \cdot n+1}$

$$\begin{array}{c}
 \forall w \in \mathcal{PV}. X \notin \text{pre}(w) \frac{(r_{11}^2) \quad wY \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZnnY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{wnnY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \quad (r_3^1) \quad \frac{}{ZnnY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
 \\
 \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{(r_{11}^3) \quad wY \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZnnY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \quad \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{(r_{12}^1) \quad wY \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZnnY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{wnnY \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
 \\
 \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{(r_{12}^2) \quad wY \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZnnY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \frac{(r_1^{1, (X, Y)}) \quad XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
 \\
 \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \frac{(r_1^{1, (X, Y)}) \quad XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^3}{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \quad \forall w_1, w_2 \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \frac{(r_{21}^1) \quad Xw_1Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z'w_2Y \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{Xw_1w_2Y \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
 \\
 \forall w_1, w_2 \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \frac{(r_{22}^1) \quad Xw_1Y \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Xw_2Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{Xw_2w_1Y \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \quad (r_4^1) \quad \frac{}{XnY \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
 \\
 \frac{(r_5^1) \quad \frac{}{ZnnY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{} \quad \forall w_1 \in \mathcal{SV}, w_2 \in \mathcal{PV}. \frac{(r_{22}^4) \quad Xw_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge w_2Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{XZ'' \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
 \\
 \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \frac{(r_1^{2, (X, Y')}) \quad XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \frac{(r_{11}^1) \quad XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZnnY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{XwnnY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \\
 \\
 \frac{(r_3^2) \quad \frac{}{XnY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{} \quad \frac{(r_4^2) \quad \frac{}{Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \frac{(r_2^{2, (X, Y')}) \quad XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^3}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
 \end{array}$$

$$\forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{(r_{21}^2) \quad w_1 Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z' w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{Z' Y' \in \mathcal{C}_\Gamma'^2}$$

$$\forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \neg \pi(n, n, w_1 w_2). \neg \pi(X, Y, w_1 w_2). \frac{(r_{21}^4) \quad w_1 Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z' w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{w_1 w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma'^2}$$

$$\forall w_1 \in \mathcal{SV}, w_2 \in \mathcal{PV}. \neg \pi(X, Y, w_2 w_1). \neg \pi(n, n, w_2 w_1). \frac{(r_{22}^3) \quad X w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge w_2 Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{w_2 w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma'^2}$$

$$\forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \frac{(r_1^{3,(n,n)}) \quad n w n \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{n w n \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \frac{(r_2^{3,(n,n)}) \quad n w n \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{n w n \in \mathcal{C}_\Gamma'^3} \quad \frac{(r_3^{3,(n,n)}) \quad n \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{n \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \quad \frac{(r_4^{3,(n,n)}) \quad n \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{n \in \mathcal{C}_\Gamma^3}$$

$$\forall w_1, w_2 \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \pi(n, n, w_1 w_2). \frac{(r_{21}^3) \quad w_1 Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z' w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{w_1 w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma'^3}$$

$$\forall w_1, w_2 \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \pi(n, n, w_2 w_1). \frac{(r_{22}^2) \quad X w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge w_2 Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{w_2 w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma'^3}$$

ANHANG B

**Tableauregeln und Tableau für den  
Korrektheitsbeweis des Systems TT6**

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
(r_1^{2,(u,v)}) \\
\forall (u,v) \in P_G. \frac{}{ZvY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
(r_{11}^{(u,v),2}) \\
\forall w \in \mathcal{PV}, (u,v) \in P_G. \frac{wuY \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZvY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{ZuY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{c}
(r_{11}^{(u,v),3}) \\
\forall w \in \mathcal{PV}, (u,v) \in P_G. (X \notin \text{pre}(w)). \frac{wuY \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZvY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{wvY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{c}
(r_{27}^{i,2}) \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*, i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{X\beta\alpha^i\beta wY \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Xs_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{Xs_iwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
(r_1^1) \\
\frac{}{XBS_GY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{c}
(r_{28}^{i,2}) \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*, i \in \mathbb{N}_m^+. \frac{X\beta\alpha^{n+i}\beta wY \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XN_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{XN_iwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{c}
(r_2^{1,(X,Y)}) \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*. \frac{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
(r_{29}^2) \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*. \frac{X\beta\alpha^{n+m+1}\beta wY \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XBZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{XBwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{c}
(r_{210}^1) \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*. \frac{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
(r_3^{1,(X,Y)}) \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*. \frac{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^3}{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{c}
(r_4^{1,(X,Y)}) \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*. \frac{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^4}{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
(r_{32}^2) \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*. \frac{X'wY \in \mathcal{C}_\Gamma^3 \wedge X\alpha Z \in \mathcal{C}_\Gamma^3}{X\alpha wY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{c}
(r_{42}^2) \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*. \frac{X'wY \in \mathcal{C}_\Gamma^4 \wedge X\beta Z \in \mathcal{C}_\Gamma^4}{X\beta wY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
(r_5^{1,(X,Y)}) \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*. \frac{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^5}{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{(r_{51}^{4'})}{XwBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5 \wedge Z'Z'BY \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
& \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{(r_6^{1,(X,Y)})}{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^6} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{(r_{52}^{4'})}{XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^5 \wedge XZ''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
& \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{(r_{11}^{(u,v),1})}{XwuY \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZvY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n^+ \cdot \frac{(r_2^{6,i})}{Xs_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \\
& \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{(r_1^{2,(X,Y')})}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \quad \forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_n^+ \cdot \frac{(r_{21}^{i,1})}{ws_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z\beta\alpha^i\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \\
& \forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_n^+ \cdot \frac{(r_{21}^{i,2})}{ws_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z\beta\alpha^i\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{(r_3^{2,(X,Y')})}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \\
& \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{(r_4^{2,(X,Y')})}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^4} \quad \forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_m^+ \cdot \frac{(r_{22}^{i,1})}{wN_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z\beta\alpha^{n+i}\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \\
& \forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_m^+ \cdot \frac{(r_{22}^{i,2})}{wN_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z\beta\alpha^{n+i}\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{(r_5^{2,(X,Y')})}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
& \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{(r_6^{2,(X,Y')})}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^6} \quad \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{(r_{23}^1)}{wBY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z\beta\alpha^{n+m+1}\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \\
& \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{(r_{23}^2)}{wBY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z\beta\alpha^{n+m+1}\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \quad \forall i \in \mathbb{N}_{n+m+1}^+ \cdot \frac{(r_2^{5,i})}{Z\beta\alpha^i\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \\
& \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{(r_{24}^2)}{w\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \quad \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{(r_{25}^2)}{w\alpha Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \\
& \forall w \in \mathcal{PV} \cdot X' \notin \text{pre}(w) \cdot \frac{(r_{24}^3)}{w\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \quad \forall i \in \mathbb{N}_m^+ \cdot \frac{(r_2^{7,i})}{XN_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{aligned}$$



$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
(r_2^1) \\
\overline{ZY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array}
\quad \forall w \in \mathcal{PV}. X' \notin \text{pre}(w). \quad \begin{array}{c}
(r_{25}^3) \\
\frac{w\alpha Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array} \\
\\
\forall w \in \mathcal{SV}. \quad \begin{array}{c}
(r_{26}^1) \\
\frac{Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array}
\quad \forall w \in \mathcal{PV}. \quad \begin{array}{c}
(r_{210}^3) \\
\frac{wY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array} \\
\\
\forall w \in \mathcal{SV}. \text{suf}(w) \cap \{Y'_\alpha, Y'_\beta, BY\} = \emptyset. \quad \begin{array}{c}
(r_{26}^5) \\
\frac{Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{X'w \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array} \\
\\
\forall w \in \mathcal{SV}, i \in \mathbb{N}_n^+. \quad \begin{array}{c}
(r_{27}^{i,1}) \\
\frac{X\beta\alpha^i\beta w \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Xs_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{X\beta\alpha^i\beta Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array}
\quad \begin{array}{c}
(r_2^2) \\
\overline{ZY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array} \\
\\
\forall w \in \mathcal{SV}, i \in \mathbb{N}_n^+. \text{suf}(w) \cap \{Y, BY\} = \emptyset. \quad \begin{array}{c}
(r_{27}^{i,4}) \\
\frac{X\beta\alpha^i\beta w \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Xs_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{Xs_iw \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{c}
(r_2^3) \\
\overline{X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array}
\quad \forall w \in \mathcal{SV}, i \in \mathbb{N}_m^+. \quad \begin{array}{c}
(r_{28}^{i,1}) \\
\frac{X\beta\alpha^{n+i}\beta w \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XN_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{X\beta\alpha^{n+i}\beta Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array} \\
\\
\forall w \in \mathcal{SV}, i \in \mathbb{N}_m^+. \text{suf}(w) \cap \{Y, BY\} = \emptyset. \quad \begin{array}{c}
(r_{28}^{i,4}) \\
\frac{X\beta\alpha^{n+i}\beta w \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XN_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{XN_iw \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{c}
(r_2^4) \\
\overline{ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array}
\quad \forall w \in \mathcal{SV}. \quad \begin{array}{c}
(r_{29}^1) \\
\frac{X\beta\alpha^{n+m+1}\beta w \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XBZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{X\beta\alpha^{n+m+1}\beta Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array}
\quad \begin{array}{c}
(r_2^8) \\
\overline{XBZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array} \\
\\
\forall w \in \mathcal{SV}. \text{suf}(w) \cap \{Y, BY\} = \emptyset. \quad \begin{array}{c}
(r_{29}^4) \\
\frac{X\beta\alpha^{n+m+1}\beta w \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XBZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{XBw \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array} \\
\\
\forall w \in \mathcal{PV}. X \notin \text{pre}(w) \wedge B \notin \text{suf}(w). \quad \begin{array}{c}
(r_{210}^4) \\
\frac{wY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{wY \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array} \\
\\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*. \quad \begin{array}{c}
(r_{31}^1) \\
\frac{XwY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^3 \wedge ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^3}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array}
\quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*. \quad \begin{array}{c}
(r_{32}^3) \\
\frac{X'wY' \in \mathcal{C}_\Gamma^3 \wedge X\alpha Z \in \mathcal{C}_\Gamma^3}{X\alpha wY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{41}^1)}{XwY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^4 \wedge ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^4}}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{42}^3)}{X'wY' \in \mathcal{C}_\Gamma^4 \wedge X\beta Z \in \mathcal{C}_\Gamma^4}}{X\beta wY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{25}^1)}{X'w\alpha Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY'_\alpha \mathcal{C}_\Gamma^2}}{X'wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{26}^2)}{XwY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{X'wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \\
\forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{\overset{(r_{31}^2)}{wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^3 \wedge ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^3}}{ZY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \quad \forall w \in \mathcal{SV} \cdot \frac{\overset{(r_{32}^1)}{X'w \in \mathcal{C}_\Gamma^3 \wedge X\alpha Z \in \mathcal{C}_\Gamma^3}}{X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \\
\forall w \in \mathcal{PV} \cdot X \notin \text{pre}(w) \cdot \frac{\overset{(r_{31}^3)}{wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^3 \wedge ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^3}}{wY' \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_1^{3,(X',Y'_\alpha)})}{X'wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{X'wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \\
\forall w \in \mathcal{SV} \cdot \text{suf}(w) \cap \{Y, Y', BY\} = \emptyset \cdot \frac{\overset{(r_{32}^5)}{X'w \in \mathcal{C}_\Gamma^3 \wedge X\alpha Z \in \mathcal{C}_\Gamma^3}}{X\alpha w \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \quad \frac{\overset{(r_3^2)}{X\alpha Z \in \mathcal{C}_\Gamma^3}}{X\alpha Z \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \\
\frac{\overset{(r_3^1)}{ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^3}}{ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_2^{3,(X',Y'_\alpha)})}{X'wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{X'wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_4^{3,(X',Y'_\alpha)})}{X'wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^4}}{X'wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_5^{3,(X',Y'_\alpha)})}{X'wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^5}}{X'wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_6^{3,(X',Y'_\alpha)})}{X'wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^6}}{X'wY'_\alpha \in \mathcal{C}_\Gamma^3} \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{24}^1)}{X'w\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY'_\beta \mathcal{C}_\Gamma^2}}{X'wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^4} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{26}^2)}{XwY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{X'wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^4} \\
\forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{\overset{(r_{41}^2)}{wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^4 \wedge ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^4}}{ZY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^4} \quad \forall w \in \mathcal{SV} \cdot \frac{\overset{(r_{42}^1)}{X'w \in \mathcal{C}_\Gamma^4 \wedge X\beta Z \in \mathcal{C}_\Gamma^4}}{X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^4} \\
\forall w \in \mathcal{PV} \cdot X \notin \text{pre}(w) \cdot \frac{\overset{(r_{31}^3)}{wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^4 \wedge ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^4}}{wY' \in \mathcal{C}_\Gamma^4} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_1^{4,(X',Y'_\beta)})}{X'wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{X'wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^4} \\
\forall w \in \mathcal{SV} \cdot \text{suf}(w) \cap \{Y, Y', BY\} = \emptyset \cdot \frac{\overset{(r_{42}^5)}{X'w \in \mathcal{C}_\Gamma^4 \wedge X\beta Z \in \mathcal{C}_\Gamma^4}}{X\beta w \in \mathcal{C}_\Gamma^4} \quad \frac{\overset{(r_2^2)}{X\beta Z \in \mathcal{C}_\Gamma^4}}{X\beta Z \in \mathcal{C}_\Gamma^4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{l}
(r_4^1) \\
\overline{ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^4}
\end{array}
\quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_2^{4,(X',Y'_\beta)})}{X'wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{X'wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^4}
\quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_3^{4,(X',Y'_\beta)})}{X'wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^3}}{X'wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^4} \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_5^{4,(X',Y'_\beta)})}{X'wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^5}}{X'wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^4}
\quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_6^{4,(X',Y'_\beta)})}{X'wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^6}}{X'wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^4} \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{26}^4)}{XwBY \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{X'wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5}
\quad \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{\overset{(r_{210}^2)}{wBY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{27}^{i,3})}{X\beta\alpha^i\beta wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Xs_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{Xs_iwBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5}
\quad \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{\overset{(r_1^{5,(\varepsilon,BY)})}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
\overline{Z'Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^5}
\quad \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{28}^{i,3})}{X\beta\alpha^{n+i}\beta wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XN_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{XN_iwBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{29}^3)}{X\beta\alpha^{n+m+1}\beta wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XBZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{XBwBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5}
\quad \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{\overset{(r_2^{5,(\varepsilon,BY)})}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{32}^4)}{X'wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^3 \wedge X\alpha Z \in \mathcal{C}_\Gamma^3}}{X\alpha wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5}
\quad \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{\overset{(r_{51}^1)}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5 \wedge Z'Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^5}}{Z'Z'BY \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{42}^4)}{X'wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^4 \wedge X\beta Z \in \mathcal{C}_\Gamma^4}}{X\beta wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5}
\quad \forall w \in \mathcal{SV} \cdot \frac{\overset{(r_{52}^1)}{Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^5 \wedge Z''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^5}}{XZ''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
\overline{Z''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^5}
\quad \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \text{pre}^1(w) \notin \Sigma \vee \text{suf}^1(w) \notin \Sigma \cdot \frac{\overset{(r_{51}^3)}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5 \wedge Z'Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^5}}{w \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
\forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{\overset{(r_{51}^5)}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5 \wedge Z'Z'BY \in \mathcal{C}_\Gamma^5}}{Z'Z'BY \in \mathcal{C}_\Gamma^5}
\quad \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{\overset{(r_3^{5,(\varepsilon,BY)})}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^3}}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
\forall w \in \mathcal{SV} \cdot \text{pre}^1(w) \notin \Sigma \vee \text{suf}^1(w) \notin \Sigma \cdot \frac{\overset{(r_{52}^3)}{Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^5 \wedge Z''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^5}}{w \in \mathcal{C}_\Gamma^5}
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} (r_4^{5,(\varepsilon, BY)}) \\ \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^4}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^{15}} \end{array} & \begin{array}{c} (r_6^{5,(\varepsilon, BY)}) \\ \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^6}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^{15}} \end{array} \\
\end{array} \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \text{pre}^1(w) \in \Sigma \wedge \text{suf}^1(w) \in \Sigma. \frac{(r_{51}^{2'})}{wBY \in \mathcal{C}_\Gamma^5 \wedge Z'Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
w \in \mathcal{C}_\Gamma^{16} \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \text{pre}^1(w) \in \Sigma \wedge \text{suf}^1(w) \in \Sigma. \frac{(r_{52}^{2'})}{Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^5 \wedge Z''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^5} \\
w \in \mathcal{C}_\Gamma^{16} \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} (r_1^{6,(s_i, s_j)}) \\ \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. \frac{s_i w s_j \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{s_i w s_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{16}} \end{array} & \begin{array}{c} (r_2^{6,(s_i, s_j)}) \\ \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. \frac{s_i w s_j \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{s_i w s_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{16}} \end{array} \\
\begin{array}{c} (r_3^{6,(s_i, s_j)}) \\ \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. \frac{s_i w s_j \in \mathcal{C}_\Gamma^3}{s_i w s_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{16}} \end{array} & \begin{array}{c} (r_4^{6,(s_i, s_j)}) \\ \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. \frac{s_i w s_j \in \mathcal{C}_\Gamma^4}{s_i w s_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{16}} \end{array} \\
\begin{array}{c} (r_5^{6,(s_i, s_j)}) \\ \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \forall i, j \in \mathbb{N}_n^+. \frac{s_i w s_j \in \mathcal{C}_\Gamma^5}{s_i w s_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{16}} \end{array} & \begin{array}{c} (r_1^{6,(s_i)}) \\ \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{s_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{s_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{16}} \end{array} & \begin{array}{c} (r_2^{6,(s_i)}) \\ \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{s_i \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{s_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{16}} \end{array} \\
\begin{array}{c} (r_3^{6,(s_i)}) \\ \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{s_i \in \mathcal{C}_\Gamma^3}{s_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{16}} \end{array} & \begin{array}{c} (r_4^{6,(s_i)}) \\ \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{s_i \in \mathcal{C}_\Gamma^4}{s_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{16}} \end{array} & \begin{array}{c} (r_5^{6,(s_i)}) \\ \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{s_i \in \mathcal{C}_\Gamma^5}{s_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{16}} \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

$$\rho_\alpha(L) = \{w \mid \alpha w \in L\}, \rho_\beta(L) = \{w \mid \beta w \in L\}, \rho'_\beta(L) = \{w \mid w\beta \in L\}$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \bigcup_{\substack{w \in ((V_G \cup \Sigma)^+ \cdot \{B\} \cdot (V_G \cup \Sigma)^*) \vee \\ (V_G \cup \Sigma)^* \cdot \{B\} \cdot (V_G \cup \Sigma)^+}} \gamma(w) \\ \Lambda_{-\{B\}} &= \bigcup_{w \in (V_G \cup \Sigma)^+} \gamma(w) \\ \Lambda^\circ &= \bigcup_{w \in ((V_G \cup \Sigma)^+ \cdot \{B\})} \varphi^\circ(\gamma(w)) \\ \Lambda^\circ_{-\{B\}} &= \bigcup_{w \in (V_G \cup \Sigma)^+} \varphi^\circ(\gamma(w)) \\ \Delta &= \varphi^\circ(\{w_1 \alpha x w_2 \mid w_1, w_2 \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*, x \in \gamma(v), \\ &\quad v \in (V_G \cup \Sigma \cup \{B\})\}) \cup \\ &\quad \{w_1 x \alpha w_2 \mid w_1, w_2 \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*, x \in \gamma(v), \\ &\quad v \in (V_G \cup \Sigma \cup \{B\})\}) \\ U &= (V_G \cup \Sigma)^* \cdot V_G \cdot (V_G \cup \Sigma)^* \end{aligned}$$

<p>Tableau 18</p>	$\frac{Z'Z'BY' \in \mathcal{C}_T^2}{(Z'Z'BY' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge ZY \in \mathcal{C}_T^2)}$ $\frac{\exists w \in \text{SV} \cdot wBY \in \mathcal{C}_T^5 \quad Z'Z'BY \in \mathcal{C}_T^5}{\exists w \in \text{SV} \cdot (wBY \in \mathcal{C}_T^5 \wedge Z'Z'BY \in \mathcal{C}_T^5)}$ $\frac{Z'Z'BY \in \mathcal{C}_T^5}{Z'Z'BY \in \mathcal{C}_T^5}$
<p>Tableau 17</p>	$\frac{\exists w \in \text{SV} \cdot Xw \in \mathcal{C}_T^5 \quad Z''Z'' \in \mathcal{C}_T^5}{\exists w \in \text{SV} \cdot (Xw \in \mathcal{C}_T^5 \wedge Z''Z'' \in \mathcal{C}_T^5)}$ $XZ''Z'' \in \mathcal{C}_T^5$
<p>Tableau 16</p>	$\frac{X'ws_iY' \in \mathcal{C}_T^2, w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_n^+}{(X'ws_iY' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge Z\beta\alpha^i\beta Y' \in \mathcal{C}_T^2), w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_n^+}$ $\frac{X'wN_iY' \in \mathcal{C}_T^2, w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_n^+}{(X'wN_iY' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge Z\beta\alpha^{n+i}\beta Y' \in \mathcal{C}_T^2), w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_n^+}$ $\frac{X'wBY' \in \mathcal{C}_T^2, w \in \Delta}{X'wY' \in \mathcal{C}_T^2, w \in \Delta}$
<p>Tableau 15</p>	$\frac{XwY' \in \mathcal{C}_T^2, w \in \Delta}{(XwY' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge ZY'_\beta \in \mathcal{C}_T^2), w \in \Delta}$ $\frac{X\beta\alpha^i\beta wY'_\beta \in \mathcal{C}_T^2, w \in \rho_\beta(\Delta), i \in \mathbb{N}_n^+}{(X\beta\alpha^i\beta wY'_\beta \in \mathcal{C}_T^2 \wedge Xs_iZ \in \mathcal{C}_T^2), w \in \rho_\beta(\Delta), i \in \mathbb{N}_n^+}$ $\frac{X\beta\alpha^{n+i}\beta wY'_\beta \in \mathcal{C}_T^2, w \in \rho_\alpha(\Delta)}{(X\beta\alpha^{n+i}\beta wY'_\beta \in \mathcal{C}_T^2 \wedge XN_iZ \in \mathcal{C}_T^2), w \in \rho_\beta(\Delta), i \in \mathbb{N}_m^+}$ $XwY'_\beta \in \mathcal{C}_T^2, w \in \rho_\beta(\Delta)$



Tableau 11	
$XwY' \in C_\Gamma^1, w \in \Delta$ $XwY' \in C_\Gamma^3, w \in \Delta$ $XwY' \in C_\Gamma^4, w \in \Delta$ $XwY' \in C_\Gamma^5, w \in \Delta$	$Xw'uY' \in C_\Gamma^1, w \in \Delta, u \in U$ $(Xw'uY' \in C_\Gamma^1 \wedge ZvY' \in C_\Gamma^1), w \in \Delta, (u, v) \in P_G, v \in \text{sup}(w)$ $XwY' \in C_\Gamma^2, w \in \Delta$
$X\beta\alpha^i\beta wY' \in C_\Gamma^2, w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_m^+$	$X\beta\alpha^{n+i}\beta wY' \in C_\Gamma^2, w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_m^+$ $(X\beta\alpha^{n+i}\beta wY' \in C_\Gamma^2 \wedge XN_iZ \in C_\Gamma^2), w \in \Delta C_\Gamma^2, i \in \mathbb{N}_m^+$
$X\beta\alpha^i\beta wY' \in C_\Gamma^2, w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_m^+$	$XwN_iY' \in C_\Gamma^2, w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_m^+$ $(X\beta\alpha^i\beta wY' \in C_\Gamma^2 \wedge Xs_iZ \in C_\Gamma^2), w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_m^+$ $(X\beta\alpha^k\beta wY' \in C_\Gamma^2), w \in \Delta$ $(X\beta\alpha^k\beta wY' \in C_\Gamma^2 \wedge Xs_iZ \in C_\Gamma^2), w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_m^+$
$XwY' \in C_\Gamma^2, w \in \Delta$	$XwY' \in C_\Gamma^2, w \in \Delta$
$X'wY'_\alpha \in C_\Gamma^3, w \in \rho_\alpha(\Delta)$ $(X'wY'_\alpha \in C_\Gamma^3 \wedge ZY' \in C_\Gamma^3), w \in \rho_\alpha(\Delta)$ $X'wY' \in C_\Gamma^3, w \in \rho_\alpha(\Delta)$	$X'wY'_\alpha \in C_\Gamma^3, w \in \rho_\alpha(\Delta)$ $(X'wY'_\alpha \in C_\Gamma^3 \wedge X\alpha Z \in C_\Gamma^3), w \in \rho_\alpha(\Delta)$ $X\alpha Z \in C_\Gamma^3, w \in \rho_\alpha(\Delta)$
$X'wY'_\beta \in C_\Gamma^4, w \in \rho_\beta(\Delta)$ $(X'wY'_\beta \in C_\Gamma^4 \wedge ZY' \in C_\Gamma^4), w \in \rho_\beta(\Delta)$ $X'wY' \in C_\Gamma^4, w \in \rho_\beta(\Delta)$	$X'wY'_\beta \in C_\Gamma^4, w \in \rho_\beta(\Delta)$ $(X'wY'_\beta \in C_\Gamma^4 \wedge X\beta Z \in C_\Gamma^4), w \in \rho_\beta(\Delta)$ $X\beta Z \in C_\Gamma^4, w \in \rho_\beta(\Delta)$
$(X'wY' \in C_\Gamma^3 \wedge X\alpha Z \in C_\Gamma^3), w \in \rho_\alpha(\Delta)$	$(X'wY'_\alpha \in C_\Gamma^3 \wedge ZY' \in C_\Gamma^3), w \in \rho_\alpha(\Delta)$ $(X'wY' \in C_\Gamma^3 \wedge X\alpha Z \in C_\Gamma^3), w \in \rho_\alpha(\Delta)$
$(X'wY' \in C_\Gamma^4 \wedge X\beta Z \in C_\Gamma^4), w \in \rho_\beta(\Delta)$	$(X'wY'_\beta \in C_\Gamma^4 \wedge ZY' \in C_\Gamma^4), w \in \rho_\beta(\Delta)$ $(X'wY' \in C_\Gamma^4 \wedge X\beta Z \in C_\Gamma^4), w \in \rho_\beta(\Delta)$
$XwY' \in C_\Gamma^2, w \in \Delta$	



Tableau 10

$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^1, w \in \Delta$	$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \Delta$	$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^3, w \in \Delta$	$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^4, w \in \Delta$	$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^6, w \in \Delta$	$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^5, w \in \Delta$	$X'wBY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^4, w \in \rho_{\beta}(\Delta)$	$(X'wBY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^4 \wedge X\beta Z \in \mathcal{C}_{\Gamma}^4), w \in \rho_{\beta}(\Delta)$
$XwBY' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \Delta$	$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \Delta$	$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \Delta$	$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \Delta$	$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \Delta$	$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \Delta$	$X'wBY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^3, w \in \rho_{\alpha}(\Delta)$	$(X'wBY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^3 \wedge X\alpha Z \in \mathcal{C}_{\Gamma}^3), w \in \rho_{\alpha}(\Delta)$
$(XwBY' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge ZY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \Delta$	$(XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge Xs_i Z \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_n^+$	$(XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge XN_i Z \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_n^+$	$(XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge XZ'Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \Delta$	$(XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge X\alpha Z \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \Delta$	$(XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge X\alpha Z \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \Delta$		

Tableau 9

$XwY' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \Delta$	$XwBY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^5, w \in \Delta$	$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^3, w \in \Delta$	$X'wY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^4, w \in \rho_{\beta}(\Delta)$
$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^5, w \in \Delta$	$(XwY' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge ZY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \Delta$	$(XwBY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^5 \wedge Z'Z'' \in \mathcal{C}_{\Gamma}^5), w \in \Delta$	$(X'wY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^4 \wedge X\beta Z \in \mathcal{C}_{\Gamma}^4), w \in \rho_{\beta}(\Delta)$
$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \Delta$	$XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2, w \in \Delta$	$X'wY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^3, w \in \rho_{\alpha}(\Delta)$	
$(XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge Xs_i Z \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_n^+$	$(XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge XN_i Z \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \Delta, i \in \mathbb{N}_n^+$	$(XwY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge X\alpha Z \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \rho_{\alpha}(\Delta)$	$(X'wY \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2 \wedge X\alpha Z \in \mathcal{C}_{\Gamma}^2), w \in \Delta$

Tableau 8

$\frac{XwBY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{w \in \Lambda - \{B\}}$	$\frac{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{w \in \Lambda}$	$\frac{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{w \in \Lambda}$
$\frac{(XwBY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2), w \in \Lambda - \{B\}}{X'wBY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \Lambda - \{B\}}$	$\frac{(XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2), w \in \Lambda}{X'wN_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_m^+}$	$\frac{(XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2), w \in \Lambda}{X'ws_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_n^+}$
$\frac{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{w \in \Lambda^\circ}$	$\frac{X'wN_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, Z\beta\alpha^k\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_m^+}{(X'wN_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z\beta\alpha^k\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2), w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_m^+}$	$\frac{Z\beta\alpha^i\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, i \in \mathbb{N}_n^+}{(X'ws_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z\beta\alpha^i\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2), w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_n^+}$
	$X'w\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \rho_\beta(\Lambda^\circ)$	

Tableau 7

$\frac{X\beta\alpha^k\beta w\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \rho'_\beta(\Lambda - \{B\})}{(X\beta\alpha^k\beta w\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2), w \in \rho'_\beta(\Lambda - \{B\})}$	$\frac{X\beta\alpha^{n+i}\beta w\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \rho'_\beta(\Lambda), i \in \mathbb{N}_m^+}{X\beta\alpha^{n+i}\beta w\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \rho'_\beta(\Lambda), i \in \mathbb{N}_m^+}$	$\frac{ZY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{XN_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2, i \in \mathbb{N}_m^+}$
$\frac{X\beta\alpha^k\beta wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \rho'_\beta(\Lambda - \{B\})}{(X\beta\alpha^k\beta wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XBZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2), w \in \rho'_\beta(\Lambda - \{B\})}$	$\frac{XBZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{(X\beta\alpha^k\beta wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XBZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2), w \in \rho'_\beta(\Lambda - \{B\})}$	$\frac{XwY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \rho_\beta(\Lambda^\circ)}{XwY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \rho_\beta(\Lambda^\circ)}$
$\frac{X\beta\alpha^i\beta w\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \rho'_\beta(\Lambda), i \in \mathbb{N}_n^+}{(X\beta\alpha^i\beta w\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2), w \in \rho'_\beta(\Lambda), i \in \mathbb{N}_n^+}$	$\frac{Xs_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2, i \in \mathbb{N}_n^+}{(X\beta\alpha^i\beta wY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Xs_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2), w \in \rho'_\beta(\Lambda), i \in \mathbb{N}_n^+}$	$\frac{Xw\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \rho_\beta(\Lambda^\circ)}{(Xw\beta Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2), w \in \rho_\beta(\Lambda^\circ)}$
	$XwY'_\beta \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \rho_\beta(\Lambda^\circ)$	

Tableau 6

$X'w\beta Y' \in C_{\Gamma}^2, w \in \rho_{\beta}(\Lambda^{\circ})$	$ZY'_{\beta} \in C_{\Gamma}^2$	$XwY'_{\beta} \in C_{\Gamma}^2, w \in \rho_{\beta}(\Lambda^{\circ})$	$X'Z \in C_{\Gamma}^2$
$(X'w\beta Y' \in C_{\Gamma}^2 \wedge ZY'_{\beta} \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in \rho_{\beta}(\Lambda^{\circ})$		$(XwY'_{\beta} \in C_{\Gamma}^2 \wedge X'Z \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in \rho_{\beta}(\Lambda^{\circ})$	
		$X'wY'_{\beta} \in C_{\Gamma}^1$ $w \in \rho_{\beta}(\Lambda^{\circ})$	$X'wY'_{\beta} \in C_{\Gamma}^3$ $w \in \rho_{\beta}(\Lambda^{\circ})$
		$X'wY'_{\beta} \in C_{\Gamma}^2$ $w \in \rho_{\beta}(\Lambda^{\circ})$	$X'wY'_{\beta} \in C_{\Gamma}^5$ $w \in \rho_{\beta}(\Lambda^{\circ})$
		$X'wY'_{\beta} \in C_{\Gamma}^4, w \in \rho_{\beta}(\Lambda^{\circ})$	$X'wY'_{\beta} \in C_{\Gamma}^6$ $w \in \rho_{\beta}(\Lambda^{\circ})$

Tableau 5

$Xw\alpha Y' \in C_{\Gamma}^2,$ $w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$	$X'Z \in C_{\Gamma}^2$	$Xw\alpha Y' \in C_{\Gamma}^2,$ $w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$	$ZY'_{\alpha} \in C_{\Gamma}^2$
$(Xw\alpha Y' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X'Z \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$		$(Xw\alpha Y' \in C_{\Gamma}^2 \wedge ZY'_{\alpha} \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$	
$X'w\alpha Y' \in C_{\Gamma}^2, w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$	$ZY'_{\alpha} \in C_{\Gamma}^2$	$XwY'_{\alpha} \in C_{\Gamma}^2, w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$	$X'Z \in C_{\Gamma}^2$
$(X'w\alpha Y' \in C_{\Gamma}^2 \wedge ZY'_{\alpha} \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$		$(XwY'_{\alpha} \in C_{\Gamma}^2 \wedge X'Z \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$	
		$X'wY'_{\alpha} \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$	$X'wY'_{\alpha} \in C_{\Gamma}^4,$ $w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$
		$X'wY'_{\alpha} \in C_{\Gamma}^2,$ $w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$	$X'wY'_{\alpha} \in C_{\Gamma}^5,$ $w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$
		$X'wY'_{\alpha} \in C_{\Gamma}^3, w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$	$X'wY'_{\alpha} \in C_{\Gamma}^6,$ $w \in \rho_{\alpha}(\Lambda^{\circ})$

Tableau 4

	$\frac{XwBY \in C_{\Gamma}^5, Z'Z'BY \in C_{\Gamma}^5}{w \in \Lambda - \{B\}}$	$\frac{XwY \in C_{\Gamma}^5, XZ''Z'' \in C_{\Gamma}^5}{w \in \Lambda}$	$\frac{XwY' \in C_{\Gamma}^2, ZY \in C_{\Gamma}^2}{w \in \Lambda}$
✓	$\frac{XwY \in C_{\Gamma}^5, (XwBY \in C_{\Gamma}^5 \wedge Z'Z'BY \in C_{\Gamma}^5)}{w \in \Lambda - \{B\}}$	$\frac{(XwY \in C_{\Gamma}^5 \wedge XZ''Z'' \in C_{\Gamma}^5)}{w \in \Lambda}$	$\frac{(XwY' \in C_{\Gamma}^2 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^2)}{w \in \Lambda}, XwY \in C_{\Gamma}^4, w \in \Lambda$
		$XwY \in C_{\Gamma}^1, w \in \Lambda$	
	$\frac{X\beta\alpha^i\beta wY \in C_{\Gamma}^2, w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_n^+}{X\beta\alpha^{n+i}\beta wY \in C_{\Gamma}^2, w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_n^+}$	$\frac{X\beta\alpha^k\beta wY \in C_{\Gamma}^2, w \in \Lambda - \{B\}}$	$\frac{X'wY \in C_{\Gamma}^4, w \in \rho_{\beta}(\Lambda)}$
	$\frac{(X\beta\alpha^i\beta wY \in C_{\Gamma}^2 \wedge Xs_iZ \in C_{\Gamma}^2), w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_n^+}{XN_iZ \in C_{\Gamma}^2, w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_n^+}$	$\frac{(X\beta\alpha^k\beta wY \in C_{\Gamma}^2 \wedge XBZ \in C_{\Gamma}^2), w \in \Lambda - \{B\}}$	$\frac{(X'wY \in C_{\Gamma}^3 \wedge X\alpha Z \in C_{\Gamma}^3), w \in \rho_{\alpha}(\Lambda)}{(X'wY \in C_{\Gamma}^4 \wedge X\beta Z \in C_{\Gamma}^4), w \in \rho_{\beta}(\Lambda)}$
		$XwY \in C_{\Gamma}^1, w \in \Lambda$	$XwY \in C_{\Gamma}^6, w \in \Lambda$

Tableau 3

$Xw'wY' \in C_T^1, w \in \Lambda, u \in \dot{U}$	$ZvY' \in C_T^1, (u, v) \in P_G$	$Xw'uY' \in C_T^1, w \in \Delta, u \in \dot{U}$	$Xws_iY' \in C_T^2, w \in \Lambda$	$Z\beta\alpha^i\beta Y' \in C_T^2, i \in \mathbb{N}_n^+$
$Xw'wY' \in C_T^3, w \in \Lambda^\circ$	$XwY' \in C_T^4, w \in \Lambda^\circ$	$Xw'uY' \in C_T^1, w' \in \Delta, (u, \varepsilon) \in P_G$	$Xws_iY' \in C_T^2, w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_n^+$	$Z\beta\alpha^i\beta Y' \in C_T^2, i \in \mathbb{N}_n^+$
$XwN_iY' \in C_T^2, w \in \Lambda$	$Z\beta\alpha^{n+i}\beta Y' \in C_T^2, i \in \mathbb{N}_m^+$	$XwY' \in C_T^2, w \in \Lambda^\circ$	$X\beta\alpha^{n+i}\beta wY' \in C_T^2, w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_m^+$	$XN_iZ \in C_T^2, i \in \mathbb{N}_m^+$
$(XwN_iY' \in C_T^2 \wedge Z\beta\alpha^{n+i}\beta Y' \in C_T^2), w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_m^+$	$Z\beta\alpha^k\beta Y' \in C_T^2, w \in \Lambda_{-\{B\}}$	$X\beta\alpha^i\beta wY' \in C_T^2, w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_n^+$	$X\beta\alpha^{n+i}\beta wY' \in C_T^2, w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_m^+$	$XN_iZ \in C_T^2, i \in \mathbb{N}_m^+$
$X\beta\alpha^k\beta wY' \in C_T^2, w \in \Lambda_{-\{B\}}$	$XwY' \in C_T^2, w \in \Lambda^\circ$	$Xs_iZ \in C_T^2, i \in \mathbb{N}_n^+$	$(X\beta\alpha^{n+i}\beta wY' \in C_T^2 \wedge XN_iZ \in C_T^2), w \in \Lambda, i \in \mathbb{N}_m^+$	
$X\beta\alpha^k\beta wY' \in C_T^2, w \in \Lambda_{-\{B\}}$	$XwY' \in C_T^3, w \in \Lambda^\circ$	$X\alpha Z \in C_T^3$	$X'wY'_\alpha \in C_T^3, w \in \rho_\alpha(\Lambda^\circ)$	$ZY' \in C_T^3$
$(X\beta\alpha^k\beta wY' \in C_T^2 \wedge XwY' \in C_T^3), w \in \Lambda_{-\{B\}}$	$XwY'_\alpha \in C_T^3, w \in \Lambda^\circ$	$X\alpha Z \in C_T^3$	$(X'wY'_\alpha \in C_T^3 \wedge ZY' \in C_T^3), w \in \rho_\alpha(\Lambda^\circ)$	$X\alpha Z \in C_T^3$
$(X\beta\alpha^k\beta wY' \in C_T^2 \wedge XwY' \in C_T^3), w \in \Lambda_{-\{B\}}$	$(XwY'_\alpha \in C_T^3 \wedge ZY' \in C_T^3), w \in \Lambda^\circ$	$XwY' \in C_T^2, w \in \Lambda^\circ$	$(X'wY'_\alpha \in C_T^3 \wedge X\alpha Z \in C_T^3), w \in \rho_\alpha(\Lambda^\circ)$	$X\alpha Z \in C_T^3$
$X'wY'_\beta \in C_T^4, w \in \rho_\beta(\Lambda^\circ)$	$X\beta Z \in C_T^4$	$X'wY'_\beta \in C_T^4, w \in \rho_\beta(\Lambda^\circ)$	$X'wY'_\alpha \in C_T^3, w \in \Lambda^\circ$	$ZY' \in C_T^3$
$(X'wY'_\beta \in C_T^4 \wedge X\beta Z \in C_T^4), w \in \rho_\beta(\Lambda^\circ)$	$XwY'_\beta \in C_T^4, w \in \Lambda^\circ$	$(X'wY'_\beta \in C_T^4 \wedge ZY' \in C_T^4), w \in \rho_\beta(\Lambda^\circ)$	$(XwY'_\alpha \in C_T^3 \wedge ZY' \in C_T^3), w \in \Lambda^\circ$	$XwY' \in C_T^2, w \in \Lambda^\circ$
$XwY'_\beta \in C_T^4, w \in \Lambda^\circ$	$ZY' \in C_T^4$	$X'wY' \in C_T^4, w \in \rho_\beta(\Lambda^\circ)$	$XwY' \in C_T^2, w \in \Lambda^\circ$	
$(XwY'_\beta \in C_T^4 \wedge ZY' \in C_T^4), w \in \Lambda^\circ$		$(X'wY' \in C_T^4 \wedge X\beta Z \in C_T^4), w \in \rho_\beta(\Lambda^\circ)$	$XwY' \in C_T^2, w \in \Lambda^\circ$	

Tableau 2	Tableau 1
$\frac{XwBY \in C_{\Gamma}^5, w \in \Lambda_{-\{B\}} \quad XZ''Z'' \in C_{\Gamma}^5}{(XwBY' \in C_{\Gamma}^2, w \in \Lambda_{-\{B\}} \quad ZY \in C_{\Gamma}^2) \quad (XwBY \in C_{\Gamma}^5 \wedge XZ''Z'' \in C_{\Gamma}^5), w \in \Lambda_{-\{B\}}}$ $\frac{(XwBY' \in C_{\Gamma}^2 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^2), w \in \Lambda_{-\{B\}}}{XwY \in C_{\Gamma}^5, w \in \Lambda^{\circ}}$	$\frac{wBY' \in C_{\Gamma}^2, w \in \Sigma^+}{(wBY' \in C_{\Gamma}^2 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^2), w \in \Sigma^+} \quad \frac{XwBY \in C_{\Gamma}^5, Z''Z'' \in C_{\Gamma}^5}{(XwBY \in C_{\Gamma}^5 \wedge Z''Z'' \in C_{\Gamma}^5), w \in \Sigma^+}$
$\frac{X\beta\alpha^i\beta wBY \in C_{\Gamma}^2, w \in \Lambda_{-\{B\}}, i \in \mathbb{N}_m^+}{(X\beta\alpha^i\beta wBY \in C_{\Gamma}^2 \wedge Xs_iZ \in C_{\Gamma}^2), w \in \Lambda_{-\{B\}}, i \in \mathbb{N}_m^+}$ $\frac{X\beta\alpha^{n+i}\beta wBY \in C_{\Gamma}^2, w \in \Lambda_{-\{B\}}, i \in \mathbb{N}_m^+}{(X\beta\alpha^{n+i}\beta wBY \in C_{\Gamma}^2 \wedge XN_iZ \in C_{\Gamma}^2), w \in \Lambda_{-\{B\}}, i \in \mathbb{N}_m^+}$ $\frac{XwY \in C_{\Gamma}^5, w \in \Lambda^{\circ}}{XwY \in C_{\Gamma}^5, w \in \Lambda^{\circ}}$	$\frac{wBY \in C_{\Gamma}^3, w \in \Sigma^+}{(wBY \in C_{\Gamma}^3 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^2), w \in \Sigma^+} \quad \frac{wBY \in C_{\Gamma}^4, w \in \Sigma^+}{(wBY \in C_{\Gamma}^4 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^2), w \in \Sigma^+}$ $\frac{wBY \in C_{\Gamma}^6, w \in \Sigma^+}{(wBY \in C_{\Gamma}^6 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^2), w \in \Sigma^+} \quad \frac{wBY \in C_{\Gamma}^5, w \in \Sigma^+}{(wBY \in C_{\Gamma}^5 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^2), w \in \Sigma^+}$ $\frac{w \in C_{\Gamma}^1, w \in \Sigma^+}{(w \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^2), w \in \Sigma^+} \quad \frac{w \in C_{\Gamma}^3, w \in \Sigma^+}{(w \in C_{\Gamma}^3 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^2), w \in \Sigma^+}$ $\frac{w \in C_{\Gamma}^4, w \in \Sigma^+}{(w \in C_{\Gamma}^4 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^2), w \in \Sigma^+} \quad \frac{w \in C_{\Gamma}^5, w \in \Sigma^+}{(w \in C_{\Gamma}^5 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^2), w \in \Sigma^+}$

ANHANG C

**Tableauregeln und Tableau für den  
Korrektheitsbeweis des Systems TT2**

$$\begin{array}{c}
\forall w \in \mathcal{PV}, (u, v) \in P_G. \frac{\overset{(r_1^{(u,v),1})}{wuY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZvY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{ZuY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \quad \overset{(r_1^1)}{\overline{XBS_GY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1}} \\
\forall (u, v) \in P_G. \frac{\overset{(r_1^{2,(u,v)})}{\overline{ZvY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}}{\overline{ZvY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1}} \quad \forall w \in \mathcal{PV}, (u, v) \in P_G. \frac{\overset{(r_{11}^{(u,v),2})}{wuY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZvY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{wvY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
\forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{\overset{(r_{12}^{i,2})}{ws_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZG_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{Zs_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \quad \forall i \in \mathbb{N}_{n+m+1}^+. \frac{\overset{(r_1^{3,i})}{\overline{ZG_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}}{\overline{ZG_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1}} \\
\forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_n^+. L_i \notin \text{pre}(w). \frac{\overset{(r_{12}^{i,3})}{ws_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZG_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{wG_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
\forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_m^+. \frac{\overset{(r_{13}^{i,2})}{wN_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZG_{n+i} \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{ZN_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{\overset{(r_1^{4,i})}{\overline{L_i s_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}}{\overline{L_i s_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^1}} \\
\forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_m^+. L_{n+i} \notin \text{pre}(w). \frac{\overset{(r_{13}^{i,3})}{wN_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZG_{n+i} \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{wG_{n+i} \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
\forall i \in \mathbb{N}_m^+. \frac{\overset{(r_1^{5,i})}{\overline{L_{n+i} N_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}}{\overline{L_{n+i} N_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^1}} \quad \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{\overset{(r_{14}^2)}{wBY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZG_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{ZBY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
\forall w \in \mathcal{PV}. L_{n+m+1} \notin \text{pre}(w). \frac{\overset{(r_{14}^3)}{wBY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZG_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{wG_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\forall w \in \mathcal{SV}, i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{\overset{(r_{15}^{i,1})}{Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge L_i s_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \quad \overset{(r_1^6)}{L_{n+m+1} BZ \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
\forall w \in \mathcal{SV}, i \in \mathbb{N}_n^+. G_i \notin \text{suf}(w). \frac{\overset{(r_{15}^{i,3})}{Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge L_i s_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{L_i s_i w \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
\forall w \in \mathcal{SV}, i \in \mathbb{N}_m^+. \frac{\overset{(r_{16}^{i,1})}{Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge L_{n+i} N_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
\forall w \in \mathcal{SV}, i \in \mathbb{N}_m^+. G_{n+i} \notin \text{suf}(w). \frac{\overset{(r_{16}^{i,3})}{Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge L_{n+i} N_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{L_{n+i} N_i w \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
\forall w \in \mathcal{SV}. \frac{\overset{(r_{17}^1)}{Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge L_{n+m+1} BZ \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \quad \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*. \frac{\overset{(1, (X, Y'))}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
\forall w \in \mathcal{SV}. G_{n+m+1} \notin \text{suf}(w). \frac{\overset{(r_{17}^3)}{Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge L_{n+m+1} BZ \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{L_{n+m+1} Bw \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*, i \in \mathbb{N}_{n+m+1}^+. \frac{\overset{(r_{21}^{i,1})}{XwG_i \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
\forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^*, i \in \mathbb{N}_{n+m+1}^+. \frac{\overset{(r_{22}^{i,1})}{L_i wY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{XwY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1} \\
\forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_{n+m+1}^+. \frac{\overset{(r_{21}^{i,2})}{wG_i \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{ZG_i \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \\
\forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_{n+m+1}^+. X \notin \text{pre}(w). \frac{\overset{(r_{21}^{i,3})}{wG_i \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{wY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \\
\forall w \in \mathcal{SV}, i \in \mathbb{N}_{n+m+1}^+. \frac{\overset{(r_{22}^{i,2})}{L_i w \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}}{L_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2}
\end{array}$$



$$\begin{aligned}
& \forall w \in \mathcal{SV}, i \in \mathbb{N}_{n+m+1}^+. Y' \notin \text{suf}(w). \frac{(r_{22}^{i,3})}{Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \frac{L_i w \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{Xw \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \\
& \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{(r_{23}^{1'})}{Z'Z'G_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \frac{wG_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z'Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{Z'Z'G_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \\
& \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{(r_{23}^{2'})}{w \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \frac{wG_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z'Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{w \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \\
& \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{(r_{23}^{3'})}{Z'Z'G_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \frac{wG_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z'Z'G_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{Z'Z'G_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \quad \frac{(r_2^1)}{ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \\
& \frac{(r_2^2)}{XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \quad \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{(r_{23}^{4'})}{wG_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \frac{wG_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z'Z'G_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{wG_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \\
& \forall w \in \mathcal{SV}. \frac{(r_{24}^{1'})}{L_{n+m+1}BZ''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \frac{(r_2^3)}{Z'Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \frac{(r_{24}^{2'})}{L_{n+m+1}Bw \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{L_{n+m+1}Bw \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2} \\
& \frac{(r_2^4)}{Z''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \quad \forall w \in \mathcal{SV}. \frac{(r_{24}^{2'})}{w \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \frac{L_{n+m+1}Bw \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{w \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \\
& \forall w \in \mathcal{SV}. \frac{(r_{24}^{3'})}{L_{n+m+1}BZ''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \frac{L_{n+m+1}Bw \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge L_{n+m+1}BZ''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{L_{n+m+1}BZ''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \\
& \forall w \in \mathcal{SV}. \frac{(r_{24}^{4'})}{L_{n+m+1}Bw \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \frac{L_{n+m+1}Bw \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge L_{n+m+1}BZ''Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2}{L_{n+m+1}Bw \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \\
& \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*, i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{(r_{12}^{i,1})}{L_i w G_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \frac{L_i w s_i Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZG_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{L_i w G_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \\
& \forall w \in V_{-\mathcal{P},\mathcal{S}}^*, i \in \mathbb{N}_m^+. \frac{(r_{13}^{i,1})}{L_{n+i}wG_{n+i} \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}} \frac{L_{n+i}wN_iY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZG_{n+i} \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{L_{n+i}wG_{n+i} \in \mathcal{C}_\Gamma^{\prime 2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \frac{\overset{(r_{14}^1)}{L_{n+m+1}wBY' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZG_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma^1}}{L_{n+m+1}wG_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma'^2} \\
& \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \overset{(r_{15}^{i,2})}{i \in \mathbb{N}_n^+} \cdot \frac{XwG_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge L_i s_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{L_i s_i wG_i \in \mathcal{C}_\Gamma'^2} \\
& \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \overset{(r_{16}^{i,2})}{i \in \mathbb{N}_m^+} \cdot \frac{XwG_{n+i} \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge L_{n+i} N_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{L_{n+i} N_i wG_{n+i} \in \mathcal{C}_\Gamma'^2} \\
& \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \overset{(r_{17}^2)}{L_{n+m+1}BZ \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge L_{n+m+1}BwG_{n+m+1} \in \mathcal{C}_\Gamma'^2} \\
& \forall w \in V_{-\mathcal{P}, \mathcal{S}}^* \cdot \overset{(2, (L_i, G_i))}{\forall i \in \mathbb{N}_{n+m+1}^+} \cdot \frac{L_i wG_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1}{L_i wG_i \in \mathcal{C}_\Gamma'^2}
\end{aligned}$$

Tableau 1

$L_k Bw \in \mathcal{C}_T^2, L_k BZ''Z'' \in \mathcal{C}_T^2$	$L_k BwG_k \in \mathcal{C}_T^2, Z'Z' \in \mathcal{C}_T^2$	$L_k BwG_k \in \mathcal{C}_T^2, Z''Z'' \in \mathcal{C}_T^2$	$wG_k \in \mathcal{C}_T^2, Z'Z'G_k \in \mathcal{C}_T^2$
$(L_k Bw \in \mathcal{C}_T^2 \wedge L_k BZ''Z'' \in \mathcal{C}_T^2), w \in \Sigma^+$	$(L_k BwG_k \in \mathcal{C}_T^2 \wedge Z'Z' \in \mathcal{C}_T^2), w \in \Sigma^+$	$(L_k BwG_k \in \mathcal{C}_T^2 \wedge Z''Z'' \in \mathcal{C}_T^2), w \in \Sigma^+$	$(wG_k \in \mathcal{C}_T^2 \wedge Z'Z'G_k \in \mathcal{C}_T^2), w \in \Sigma^+$
$L_k Bw \in \mathcal{C}_T^2, w \in \Sigma^+$	$Z''Z'' \in \mathcal{C}_T^2$	$wG_k \in \mathcal{C}_T^2, w \in \Sigma^+$	$Z'Z' \in \mathcal{C}_T^2$
$(L_k Bw \in \mathcal{C}_T^2 \wedge Z''Z'' \in \mathcal{C}_T^2), w \in \Sigma^+$			
$w \in \mathcal{C}_T^2, w \in \Sigma^+$			

Tableau 2

$L_i wG_j \in \mathcal{C}_T^2, w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 1, i, j \in \mathbb{N}_k^+$	$XZ \in \mathcal{C}_T^2$	$XwG_k \in \mathcal{C}_T^2, Z'Z'G_k \in \mathcal{C}_T^2$
$(L_i wG_j \in \mathcal{C}_T^2 \wedge XZ \in \mathcal{C}_T^2), w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 1, i, j \in \mathbb{N}_k^+$	$(XwG_k \in \mathcal{C}_T^2 \wedge Z'Z'G_k \in \mathcal{C}_T^2), w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 1$	$ZY' \in \mathcal{C}_T^2$
$Xw'uY' \in \mathcal{C}_T^1, w \in V_{-p,s}^*, ZvY' \in \mathcal{C}_T^1, u \in V_{-p,s}^+,  w'u _B = 1, (u, v) \in PG$	$XwG_i \in \mathcal{C}_T^2, w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_k^+$	
$(Xw'uY' \in \mathcal{C}_T^1 \wedge ZvY' \in \mathcal{C}_T^1), w' \in V_{-p,s}^*, (u, v) \in PG, w = w'v,  w'u _B = 1$	$XwY' \in \mathcal{C}_T^2, w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 1$	$(XwG_i \in \mathcal{C}_T^2 \wedge ZY' \in \mathcal{C}_T^2), w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_k^+$
$XwY' \in \mathcal{C}_T^1, w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 1$		
$L_i wG_j \in \mathcal{C}_T^2, i, j \in \mathbb{N}_k^+, w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 1$	$ZY' \in \mathcal{C}_T^2$	$L_k BwY' \in \mathcal{C}_T^2, w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 0$
$(L_i wG_j \in \mathcal{C}_T^2 \wedge ZY' \in \mathcal{C}_T^2), w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 1, i, j \in \mathbb{N}_k^+$	$(L_k BwY' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge L_k BZ''Z'' \in \mathcal{C}_T^2), w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 0$	
$L_i wY' \in \mathcal{C}_T^2, i \in \mathbb{N}_k^+, w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 1$		$XZ \in \mathcal{C}_T^2$
$(L_i wY' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge XZ \in \mathcal{C}_T^2), w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_k^+$	$XwY' \in \mathcal{C}_T^1, w \in V_{-p,s}^+,  w _B = 1$	

Tableau 3

$L_i s_i w Y' \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$Zv Y' \in C_{\Gamma}^1$ $(u, v) \in PG$	$Xw Y' \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$L_i s_i Z \in C_{\Gamma}^1,$ $i \in \mathbb{N}_n^+$
$(L_i s_i w' u Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Zv Y' \in C_{\Gamma}^1), i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w' \in V_{-p, S}^+,  w' _B = 1, (u, v) \in PG$	$L_i s_i w Y' \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$(Xw Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge L_i s_i Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$Zv Y' \in C_{\Gamma}^1$ $(u, v) \in PG$
	$(L_i s_i w' u Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Zv Y' \in C_{\Gamma}^1), i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w' \in V_{-p, S}^+,  w' _B = 1, (u, v) \in PG$	$Xw s_i Y' \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$L_i s_i Z \in C_{\Gamma}^1$ $i \in \mathbb{N}_n^+$
	$L_i s_i w s_i Y' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$(Xw s_i Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge L_i s_i Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$ZG_i \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+$
	$L_i s_i w s_i Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZG_i \in C_{\Gamma}^1), w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$		
	$L_i w G_j \in C_{\Gamma}^2, i, j \in \mathbb{N}_k^+, w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$		

Tableau 4

$L_{n+i} N_i w Y' \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_m^+,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$Zv Y' \in C_{\Gamma}^1$ $(u, v) \in PG$	$Xw Y' \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$L_{n+i} N_i Z \in C_{\Gamma}^1,$ $i \in \mathbb{N}_m^+$
$(L_{n+i} N_i w' u Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Zv Y' \in C_{\Gamma}^1),$ $w' \in V_{-p, S}^+,  w' _B = 1, i \in \mathbb{N}_m^+, (u, v) \in PG$	$L_{n+i} N_i w Y' \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_m^+,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$(Xw Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge L_{n+i} N_i Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_m^+$	$Zv Y' \in C_{\Gamma}^1$ $(u, v) \in PG$
	$(L_{n+i} N_i w' u Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Zv Y' \in C_{\Gamma}^1),$ $w' \in V_{-p, S}^+,  w' _B = 1, i \in \mathbb{N}_m^+, (u, v) \in PG$	$(Xw N_i Y' \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_m^+,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$L_{n+i} N_i Z \in C_{\Gamma}^1,$ $i \in \mathbb{N}_m^+$
	$L_{n+i} N_i w N_i Y' \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_m^+, w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$(Xw N_i Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge L_{n+i} N_i Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_m^+$	$ZG_{n+i} \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_m^+$
	$(L_{n+i} N_i w N_i Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZG_{n+i} \in C_{\Gamma}^1), w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_m^+$		
	$L_i w G_j \in C_{\Gamma}^2, i, j \in \mathbb{N}_k^+, w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$		

Tableau 5

$L_k B w_1 B w_2' u Y' \in C_{\Gamma}^1, w_2' \in V_{-p, S}^*, Z v Y' \in C_{\Gamma}^1,$ $w_1, u \in V_{-p, S}^+,  w_1 w_2' u _B = 0$	$X w_1 B w_2 Y' \in C_{\Gamma}^1,$ $w_1, w_2 \in V_{-p, S}^+,  w_1 w_2 _B = 0$	$L_k B Z \in C_{\Gamma}^1$
$(L_k B w_1 B w_2' u Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z v Y' \in C_{\Gamma}^1), w_1 \in V_{-p, S}^+,$ $w_2' \in V_{-p, S}^*,  w_1 w_2' u _B = 0, (u, v) \in P_G, w_2 = w_2' v$	$(X w_1 B w_2 Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge L_k B Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w_1, w_2 \in V_{-p, S}^+,  w_1 w_2 _B = 0$	
	$L_k B w_1 B w_2 Y' \in C_{\Gamma}^1,$ $w_1, w_2 \in V_{-p, S}^+,  w_1 w_2 _B = 0$	$Z Y' \in C_{\Gamma}^1,$ $(w_2, \varepsilon) \in P_G$
	$(L_k B w_1 B w_2 Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge$ $Z Y' \in C_{\Gamma}^1), w_1, w_2 \in V_{-p, S}^+,$ $(w_2, \varepsilon) \in P_G,  w_1 w_2 _B = 0$	$X w B Y' \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 0$
$L_i w G_k \in C_{\Gamma}^2, i \in \mathbb{N}_k^+, Z' Z' G_k \in C_{\Gamma}^2,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$L_k w G_i \in C_{\Gamma}^2, i \in \mathbb{N}_k^+, L_k B Z'' Z'' \in C_{\Gamma}^2$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$Z G_k \in C_{\Gamma}^1$
$(L_i w G_k \in C_{\Gamma}^2 \wedge Z' Z' G_k \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_k^+$	$(L_k w G_i \in C_{\Gamma}^2 \wedge L_k B Z'' Z'' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_k^+$	$(L_k B w B Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z G_k \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 0$

 $L_i w G_j \in C_{\Gamma}^2, i, j \in \mathbb{N}_k^+, w \in V_{-p, S}^+, |w|_B = 1$ 

Tableau 6

$X w s_i Y' \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+, Z G_i \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$X w N_i Y' \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+, Z G_{n+i} \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$Z G_k \in C_{\Gamma}^1$
$(X w s_i Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z G_i \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$(X w N_i Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z G_{n+i} \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$(X w B Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z G_k \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 0$
$X w G_i \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p, S}^+, L_i s_i Z \in C_{\Gamma}^1,$ $ w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$X w G_{n+i} \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p, S}^+, L_{n+i} N_i Z \in C_{\Gamma}^1,$ $ w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$X w G_k \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 0$
$(X w G_i \in C_{\Gamma}^1 \wedge L_i s_i Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$(X w G_{n+i} \in C_{\Gamma}^1 \wedge L_{n+i} N_i Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$L_k B Z \in C_{\Gamma}^1$
$L_i w G_j \in C_{\Gamma}^2, i, j \in \mathbb{N}_k^+, w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$L_i w G_j \in C_{\Gamma}^2, i, j \in \mathbb{N}_k^+, w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$(X w G_k \in C_{\Gamma}^1 \wedge L_k B Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 0$

Tableau 7

$X w N_i Y' \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+, Z G_{n+i} \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$(X w N_i Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z G_{n+i} \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$L_{n+i} N_i Z \in C_{\Gamma}^1,$ $i \in \mathbb{N}_n^+$
$X w G_{n+i} \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p, S}^+, L_{n+i} N_i Z \in C_{\Gamma}^1,$ $ w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$(X w G_{n+i} \in C_{\Gamma}^1 \wedge L_{n+i} N_i Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	
$L_i w G_j \in C_{\Gamma}^2, i, j \in \mathbb{N}_k^+, w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$L_i w G_j \in C_{\Gamma}^2, i, j \in \mathbb{N}_k^+, w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	

Tableau 8

$X w B Y' \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 0$	$Z G_k \in C_{\Gamma}^1$
$(X w B Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z G_k \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 0$	
$X w G_k \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 0$	$L_k B Z \in C_{\Gamma}^1$
$(X w G_k \in C_{\Gamma}^1 \wedge L_k B Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 0$	
$L_i w G_j \in C_{\Gamma}^2, i, j \in \mathbb{N}_k^+, w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$	$L_i w G_j \in C_{\Gamma}^2, i, j \in \mathbb{N}_k^+, w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$

Tableau 9	$\frac{\frac{\exists w \in \mathcal{P}\mathcal{V}.wG_k \in \mathcal{C}_T^2 \quad Z'Z'G_k \in \mathcal{C}_T^2 \quad \exists w \in \mathcal{P}\mathcal{V}.wG_k \in \mathcal{C}_T^2 \quad Z'Z' \in \mathcal{C}_T^2}{\exists w \in \mathcal{P}\mathcal{V}.(wG_k \in \mathcal{C}_T^2 \wedge Z'Z'G_k \in \mathcal{C}_T^2)} \quad \exists w \in \mathcal{P}\mathcal{V}.(wG_k \in \mathcal{C}_T^2 \wedge Z'Z' \in \mathcal{C}_T^2)}{Z'Z'G_k \in \mathcal{C}_T^2}$
Tableau 10	$\frac{\frac{\exists w \in \mathcal{S}\mathcal{V}.L_k Bw \in \mathcal{C}_T^2 \quad L_k BZ''Z'' \in \mathcal{C}_T^2 \quad \exists w \in \mathcal{S}\mathcal{V}.L_k Bw \in \mathcal{C}_T^2 \quad Z''Z'' \in \mathcal{C}_T^2}{\exists w \in \mathcal{S}\mathcal{V}.(L_k Bw \in \mathcal{C}_T^2 \wedge L_k BZ''Z'' \in \mathcal{C}_T^2)} \quad \exists w \in \mathcal{S}\mathcal{V}.(L_k Bw \in \mathcal{C}_T^2 \wedge Z''Z'' \in \mathcal{C}_T^2)}{L_k BZ''Z'' \in \mathcal{C}_T^2}$

ANHANG D

Tableauregeln des Systems  $\Gamma$  aus Satz 4.7

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 (r_1^1) \\
 \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{waC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1} \wedge DaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1}}{waaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),2}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 (r_4) \\
 \frac{DaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1}}{DaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),2}}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 (r_5) \\
 \frac{FbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1}}{FbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),2}}
 \end{array}
 \qquad
 \forall w \in \mathcal{PV}. \begin{array}{c}
 (r_1^2) \\
 \frac{waC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1} \wedge DaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1}}{DC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),2}}
 \end{array} \\
 \\
 \forall w \in \mathcal{PV}. \begin{array}{c}
 (r_2^1) \\
 \frac{wE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1} \wedge FbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1}}{wbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),2}}
 \end{array}
 \qquad
 \forall w \in \mathcal{PV}. \begin{array}{c}
 (r_2^2) \\
 \frac{wE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1} \wedge FbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1}}{FE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),2}}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 (r_3^1) \\
 \frac{AaaC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1} \wedge BbbE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1}}{AaabbE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),2}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 (r_3^2) \\
 \frac{AaaC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1} \wedge BbbE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),1}}{BC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),2}}
 \end{array} \\
 \\
 \forall w \in \mathcal{PV}. \begin{array}{c}
 (r_6^1) \\
 \frac{DC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),2} \wedge wZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),2}}{wC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),1}}
 \end{array}
 \qquad
 \forall w \in \mathcal{PV}. \begin{array}{c}
 (r_6^2) \\
 \frac{DC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),2} \wedge wZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),2}}{DZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),1}}
 \end{array} \\
 \\
 \forall w \in \mathcal{PV}. \begin{array}{c}
 (r_8^1) \\
 \frac{FE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),2} \wedge wX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),2}}{wE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),1}}
 \end{array}
 \qquad
 \forall w \in \mathcal{PV}. \begin{array}{c}
 (r_8^2) \\
 \frac{FE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),2} \wedge wX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),2}}{FX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),1}}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 (r_7) \\
 \frac{DaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),2}}{DaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),1}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 (r_9) \\
 \frac{FbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i),2}}{FbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(i+1),1}}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 (r^1) \\
 \overline{AaC \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 (r^2) \\
 \overline{DaZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 (r^3) \\
 \overline{BE \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 (r^4) \\
 \overline{FbX \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}
 \end{array}
 \end{array}$$





ANHANG E

## Tableauregeln und Tableau für den Korrektheitsbeweis des Systems TVDH2

$$\begin{aligned}
 & \forall w \in \mathcal{PV}, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+. \forall (u, va_j) \in P_G. \frac{(r_{11}^{1,(u,va_j)})}{wuY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZvY_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \frac{}{wvY_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}} \\
 & \forall w \in \mathcal{PV}, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+. \forall (u, va_j) \in P_G. \frac{(r_{11}^{2,(u,va_j)})}{wuY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZvY_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \frac{}{ZuY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}} \\
 & \forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_n^+, (u, \varepsilon) \in P_G. \frac{(r_{11'}^{1,i,(u,\varepsilon)})}{wa_iuY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZY_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \frac{(r_{111}^7)}{ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{}{wY_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}} \frac{}{ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}} \\
 & \frac{(r_{111}^{13})}{XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \frac{}{XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}} \quad \forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_n^+, (u, \varepsilon) \in P_G. \frac{(r_{11'}^{2,i,(u,\varepsilon)})}{wa_iuY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZY_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \frac{}{Za_iuY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}} \\
 & \forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{(r_{12}^{1,i})}{wa_iY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZY_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \frac{}{wY_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{(r_{111}^{2,i})}{ZY_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \frac{}{ZY_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}} \\
 & \forall i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{(r_{111}^{8,i})}{X_ia_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \frac{}{X_ia_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}} \quad \forall w \in \mathcal{PV}, i \in \mathbb{N}_n^+. \frac{(r_{12}^{2,i})}{wa_iY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZY_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \frac{}{Za_iY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}} \\
 & \forall w \in \mathcal{PV}, k \in \mathbb{N}_n^+. k \geq 2. \frac{(r_{13}^{1,k})}{waY_k \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZY'_{k-1} \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \frac{}{waY'_{k-1} \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}} \frac{(r_{111}^{11})}{ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \\
 & \qquad \qquad \qquad \frac{}{ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}} \\
 & \frac{(r_{111}^{5,i})}{X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \frac{}{X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}} \quad \forall w \in \mathcal{PV}, k \in \mathbb{N}_n^+. k \geq 2. \frac{(r_{13}^{2,k})}{waY_k \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZY'_{k-1} \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \frac{}{ZY_k \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{(r_{111}^{15})}{C_1 Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \quad \frac{(r_{14}^{1,j})}{\forall w \in \mathcal{PV}, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{waY'_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZY''_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{waY''_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \\
\forall w \in \mathcal{PV}, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{(r_{14}^{2,j})}{\frac{waY'_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZY''_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{ZY'_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \quad \frac{(r_{111}^{20})}{\frac{Z''C_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{Z''C_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \\
\forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{(r_{111}^{10,j})}{\frac{X''_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{X''_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \quad \forall w \in \mathcal{SV} \cdot \frac{(r_{15}^1)}{\frac{X_1 \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{X' \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \\
\forall w \in \mathcal{SV} \cdot \frac{(r_{15}^2)}{\frac{X_1 \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{X_1 Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \quad \forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{(r_{111}^{9,j})}{\frac{X'_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{X'_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \\
\forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{(r_{111}^{14,j})}{\frac{X_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{X_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \quad \forall w \in \mathcal{SV} \cdot \frac{(r_{16}^1)}{\frac{X' \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge X''Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{X'' \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \\
\forall w \in \mathcal{SV} \cdot \frac{(r_{16}^2)}{\frac{X' \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge X''Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \quad \forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{(r_{111}^{4,j})}{\frac{ZY''_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{ZY''_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \\
\forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{(r_{111}^{3,j})}{\frac{ZY'_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{ZY'_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \quad \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{(r_{17}^1)}{\frac{waY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{waY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \\
\forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{(r_{17}^2)}{\frac{waY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{ZY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \quad \forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{(r_1^{4,j})}{ZY'_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}} \\
\frac{(r_{111}^6)}{X''Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}} \quad \frac{(r_{18}^1)}{\forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV} \cdot \frac{w_1 \mathbf{a}BY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge Z''w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{w_1 \mathbf{a}w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \\
\forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV} \cdot \frac{(r_{18}^2)}{\frac{w_1 \mathbf{a}BY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge Z''w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{Z''BY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \quad \frac{(r_{111}^{12})}{\frac{ZY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{ZY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \\
\forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{(r_1^{5,j})}{ZY''_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}} \quad \forall w \in \mathcal{PV}, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{(r_{19}^{1,j})}{\frac{waY''_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZY_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{waY_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \forall w \in \mathcal{PV}, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{(r_{19}^{2,j})}{\frac{w\mathbf{a}Y_j'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge ZY_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{ZY_j'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \quad \forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{(r_1^{10,j})}{X_j'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}} \\
& \forall i \in \mathbb{N}_n^+ \cdot \frac{(r_{210}^{2,i})}{\frac{ZY_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{ZY_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}} \quad \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{(r_{110}^1)}{\frac{C_1Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge wD_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{C_1D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \\
& \forall w \in \mathcal{PV} \cdot \frac{(r_{110}^2)}{\frac{C_1Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge wD_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{wZ' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n^+ \cdot \frac{(r_{210}^{8,i})}{\frac{X_i a_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X_i a_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}} \\
& \frac{(r_1^1)}{\overline{XSGBY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}} \quad \forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \forall (u, va_j) \in P_G \cdot \frac{(r_{111}^1)}{\frac{ZvY_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{ZvY_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \\
& \forall w_1, w_2 \in \mathcal{PV} \cdot \frac{(r_{111}^{16})}{\frac{w_1D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge w_2D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{w_1D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \quad \forall i \in \mathbb{N}_n^+ \cdot \frac{(r_1^{3,i})}{\overline{ZY_i \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}} \\
& \forall i \in \mathbb{N}_n^+ \cdot \frac{(r_1^{9,i})}{\overline{X_i a_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}} \quad \forall w_1, w_2 \in \mathcal{PV} \cdot \frac{(r_{111}^{17})}{\frac{w_1D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge w_2D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{w_2D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \\
& \forall w_1, w_2 \in \mathcal{SV} \cdot \frac{(r_{111}^{18})}{\frac{D_2w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge D_2w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{D_2w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \quad \forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{(r_1^{11,j})}{\overline{X_j''Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}} \\
& \forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \frac{(r_1^{15,j})}{\overline{X_jZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}} \quad \forall w_1, w_2 \in \mathcal{SV} \cdot \frac{(r_{111}^{19})}{\frac{D_2w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1} \wedge D_2w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),1}}{D_2w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),2}}} \\
& \forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+ \cdot \forall (u, va_j) \in P_G \cdot \frac{(r_1^{2,(u,va_j)})}{\overline{ZvY_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}} \quad \overline{XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}} \quad \overline{D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}} \\
& \frac{(r_1^{16})}{\overline{C_1Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}} \quad \forall w \in \mathcal{SV}, i \in \mathbb{N}_n^+ \cdot \frac{(r_{21}^{1,i})}{\frac{X\mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge X_i a_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}} \\
& \forall w \in \mathcal{SV}, i \in \mathbb{N}_n^+ \cdot \frac{(r_{21}^{2,i})}{\frac{X\mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge X_i a_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X_i a_i \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}} \quad \frac{(r_{210}^5)}{\frac{X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\text{\scriptsize } (r_1^6) \\
\overline{X'Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}} \quad \forall w \in \mathcal{SV}, k \in \mathbb{N}_n^+. k \geq 2. \frac{\text{\scriptsize } (r_{22}^{1,k}) \quad X_k \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge X'_{k-1} Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X_k Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\forall w \in \mathcal{SV}, k \in \mathbb{N}_n^+. k \geq 2. \frac{\text{\scriptsize } (r_{22}^{2,k}) \quad X_k \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge X'_{k-1} Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X'_{k-1} \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \text{\scriptsize } (r_1^{12}) \\
\overline{ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\text{\scriptsize } (r_{210}^{11}) \\
\frac{ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \forall w \in \mathcal{SV}, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+. \frac{\text{\scriptsize } (r_{23}^{1,j}) \quad X'_j \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge X''_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X'_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\forall w \in \mathcal{SV}, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+. \frac{\text{\scriptsize } (r_{23}^{2,j}) \quad X'_j \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge X''_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X''_j \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \text{\scriptsize } (r_{210}^{12}) \\
\overline{ZY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+. \frac{\text{\scriptsize } (r_{210}^{3,j}) \quad ZY'_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{ZY'_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{\text{\scriptsize } (r_{24}^{1}) \quad waY_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{waY' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\forall w \in \mathcal{PV}. \frac{\text{\scriptsize } (r_{24}^{2}) \quad waY_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{ZY_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+. \frac{\text{\scriptsize } (r_{210}^{4,j}) \quad ZY''_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{ZY''_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+. \frac{\text{\scriptsize } (r_{210}^{9,j}) \quad X'_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X'_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \forall w \in \mathcal{PV}. \frac{\text{\scriptsize } (r_{25}^{1}) \quad waY' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge ZY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{waY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\forall w \in \mathcal{PV}. \frac{\text{\scriptsize } (r_{25}^{2}) \quad waY' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge ZY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{ZY' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+. \frac{\text{\scriptsize } (r_{210}^{10,j}) \quad X''_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X''_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+. \frac{\text{\scriptsize } (r_{210}^{14,j}) \quad X_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X_j Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \forall w \in \mathcal{SV}. \frac{\text{\scriptsize } (r_{26}^{1}) \quad X'' \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X''Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\forall w \in \mathcal{SV}. \frac{\text{\scriptsize } (r_{26}^{2}) \quad X'' \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X \mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \text{\scriptsize } (r_{210}^{6}) \quad \frac{X''Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X''Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \text{\scriptsize } (r_1^8) \\
\overline{ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}
\end{array} \\
\begin{array}{c}
\forall w_1 \in \mathcal{SV}, w_2 \in \mathcal{PV}. \frac{\text{\scriptsize } (r_{27}^{1}) \quad X'' \mathbf{a}w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge w_2 Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X''Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \text{\scriptsize } (r_{210}^{15}) \\
\overline{C_1 Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\text{\scriptsize (r}_1^7\text{)} \\
\overline{X''Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}}
\end{array}
\quad \forall w_1 \in \mathcal{SV}, w_2 \in \mathcal{PV}. \frac{\text{\scriptsize (r}_{27}^2\text{)} \quad X''\mathbf{a}w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge w_2Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{w_2\mathbf{a}w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \\
\\
\forall w \in \mathcal{SV}, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+. \frac{\text{\scriptsize (r}_{28}^{1,j}\text{)} \quad X_j''\mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge X_jZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X_j''Z \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \text{\scriptsize (r}_1^{19}\text{)} \quad \overline{Z''C_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}} \\
\\
\text{\scriptsize (r}_1^{13}\text{)} \quad \overline{ZY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}} \quad \forall w \in \mathcal{SV}, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+. \frac{\text{\scriptsize (r}_{28}^{2,j}\text{)} \quad X_j''\mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge X_jZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{X_j\mathbf{a}w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \\
\\
\forall w \in \mathcal{SV}. \frac{\text{\scriptsize (r}_{29}^1\text{)} \quad Z''C_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge D_2w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{Z''w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \text{\scriptsize (r}_1^{18}\text{)} \quad \overline{D_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(0),1}} \\
\\
\frac{\text{\scriptsize (r}_{210}^{13}\text{)} \quad XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \forall w \in \mathcal{SV}. \frac{\text{\scriptsize (r}_{29}^2\text{)} \quad Z''C_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge D_2w \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{D_2C_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \\
\\
\forall j \in \mathbb{N}_{n-1}^+. \forall (u, va_j) \in PG. \frac{\text{\scriptsize (r}_{210}^{1,(u,va_j)}\text{)} \quad ZvY_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{ZvY_j \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \\
\\
\forall w_1, w_2 \in \mathcal{PV}. \frac{\text{\scriptsize (r}_{210}^{16}\text{)} \quad w_1D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge w_2D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{w_1D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \\
\\
\frac{\text{\scriptsize (r}_{210}^7\text{)} \quad ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \forall w_1, w_2 \in \mathcal{PV}. \frac{\text{\scriptsize (r}_{210}^{17}\text{)} \quad w_1D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge w_2D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{w_2D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \\
\\
\forall w_1, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{\text{\scriptsize (r}_{210}^{18}\text{)} \quad D_2w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge D_2w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{D_2w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \quad \text{\scriptsize (r}_{210}^{20}\text{)} \quad \frac{Z''C_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{Z''C_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}} \\
\\
\forall w_1, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{\text{\scriptsize (r}_{210}^{19}\text{)} \quad D_2w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2} \wedge D_2w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa),2}}{D_2w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^{(\kappa+1),1}}
\end{array}$$

Tableau 1

$D_2 w'Y \in C_{\Gamma}^1, w' \in V_{-p,S}^+$	$D_2 wY \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+$	$D_2 wY_k \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, k \in \mathbb{N}_n^+, k \geq 2$
$D_2 w'Y_j \in C_{\Gamma}^1, w \in SV,$ $ w  \geq 1, w \neq C_2$	$(D_2 w'Y \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZvY_j \in C_{\Gamma}^1),$ $w' \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, (u, va_j) \in PG$	$(D_2 wY_k \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY'_k \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^+, k \in \mathbb{N}_n^+, k \geq 2$
$D_2 wY'_j \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$(D_2 wY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY'' \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$(D_2 wY''_j \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY''_j \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$D_2 wY'_j \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$D_2 wY'' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+$	$D_2 wY''_j \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$D_2 w_1 B Y'' \in C_{\Gamma}^1, w_1 \in V_{-p,S}^+$	$(C_1 Z' \in C_{\Gamma}^1 \wedge D_2 w D_1 \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^*$	$(D_2 wY \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY_i \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+$
$(D_2 w_1 B Y'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z'' w_2 \in C_{\Gamma}^1),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in SV, w = w_1 w_2$	$D_2 w \in C_{\Gamma}^2, w \in SV,  w  \geq 1, w \neq C_2$	$D_2 w D_1 \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+$
	$D_2 w \in C_{\Gamma}^2, w \in SV,  w  \geq 1, w \neq C_2$	$D_2 w D_1 \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+$

Tableau 2

$X w D_1 \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+$	$X_k w D_1 \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+, k \in \mathbb{N}_n^+, k \geq 2$	$X'_j w D_1 \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$X'' w D_1 \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+$
$(X w D_1 \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_i a_i Z \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+$	$(X_k w D_1 \in C_{\Gamma}^2 \wedge X'_{k-1} Z \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+, k \in \mathbb{N}_n^+, k \geq 2$	$(X'_j w D_1 \in C_{\Gamma}^2 \wedge X''_j Z \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$(X'' w D_1 \in C_{\Gamma}^2 \wedge X Z \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+$
$X'' w_1 D_1 \in C_{\Gamma}^2, w_1 \in V_{-p,S}^+$	$X''_j w D_1 \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$D_2 w D_1 \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^*$	
$(X'' w_1 D_1 \in C_{\Gamma}^2 \wedge w_2 Z' \in C_{\Gamma}^2),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in PV, w = w_2 w_1$	$(X'' w D_1 \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_j Z \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$(Z'' C_2 \in C_{\Gamma}^2 \wedge D_2 w D_1 \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^*$	$w D_1 \in C_{\Gamma}^2, w \in PV,$ $ w  \geq 1, w \neq C_1$
	$w D_1 \in C_{\Gamma}^1, w \in PV,  w  \geq 1, w \neq C_1$		

Tableau 3	
$X_1 w D_1 \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p, S}^*$ $w D_1 \in C_{\Gamma}^1, w \in \mathcal{P}\mathcal{V},$ $ w  \geq 1, w \neq C_1$	$X' w D_1 \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p, S}^*$ $(X_1 w D_1 \in C_{\Gamma}^1 \wedge X' Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^*$ $w D_1 \in C_{\Gamma}^2, w \in \mathcal{P}\mathcal{V},  w  \geq 1, w \neq C_1$
	$Z'' w_2 D_1 \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $(w_1 B Y'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z'' w_2 D_1 \in C_{\Gamma}^1),$ $w_1 \in \mathcal{P}\mathcal{V}^+, w_2 \in V_{-p, S}^*, w = w_1 w_2$ $D_2 w D_1 \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in V_{-p, S}^*$
Tableau 4	
$D_2 w Y_1 \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p, S}^+$ $(D_2 w Y_1 \in C_{\Gamma}^2 \wedge Z Y' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p, S}^+$ $D_2 w \in C_{\Gamma}^2, w \in \mathcal{S}\mathcal{V},$ $ w  \geq 1, w \neq C_2$	$D_2 w_2 Z' \in C_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $(X'' w_1 \in C_{\Gamma}^2 \wedge D_2 w_2 Z' \in C_{\Gamma}^2),$ $w_1 \in \mathcal{S}\mathcal{V}^+, w_2 \in V_{-p, S}^*, w = w_2 w_1$ $D_2 w \in C_{\Gamma}^1, w \in \mathcal{S}\mathcal{V},  w  \geq 1, w \neq C_2$
Tableau 5	
$Z'' w D_1 \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p, S}^*$ $(C_1 Z' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z'' w D_1 \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^*$ $Z'' w' Y \in C_{\Gamma}^1, w' \in V_{-p, S}^+$ $(Z'' w' Y \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z v Y_j \in C_{\Gamma}^1),$ $w' \in V_{-p, S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, (u, v a_j) \in P_G$	$Z'' w Y \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p, S}^+$ $Z'' w Y' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p, S}^+$ $(Z'' w Y' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z Y_i \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+$ $Z'' w \in C_{\Gamma}^2, w \in \mathcal{S}\mathcal{V}, w \neq C_2, w \neq B Y''$ $Z'' w Y_k \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p, S}^+, k \in \mathbb{N}_n^+, k \geq 2$ $(Z'' w Y_k \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z Y'_{k-1} \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+, k \in \mathbb{N}_n^+$ $Z'' w \in C_{\Gamma}^2, w \in \mathcal{S}\mathcal{V}, w \neq C_2, w \neq B Y''$ $Z'' w_1 B Y'' \in C_{\Gamma}^1, w_1 \in V_{-p, S}^+$ $(Z'' w_1 B Y'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z'' w_2 \in C_{\Gamma}^1),$ $w_1 \in V_{-p, S}^+, w_2 \in \mathcal{S}\mathcal{V}, w_2 \neq C_2$ $Z'' w \in C_{\Gamma}^2, w \in \mathcal{S}\mathcal{V}, w \neq C_2, w \neq B Y''$
	$Z'' w Y_j' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p, S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $(Z'' w Y_j' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z Y_j'' \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $Z'' w Y_j'' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p, S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $(Z'' w Y_j'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z Y_j \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p, S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$

<b>Tableau 6</b>	$Z''wY_1 \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+$ $Z''wD_1 \in C_{\Gamma}^2,$ $w \in V_{-p,S}^+$	$Z''wY' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+$ $(Z''wY' \in C_{\Gamma}^2 \wedge ZY'' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+$	$Z''w_2Z' \in C_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$ $(X''w_1 \in C_{\Gamma}^2 \wedge Z''w_2Z' \in C_{\Gamma}^2),$ $w_1 \in SY^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$	$D_2w \in C_{\Gamma}^2, w \in SY,  w  \geq 1, w \neq C_2$ $(Z''C_2 \in C_{\Gamma}^2 \wedge D_2w \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in SY,  w  \geq 1, w \neq C_2$
<b>Tableau 7</b>	$X''w_1Z' \in C_{\Gamma}^2, w_1 \in V_{-p,S}^+$ $D_2wZ' \in C_{\Gamma}^2,$ $w \in V_{-p,S}^*$	$X''wZ' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+$ $(X''wZ' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_jZ' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$X''wZ' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $(X''wZ' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_jZ' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$D_2wZ' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^*$ $(Z''C_2 \in C_{\Gamma}^2 \wedge D_2wZ' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^*$
<b>Tableau 8</b>	$XwZ' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+$ $(XwZ' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_i a_i Z' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+$	$X_k wZ' \in C_{\Gamma}^2, k \in \mathbb{N}_n^+, k \geq 2, w \in V_{-p,S}^+$ $(X_k wZ' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X'_{k-1} Z' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+, k \in \mathbb{N}_n^+, k \geq 2$	$X'_j wZ' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $(X'_j wZ' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X''_j Z' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$X''wZ' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^*$ $(X''wZ' \in C_{\Gamma}^2 \wedge XZ' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^*$
<b>Tableau 8</b>	$X_1 wZ' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+$ $(X_1 wZ' \in C_{\Gamma}^1 \wedge X'Z' \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^+$	$X'wZ' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+$ $(X'wZ' \in C_{\Gamma}^1 \wedge X''Z' \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^+$	$Z''w_2Z', w_2 \in V_{-p,S}^*$ $(w_1 B Y'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Z'),$ $w_1 \in \mathcal{P}\mathcal{V}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$	$wD_1 \in C_{\Gamma}^1, w \in \mathcal{P}\mathcal{V},$ $ w  \geq 1, w \neq C_1$ $(C_1Z' \in C_{\Gamma}^1 \wedge wD_1 \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in \mathcal{P}\mathcal{V},  w  \geq 1, w \neq C_1$ $D_2wZ' \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in V_{-p,S}^*$



Tableau 9

	$X''w_2Z' \in \mathcal{C}_T^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X'w_2Z' \in \mathcal{C}_T^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$
$(X''w_1Y_{j+1} \in \mathcal{C}_T^2 \wedge X''w_2Z' \in \mathcal{C}_T^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2w_1$		$(X''w_1Y_j \in \mathcal{C}_T^2 \wedge X'w_2Z' \in \mathcal{C}_T^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2w_1$
$Z''w_2Y_j' \in \mathcal{C}_T^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X''wY_{j+1} \in \mathcal{C}_T^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$	$X'wY_j' \in \mathcal{C}_T^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$
$(X''w_1BY'' \in \mathcal{C}_T^1 \wedge Z''w_2Y_j' \in \mathcal{C}_T^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$	$(X''wY_{j+1} \in \mathcal{C}_T^1 \wedge ZY_j' \in \mathcal{C}_T^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$(X'wY_j' \in \mathcal{C}_T^1 \wedge X''Z \in \mathcal{C}_T^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$
	$X''wY_j' \in \mathcal{C}_T^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$	$XZ \in \mathcal{C}_T^2$
$Xw_2Z' \in \mathcal{C}_T^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$		
$(X''w_1Y_j' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge Xw_2Z' \in \mathcal{C}_T^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2w_1$		$(X''wY_j' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge XZ \in \mathcal{C}_T^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$
$Z''w_2Y_j'' \in \mathcal{C}_T^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$XwY_j' \in \mathcal{C}_T^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$	$ZY_j'' \in \mathcal{C}_T^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$(Xw_1BY'' \in \mathcal{C}_T^1 \wedge Z''w_2Y_j'' \in \mathcal{C}_T^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$	$(XwY_j' \in \mathcal{C}_T^1 \wedge ZY_j'' \in \mathcal{C}_T^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$	
	$XwY_j'' \in \mathcal{C}_T^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$	$X_ja_jZ \in \mathcal{C}_T^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, X_j''a_jwY_j'' \in \mathcal{C}_T^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  a_jw _B = 1$
$X_jw_2Z' \in \mathcal{C}_T^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$		
$(X''w_1Y_j'' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge X_jw_2Z' \in \mathcal{C}_T^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_jw = w_2w_1$	$(XwY_j'' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge X_ja_jZ \in \mathcal{C}_T^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$	$(X_j''a_jwY_j'' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge X_jZ \in \mathcal{C}_T^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  a_jw _B = 1$
	$X_ja_jwY_j'' \in \mathcal{C}_T^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  a_jw _B = 1$	

Tableau 10

$X_j w_2 Z' \in \mathcal{C}_T^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_{j+1} a_i w Y_{j+1} \in \mathcal{C}_T^2, w \in V_{-p,S}^+$ $i \in \mathbb{N}_n^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,  a_i w _B = 1$
$(X'' w_1 Y_{j+1} \in \mathcal{C}_T^2 \wedge X_j w_2 Z' \in \mathcal{C}_T^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_i w = w_2 w_1$	$(X_{j+1} a_i w Y_{j+1} \in \mathcal{C}_T^2 \wedge X_j Z' \in \mathcal{C}_T^2), i \in \mathbb{N}_n^+$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1$
$Z'' w_2 Y_j' \in \mathcal{C}_T^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_j' a_i w Y_{j+1} \in \mathcal{C}_T^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $i \in \mathbb{N}_n^+, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1$
$(X_j' w_1 B Y'' \in \mathcal{C}_T^1 \wedge Z'' w_2 Y_j' \in \mathcal{C}_T^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_i w = w_1 w_2$	$(X_j' a_i w Y_{j+1} \in \mathcal{C}_T^1 \wedge Z Y_j' \in \mathcal{C}_T^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $i \in \mathbb{N}_n^+, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1$
$X_j'' w_2 Z' \in \mathcal{C}_T^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_j' a_i w Y_j' \in \mathcal{C}_T^2, w \in V_{-p,S}^+$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, i \in \mathbb{N}_n^+,  a_i w _B = 1$
$(X'' w_1 Y_j' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge X_j'' w_2 Z' \in \mathcal{C}_T^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_i w = w_2 w_1$	$(X_j' a_i w Y_j' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge X_j'' Z' \in \mathcal{C}_T^2), i \in \mathbb{N}_n^+$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1$
$Z'' w_2 Y_j'' \in \mathcal{C}_T^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_j'' a_i w Y_j' \in \mathcal{C}_T^1, w \in V_{-p,S}^+$ $i \in \mathbb{N}_n^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,  a_i w _B = 1$
$(X_j'' w_1 B Y'' \in \mathcal{C}_T^1 \wedge Z'' w_2 Y_j'' \in \mathcal{C}_T^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_i w = w_1 w_2$	$(X_j'' a_i w Y_j' \in \mathcal{C}_T^1 \wedge Z Y_j'' \in \mathcal{C}_T^1), i \in \mathbb{N}_n^+$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1$
$X_j'' a_i w Y_j'' \in \mathcal{C}_T^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, i \in \mathbb{N}_n^+, w \in V_{-p,S}^+$	

Tableau 11

$X_j w_2 Z' \in \mathcal{C}_T^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_j'' a_i w Y_j'' \in \mathcal{C}_T^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, i \in \mathbb{N}_n^+, i \neq j, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1$
$(X'' w_1 Y_j'' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge X_j w_2 Z' \in \mathcal{C}_T^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_i w = w_2 w_1$	$(X_j'' a_i w Y_j'' \in \mathcal{C}_T^2 \wedge X_j Z' \in \mathcal{C}_T^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $i \in \mathbb{N}_n^+, i \neq j, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1$
$X_j a_i w Y_j'' \in \mathcal{C}_T^1, w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, i \neq j,  a_i w _B = 1$	

Tableau 12

	$Z''w_2Y'' \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$Z''w_2Y'' \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$
	$(X_j'w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y'' \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_1w_2$	$(X_j''w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y'' \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_1w_2$
	$X_j'a_iwY'' \in C_{\Gamma}^2, i \in \mathbb{N}_n^+$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i, w \in V_{-p,S}^+$	$X_j''a_iwY'' \in C_{\Gamma}^2, i \in \mathbb{N}_n^+$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i, w \in V_{-p,S}^+$
$X_j''w_2Z' \in C_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$(X_j'a_iwY'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_j''Z \in C_{\Gamma}^2),$ $i \in \mathbb{N}_n^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i, w \in V_{-p,S}^+$	$(X_j''a_iwY'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge ZY'' \in C_{\Gamma}^2),$ $i \in \mathbb{N}_n^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i, w \in V_{-p,S}^+$
$(X''w_1Y'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_j''w_2Z' \in C_{\Gamma}^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_2w_1$	$X_j''a_iwY'' \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i, w \in V_{-p,S}^+$	$ZY'' \in C_{\Gamma}^1$
	$Z''w_2Y \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$	
	$(X_jw_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y \in C_{\Gamma}^1),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_1w_2$	$(X_j''a_iwY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^1),$ $i \in \mathbb{N}_n^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i, w \in V_{-p,S}^+$
	$X_jw_2Z' \in C_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*, j \in \mathbb{N}_n^+$	$X_jZ \in C_{\Gamma}^2,$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
	$(X''w_1Y \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_jw_2Z' \in C_{\Gamma}^2), j \in \mathbb{N}_n^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_2w_1$	$(X_j''a_iwY \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_jZ \in C_{\Gamma}^2),$ $i \in \mathbb{N}_n^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i, w \in V_{-p,S}^+$
	$X_ja_iwY \in C_{\Gamma}^1, i, j \in \mathbb{N}_n^+, j \neq i, w \in V_{-p,S}^+$	

Tableau 13

$X_j a_i w' u Y \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, i \neq j$ $w' \in V_{-p,S}^*, (u, va_j) \in PG,  a_i w' u _B = 1$	$X_j a_i w a_j u Y \in C_{\Gamma}^1, i, j \in \mathbb{N}_n^+,  a_i w a_j u _B = \begin{cases} 1 & j \neq n \\ 2 & j = n \end{cases}$ $i \neq j, w \in V_{-p,S}^+, (u, \varepsilon) \in PG,$
$(X_j a_i w' u Y \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z v Y_j \in C_{\Gamma}^1), i \in \mathbb{N}_n^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, i \neq j$ $w' \in V_{-p,S}^*, (u, va_j) \in PG, v \in \text{suf}(w),  a_i w' u _B = 1$	$(X_j a_i w a_j u Y \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z Y_j \in C_{\Gamma}^1),$ $i, j \in \mathbb{N}_n^+, i \neq j, w \in V_{-p,S}^+, (u, \varepsilon) \in PG,$ $ a_i w a_j u _B = \begin{cases} 1 & j \neq n \\ 2 & j = n \end{cases}$
$Z'' w_2 Y_j \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$X_j a_i w Y_j \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, i, j \in \mathbb{N}_n^+, i \neq j$ $X_j a_i w a_j Y \in C_{\Gamma}^1, i, j \in \mathbb{N}_n^+,  a_i w a_j _B = \begin{cases} 1 & j \neq n \\ 2 & j = n \end{cases}$ $w \in V_{-p,S}^+, i \neq j,$ $X_j a_i w Y_j'' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+,$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, i \neq j,  a_i w _B = 1$
$(X_j w_1 B Y'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z'' w_2 Y_j \in C_{\Gamma}^1),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_i w = w_1 w_2$	$(X_j a_i w a_j Y \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z v Y_j \in C_{\Gamma}^1),$ $i, j \in \mathbb{N}_n^+, w \in V_{-p,S}^+, j \neq i,  a_i w a_j _B = \begin{cases} 1 & j \neq n \\ 2 & j = n \end{cases}$ $(X_j a_i w Y_j'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z Y_j \in C_{\Gamma}^1), i \in \mathbb{N}_n^+,$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, i \neq j, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1$
$X_j a_i w Y_j \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, i, j \in \mathbb{N}_n^+, i \neq j$	$X_j a_i w Y_j \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, i, j \in \mathbb{N}_n^+, i \neq j$

Tableau 14

$(X_j'' w_1 B Y'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z'' w_2 Y_j'' \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1 w_2$	$Z'' w_2 Y_j'' \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$ $(X_j'' w_1 B Y'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z'' w_2 Y_j'' \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1 w_2$
$X_j'' w_2 Z' \in C_{\Gamma}^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+$	$X_j'' w Y_j'' \in C_{\Gamma}^2,$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+$ $X_j'' Z \in C_{\Gamma}^2,$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $Z Y_j'' \in C_{\Gamma}^2$
$(X'' w_1 Y'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_j'' w_2 Z' \in C_{\Gamma}^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2 w_1$	$(X_j'' w Y_j'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_j'' Z \in C_{\Gamma}^2),$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+$ $(X_j'' w Y_j'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge Z Y_j'' \in C_{\Gamma}^2),$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+$
$Z'' w_2 Y \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_j'' w Y'' \in C_{\Gamma}^1,$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+$ $Z Y \in C_{\Gamma}^1$
$(X'' w_1 B Y'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z'' w_2 Y \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1 w_2$	$(X_j'' w Y'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z Y \in C_{\Gamma}^1),$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+$
$X_j'' w Y \in C_{\Gamma}^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+$	$X_j'' w Y \in C_{\Gamma}^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+$

Tableau 15

$Z''w_2Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$	
$(Xw_1BY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge Z''w_2Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^1),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$	$X''w_2Y'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$
$Xw_2Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$ZY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2$ $X''w_2Y'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge XZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2,$ $w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$
$(X''w_1Y'' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Xw_2Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2w_1$	$XwY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^1,$ $w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$
$Z''w_2Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$XwY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^1,$ $w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$
$(Xw_1BY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge Z''w_2Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^1), w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$	$(XwY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^1), w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$
$XwY \in \mathcal{C}_\Gamma^2,  w _B = 1, w \in V_{-p,S}^+$	
$ZY \in \mathcal{C}_\Gamma^1$	

Tableau 16

$X_iw_2Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, i \in \mathbb{N}_n^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$Xw_2Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in V_{-p,S}^+,$ $i \in \mathbb{N}_n^+, u \in V_{-p,S}^*,  wa_iu _B = 1$	$X''a_iwa_iuY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, i \in \mathbb{N}_{n-1}^+,$ $w \in V_{-p,S}^+, u \in V_{-p,S}^*,$ $ a_iwa_iu _B = \begin{cases} 1 & i \neq n \\ 2 & i = n \end{cases}$
$(X''w_1Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X_iw_2Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2), i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iwa_iu = w_2w_1$	$(Xwa_iuY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X_ia_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2), i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w \in V_{-p,S}^+, u \in V_{-p,S}^*,  wa_iu _B = 1$	$(X''a_iwa_iuY' \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X_iZ \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $i \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+, u \in V_{-p,S}^*,$ $ a_iwa_iu _B = \begin{cases} 1 & i \neq n \\ 2 & i = n \end{cases}$
$X_i a_i w a_i u Y' \in \mathcal{C}_\Gamma^1, i \in \mathbb{N}_n^+, w \in V_{-p,S}^+, u \in V_{-p,S}^*,  a_i w a_i u _B = \begin{cases} 1 & i \neq n \\ 2 & i = n \end{cases}$		

Tableau 17	
$X_i w_2 Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2, i \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p, S}^*$	$X_i w Y \in \mathcal{C}_\Gamma^2,  w _B = 1, w \in V_{-p, S}^+$
$(X'' w_1 Y \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X_i w_2 Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2), i \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_1 \in V_{-p, S}^+, w_2 \in V_{-p, S}^*, a_i w = w_2 w_1$	$(X'' w Y \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X_i a_i Z \in \mathcal{C}_\Gamma^2), i \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p, S}^+,  w _B = 1$
$Z'' w_2 Y_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1, i \in \mathbb{N}_n^+, w_2 \in V_{-p, S}^*$	$X_i a_i w Y \in \mathcal{C}_\Gamma^1, i \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p, S}^+,  a_i w _B = 1$
$(X_i w_1 B Y'' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge Z'' w_2 Y_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1), i \in \mathbb{N}_n^+, w_1 \in V_{-p, S}^+, w_2 \in V_{-p, S}^*, a_i w = w_1 w_2$	$(X_i a_i w' u Y \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge Z v Y_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1), w' \in V_{-p, S}^*, i \in \mathbb{N}_{n-1}^+, (u, v a_i) \in PG, v \in \text{sup}(w),  a_i w u _B = 1$
$X_i a_i w Y_i \in \mathcal{C}_\Gamma^2, i \in \mathbb{N}_n^+, w \in V_{-p, S}^+,  a_i w _B = 1$	$X_i a_i w Y_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge Z v Y_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1, w' \in V_{-p, S}^*, i \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p, S}^+,  a_i w _B = 1$
$X_i a_i w a_i u Y \in \mathcal{C}_\Gamma^1, i \in \mathbb{N}_n^+, w \in V_{-p, S}^+, u \in V_{-p, S}^*$	$X_i a_i w a_i Y \in \mathcal{C}_\Gamma^1,  a_i w a_i _B = \begin{cases} 1 & i \neq n \\ 2 & i = n \end{cases}$
$(X_i a_i w a_i u Y \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge Z Y_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1),  a_i w a_i u _B = \begin{cases} 1 & i \neq n \\ 2 & i = n \end{cases}, i \in \mathbb{N}_n^+, w \in V_{-p, S}^+, (u, \varepsilon) \in PG,$	$(X_i a_i w Y_i'' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge Z Y_i \in \mathcal{C}_\Gamma^1), i \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p, S}^+,  a_i w _B = 1$
	$X_i a_i w Y_i \in \mathcal{C}_\Gamma^2, i \in \mathbb{N}_n^+, w \in V_{-p, S}^+,  a_i w _B = 1$

Tableau 18

$Z''w_2Y' \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$Z''w_2Y' \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$
$(Xw_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y' \in C_{\Gamma}^1),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$	$(X_1''w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y' \in C_{\Gamma}^1),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_1w_2$
$X_1w_2Z' \in C_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$XwY' \in C_{\Gamma}^2,$ $w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$
$(X''w_1Y' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_1w_2Z' \in C_{\Gamma}^2),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_2w_1$	$X_1a_1Z \in C_{\Gamma}^2,$ $X_1a_iwY_1 \in C_{\Gamma}^2, i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1$
$Z''w_2Y'' \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_1a_iwY' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^*$ $ a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$
$(X'w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y'' \in C_{\Gamma}^1),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_1w_2$	$(X_1a_iwY' \in C_{\Gamma}^1 \wedge X'Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$
$X'w_2Z' \in C_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X'a_iwY' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^*$ $ a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$
$(X''w_1Y' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X'w_2Z' \in C_{\Gamma}^2),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_2w_1$	$(X'a_iwY' \in C_{\Gamma}^2 \wedge ZY'' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$
$Z''w_2Y'' \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X'a_iwY'' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^*$ $ a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$
$(X''w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y'' \in C_{\Gamma}^1),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_1w_2$	$(X'a_iwY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge X''Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$
$X''a_iwY'' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^*$	$X''a_iwY'' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^*$ $ a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$

Tableau 19	
$X''w_2Z' \in C_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X'w_2Z' \in C_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$
$(X''w_1Y_j' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X''w_2Z' \in C_{\Gamma}^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2w_1$	$(X'w_1Y_j'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X'w_2Z' \in C_{\Gamma}^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2w_1$
$X''wY_j' \in C_{\Gamma}^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$	$X'wY_j'' \in C_{\Gamma}^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$
$Z'w_2Y_j'' \in C_{\Gamma}^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$ZY_j'' \in C_{\Gamma}^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$(X''w_1BY_j'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y_j'' \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$	$(X''wY_j'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY_j'' \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$
$Xw_2Z' \in C_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X''wY_j'' \in C_{\Gamma}^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$
$(X''w_1Y_j'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge Xw_2Z' \in C_{\Gamma}^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2w_1$	$(X''wY_j'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge XZ \in C_{\Gamma}^2), w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,  w _B = 1$
$XwY_j'' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+$	$XwY_j'' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,  w _B = 1$
$XZ \in C_{\Gamma}^2$	$XZ \in C_{\Gamma}^2$

Tableau 20	
$Z''w_2Y_j \in C_{\Gamma}^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_j''a_jw'uY \in C_{\Gamma}^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w' \in V_{-p,S}^*, u \in V_{-p,S}^+$
$(X_j''w_1BY_j'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y_j \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_jw = w_1w_2$	$(X_j''a_jw'uY \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZvY_j \in C_{\Gamma}^1), w' \in V_{-p,S}^*, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, (u, va_j) \in PG, v \in \text{sup}(w),  a_jw'u _B = 1$
$X_j''a_jwY_j \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,  a_jw _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$X_j''a_jwY_j \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,  a_jw _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$X_j''a_jwa_juY \in C_{\Gamma}^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w, u \in V_{-p,S}^+$	$X_j''a_jwa_jY \in C_{\Gamma}^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  a_jwa_j _B = 1$
$(X_j''a_jwa_juY \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY_j \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$ $w \in V_{-p,S}^+, (u, \varepsilon) \in PG,  a_jwa_ju _B = 1$	$(X_j''a_jwa_jY \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY_j \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w \in V_{-p,S}^+,  a_jwa_j _B = 1$
$X_j''a_jwY_j \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,  a_jw _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$X_j''a_jwY_j \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,  a_jw _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$



Tableau 21

	$Z''w_2Y'' \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$Z''w_2Y' \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$
	$(X_{j+1}w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y'' \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$	$(X_j^1w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y' \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$
	$X_{j+1}w_1Y'' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$X_j^1w_1Y' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$X_jw_2Z' \in C_{\Gamma}^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2w_1$	$X_{j+1}w_1Y'' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$X_j^1w_1Y' \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$(X''w_1Y'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_jw_2Z' \in C_{\Gamma}^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2w_1$	$(X_{j+1}w_1Y'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_j^1Z \in C_{\Gamma}^2), w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$(X_j^1w_1Y' \in C_{\Gamma}^2 \wedge ZY'' \in C_{\Gamma}^2), w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
	$Z''w_2Y \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$ZY \in C_{\Gamma}^1$
	$(X_j^1w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$	$(X_j^1w_1Y'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^1), w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
	$X_j''w_2Z' \in C_{\Gamma}^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2w_1$	$X_j''Z \in C_{\Gamma}^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$(X''w_1Y \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_j''w_2Z' \in C_{\Gamma}^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2w_1$	$(X_j''w_1Y \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_j''Z \in C_{\Gamma}^2), w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$(X_j''w_1Y' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_j''Z \in C_{\Gamma}^2), w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
	$X_j''w_1Y \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	

Tableau 22

$Z''wY'_j \in C_{\Gamma}^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_{j+1}a_iwY_{j+1} \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, ZY'_j \in C_{\Gamma}^1,$ $i \in \mathbb{N}_n^+,  a_iw _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$(X_{j+1}w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''wY'_j \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$	$(X_{j+1}a_iwY_{j+1} \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY'_j \in C_{\Gamma}^1), i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$X'_jw_2Z' \in C_{\Gamma}^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_{j+1}a_iwY'_j \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,$ $i \in \mathbb{N}_n^+,  a_iw _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$(X''w_1Y'_j \in C_{\Gamma}^2 \wedge X'_jw_2Z' \in C_{\Gamma}^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_2w_1$	$(X_{j+1}a_iwY'_j \in C_{\Gamma}^2 \wedge X'_jZ \in C_{\Gamma}^2), i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$Z''w_2Y''_j \in C_{\Gamma}^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X'_ja_iwY'_j \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+,$ $i \in \mathbb{N}_n^+,  a_iw _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$(X'_jw_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y''_j \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$	$(X'_ja_iwY'_j \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY''_j \in C_{\Gamma}^1), i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$X''_jw_2Z' \in C_{\Gamma}^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X'_ja_iwY''_j \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,$ $i \in \mathbb{N}_n^+,  a_iw _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$(X''w_1Y''_j \in C_{\Gamma}^2 \wedge X''_jw_2Z' \in C_{\Gamma}^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_2w_1$	$(X'_ja_iwY''_j \in C_{\Gamma}^2 \wedge X''_jZ \in C_{\Gamma}^2), i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$X''_ja_iwY''_j \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+,  a_iw _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$X''_jZ \in C_{\Gamma}^2,$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$

Tableau 23

$X_j'' a_i w a_j Y \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+,$ $ a_i w a_j _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i$	$Z'' w_2 Y_j \in C_{\Gamma}^1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_j'' a_i w Y_j'' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+,$ $ a_i w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i$	$Z Y_j \in C_{\Gamma}^1,$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$(X_j'' a_i w a_j Y \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z Y_j \in C_{\Gamma}^1), w \in V_{-p,S}^+,$ $i \in \mathbb{N}_n^+,  a_i w a_j _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i$	$(X_j'' w_1 B Y'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z'' w_2 Y_j \in C_{\Gamma}^1), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_i w = w_1 w_2$	$X_j'' a_i w Y_j'' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+,$ $ a_i w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i$	$Z Y_j \in C_{\Gamma}^1,$ $\wedge j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$X_j'' a_i w' w Y \in C_{\Gamma}^1, w' \in V_{-p,S}^*, u \in V_{-p,S}^+,$ $i \in \mathbb{N}_n^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i,  a_i w' u _B = 1$	$X_j'' a_i w a_j u Y \in C_{\Gamma}^1, w, u \in V_{-p,S}^+,$ $i \in \mathbb{N}_n^+,  a_i w a_j u _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i$		
$(X_j'' a_i w' u Y \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z v Y_j \in C_{\Gamma}^1), w' \in V_{-p,S}^*, i \in \mathbb{N}_n^+,$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, (u, v a_j) \in P_G, v \in \text{sup}(w),  a_i w' u _B = 1, j \neq i$	$(X_j'' a_i w a_j u Y \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z Y_j \in C_{\Gamma}^1), w, u \in V_{-p,S}^+,$ $i \in \mathbb{N}_n^+,  a_i w a_j u _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i$		
$X_j'' a_i w Y_j \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, i \in \mathbb{N}_n^+, j \neq i$			

Tableau 24

$X_j w_2 Z' \in C_{\Gamma}^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_j'' a_i w Y_j \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,$ $ a_i w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, i \in \mathbb{N}_n^+, j \neq i$	$X_j Z \in C_{\Gamma}^2,$ $j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$
$(X'' w_1 Y_j \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_j w_2 Z' \in C_{\Gamma}^2), j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_i w = w_2 w_1$	$(X_j'' a_i w Y_j \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_j Z \in C_{\Gamma}^2), i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+, j \neq i$	
$X_j a_i w Y_j \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, i, j \in \mathbb{N}_n^+, j \neq i$		

Tableau 25

$X'wY \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+$	$X''wY'' \in C_{\Gamma}^1, ZY \in C_{\Gamma}^1$	$Z''w_2Y \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$
$(X'wY \in C_{\Gamma}^1 \wedge X''Z \in C_{\Gamma}^1), w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$	$(X''w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY \in C_{\Gamma}^1), w_1 \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$	$(X''w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y \in C_{\Gamma}^1), w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$
	$X''wY \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$	$XZ \in C_{\Gamma}^2$
✓	$(X''w_1Y \in C_{\Gamma}^2 \wedge Xw_2Z' \in C_{\Gamma}^2), w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2w_1$	$(X''wY \in C_{\Gamma}^2 \wedge XZ \in C_{\Gamma}^2), w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$
	$XwY \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+,  w _B = 1$	

Tableau 26

$Xw'uY \in C_{\Gamma}^1, w' \in V_{-p,S}^*, u \in V_{-p,S}^+,  w'u _B = 1$	$ZvY_j \in C_{\Gamma}^1, (u, va_j) \in P_G, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$Xw a_i u Y \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+,  w a_j u _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+, (u, \varepsilon) \in P_G$	$ZY_i \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$Xw a_i Y \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+$	$ZY_i \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+$
$(Xw'uY \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZvY_i \in C_{\Gamma}^1), w' \in V_{-p,S}^*, i \in \mathbb{N}_{n-1}^+, (u, va_i) \in P_G, v \in \text{sup}(w),  w'u _B = 1$	$Xw a_j u Y \in C_{\Gamma}^1, w' \in V_{-p,S}^*,  w a_j u _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+, (u, \varepsilon) \in P_G$	$Xw a_i u Y \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+,  w a_j u _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+, (u, \varepsilon) \in P_G$	$ZY_i \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$Xw a_i Y \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+$	$ZY_i \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+$
	$XwY_i \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+,  w _B = 1$	$XwY_i \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+,  w _B = 1$	$Z''w_2Y_i \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*, i \in \mathbb{N}_n^+,  w _B = 1$	$XwY_j'' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,  w _B = 1$	
	$(Xw_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y_i \in C_{\Gamma}^1), i \in \mathbb{N}_n^+, w_1 \in V_{-p,S}^*, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_1w_2$	$(XwY_j'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge ZY_j \in C_{\Gamma}^1), w \in V_{-p,S}^+, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,  w _B = 1$			
	$XwY_i \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+,  w _B = 1$	$XwY_i \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+,  w _B = 1$			

Tableau 27

$X_i w_2 Z' \in C_{\Gamma}^2,$ $i \in \mathbb{N}_n^+, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X''_{j_1} a_j w Y_j \in C_{\Gamma}^2, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+,$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_j w _B = 1$	$X w Y_i \in C_{\Gamma}^2,$ $w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+$	$ w _B = \begin{cases} 0 & i = n \\ 1 & i < n \end{cases}$	$\overline{X_i a_i Z} \in C_{\Gamma}^2,$ $i \in \mathbb{N}_n^+$
$(X'' w_1 Y_i \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_i w_2 Z' \in C_{\Gamma}^2), i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2 w_1$	$(X''_{j_1} a_j w Y_j \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_j Z \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_j w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n-1}^+$	$(X w Y_i \in C_{\Gamma}^2 \wedge X_i a_i Z \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_n^+$	$ w _B = \begin{cases} 0 & i = n \\ 1 & i < n \end{cases}$	
	$X_i a_i w Y_i \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$			

Tableau 28

$(X'' w_1 Y \in C_{\Gamma}^2 \wedge X' w_2 Z' \in C_{\Gamma}^2), w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, w = w_2 w_1$	$X' w_2 Z' \in C_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$
	$X' w Y \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+$

Tableau 29

$X' a_i w' v a_1 Y \in C_{\Gamma}^1, w' \in V_{-p,S}^*,$ $v \in (Y_G \cup \Sigma)^*, i \in \mathbb{N}_n^+$	$X' a_i w a_1 u Y \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+,$ $ a_i w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+, (u, \varepsilon) \in PG$	$X' a_i w a_1 Y \in C_{\Gamma}^1, i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1$	
$(X' a_i w' v a_1 Y \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z v Y_1 \in C_{\Gamma}^1), w' \in V_{-p,S}^*,$ $ a_i w' v _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+, \exists \kappa \in \mathbb{N}_{ \omega }^+, (\text{sup}^{\kappa}(w), v a_1) \in PG$	$(X' a_i w a_1 u Y \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z Y_1 \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+, (u, \varepsilon) \in PG$	$(X' a_i w a_1 Y \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z Y_1 \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	
	$X' a_i w Y_1 \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$		
		$X' w_2 Z' \in C_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$	
	$Z'' w_2 Y_1 \in C_{\Gamma}^1,$ $w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X'' w_1 Y'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X' w_2 Z' \in C_{\Gamma}^2),$ $w_1 \in V_{-p,S}^*, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_i w = w_2 w_1$	
	$X_1 a_i w Y_1 \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$X' a_i w Y'' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+,$ $ a_i w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$Z Y_1 \in C_{\Gamma}^2$
$(X' w_1 B Y'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z'' w_2 Y_1 \in C_{\Gamma}^1),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_i w = w_1 w_2$	$(X_1 a_i w Y_1 \in C_{\Gamma}^1 \wedge X' Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$(X' a_i w Y'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z Y_1 \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	
	$X' a_i w Y_1 \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,  a_i w _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$		

Tableau 30

$X'w_2Z' \in C_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X'a_iwY_1 \in C_{\Gamma}^2, w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$ZY' \in C_{\Gamma}^2$
$(X''w_1Y' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X'w_2Z' \in C_{\Gamma}^2),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_2w_1$	$(X'a_iwY_1 \in C_{\Gamma}^2 \wedge ZY' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	
$Z''w_2Y' \in C_{\Gamma}^1, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X'a_iwY' \in C_{\Gamma}^1,$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$X''Z \in C_{\Gamma}^1$
$(X''w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y' \in C_{\Gamma}^1),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_1w_2$	$(X'a_iwY' \in C_{\Gamma}^1 \wedge X''Z \in C_{\Gamma}^1),$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	
$X''w_2Z' \in C_{\Gamma}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X''a_iwY' \in C_{\Gamma}^2,$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	$ZY'' \in C_{\Gamma}^2$
$(X''w_1Y'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge X''w_2Z' \in C_{\Gamma}^2),$ $w_1 \in V_{-p,S}^+, w_2 \in V_{-p,S}^*, a_iw = w_2w_1$	$(X''a_iwY' \in C_{\Gamma}^2 \wedge ZY'' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$	
$X''a_iwY'' \in C_{\Gamma}^1, w \in V_{-p,S}^+,  a_iw _B = 1, i \in \mathbb{N}_n^+$		

Tableau 31

$Z''w_2Y' \in C_{\Gamma}^1,$ $w_2 \in \Sigma^*$		
$(w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2Y' \in C_{\Gamma}^1),$ $w_1 \in \Sigma^+, w_2 \in \Sigma^*, w = w_1w_2$		
$wBY' \in C_{\Gamma}^2,$ $w \in \Sigma^+$	$ZY'' \in C_{\Gamma}^2$	$Z''C_2 \in C_{\Gamma}^2, D_2 \in C_{\Gamma}^2$
$(X''wBY'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge Z' \in C_{\Gamma}^2),$ $w \in \Sigma^+$	$(X''w_1BY'' \in C_{\Gamma}^2 \wedge w_2Z' \in C_{\Gamma}^2),$ $w_1, w_2 \in \Sigma^+, w = w_1w_2$	$(Z''C_2 \in C_{\Gamma}^2 \wedge D_2 \in C_{\Gamma}^2)$
$wBY'' \in C_{\Gamma}^1, w \in \Sigma^+$		$Z'' \in C_{\Gamma}^1$
	$(wBY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z'' \in C_{\Gamma}^1), w \in \Sigma^+$	$(w_1BY'' \in C_{\Gamma}^1 \wedge Z''w_2 \in C_{\Gamma}^1)$ $w_1, w_2 \in \Sigma^+, w = w_1w_2$
		$w \in C_{\Gamma}^2, w \in \Sigma^+$

Tableau 32

$X'w_2Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2,$ $w_2 \in \Sigma^*$	$C_1Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^1$	$D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^1$
$(X''w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge X'w_2Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2)$ $w_1 \in \Sigma^+, w_2 \in \Sigma^*, w = w_1w_2$	$(C_1Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^1)$	
$X'w \in \mathcal{C}_\Gamma^1,$ $w \in \Sigma^+$	$X''Z \in \mathcal{C}_\Gamma^1$	$X''wBY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^1,$ $w \in \Sigma^+$
$(X'w \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge X''Z \in \mathcal{C}_\Gamma^1),$ $w \in \Sigma^+$	$X''wBY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge Z'' \in \mathcal{C}_\Gamma^1,$ $w \in \Sigma^+$	$Z''w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^1,$ $w_2 \in \Sigma^+$
	$(X''w_1BY'' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge Z''w_2 \in \mathcal{C}_\Gamma^1),$ $w_1, w_2 \in \Sigma^+, w = w_1w_2$	$C_1Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^1$
	$X''w \in \mathcal{C}_\Gamma^2, w \in \Sigma^+$	$(C_1Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^1 \wedge D_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^1)$
		$Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^{r2}$
	$(X''w \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2), w \in \Sigma^+$	$w_2Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2,$ $w \in \Sigma^+$
		$(X''w_1 \in \mathcal{C}_\Gamma^2 \wedge w_2Z' \in \mathcal{C}_\Gamma^2),$ $w_1, w_2 \in \Sigma^+, w = w_1w_2$
		$w \in \mathcal{C}_\Gamma^1, w \in \Sigma^+$





## ANHANG F

### Tableauregeln und Tableau für den Korrektheitsbeweis des Systems $\mathcal{M}$

$$\forall i \in \mathbb{N}_n^+. (u, v)_i \in P. \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{(r_1^{2,i}) \quad w_1 u Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2}{Z_{Y_i} u Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^1}$$

$$\forall i \in \{n+1, \dots, n+m\}. (u_1 u_2, v)_i \in P. \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{(r_2^{2,i}) \quad w_1 u_2 Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'_i} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2}{Z_{Y'_i} u_2 Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^1}$$

$$\forall i \in \{n+1, \dots, n+m\}. (u_1 u_2, v)_i \in P. \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{(r_3^{2,i}) \quad w_1 u_1 Y'_i \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2}{Z_{Y_i} u_1 Y'_i \in \mathcal{C}_{\Pi}^1}$$

$$\forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{(r_4^2) \quad w_1 Z'_{X_2} \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 b w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2}{X_1 Z'_{X_2} \in \mathcal{C}_{\Pi}^1}$$

$$\forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{(r_5^2) \quad w_1 b Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z'_{Y_1} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2}{Z'_{Y_1} b Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^1}$$

$$\forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}, \alpha \in (\Sigma \cup V_G \cup \{B\}). \frac{(r_6^2) \quad w_1 Z_X \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 \alpha w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2}{X_1 Z_X \in \mathcal{C}_{\Pi}^1}$$

$$\forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{(r_7^2) \quad w_1 B Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{\varepsilon} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2}{Z_{\varepsilon} B Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^1}$$

$$\forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{(r_8^1) \quad w_1 Z'_{\varepsilon} \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2}{w_1 w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^1}$$

$$\begin{aligned}
& \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{\overset{(r_8^2)}{w_1 Z'_\varepsilon \in \mathcal{C}_\Pi^2 \wedge X w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^2}}{X Z'_\varepsilon \in \mathcal{C}_\Pi^1} \\
& \forall i \in \{n+1, \dots, n+m\}. (u_1 u_2, v)_i \in P. \frac{\overset{(r_2^{1,i})}{w_1 u_2 Y \in \mathcal{C}_\Pi^2 \wedge Z_{Y'_i} w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^2}}{\forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. w_1 w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^2} \\
& \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{\overset{(r_4^1)}{w_1 Z'_{X_2} \in \mathcal{C}_\Pi^2 \wedge X_1 b w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^2}}{w_1 b w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^2} \quad \frac{\overset{(r^1)}{X B S_G Y \in \mathcal{C}_\Pi^2}}{\quad} \\
& \forall i \in \mathbb{N}_{n+m}^+. \frac{\overset{(r^{7,i})}{Z_{Y'_i} b^i Y_1 \in \mathcal{C}_\Pi^2}}{\quad} \quad \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{\overset{(r_7^1)}{w_1 B Y \in \mathcal{C}_\Pi^2 \wedge Z_\varepsilon w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^2}}{w_1 w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^2} \\
& \forall i \in \{n+1, \dots, n+m\}. \frac{\overset{(r^{8,i})}{Z_{Y'_i} Y'_i \in \mathcal{C}_\Pi^2}}{\quad} \quad \frac{\overset{(r^2)}{X_2 Z'_{X_2} \in \mathcal{C}_\Pi^2}}{\quad} \quad \frac{\overset{(r^3)}{Z'_{Y_1} Y_1 \in \mathcal{C}_\Pi^2}}{\quad} \\
& \frac{\overset{(r^4)}{X Z_X \in \mathcal{C}_\Pi^2}}{\quad} \quad \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{\overset{(r_9^2)}{w_1 Y_1 \in \mathcal{C}_\Pi^3 \wedge Z'_{Y_2} w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^3}}{Z'_{Y_2} Y_1 \in \mathcal{C}_\Pi^2} \\
& \forall i \in \mathbb{N}_{n+m}^+. \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{\overset{(r_{10}^{1,i})}{w_1 Z_{X_i} \in \mathcal{C}_\Pi^3 \wedge X w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^3}}{w_1 w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^2} \quad \frac{\overset{(r^5)}{Z_\varepsilon \in \mathcal{C}_\Pi^2}}{\quad} \\
& \frac{\overset{(r^6)}{Z'_\varepsilon \in \mathcal{C}_\Pi^2}}{\quad} \quad \forall i \in \mathbb{N}_{n+m}^+. \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{\overset{(r_{10}^{2,i})}{w_1 Z_{X_i} \in \mathcal{C}_\Pi^3 \wedge X w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^3}}{X Z_{X_i} \in \mathcal{C}_\Pi^2} \\
& \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{\overset{(r_{11}^1)}{w_1 Z'_{X_1} \in \mathcal{C}_\Pi^3 \wedge X_2 b w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^3}}{w_1 w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^2} \\
& \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{\overset{(r_{11}^2)}{w_1 Z'_{X_1} \in \mathcal{C}_\Pi^3 \wedge X_2 b w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^3}}{X_2 b Z'_{X_1} \in \mathcal{C}_\Pi^2} \\
& \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{\overset{(r_{12}^1)}{w_1 \alpha Y_2 \in \mathcal{C}_\Pi^3 \wedge Z_Y w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^3}}{w_1 \alpha w_2 \in \mathcal{C}_\Pi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{(r_{12}^2) \quad w_1 \alpha Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z_Y w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3}{Z_Y Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2} \\
& \forall i \in \mathbb{N}_n^+. (u, v)_i \in P. \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{(r_1^{1,i}) \quad w_1 u Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2}{w_1 w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3} \\
& \forall i \in \{n+1, \dots, n+m\}. (u_1 u_2, v)_i \in P. \frac{(r_3^{1,i}) \quad w_1 u_1 Y'_i \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2}{\forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \quad w_1 w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3} \\
& \frac{(r^9) \quad \overline{Z'_{Y_2} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3}}{\forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}.} \frac{(r_5^1) \quad w_1 b Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z'_{Y_1} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2}{w_1 w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3} \\
& \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}, \alpha \in (\Sigma \cup V_G \cup \{B\}). \frac{(r_6^1) \quad w_1 Z_X \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 \alpha w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2}{w_1 \alpha w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3} \\
& \forall w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in \mathcal{SV}. \frac{(r_9^1) \quad w_1 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z'_{Y_2} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3}{w_1 w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3} \quad \frac{(r^{10}) \quad \overline{X_1 Z'_{X_1} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3}}{} \\
& \frac{(r^{11}) \quad \overline{Z_Y Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^3}}{\forall i \in \mathbb{N}_{n+m}^+. (u, v)_i \in P.} \frac{(r^{12,i}) \quad \overline{X_1 b^i v Z_{X_i} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3}}{}
\end{aligned}$$

<p><b>Tableau 1</b></p> $\eta w_1 u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, \eta \in S, w_1 \in V_{-p, S}^*,$ $i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_i, v_i) \in P$ <hr/> $(\eta w_1 u_{i2} Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in SV,$ $w = w_1 w_2, \eta \in S, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P$ <hr/> $\eta w \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in SV, \eta \in S, \eta w \notin M$	$\eta w_1 Z'_{X_2} \in \mathcal{C}_{\Pi}^2,$ $\eta \in S, w_1 \in V_{-p, S}^*$ <hr/> $(\eta w_1 Z'_{X_2} \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 b w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2),$ $\eta \in S, w_1 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in SV, w = w_1 b w_2$ <hr/> $\eta w_1 \alpha Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_1 \in V_{-p, S}^*, \eta \in S, \alpha \in (\Sigma \cup V_G \cup \{B\})$ <hr/> $(\eta w_1 Z'_{X_1} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge X_2 b w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), \eta \in S,$ $w_1 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in SV, w = w_1 w_2$ <hr/> $\eta w \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in SV, \eta \in S, \eta w \notin M$	$\eta w_1 B Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2,$ $\eta \in S, w_1 \in V_{-p, S}^*$ <hr/> $(\eta w_1 B Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{\epsilon} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2),$ $\eta \in S, w_1 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in SV, w = w_1 w_2$ <hr/> $\eta w_1 \alpha Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_1 \in V_{-p, S}^*, \eta \in S, \alpha \in (\Sigma \cup V_G \cup \{B\})$ <hr/> $(\eta w_1 \alpha Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z_Y w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1 \in V_{-p, S}^*,$ $w_2 \in SV, w = w_1 \alpha w_2, \eta \in S, \alpha \in (\Sigma \cup V_G \cup \{B\})$ <hr/> $\eta w \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in SV, \eta \in S, \eta w \notin M$
<p><b>Tableau 2</b></p> $\eta w_1 u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, \eta \in S, w_1 \in V_{-p, S}^*, i \in \mathbb{N}_{n+}^+, (u_i, v_i) \in P$ <hr/> $(\eta w_1 u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), \eta \in S, w_1 \in V_{-p, S}^*,$ $w_2 \in SV, w = w_1 w_2, i \in \mathbb{N}_{n+}^+, (u_i, v_i) \in P$ <hr/> $\eta w \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in SV, \eta \in S, \eta w \notin M$	$\eta w_1 u_{i1} Y'_i \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_1 \in V_{-p, S}^*, \eta \in S, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P$ <hr/> $(\eta w_1 u_{i1} Y'_i \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in SV,$ $w = w_1 w_2, \eta \in S, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P$ <hr/> $\eta w \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in SV, \eta \in S, \eta w \notin M$	$\eta w_1 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, \eta \in S, w_1 \in V_{-p, S}^*$ <hr/> $(\eta w_1 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z_{Y'} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), \eta \in S,$ $w_1 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in SV, w = w_1 w_2$ <hr/> $\eta w \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in SV, \eta \in S, \eta w \notin M$
<p><b>Tableau 3</b></p> $Z_{Y'} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, i \in \mathbb{N}_n^+$ <hr/> $(Z_{Y'} u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2),$ $i \in \mathbb{N}_n^+, (u_i, v_i) \in P$ <hr/> $Z_Y Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3$	$Z_{Y'} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, i \in \{n+1, \dots, n+m\}$ <hr/> $(Z_{Y'} u_{i1} Y'_i \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2),$ $i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P$ <hr/> $Z_Y Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3$	$Z_Y Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3$ <hr/> $(Z_Y Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z'_{Y_2} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3)$

<p>Tableau 4</p> $\frac{Z_{Y'_i} w_2 \nu \in C_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-p, S}^*, \nu \in R, i \in \{n+1, \dots, n+m\}}{(w_1 u_{i2} Y \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'_i} w_2 \nu \in C_{\Pi}^2), w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in V_{-p, S}^*, w = w_1 w_2, \nu \in R, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P}$	$\frac{X_1 b w_2 \nu \in C_{\Pi}^2, \nu \in R, w_2 \in V_{-p, S}^*}{(w_1 Z_{X_2} \in C_{\Pi}^2 \wedge X_1 b w_2 \nu \in C_{\Pi}^2), \nu \in R, w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in V_{-p, S}^*, w = w_1 b w_2}$	$\frac{Z_{\epsilon} w_2 \nu \in C_{\Pi}^2, \nu \in R, w_2 \in V_{-p, S}^*}{(w_1 B Y \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{\epsilon} w_2 \nu \in C_{\Pi}^2), \nu \in R, w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in V_{-p, S}^*, w = w_1 w_2}$
$w \nu \in C_{\Pi}^2, w \in \mathcal{PV}, \nu \in R, w \nu \notin M$		
$X w_2 \nu \in C_{\Pi}^3, \nu \in R, w_2 \in V_{-p, S}^*$		
$X_2 b w_2 \nu \in C_{\Pi}^3, \nu \in R, w_2 \in V_{-p, S}^*$		
$Z_{Y_1} w_2 \nu \in C_{\Pi}^3, \nu \in R, w_2 \in V_{-p, S}^*$		
$\frac{(w_1 Z_{X_i} \in C_{\Pi}^3 \wedge X w_2 \nu \in C_{\Pi}^3), \nu \in R, w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in V_{-p, S}^*, w = w_1 w_2, i \in \mathbb{N}_{n+m}^+}{(w_1 Z_{X_i} \in C_{\Pi}^3 \wedge X_2 b w_2 \nu \in C_{\Pi}^3), \nu \in R, w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in V_{-p, S}^*, w = w_1 w_2}$	$\frac{(w_1 \alpha Y_2 \in C_{\Pi}^3 \wedge Z_Y w_2 \nu \in C_{\Pi}^3), \nu \in R, w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in V_{-p, S}^*, w = w_1 \alpha w_2, \alpha \in (\Sigma \cup V_G \cup \{B\})}{(w_1 \alpha Y_2 \in C_{\Pi}^3 \wedge X_2 b w_2 \nu \in C_{\Pi}^3), \nu \in R, w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in V_{-p, S}^*, w = w_1 w_2}$	
$w \nu \in C_{\Pi}^2, w \in \mathcal{PV}, \nu \in R, w \nu \notin M$		
$Z_{Y_1} w_2 \nu \in C_{\Pi}^3, \nu \in R, w_2 \in V_{-p, S}^*$		
$Z_{Y_1} w_2 \nu \in C_{\Pi}^3, \nu \in R, w_2 \in V_{-p, S}^*, i \in \{n+1, \dots, n+m\}$		
$(w_1 u_i Y \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 \nu \in C_{\Pi}^2), \nu \in R, w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in V_{-p, S}^*, w = w_1 w_2, i \in \mathbb{N}_n^+, (u_i, v_i) \in P$		
$w \nu \in C_{\Pi}^3, w \in \mathcal{PV}, \nu \in R, w \nu \notin M$		
$X_1 \alpha w_2 \nu \in C_{\Pi}^2, \nu \in R, w_2 \in V_{-p, S}^*, \alpha \in (\Sigma \cup V_G \cup \{B\})$		
$Z_{Y_2} w_2 \nu \in C_{\Pi}^3, \nu \in R, w_2 \in V_{-p, S}^*$		
$(w_1 b Y_2 \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_1} w_2 \nu \in C_{\Pi}^2), \nu \in R, w_1 \in \mathcal{PV}, w_2 \in V_{-p, S}^*, w = w_1 w_2$		
$w \nu \in C_{\Pi}^3, w \in \mathcal{PV}, \nu \in R, w \nu \notin M$		
$Z_{Y_1} Y_1 \in C_{\Pi}^2, i \in \mathbb{N}_n^+$		
$Z_{Y_1} Y_1 \in C_{\Pi}^2, i \in \{n+1, \dots, n+m\}$		
$(Z_{Y_2} u_i Y \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} Y_1 \in C_{\Pi}^2), i \in \mathbb{N}_n^+, (u_i, v_i) \in P$		
$(Z_{Y_2} u_i Y \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} Y_1 \in C_{\Pi}^2), i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P$		
$Z_{Y_2} Y_1 \in C_{\Pi}^3$		

<p><b>Tableau 7</b></p>	$\frac{Z_{Y_i} w_2 Z'_{X_1} \in C_{\Pi}^2, (w_2 = b \vee w_2 = \varepsilon), i \in \mathbb{N}_n^+}{(X_2 w_1 u_i Y \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Z'_{X_1} \in C_{\Pi}^2), w_1 w_2 = b, i \in \mathbb{N}_n^+, (u_i, v_i) \in P}$ $\frac{Z_{Y_i} w_2 Z'_{X_1} \in C_{\Pi}^2, (w_2 = b \vee w_2 = \varepsilon), i \in \{n+1, \dots, n+m\}}{(X_2 w_1 u_i Y \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Z'_{X_1} \in C_{\Pi}^2), w_1 w_2 = b, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_i, v_i) \in P}$ $X_2 b Z'_{X_1} \in C_{\Pi}^3$ $\frac{Z'_{Y_1} Z'_{X_1} \in C_{\Pi}^2}{(X_2 b Y_2 \in C_{\Pi}^2 \wedge Z'_{Y_1} b Z'_{X_1} \in C_{\Pi}^2)}$ $\frac{Z'_{Y_2} Z'_{X_1} \in C_{\Pi}^2}{(X_2 b Y_2 \in C_{\Pi}^2 \wedge Z'_{Y_2} Z'_{X_1} \in C_{\Pi}^2)}$ $X_2 b Z'_{X_1} \in C_{\Pi}^3$
<p><b>Tableau 8</b></p>	$\frac{Z'_{Y_1} Z_{X_1} \in C_{\Pi}^2, i \in \mathbb{N}_{n+m}^+}{(X b Y_2 \in C_{\Pi}^2 \wedge Z'_{Y_1} Z_{X_1} \in C_{\Pi}^2), i \in \mathbb{N}_{n+m}^+}$ $\frac{Z_{Y_j} Z_{X_1} \in C_{\Pi}^2, i \in \mathbb{N}_{n+m}^+, j \in \mathbb{N}_n^+}{(X u_j Y \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_j} Z_{X_1} \in C_{\Pi}^2), i \in \mathbb{N}_{n+m}^+, j \in \mathbb{N}_n^+, (u_j, v_j) \in P}$ $X Z_{X_1} \in C_{\Pi}^3, i \in \mathbb{N}_{n+m}^+$
<p><b>Tableau 9</b></p>	$\frac{Z_{Y^{\varepsilon}} w_2 Y'_k \in C_{\Pi}^2, w_2 \in \mathcal{A}^*, k \in \{n+1, \dots, n+m-1\}}{(X w_1 Y_2 \in C_{\Pi}^3 \wedge Z_{Y^{\varepsilon}} w_2 Y'_k \in C_{\Pi}^3), w_1 \in \mathcal{A}^+, w_2 \in \mathcal{A}^*, k \in \{n+1, \dots, n+m-1\}}$ $X w Y'_k \in C_{\Pi}^2, k \in \{n+1, \dots, n+m-1\}, w \in \mathcal{A}^+$ $\frac{X w u_{k2} Y \in C_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, Z_{Y'_k} Y'_k \in C_{\Pi}^2, k \in \{n+1, \dots, n+m-1\}}{(X w u_{k2} Y \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'_k} Y'_k \in C_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+, k \in \{n+1, \dots, n+m-1\}, (u_{k1} u_{k2}, v_k) \in P}$ $\frac{Z_{Y^{\varepsilon}} w_2 Y'_k \in C_{\Pi}^2, w_2 \in \mathcal{A}^*, k \in \{n+1, \dots, n+m-1\}}{(X w_1 B Y \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y^{\varepsilon}} w_2 Y'_k \in C_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in \mathcal{A}^*, w = w_1 w_2, k \in \{n+1, \dots, n+m-1\}}$ $X w Y'_k \in C_{\Pi}^2, k \in \{n+1, \dots, n+m-1\}, w \in \mathcal{A}^+$

Tableau 10

	$Z_{Y_i} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-P,S}^*, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, w_2 \neq b^i$	
	$(X w_1 u_{i1} Y'_i \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), i \in \{n+1, \dots, n+m\}, w_1, w_2 \in V_{-P,S}^*, w_1 w_2 = w_1 w_2, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P, w_2 \neq b^i$	
	$X w b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^*, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	
$X Z_X \in \mathcal{C}_{\Pi}^2$	$X_1 w b^k Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2,$ $w \in \mathcal{A}^*, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	$Z'_{Y_2} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3,$ $w_2 \in V_{-P,S}^+$
	$X w b^{k-i} u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	$X w b^{k-1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2,$ $w \in \mathcal{A}^*, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$
	$Z_{Y_i} b^i Y_1, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+, (u_k, v_k) \in P$	$Z_{Y_i} b^i Y_1, i \in \mathbb{N}_n^+$
$(X Z_X \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 w b^k Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2),$ $w \in \mathcal{A}^*, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	$(X w_1 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z'_{Y_2} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3),$ $w_1, w_2 \in V_{-P,S}^*, w_1 w_2 = w_1 w_2$	$(X w b^{k-i} u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} b^i Y_1), w \in \mathcal{A}^*,$ $k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+, i \in \mathbb{N}_n^+, (u_i, v_i) \in P, i < k$
	$X w b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^*, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	
$X w u_{k1} Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, (u_{k1} u_{k2}, v_k) \in P,$ $k \in \{n+1, \dots, n+m-1\}, w \in \mathcal{A}^*$	$Z_{Y_k} b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2,$ $k \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$	$Z'_{Y_1} Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2$
	$(X w u_{k1} Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_k} b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^*,$ $k \in \{n+1, \dots, n+m-1\}, (u_{k1} u_{k2}, v_k) \in P$	$(X w b^{k+1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z'_{Y_1} Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2),$ $w \in \mathcal{A}^*, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$
	$X w b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^*, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	
$X w b^{k-i} u_{i1} Y'_i \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, i \in \{n+1, \dots, n+m-2\},$ $k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+, i < k, w \in \mathcal{A}^*, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P$	$Z_{Y_i} b^i Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2,$ $i \in \{n+1, \dots, n+m\}$	$Z'_{Y_1} w_2 Y_1, w_2 \in V_{-P,S}^+$
	$(X w b^{k-i} u_{i1} Y'_i \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} b^i Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+,$ $w \in \mathcal{A}^*, i \in \{n+1, \dots, n+m-2\}, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P, i < k$	$(X w_1 Z_X \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 w_2 b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2),$ $w_1, w_2 \in \mathcal{A}^+, w = w_1 w_2, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$
	$X w b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^*, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	

<b>Tableau 11</b>	$Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, i \in \mathbb{N}_n^+, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $(X w_1 u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), i \in \mathbb{N}_n^+, w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*$	$Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $(X w_1 u_{i+1} Y_i' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*$	$Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $(X w_1 b Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*$	
$X Z_X \in \mathcal{C}_{\Pi}^2$	$X_1 w_1 b^k Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$ $X w_1 Z_X \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_1 \in \mathcal{A}^+$	$X w_1 b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^*, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$ $(X w_1 b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w \in \mathcal{A}^*, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	$Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $(X w_1 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*$	
<b>Tableau 12</b>	$Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-p, S}^*, i \in \{n+1, \dots, n+m\}$ $(X_1 w_1 u_{i+2} Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $b^{j+k} w b^{k+1} = w_1 w_2, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{i+1} u_{i+2}, v_i) \in P$	$X_1 w_1 Z_{X_2} \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_1 \in V_{-p, S}^*$ $(X_1 w_1 Z_{X_2} \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $w_1, w_2 \in \mathcal{A}^+, w = w_1 w_2, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	$Z_{\epsilon} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $(X_1 w_1 B Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{\epsilon} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*$	$X_1 b^{j+k} w b^{k+1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}, j \in \{2, \dots, n+m\}, w \in \mathcal{A}^+$ $X_1 b^{j+k} w b^{k+1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}, j \in \{2, \dots, n+m\}, w \in \mathcal{A}^+$
$X w' b^k Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w' \in \mathcal{A}^*, k \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	$X_1 b^l v_l Z_{X_1} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, l \in \{2, \dots, n+m\}, (u_l, v_l) \in P$ $(X w' b^{k+1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge X_1 b^{j+k} v_{j+k} Z_{X_{j+k}} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w' \in \mathcal{A}^+, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}, j \in \{2, \dots, n+m\}, w = v_{j+k} w'$	$X_1 Z_{X_1} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, X_2 b^{j+k+1} w b^{k+1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$ $(X_1 Z_{X_1} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge X_2 b^{j+k+1} w b^{k+1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w \in \mathcal{A}^+, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}, j \in \{2, \dots, n+m\}$	$Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $(X_1 w_1 \alpha Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), \alpha \in \mathcal{A}, w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*$ $w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^*$	



Tableau 13

$Z_\epsilon w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-P, S}^*$		$X_2 w_1 Z'_{X_2} \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_1 \in V_{-P, S}^+$
$(X_2 w_1 B Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_\epsilon w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-P, S}^*, b^{j+k} w b^{k+1} = w_1 w_2$	$(X_2 w_1 Z'_{X_2} \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-P, S}^+, b^{j+k} w b^{k+1} = w_1 w_2$	
$X_2 b^{j+k} w b^{k+1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$		
$Z_{Y_i'} w_1 u_i Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-P, S}^*, i \in \{n+1, \dots, n+m\}$	$X_2 Z'_{X_2} \in \mathcal{C}_{\Pi}^2$	$X_1 b^{j+k} w b^{k+1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}, j \in \{2, \dots, n+m\}$
$(X_2 w_1 u_i Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i'} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-P, S}^*, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_i w_2, v_i) \in P$	$(X_2 Z'_{X_2} \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 b^{j+k} w b^{k+1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$	$(X_2 w_1 Z'_{X_i} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge X w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), i \in \mathbb{N}_{n+m}^+, w_1, w_2 \in V_{-P, S}^*, b^{j+k} w b^{k+1} = w_1 w_2$
$X_2 b^{j+k} w b^{k+1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$		
$X_2 w_1 Z'_{X_1} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_2 \in V_{-P, S}^*$	$Z_{Y'} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_2 \in V_{-P, S}^+$	
$(X_2 w_1 Z'_{X_1} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge X_2 b w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1, w_2 \in V_{-P, S}^*, b^{j+k} w b^{k+1} = w_1 w_2$	$(X_2 w_1 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z_{Y'} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1, w_2 \in V_{-P, S}^+, b^{j+k} w b^{k+1} = w_1 w_2$	
$X_2 b^{j+k} w b^{k+1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$		

Tableau 14

$Z_{Y'_i} w_2 Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, k \in \{n+1, \dots, n+m-2\},$ $i \in \{n+1, \dots, n+m\}, w_2 \in V_{-p, S}^*, (w_2 \neq v_k \neq i)$	$X_2 b^j Z' X_2,$ $l \in \{1, \dots, n+m-1\}$
$(X_2 w_1 u_{i2} Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'_i} w_2 Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), k \in \{n+1, \dots, n+m-2\},$ $w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, b^{j+k} w = w_1 w_2, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{k1} u_{k2}, v_k) \in P, k \in \{n+1, \dots, n+m-2\}, j \in \{2, \dots, n+m\}, l \in \mathbb{N}_{j+k-1}^+$	$(X_2 b^l Z' X_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 b^{j+k-l} w Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+,$ $X_2 b^{j+k} w Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, j \in \{2, \dots, n+m\}, w \in \mathcal{A}^+, k \in \{n+1, \dots, n+m-j\}$
$X_2 b^{j+k} w u_{k2} Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\},$ $k \in \{n+1, \dots, n+m-j\}, (u_{k1} u_{k2}, v_k) \in P$	$Z_{Y'_k} Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2,$ $k \in \{n+1, \dots, n+m-2\}$
$(X_2 b^{j+k} w u_{k2} Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'_k} Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), j \in \{2, \dots, n+m\},$ $k \in \{n+1, \dots, n+m-j\}, w \in \mathcal{A}^+, (u_{k1} u_{k2}, v_k) \in P$	$(X_2 Z' X_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 b^{j+k} w Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+,$ $k \in \{n+1, \dots, n+m-j\}, j \in \{2, \dots, n+m\}$
$X_2 b^{j+k} w Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, j \in \{2, \dots, n+m\}, w \in \mathcal{A}^+, k \in \{n+1, \dots, n+m-j\}$	
$Z_{\varepsilon} w_2 Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_2 \in V_{-p, S}^*, k \in \{n+1, \dots, n+m-2\}$	$X_2 w_1 Z_{X_i} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_1 \in V_{-p, S}^*, i \in \mathbb{N}_{n+m}^+$
$(X_2 w_1 B Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{\varepsilon} w_2 Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*,$ $b^{j+k} w = w_1 w_2, k \in \{n+1, \dots, n+m-j\}, j \in \{2, \dots, n+m\}$	$(X_2 w_1 Z_{X_i} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge X w_2 Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*,$ $b^{j+k} w = w_1 w_2, i \in \mathbb{N}_{n+m}^+, k \in \{n+1, \dots, n+m-j\}$
$X_2 b^{j+k} w Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, j \in \{2, \dots, n+m\}, w \in \mathcal{A}^+, k \in \{n+1, \dots, n+m-j\}$	
$X_2 w_1 Z' X_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_1 \in V_{-p, S}^*$	$Z_Y w_2 Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_2 \in \mathcal{A}^*, k \in \{n+1, \dots, n+m-2\}$
$(X_2 w_1 Z' X_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge X_2 b w_2 Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*,$ $b^{j+k} w = w_1 w_2, k \in \{n+1, \dots, n+m-j\}$	$(X_2 b^{j+k} w_1 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z_Y w_2 Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1 \in \mathcal{A}^+,$ $w_2 \in \mathcal{A}^*, w = w_1 w_2, k \in \{n+1, \dots, n+m-j\}$
$X_2 b^{j+k} w Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, j \in \{2, \dots, n+m\}, w \in \mathcal{A}^+, k \in \{n+1, \dots, n+m-j\}$	

Tableau 15

$X_2 b^{j+k} w u_k Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}^+, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \leq n, (u_k, v_k) \in P$	$Z_{Y_k} b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, k \in \mathbb{N}_n^+$	$X_2 b^{j+k} w u_{k1} Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, j \in \{2, \dots, n+m\}, w \in \mathcal{A}^+, k \in \{n+1, \dots, n+m-2\}$	$Z_{Y'_k} b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, k \in \{n+1, \dots, n+m-2\}$
$(X_2 b^{j+k} w u_k Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_k} b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}^+, k \leq n, (u_k, v_k) \in P$	$(X_2 b^{j+k} w u_{k1} Y'_k \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'_k} b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), j \in \{2, \dots, n+m\}, w \in \mathcal{A}^+, k \in \{n+1, \dots, n+m\}$		
$X_2 b^{j+k} w b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$			
$X_2 b^{j+k} w b^{k-i} u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}^+, i \in \mathbb{N}_n^+, (u_i, v_i) \in P$	$Z_{Y_i} b^i Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, i \in \mathbb{N}_n^+$	$X_2 b^{j+k} w b^{k-i} u_{i1} Y'_i \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, i \in \{n+1, \dots, k-1\}, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P$	$Z_{Y'_i} b^i Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, i \in \{n+1, \dots, n+m-3\}$
$(X_2 b^{j+k} w b^{k-i} u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} b^i Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), k \in \mathbb{N}_{n+m-j}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, w \in \mathcal{A}^+, i \in \{1, \dots, k-1\}, (u_i, v_i) \in P$	$(X_2 b^{j+k} w b^{k-i} u_{i1} Y'_i \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'_i} b^i Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}, j \in \{2, \dots, n+m\}, i \in \{n+1, \dots, k-1\}, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P$		
$X_2 b^{j+k} w b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$			
$Z_{Y_1} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-P,S}^*, i \in \mathbb{N}_n^+, w_2 \neq b^i$	$Z_{Y'_1} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-P,S}^*, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, w_2 \neq b^i$		
$(X_2 w_1 u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-P,S}^*, b^{j+k} w b^k = w_1 w_2, w_2 \neq b^i, i \in \mathbb{N}_n^+, (u_i, v_i) \in P$	$(X_2 w_1 u_{i1} Y'_i \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'_i} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-P,S}^*, b^{j+k} w b^k = w_1 w_2, w_2 \neq b^i, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P$		
$X_2 b^{j+k} w b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$			
$X_2 b^{j+k} w b^{k+1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}, j \in \{2, \dots, n+m\}$	$Z'_1 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2$	$X_2 w_1 Z_X \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_1 \in V_{-P,S}^+$	$Z'_{Y_1} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-P,S}^+$
$(X_2 b^{j+k} w b^{k+1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z'_{Y_1} Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$	$(X_2 w_1 Z_X \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-P,S}^+, b^{j+k} w b^k = w_1 w_2$	$(X_2 w_1 b Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z'_{Y_1} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_2 \in V_{-P,S}^+, w_1 \in V_{-P,S}^+, b^{j+k} w b^k = w_1 w_2$	
$X_2 b^{j+k} w b^k Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$			

<p><b>Tableau 16</b></p>	$Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in C_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*, i \in \mathbb{N}_n^+$	$Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in C_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*, i \in \{n+1, \dots, n+m\}$	$Z_{Y_1} w_2 Y_2 \in C_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$
$(X_2 w_1 u_i Y_i \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in C_{\Pi}^2), i \in \mathbb{N}_n^+$ $w_1, w_2 \in V_{-p,S}^*, b^{j+k} w = w_1 w_2, (u_i, v_i) \in P$	$(X_2 w_1 u_{i+1} Y_{i+1}' \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in C_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p,S}^*$ $b^{j+k} w = w_1 w_2, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{i+1} u_{i+2}, v_i) \in P$	$(X_2 w_1 b Y_2 \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in C_{\Pi}^2) \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in C_{\Pi}^2$ $w_1, w_2 \in V_{-p,S}^*, b^{j+k} w = w_1 w_2$	$(X_2 w_1 b Y_2 \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in C_{\Pi}^2)$ $w_1, w_2 \in V_{-p,S}^*, b^{j+k} w = w_1 w_2$
$X_2 w_1 Z_X \in C_{\Pi}^2, w_1 \in V_{-p,S}^+$	$X_2 b^{j+k} w b^k Y_1 \in C_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$	$Z_{Y_2} w_2 Y_2 \in C_{\Pi}^3, w_2 \in V_{-p,S}^+$	$Z_{Y_2} w_2 Y_2 \in C_{\Pi}^3, w_2 \in V_{-p,S}^+$
$(X_2 w_1 Z_X \in C_{\Pi}^2 \wedge X_1 w_2 b^k Y_2 \in C_{\Pi}^2), w_2 \in \mathcal{A}^+, w_1 \in V_{-p,S}^+, b^{j+k} w = w_1 w_2, k \in \mathbb{N}_{n+m-2}$	$(X_2 b^{j+k} w b^k Y_1 \in C_{\Pi}^3 \wedge Z_{Y_2} Y_2 \in C_{\Pi}^3), w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$	$(X_2 w_1 Y_1 \in C_{\Pi}^3 \wedge Z_{Y_2} w_2 Y_2 \in C_{\Pi}^3), w_1 \in V_{-p,S}^*, w_2 \in V_{-p,S}^+, b^{j+k} w b^k = w_1 w_2$	$(X_2 w_1 Y_1 \in C_{\Pi}^3 \wedge Z_{Y_2} w_2 Y_2 \in C_{\Pi}^3), w_1 \in V_{-p,S}^*, w_2 \in V_{-p,S}^+, b^{j+k} w b^k = w_1 w_2$
$X_2 b^{j+k} w b^k Y_2 \in C_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$	$X_2 b^{j+k} w b^k Y_2 \in C_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$	$X_2 b^{j+k} w b^k Y_2 \in C_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$	$X_2 b^{j+k} w b^k Y_2 \in C_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+, j \in \{2, \dots, n+m\}, k \in \mathbb{N}_{n+m-j}$

<p><b>Tableau 17</b></p>	$Z_{X_i} w_2 Y \in C_{\Pi}^2, w_2 \in \mathcal{A}^*, i \in \{n+1, \dots, n+m\}$	$X_2 b^l Z_{X_2}' \in C_{\Pi}^2, l \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	$Z_{\varepsilon} w_2 Y \in C_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$
$(X_2 b^{j+1} w_1 u_{i+2} Y \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{X_i} w_2 Y \in C_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in \mathcal{A}^*, b^{j+1} w = w_1 w_2, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{i+1} u_{i+2}, v_i) \in P$	$(X_2 b^l Z_{X_2}' \in C_{\Pi}^2 \wedge X_1 b^{j-l+1} w Y \in C_{\Pi}^2), w_2 \in \mathcal{A}^+, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+, l \in \mathbb{N}_j^+$	$(X_2 w_1 B Y \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{\varepsilon} w_2 Y \in C_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p,S}^*, b^{j+1} w = w_1 w_2$	$(X_2 w_1 B Y \in C_{\Pi}^2 \wedge Z_{\varepsilon} w_2 Y \in C_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p,S}^*, b^{j+1} w = w_1 w_2$
$X_2 w_1 Z_{X_i} \in C_{\Pi}^3, w_1 \in V_{-p,S}^+, i \in \mathbb{N}_{n+m}^+$	$X_2 w_1 Z_{X_1}' \in C_{\Pi}^3, w_1 \in V_{-p,S}^*$	$(X_2 w_1 Z_{X_1}' \in C_{\Pi}^3 \wedge X_2 b w_2 Y \in C_{\Pi}^3), w_1, w_2 \in V_{-p,S}^*, b^{j+1} w = w_1 w_2$	$(X_2 w_1 Z_{X_1}' \in C_{\Pi}^3 \wedge X_2 b w_2 Y \in C_{\Pi}^3), w_1, w_2 \in V_{-p,S}^*, b^{j+1} w = w_1 w_2$
$Z_Y w_2 Y \in C_{\Pi}^3, w_2 \in \mathcal{A}^+$	$X_2 b^{j+1} w Y \in C_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	$X_2 b^{j+1} w Y \in C_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	$X_2 b^{j+1} w Y \in C_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$
$(X_2 b^{j+1} w_1 Y_2 \in C_{\Pi}^3 \wedge Z_Y w_2 Y \in C_{\Pi}^3), w_1, w_2 \in \mathcal{A}^+, w = w_1 w_2, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	$(X_2 b^{j+1} w Y_2 \in C_{\Pi}^3 \wedge Z_Y Y \in C_{\Pi}^3), w \in \mathcal{A}^+, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	$X_2 b^{j+1} w Y \in C_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$	$X_2 b^{j+1} w Y \in C_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+$

Tableau 18

$Z_{Y_j} w_2 Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-P,S}^+, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$	$X_2 w_1 Z'_{X_2} \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_1 \in V_{-P,S}^+$
$(X_2 w_1 u_{j_2} Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_j} w_2 Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1 \in V_{-P,S}^*, w_2 \in V_{-P,S}^+,$ $b^{j+1} w = w_1 w_2, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}, (u_{j_1} u_{j_2}, v_j) \in P$	$(X_2 w_1 Z'_{X_2} \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 b w_2 Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1 \in V_{-P,S}^+,$ $w_2 \in V_{-P,S}^*, b^{j+1} w = w_1 w_2, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$
$X_2 b^{j+1} w Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$	
$X_2 b^{j+1} w u_{j_2} Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1,$ $j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}, (u_{j_1} u_{j_2}, v_j) \in P$	$Z_{Y_j} Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2,$ $X_2 Z'_{X_2} \in \mathcal{C}_{\Pi}^2$
$(X_2 b^{j+1} w u_{j_2} Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_j} Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+,$ $ w _B = 1, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}, (u_{j_1} u_{j_2}, v_j) \in P$	$X_1 b^{j+2} w Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+,$ $ w _B = 1, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$
$X_2 b^{j+1} w Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$	
$Z_{\varepsilon} w_2 Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-P,S}^*, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$	$X_2 w_1 Z_{X_i} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_1 \in V_{-P,S}^*, i \in \mathbb{N}_{n+m}^+$
$(X_2 w_1 B Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{\varepsilon} w_2 Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-P,S}^*,$ $b^{j+1} w = w_1 w_2, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$	$(X_2 w_1 Z_{X_i} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge X w_2 Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1, w_2 \in V_{-P,S}^*,$ $b^{j+1} w = w_1 w_2, i \in \mathbb{N}_{n+m}^+, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$
$X_2 b^{j+1} w Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$	
$X_2 w_1 Z'_{X_1} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_1 \in V_{-P,S}^*$	$Z_Y w_2 Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_2 \in \mathcal{A}^*, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$
$(X_2 w_1 Z'_{X_1} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge X_2 b w_2 Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1, w_2 \in V_{-P,S}^*,$ $b^{j+1} w = w_1 w_2, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$	$(X_2 b^{j+1} w_1 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z_Y w_2 Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1 \in \mathcal{A}^+,$ $w_2 \in \mathcal{A}^*, w = w_1 w_2, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$
$X_2 b^{j+1} w Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$	

Tableau 19

$Z_{Y_i'} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_2 Z_{X_2}' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2$	$X_1 b^j w b^j Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n+m}^+$	$X_2 w_1 Z_{X_2}' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_1 \in V_{-p,S}^+$
$(X_2 w u_{i_2} Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i'} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p,S}^*, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, b^j w b^j = w_1 w_2, (u_{i_1} u_{i_2}, v_i) \in P$	$(X_2 Z_{X_2}' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 b^j w b^j Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n+m}^+$	$(X_2 w_1 Z_{X_2}' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p,S}^+$	$(X_2 w_1 Z_{X_2}' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p,S}^+$
$X_2 b^j w b^j Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n+m}^+$			
$Z_{\varepsilon} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$X_2 w_1 Z_{X_1}' \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, i \in \mathbb{N}_{n+m}^+, w_1 \in V_{-p,S}^*$	$X_2 w_1 Z_{X_1}' \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_2 \in V_{-p,S}^*$	$Z_Y w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_2 \in V_{-p,S}^+$
$(X_2 w_1 B Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{\varepsilon} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p,S}^*, b^j w b^j = w_1 w_2$	$(X_2 w_1 Z_{X_i}' \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge X w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), i \in \mathbb{N}_{n+m}^+, w_1, w_2 \in V_{-p,S}^*, b^j w b^j = w_1 w_2$	$(X_2 w_1 Z_{X_1}' \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge X_2 b w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1, w_2 \in V_{-p,S}^*, b^j w b^j = w_1 w_2$	$(X_2 w_1 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z_Y w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1, w_2 \in V_{-p,S}^+, b^j w b^j = w_1 w_2$
	$X_2 b^j w b^j Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n+m}^+$		

Tableau 20

$Z_{Y_1} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, i \in \{n+1, \dots, n+m-2\}, w_2 \neq b^i$	$X_2 w_1 Z_X \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_1 \in V_{-p, S}^*$	$Z_{Y_2} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_2 \in V_{-p, S}^*$
$(X_2 w_1 u_{i1} Y_i' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*,$ $i \in \{n+1, \dots, n+m-2\}, b^{j+1} w b^j = w_1 w_2, w_2 \neq b^i$	$(X_2 w_1 Z_X \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2),$ $w_1 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^+, b^{j+1} w b^j = w_1 w_2$	$(X_2 w_1 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z_{Y_2} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3),$ $w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, b^{j+1} w b^j = w_1 w_2$
$X_2 b^{j+1} w b^j Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}$		
$X_2 b^{j+1} w u_j Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, Z_{Y_j} b^j Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2,$ $ w _B = 1, j \in \mathbb{N}_n^+, (u_j, v_j) \in P$	$X_2 b^{j+1} w b^j u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+, i \in \mathbb{N}_n^+,$ $ w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+, i < j, (u_i, v_i) \in P$	$Z_{Y_i} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w_2 \in V_{-p, S}^*, w_2 \neq b^i$
$(X_2 b^{j+1} w u_j Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_j} b^j Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2),$ $w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \mathbb{N}_n^+, (u_j, v_j) \in P$	$(X_2 b^{j+1} w b^j u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} b^i Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+,$ $ w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}^+, i \in \mathbb{N}_n^+, i < j, (u_i, v_i) \in P$	$(X_2 w_1 u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), i \in \mathbb{N}_n^+,$ $w_1, w_2 \in V_{-p, S}^*, b^{j+1} w b^j = w_1 w_2, w_2 \neq b^i$
	$X_2 b^{j+1} w b^j Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}$	
$X_2 b^{j+1} w u_{j1} Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1,$ $j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}, (u_{j1} u_{j2}, v_j) \in P$	$Z_{Y_j} b^j Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2,$ $j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}$	$X_2 b^{j+1} w b^j u_{i1} Y_i', w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1,$ $(u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P, i \in \{n+1, \dots, n+m-2\}$
$(X_2 b^{j+1} w u_{j1} Y_j' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_j} b^j Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+,$ $ w _B = 1, j \in \{n+1, \dots, n+m-1\}, (u_{j1} u_{j2}, v_j) \in P$	$(X_2 b^{j+1} w b^j u_{i1} Y_i' \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} b^i Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+,$ $ w _B = 1, j \in \{n+2, \dots, n+m-1\}, i \in \{n+1, \dots, j-1\}, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P$	
	$X_2 b^{j+1} w b^j Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}$	
	$Z_{Y_1} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in V_{-p, S}^+$	$X_2 b^{j+1} w b^j u_{i1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}$
	$(X_2 w_1 b Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_1} w_2 Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1 \in V_{-p, S}^*, w_2 \in V_{-p, S}^+, b^{j+1} w b^j = w_1 w_2$	$(X_2 b^{j+1} w b^j u_{i1} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_1} Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}$
	$X_2 b^{j+1} w b^j Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1, j \in \mathbb{N}_{n+m-1}$	





<b>Tableau 23</b>	
$Z_{Y_1} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, i \in \mathbb{N}_n^+, w_2 \in \mathcal{A}^*$	$Z_{Y_1} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in \mathcal{A}^*$
$(X w_1 u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), i \in \mathbb{N}_n^+, w_1, w_2 \in \mathcal{A}^*, w = w_1 w_2, (u_i, v_i) \in P$	$(X w_1 b Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z'_{Y_1} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in \mathcal{A}^*, w = w_1 w_2$
$Z_{Y_1} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1$	$Z'_{Y_1} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_2 \in \mathcal{A}^+$
$Z_{Y_1} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in \mathcal{A}^*, i \in \{n+1, \dots, n+m\}$	$X w Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1$
$(X w_1 u_i Y'_i \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in \mathcal{A}^*, w = w_1 w_2, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P$	$(X Z_X \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge X_1 w Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1$
$X w Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1$	$(X w Y_1 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z'_{Y_2} Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1$
<b>Tableau 24</b>	
$Z_{Y_1} w_2 Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in \mathcal{A}^*$	$Z_{Y_1} w_2 Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_2 \in \mathcal{A}^+$
$(X w_1 B Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in \mathcal{A}^*, w = w_1 w_2$	$(X w_1 Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z'_{Y_1} w_2 Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1 \in \mathcal{A}^*, w_2 \in \mathcal{A}^+, w = w_1 w_2$
$Z_{Y_1} w_2 Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in \mathcal{A}^*, i \in \{n+1, \dots, n+m\}$	$X w Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1$
$(X w_1 u_i Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y_i} w_2 Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in \mathcal{A}^*, w = w_1 w_2, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{i1} u_{i2}, v_i) \in P$	$(X w Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1) \vee (X w Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z_{Y_1} Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w \in \mathcal{A}^+,  w _B = 1$

Tableau 25

$XwBY \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \Sigma^+$	$Z_\varepsilon \in \mathcal{C}_{\Pi}^2$	$Xw_1Z_{X_i} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_1 \in \Sigma^*, i \in \mathbb{N}_{n+m}^+$	
$(XwBY \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_\varepsilon \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \Sigma^+$	$Xw \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \Sigma^+$	$(Xw_1Z_{X_i} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Xw_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3), w_1, w_2 \in \Sigma^*, w = w_1w_2, i \in \mathbb{N}_{n+m}^+$	
$Z_\varepsilon w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in \Sigma^+$	$Xw_1Z'_{X_1} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_1 \in \Sigma^*$	$Z_{Y'_i} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_2 \in \Sigma^*, i \in \{n+1, \dots, n+m\}$	$Z_{Y'} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3, w_2 \in \Sigma^*$
$(Xw_1BY \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_\varepsilon w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2),$ $w_1 \in \Sigma^*, w_2 \in \Sigma^+, w = w_1w_2$	$(Xw_1Z'_{X_1} \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge X_2 w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3),$ $w_1, w_2 \in \Sigma^*, w = w_1w_2$	$(Xw_1u_{i_2}Y \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Z_{Y'_i} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1, w_2 \in \Sigma^*,$ $w = w_1w_2, i \in \{n+1, \dots, n+m\}, (u_{i_1}u_{i_2}, v_i) \in \mathcal{P}$	$(Xw_1Y_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3 \wedge Z_{Y'} w_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^3),$ $w_1 \in \Sigma^+, w_2 \in \Sigma^*, w = w_1w_2$
		$Xw \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \Sigma^+$	

Tableau 26

$w_1Z'_\varepsilon \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w_1 \in \Sigma^+$	$Z'_\varepsilon \in \mathcal{C}_{\Pi}^2$	$Xw \in \mathcal{C}_{\Pi}^2, w \in \Sigma^+$
$(w_1Z'_\varepsilon \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Xw_2 \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w_1 \in \Sigma^+, w_2 \in \Sigma^*, w = w_1w_2$	$(Z'_\varepsilon \in \mathcal{C}_{\Pi}^2 \wedge Xw \in \mathcal{C}_{\Pi}^2), w \in \Sigma^+$	$w \in \mathcal{C}_{\Pi}^1, w \in \Sigma^+$