

Anwendungen der Optimalsteuerung in ökologischen Systemen

Inauguraldissertation

zur

Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

vorgelegt von

Dmitriy Stukalin

geboren am 04.06.1985

in Kaliningrad

Greifswald, den 27. Juni 2013

von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Ernst-Moritz-Arndt-Universität als Dissertation angenommen

Dekan: Prof. Dr. Klaus Fesser

1.Gutachter : Prof. Dr. Werner Schmidt
Institut für Mathematik und Informatik
Universität Greifswald

2.Gutachter : Prof. Dr. Christian Möllmann
Institut für Hydrobiologie und Fischereiwissenschaft
Universität Hamburg

Datum der Disputation: 15. November 2013

»Nach unserer bisherigen Erfahrung sind wir zum Vertrauen berechtigt, dass die Natur die Realisierung des mathematisch denkbar Einfachsten ist. . . .«

Albert Einstein (1879-1955)

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	13
2. Biologische, ökologische und wirtschaftliche Aspekte der Ostseefischerei	19
2.1. Allgemeine Beschreibung des Fischereisektors, Ziele und Aufgaben	19
2.2. Einzelne Fischpopulationen	21
2.2.1. Dorsch	22
2.2.2. Hering	22
2.2.3. Sprotte	23
2.3. Fangmethoden	24
2.4. Ökonomische Probleme der Ostseefischerei	27
2.5. Ostseefischerei aus der Sicht einzelner Länder	28
2.5.1. Deutschland	28
2.5.2. Dänemark	29
2.5.3. Schweden	29
2.5.4. Finnland	30
2.5.5. Russland	30
2.5.6. Estland	30
2.5.7. Lettland	31
2.5.8. Litauen	31
2.5.9. Polen	31
2.6. Theoretische Ansätze der Modellierung der Ostseefischerei	32
2.7. Ausblick	35
3. Mathematische Modelle in der Biologie	37
3.1. Modellierung von Wachstumsprozessen	37
3.2. Erweiterte Modelle	39
3.2.1. Lotka-Volterra-Modelle	39
3.2.2. Altersgruppen	42
3.2.3. Saisonabhängige Fischfang-Modelle	48

4. Grundlagen der Optimalsteuerung	49
4.1. Das Maximumprinzip von Pontrjagin	50
4.1.1. Stückweise stetige Steuerungen	50
4.1.2. Stückweise konstante Steuerungen	51
4.2. Existenz der Lösungen	52
4.3. Hinreichende Optimalitätsbedingungen	53
4.3.1. Hinreichende Bedingungen nach Mangasarian	53
4.3.2. Hinreichende Bedingungen nach Krotov	53
4.3.3. Hinreichende Bedingungen nach K.Arrow	54
4.4. Untersuchung eines konkreten Modells	56
4.5. Bellman-Prinzip	66
4.5.1. Eine notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingung für die Aufgaben mit stückweise stetigen Steuerungen	67
4.5.2. Optimalitätsbedingungen für die Aufgaben mit stückweise konstanten Steuerungen (closed-loop)	71
4.5.3. Optimalitätsbedingungen für die Aufgaben mit stückweise konstanten Steuerungen (open-loop)	74
4.6. Berechnung optimaler Fangraten	76
4.6.1. Vorbetrachtung für den eindimensionalen Fall	76
4.6.2. Vorbetrachtung für einen mehrdimensionalen Fall	81
5. Numerische Methoden für verschiedene Aufgaben der Optimalsteuerung	83
5.1. Numerische Lösung des Steuerungsproblems	83
5.2. Direkte Methoden	84
5.2.1. Direkte Kollokation	85
5.2.2. Direktes Schießverfahren	87
5.3. Indirekte Methoden	89
5.3.1. Einfach-Schießverfahren	89
5.3.2. Mehrfach-Schießverfahren	90
5.4. Lineare Beispiele nachhaltiger Fischerei	92
5.4.1. Berechnung optimaler Fangraten	92
5.4.2. Berechnung optimaler Fangzeiten	97
5.4.3. Berechnung optimaler Fangraten mit zeitabhängigen Wachstumsraten	99
5.5. Ökologische Modelle mit nichtlinear auftretender Steuerung	102
5.5.1. Modelle mit stückweise stetigen Steuerungen	102
5.5.2. Modelle mit stückweise konstanten Steuerungen	107
6. Zusammenfassung und Ausblick	115
Literaturverzeichnis	119

A. DIRCOL	125
A.1. Programm 1. Hauptprogramm user.f (wesentliche Teile)	125
A.2. Programm 2. Programm DATDIM	130
A.3. Programm 3. Programm DATLIM	133
B. OC-ODE	137
B.1. Programm 1. Berechnung mit stückweise konstanten Steuerungen . .	137
C. MATLAB-Programme	145
C.1. Programm 1. Berechnung stationärer Zustände.	145
C.2. Programm 2. Berechnung der Adjungierten.	146
C.3. Programm 3. Berechnung bei quadratischen Modellen (optimaler Fang).	148
C.4. Programm 4. Das Integral-Maximumprinzip.	149
C.5. Programm 5. Logarithmisches Modell.	149
C.6. Programm 6. Newton-Methode für ein nichtlineares Gleichungssystem.	150

Abbildungsverzeichnis

1.1. Entwicklung der Dorsch- und Heringpopulation in der Ostsee, vgl. Abb. 2.6. Quelle: [51]	16
2.1. Managementgebiete (Hering). Quelle: [51]	23
2.2. Stellnetz. (Quelle: [52])	25
2.3. Treibnetz (Heringsfleet). 1. Wasseroberfläche 2. Fleetreep 3. Brails 4. Jonas (entspr. ca. 15 Netzen) 5. Brailtau 6. Zeisinge 7. Korken 8. Unterwant 9. Netz. (Quelle: [68])	25
2.4. Pelagisches Schleppnetz 1. Kurrleinen 2. Scherbretter 3. Grundleine (Ketten) 4. Jager 5. Gewichte 6. Kopftau mit Auftriebskugeln 7. Vornetz 8. Tunnel 9. Steert Bei der Gespannfischerei mit zwei Schiffen entfallen die Scherbretter (Quelle: [68])	26
2.5. Langleine (links), Reuse (rechts) (Quelle: [52])	26
2.6. Unterteilung des Ostseeraumes	29
3.1. Klassisches Lotka-Volterra-Modell	41
3.2. Logistisches Lotka-Volterra-Modell	41
3.3. Startverteilung $n(x, 0) = n_0(x)$	45
3.4. Altersklassen-Modell mit $r_d = 0.5$, $r_b = 0.8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$	46
4.1. 3-Populationen-System: Dorsch. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (rechts)	58
4.2. 3-Populationen-System: Hering. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (rechts)	58
4.3. 3-Populationen-System: Sprotte. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (rechts)	58
4.4. Optimale Entwicklung der Population (links), optimale Steuerung (rechts), Fall $x_1(0) < x_1^{sing}$	80
4.5. Optimale Entwicklung der Population (links), optimale Steuerung (rechts), Fall $x_1(0) > x_1^{sing}$	81
5.1. Numerische Lösung des Steuerungsproblems	83

5.2. Stückweise lineare Approximation der Steuerung (oben) und stückweise kubische Approximation der Trajektorie (unten)	86
5.3. DIRCOL: Ein Gewinn von der Fischerei eines 3-Populationen- Systems in Mio. Euro	93
5.4. DIRCOL: 3-Populationen-System: Dorsch. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (rechts)	93
5.5. DIRCOL: 3-Populationen-System: Hering. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (rechts)	94
5.6. DIRCOL: 3-Populationen-System: Sprotte. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (rechts)	94
5.7. DIRCOL: 3-Populationen-System: Adjungierten	94
5.8. OC-ODE: Ein möglicher Gewinn von der Fischerei eines 3- Populationen-Systems in Mio. Euro	95
5.9. OC-ODE: 3-Populationen-System: Dorsch. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (Mitte), stückweise konstante Steuerung (rechts)	96
5.10. OC-ODE: 3-Populationen-System: Hering. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (Mitte), stückweise konstante Steuerung (rechts)	96
5.11. OC-ODE: 3-Populationen-System: Sprotte. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (Mitte), stückweise konstante Steuerung (rechts)	96
5.12. OC-ODE: Dorsch. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts)	98
5.13. OC-ODE: Hering. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts)	98
5.14. OC-ODE: Sprotte. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts)	98
5.15. Wachstum der Populationen: Proportionalitätsfaktoren $1 + \sin(2\pi t)$ bei dem Dorsch und $1 - \cos(2\pi t)$ beim Hering bzw. Sprotten	99
5.16. OC-ODE: Dorsch. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit veränderlichen Wachstumsraten	101
5.17. OC-ODE: Hering. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit veränderlichen Wachstumsraten	101
5.18. OC-ODE: Sprotte. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit veränderlichen Wachstumsraten	101
5.19. Eindimensionales Modell mit quadratisch auftretender Steuerung. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts)	103

5.20. Eindimensionales Modell mit quadratisch auftretender Steuerung (Gewinn nach 20 Jahren)	104
5.21. Dorsch. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit quadratischen Kostenfunktionen	105
5.22. Hering. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit quadratischen Kostenfunktionen	105
5.23. Sprotte. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit quadratischen Kostenfunktionen	105
5.24. Optimale Steuerung in einem Modell mit logarithmisch auftretender Steuerung	107
5.25. Eindimensionales Modell mit quadratisch auftretender Steuerung. Optimale stückweise konstante Steuerung (links) und die Populationsentwicklung (rechts)	108
5.26. Eindimensionales Modell mit quadratisch auftretender Steuerung für 2 Steuerungsintervalle. Optimale stückweise konstante Steuerung (links) und die Populationsentwicklung (rechts)	110
5.27. Eindimensionales Modell mit quadratisch auftretender Steuerung für 10 Steuerungsintervalle. Optimale stückweise konstante Steuerung (links) und die Populationsentwicklung (rechts)	113
5.28. Dorsch. Optimale stückweise konstante „Anzahl der Kutter “ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit quadratischen Kostenfunktionen	114
5.29. Hering. Optimale stückweise konstante „Anzahl der Kutter “ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit quadratischen Kostenfunktionen	114
5.30. Sprotte. Optimale stückweise konstante „Anzahl der Kutter “ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit quadratischen Kostenfunktionen	114

Einleitung

Der Fischbestand der Meere schrumpft dramatisch, obwohl man lange annahm, dass es nie passieren könnte. Die Veränderung der natürlichen Fischgemeinschaftsstrukturen erfolgt vor allem durch Nähr- und Schadstoffeinträge, Flussverbauung, Überfischung und Einführung von invasiven Fischarten. Dies alles verdanken wir dem Einfluss der Menschen. Der Mensch greift in die natürlichen Prozesse des Meeres sehr stark ein. Speziell die Ostsee (insbesondere in der Küstennähe) ist stark mit schädigenden Substanzen verschmutzt, die primär durch häusliche, industrielle und landwirtschaftliche Abwässer in das Meer gelangen. (vgl. [9]). Man darf auch das Giftdepot, das vom zweiten Weltkrieg in der Ostsee blieb, nicht vergessen. Außerdem „überfischt“ der Mensch die Ostsee. Die Fischpopulationen können sich dem Klimawandel einigermaßen anpassen, dem zerstörerischen Einfluss der Menschen aber kaum.

Unter dem Begriff „Überfischung“ versteht man die Reduktion der Bestände einzelner Arten, die auf eine zu hohe Fischfangmenge zurückzuführen ist. Aufgrund der verbesserten Technologien haben sich die Fangmengen zwischen 1945 und 1965 vergrößert und sind dann wieder etwas gesunken (vgl. [27], [34]). Die grundlegende Gefahr der Überfischung liegt darin, dass ein Bestand (Vorkommen einer Art in einem bestimmten Gebiet) so dezimiert wird, dass die natürliche Regenerationsfähigkeit nicht mehr gegeben ist, er nicht mehr als Nahrungsquelle zur Verfügung steht, und, im schlimmsten Fall, die Art ausstirbt. Der Living Planet Index für marine Arten des WWF zeigt einen durchschnittlichen Rückgang von 14% zwischen 1970 und 2005 (vgl. Living Planet Report 2008) ¹. Neben möglichen Umwelteinflüssen (Klimawandel, Schadstoffeinträge u.ä.) wird als Hauptursache die Überfischung genannt.

Obwohl es auch natürliche Ursachen für diesen Rückgang gibt, wie beispielsweise

¹ [46]

Änderungen in den Meeresströmungen oder Klimawechsel, so haben in erster Linie die vom Menschen verursachte Umweltverschmutzung und Überfischung zu dieser Entwicklung beigetragen. Vor allem Hering und Dorsch werden derzeit in viel zu großen Mengen gefangen. Durch modernste Technisierung ist es heute möglich sowohl am Grund als auch im freien Wasser zu fischen. Der Nachteil der Grundfischerei besteht in der erhöhten Umweltverschmutzung und der teilweisen Zerstörung des Seebodens, der Vegetation und zahlreichen wirbellosen Bodentiere. Andere Tierarten werden durch Beifänge bedroht (z.B. Seevögel und Säugetiere). Das biozönische Gleichgewicht der Ostsee wird durch den Menschen nachhaltig zerstört.

Wegen dieser Probleme haben die Mitgliedsstaaten der Europäischen Union entschieden, dass in der Ostsee künftig weniger Fisch gefangen werden soll. Darauf verständigten sich die EU-Staaten nach langen Verhandlungen. Allerdings fiel 2008 die Fangquote ca. 16000 Tonnen Dorsch und ca. 400000 Tonnen Sprotte nach Angaben der EU-Kommission in einigen Bereichen deutlich geringer aus, als die Kommission vorgeschlagen hatte. Die EU-Behörde plante im Bestand bedrohte Fischarten besser schützen. ([59]). Die Europäische Kommission hatte am Oktober 2008 einen Vorschlag für die Fangmöglichkeiten in der Tiefseefischerei für 2009 und 2010 vorgelegt. Für Bestände wie etwa Grenadierfisch sowie für die meisten Bestände von Roter Fleckbrasse und Gabeldorsch wurden in dem Vorschlag bestimmte Fangmengen empfohlen, wobei für 2009 und 2010 jeweils eine Kürzung um 15 % gegenüber dem Vorjahr vorgesehen ist.² Die Kommissionsvorschläge basieren auf den Gutachten des ICES.

Der Dorsch gilt in der östlichen Ostsee als vom Aussterben bedroht, in der westlichen als überfischt. (vgl. [20]) Ein Grund dafür ist auch die illegale Fischerei. Polnischen Fischern wird z.B. vorgeworfen, tatsächliche Fangmengen zu verschleiern. Im Moment bestehen die Dorsch-Fänge in der westlichen Ostsee zu über 80 Prozent aus Tieren, die entweder noch gar nicht oder höchstens einmal gelaicht haben. Die Wahrscheinlichkeit, einen ausgewachsenen Dorsch in der westlichen Ostsee zu finden, ist relativ gering. Besonders stark ist der Dorschbestand in der östlichen Ostsee gesunken - also zwischen Schweden, Polen und dem Baltikum.³ Die Forscher schätzen dort den Bestand der potenziellen Elterntiere auf höchstens 80.000 Tonnen. Die EU-Staaten legen jedes Jahr die Höchstfangmengen, deren Aufteilung auf die Staaten und die dafür nötigen Auflagen für die Flotten fest. Eine Möglichkeit, auf die schwankenden Bestände der Fischarten zu retten, ist das Variieren der erlaubten Fangtage (vgl. [63]).

Wissenschaftliche Modellsimulationen zeigen, dass sich die Dorschbestände in relativ kurzer Zeit erholen können. Erste Anzeichen hierfür sind im östlichen Bestand bereits sichtbar. Wenn man den Fischfang von den Dorschpopulation und ihrer Beute streng kontrolliert, die Quoten nicht nur aus wirtschaftlichen Erwägungen festlegt, sondern auch z. B. durch Modellierung mathematisch und biologisch analysiert,

² [50]

³ [53]

können wir hoffen, dass sich diese Fischbestände in einigen Jahren leicht verdoppeln oder verdreifachen. Davon würde nicht nur das ganze Ökosystem profitieren, sondern auch der Fischereisektor und damit die Küstenregionen. (vgl. [50]) In der westlichen Ostsee gibt es momentan eine positive Tendenz und nach vier Jahren drastischer Quotenkürzungen sollte die Dorschfangquote in 2012 um 13% bzw. 15% erhöht werden.

Auch Heringe gelten in der Ostsee als bestandsgefährdet. In Europa gelten fast 90 Prozent der Bestände als überfischt. Seit fünf Jahren wurden die erlaubten Fangmengen immer weiter gekürzt. 2011 wurden die Fangmengen für Hering um weitere 30 Prozent auf 15.884 Tonnen reduziert, weil die Zahl der Tiere in der Ostsee (vor allem, in dem östlichen Teil) stark zurückgegangen ist. 2012 ist eine weitere Absenkung der Fangmengen in der mittleren Ostsee (minus 33%) und vor Riga (minus 21%) geplant; dafür werden die Fangmengen in der westlichen Ostsee um 32% erhöht (vgl. „Ostseezeitung“, 16.09.2011).

Als Ausgangspunkt dieser Arbeit ist die Definition einer natur- und ökosystemverträglichen Fischerei einzuführen. „Eine natur- und ökosystemverträgliche Fischerei nutzt die Bestände auf einem am Vorsorgeansatz orientierten, nachhaltigen Niveau und versucht dies mit geringsten negativen Auswirkungen auf Habitats und andere Arten zu tun. Es ist von gesellschaftlichem Interesse, dass ein Ausgleich zwischen ökonomischen Interessen der Fischerei und langfristigem gesellschaftlichem Interesse an gesunden Fischbeständen und einem intakten Ökosystem stattfindet.“ (vgl. [43], [7])

Ziel der Ostseefischereibetriebe muss es daher sein, pflichtbewusst mit den durch die Politik verordneten Regulierungsmaßnahmen und den Vorgaben einzelner Kommissionen (wie beispielsweise International Council for the Exploration of the Sea) zum Schutz der baltischen Meeresfauna umzugehen. Ziel des verantwortlichen Managements muss es hingegen sein, den Fischereiaufwand auf ein ökologisch verträgliches Maß zu reduzieren und die Zusammenarbeit der beteiligten Ländern zu fördern⁴. Dieses ist von äußerster Dringlichkeit, da das Ausmaß der wirtschaftlichen Wertschöpfung der Fänge stets vom Bestand und der Artenvielfalt der Ostseefische und einem intakten Ökosystem abhängig sind.

Besonder wichtig und aktuell ist eine Anwendung von nachhaltigen Fischfangstrategien. Das Prinzip der Nachhaltigkeit beschreibt die Nutzung eines regenerierbaren Systems in einer derartigen Weise, dass dieses System in seinen wesentlichen Eigenschaften erhalten bleibt und sein Bestand auf natürliche Weise regeneriert werden kann. (vgl. [67])

Im allgemeinen Verständnis setzt sich der Begriff der Nachhaltigkeit aus drei Komponenten zusammen, die auch als Drei-Säulen-Modell der Nachhaltigkeit bezeichnet werden.⁵

⁴ [55]

⁵ [65]

1. Einleitung

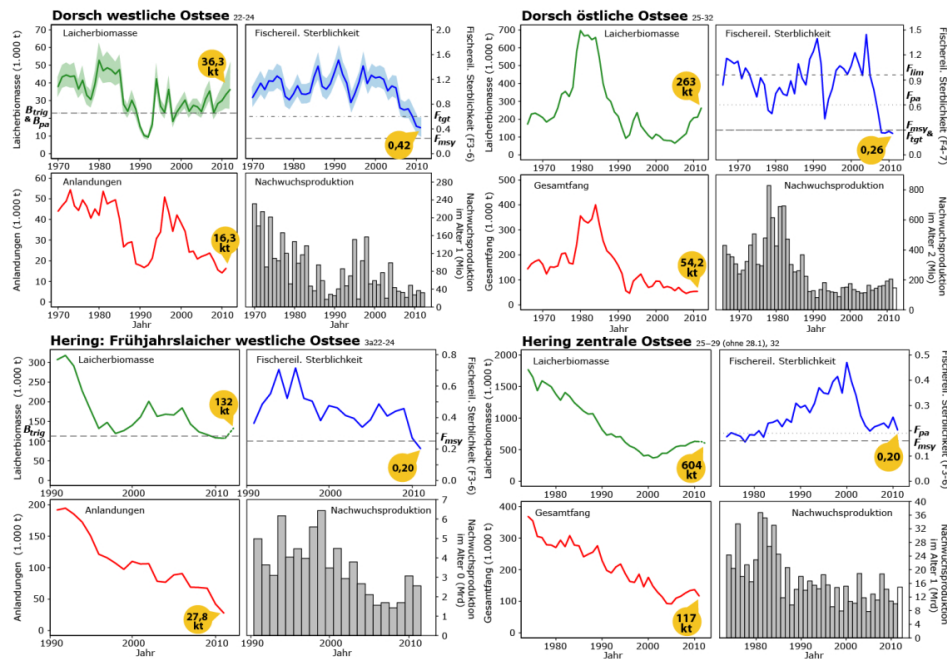


Abbildung 1.1.: Entwicklung der Dorsch- und Heringpopulation in der Ostsee, vgl. Abb. 2.6. Quelle: [51]

- Die ökonomische Nachhaltigkeit stellt das Postulat auf, dass die Wirtschaftstätigkeiten so anzulegen sind, dass sie dauerhaft eine tragfähige Grundlage für Erwerb und Wohlstand bieten. Von großer Bedeutung ist hier der Schutz wirtschaftlicher Ressourcen vor Ausbeutung.
- Die ökologische Nachhaltigkeit beschreibt das Ziel, Natur und Umwelt für die nächsten Generationen zu erhalten. Dieses umfasst den Erhalt der Artenvielfalt, den Klimaschutz, die Pflege von Kultur- und Landschaftsräumen in ihrer ursprünglichen Gestalt sowie generell einen schonenden Umgang mit der natürlichen Umgebung.
- Die soziale Nachhaltigkeit beschäftigt sich mit der Entwicklung der Gesellschaft und strebt die Partizipation aller Mitglieder einer Gemeinschaft an. Dies umfasst einen Ausgleich sozialer Kräfte mit dem Ziel, eine lebenswerte Gesellschaft zu erreichen.⁶

Nachhaltigkeit muss sowohl lokal, national als auch global unterstützt werden. Während aus ökologischer Perspektive zunehmend ein globaler Ansatz verfolgt wird, stehen bezüglich der wirtschaftlichen und sozialen Nachhaltigkeit häufig die nationalen Interessen im Vordergrund. Für immer mehr Bereiche wird eine nachhaltige Entwicklung postuliert. ([67])

⁶vgl. [67]

Zum Schutz der Fischbestände in der Ostsee hat der WWF sich der Umsetzung folgender Ziele verschrieben⁷:

- Anpassen der Fischereiflotte an die Fischbestände.
- Förderung einer umweltfreundlichen und ökonomisch nachhaltigen Fischerei.
- Unterstützung von fairen Fischereiabkommen.
- Entwicklung von alternativen Fischereimethoden und Reduzierung der Beifänge.

In dieser Arbeit werden mehrere interagierende Arten modelliert, die einen gemeinsamen Lebensraum mit beschränkten Ressourcen bewohnen. Zu untersuchen ist also ein dynamisches System, das zusätzlich von Steuerungsvariablen (z.B. Anzahl der Fischkutter) abhängt. Eine typische Fragestellung für ein solches System ist, wie man eine Steuerung (bzw. Regelung) findet, die das System in eine gewünschte Zielmenge steuert. In vielen Fällen ist darüberhinaus zusätzlich eine Kostenfunktion zu optimieren, typischerweise ein Funktional von den Lösungstrajektorien und den Steuerungen des Systems.

Man möchte den Gewinn der Fischereiindustrie nachhaltig maximieren, ohne die betrachtete Fischart aussterben zu lassen. Wichtige Aspekte, die in der Forschung untersucht werden müssen, sind die Beeinflussung der Dynamik des Systems, um dieses z. B. in einen Gleichgewichtszustand zu bringen. Für die Optimierung können notwendige (und manchmal auch hinreichende) Optimalitätsbedingungen hergeleitet werden. Daraus resultieren numerische Methoden zur Berechnung dieser optimalen Steuerungen. Diese Steuerungen, die im Allgemeinen nicht eindeutig sind, werden ausgewertet und diskutiert.

Im Kapitel 2 wird ein Ausblick des gegenwärtigen Standes im Ostseeraum gegeben und politische sowie wirtschaftliche Situation erläutert.

Im Kapitel 3 befassen wir uns mit mathematischen Modellen für dynamische Prozesse aus den Biowissenschaften. Es werden einige bekannten Populationsmodelle dargestellt und Dynamiken von Spezies verglichen. Es werden einige Modelle mit Lotka-Volterra-Verhältnissen und erweiterte Modelle betrachtet. Die Fischfangquoten werden als Steuerungsvariablen verschiedener Typen eingeführt.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Grundlagen der Optimalsteuerung. Betrachtet werden notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen, besonders das Maximum-Prinzip von Pontrjagin im klassischen Sinne. Die dynamische Programmierung (Hamilton-Jacobi-Bellman-Theorie) wird als eine Alternative für die Lösung einiger Steuerungsaufgaben vorgeschlagen und ausgewertet. Außerdem beschäftigen wir uns hier mit Theorie der hinreichenden Bedingungen in der Optimalsteuerung.

Im Kapitel 5 werden numerische Methoden für die Lösung von Optimalsteuerungsaufgaben unter Nebenbedingungen behandelt. Es werden

⁷vgl. [70]

1. Einleitung

verschiedene Vorgehensweisen diskutiert und auf entsprechende Modelle angewendet. Kapitel 5 stellt die Zusammenhänge dar und gibt einige Beispiele aus dem Bereich der nachhaltigen Ostsee-Fischerei dar. In diesem Abschnitt geht es um Optimierung von Fangperioden und um Ertragsmaximierung im Fischfang, wobei ein großer Zeithorizont angenommen wird, was zu nachhaltigen Fangstrategien führt. Die Kapitel 4-5 stellen mathematische Verfahren zusammen und entwickeln neue.

Im Kapitel 6 werden verschiedene Fragen der Ostseefischerei diskutiert. Es werden nachhaltige Aspekte betont und einige Empfehlungen für die Fischer gegeben.

Biologische, ökologische und wirtschaftliche Aspekte der Ostseefischerei

2.1. Allgemeine Beschreibung des Fischereisektors, Ziele und Aufgaben

Der Fischereisektor ist ein wichtiger Bestandteil der Wirtschaft im Ostseeraum. Das Maß der wirtschaftlichen Wertschöpfung im Bereich der Fangerträge ist hierbei vom Bestand und von der Artenvielfalt der Ostsee-Fischfauna und dem Wanderungsverhalten einiger Fischpopulationen abhängig.

Die Dynamik von Populationen hängt auch von der Wasserqualität im Meer und von den Temperaturverhältnissen ab. Diese Abhängigkeiten werden in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt, weil sich diese Einflüsse schwierig studieren und auswerten lassen.

Im Mittelpunkt der Forschung sollen im Folgenden die Betrachtung der Ostseefischerei und deren Probleme im Hintergrund ökologischer und ökonomischer Fragestellungen stehen. Anhand der Entwicklung der Ostseefischerei im 20. Jahrhundert müssen die Ausführungen zu der Betrachtung der wirtschaftlichen Situation und der strukturellen Veränderungen im Bereich der Fischereiwirtschaft seit den 90er Jahren übergehen.

Die politischen Möglichkeiten und Tätigkeiten werden im Wesentlichen durch die Gemeinsame Fischereipolitik der Europäischen Union bestimmt. Für eine verantwortungsbewusste Fischereipolitik sind folgende Aspekte wichtig (vgl. [34], [56]):

1. Fischbestände nachhaltig nutzen.

Dabei muss die Überfischung ökonomisch wichtiger Bestände beendet

werden. Die Überfischung in der Ostsee ist weniger ein ökologisches als ein wirtschaftliches Problem. Trotzdem basierte das Fischereimanagement bislang mit dem Vorsorgeansatz allein auf den Schutz vor ökologischer Überfischung. Diese Ziele können nur international angegangen werden (vgl. auch [56]).

2. Klimaänderung in der Fischerei berücksichtigen.¹

Solche Änderungen haben einen starken Einfluss auf die Fischerei. Fischerforscher versuchen seit langem die Schwankungen von natürlichen Faktoren in ihre Modelle zu integrieren, um möglichst genaue Vorhersagen über die zulässigen Fangmengen treffen zu können. Trotz einiger Verfeinerungen in den Modellen sind die Prognosen mit großen Unsicherheiten verbunden.

3. Effektivität der Fischereikontrolle verbessern.

Eine effektive Fischereiaufsicht ist die Grundvoraussetzung für ein erfolgreiches Management der Fischpopulationen. Illegale Fischerei und Quotenüberfischungen müssen wirksamer im Vergleich zu der früheren Zeit vermieden werden. In der Vergangenheit wurde zu wenig auf die effektive Umsetzung der bestehenden Vorschriften in allen Mitgliedstaaten und Vertragsstaaten der EU geachtet. Stattdessen wurden jährlich neue oder geänderte Vorschriften erlassen, so dass sie heute kaum noch zu überschauen sind (vgl. [42]).

4. Bei der Förderpolitik nach Regionen unterscheiden.

5. Quotenregelung nicht aushöhlen.

Die jährliche Bestimmung der zulässigen Gesamtfangmengen erfolgt auf der Grundlage der wissenschaftlichen Empfehlungen des Internationalen Rates für Meeresforschung. Die Aufteilung dieser Fangmengen auf die Mitgliedstaaten in Form von einzelstaatlichen Quoten erfolgt nach dem Prinzip der relativen Stabilität. Jeder Mitgliedstaat erhält in der Regel jedes Jahr den gleichen Anteil an der zulässigen Gesamtfangmenge eines Bestandes. Die Aufteilung nach diesem Prinzip wurde ca. 1980 entwickelt und basierte auf den Fängen der Mitgliedstaaten in bestimmten Referenzjahren.

6. Entwicklungschancen der Aquakultur nutzen.

7. Verarbeitung und Vermarktung stärken.

Die Fischverarbeiter brauchen zur Stärkung der Wettbewerbsfähigkeit einen zollfreien Zugang zu importierter Rohware und einen unbeschränkten Zugang zu Fördermöglichkeiten der Europäischen Union (vgl. [42]).

8. Fischereiforschung intensivieren.

Der Fischereiforschung wird im Rahmen der Gemeinsamen Fischereipolitik der EU eine immer stärkere Position sowohl aus ökologischer als auch aus ökonomischer Sicht zugewiesen (vgl. [56]).

¹ [42]

Die Einschätzungen zum Zustand des Bestandes wird aus den jährlichen Veröffentlichungen des Internationalen Rates für Meeresforschung (ICES) entnommen, der die wissenschaftlichen Empfehlungen zu den Fangquoten abgibt.

Diese Empfehlungen bilden die Grundlage für die Entscheidungen zu den tatsächlichen Fangmengen auf den jährlichen Ratstagungen der Fischereiminister in Brüssel (vgl. [56]).

Der ICES verwendet zur Beschreibung des Bestandszustandes einige feststehende Begriffe. Die Größe des aktuellen Laicherbestandes (also das Gesamtgewicht aller erwachsenen Tiere, die zur Vermehrung beitragen können) und die fischereiliche Sterblichkeit (ein Maß für die Entnahme durch die Fischerei) werden dabei in Relation zu den Referenzwerten nach dem Vorsorgeansatz betrachtet. Für jeden Fischbestand müssen eigene Referenzwerte nach komplizierten statistischen Verfahren berechnet werden.

In vielen Ostsee-Ländern gilt die Fischerei als eine der wichtigsten Aktivitäten. Es wird als Teil der nationalen Identität und als eine wichtige Quelle für Nahrung und Einkommen betrachtet ([64]).

In der Ostsee gibt es etwa 70 Fischarten. Die meist verbreiteten sind Dorsche, Heringe und Sprotten. Diese Arten sind auch die wichtigsten Industrie-Arten.

2.2. Einzelne Fischpopulationen

Die Ostsee-Fischerei konzentriert sich im Wesentlichen auf drei Arten – Dorsch, Hering und Sprotte. Dies ist wenig verglichen mit den ca. dreißig Arten, die sich in der Nordsee oder im Atlantischen Ozean befinden. Einer der wichtigsten Aspekte der Fischfauna ist die morphologische Struktur der Ostsee. Die Ostsee ist ein „isoliertes“ Meer. Es dauert einige Jahre, bis ihre Gewässer vollständig erneuert sind.

Aufgrund dieser Tatsache weisen die verschiedenen Arten nur einen geringen Austausch mit den übrigen Meeren auf. Ein niedriger Salzgehalt führt dazu, dass die nördlichen Küsten mehrere Monate im Jahr zugefroren sind.²

Eine weitere Besonderheit der Ostsee ist der Meeresgrund. Die Wassertiefe ist im Allgemeinen gering, aber es gibt tiefere Stellen, auf deren Grund die Meeresarten genügend Salzwasser vorfinden, um sich fortzupflanzen und zu laichen. Diese Stellen sind daher besonders reichhaltig an Nahrungsmitteln und stellen die Fanggebiete insbesondere für die Fischerei auf Dorsch dar.

In diesem kleinem Meer mit einem vergleichsweise geringen Anteil offener See, nimmt die Küstenfischerei einen relativ hohen Stellenwert ein. 70% der Flotte besteht aus kleineren Schiffen. Diese konzentriert sich auf ein grosse Vielfalt von Zielarten, die mit einer Vielzahl von Fanggeräten, z.B. Fallen, Leinen, Treibnetzen und

² [49]

an bestimmten Stellen Grundschleppnetzen, gefangen werden. Eine Klassifizierung solcher Fangtechniken werden wir im Unterkapitel 2.3. diskutieren.

All diese Eigenschaften machen aus der Ostsee ein sehr empfindliches Meer, dessen Bestände streng bewirtschaftet werden müssen, um eine dauerhafte und verantwortungsvolle Fischerei sicherzustellen.

2.2.1. Dorsch

Dorsche sind aus ökonomischer Sicht eine der wichtigsten Fangarten.

Vor allem der Dorsch - in der Nordsee trägt er den Namen Kabeljau - hat sich in der Ostsee gut der Umgebung angepasst. Dorsch ist im ganzen Nordatlantik verbreitet und wird von Ländern wie Norwegen, Russland, Dänemark, Großbritannien, Kanada und USA gefangen.

Es gibt momentan zwei weitgehend getrennte Dorschpopulationen gibt, die unterschiedliche Vorkommensgebiete haben und sich auch in der Größe geringfügig voneinander unterscheiden. Die eine lebt in der salzhaltigeren westlichen Ostsee, die andere in den salzärmeren Regionen östlich von Insel Bornholm. Der östliche Dorschbestand ist heutzutage viermal so groß wie der in der westlichen Ostsee. Dies ist im Wesentlichen der Rettungspolitik der EU zu verdanken. Der Lebensraum des östlichen Dorschbestandes auch viel größer als der in der westlichen Ostsee.³

Ostseedorsch laicht in den tiefen Bereichen der westlichen Ostsee im Frühjahr und deutlich früher als der viel größere benachbarte Bestand der östlichen Ostsee. Die kleine, aber produktive Population der westlichen Ostsee war von der starken Änderungen der Umweltbedingungen Mitte der 90er Jahre und den daraus und aus zu starker Befischung resultierenden Veränderungen in Räuber-Beute-Verhältnissen (Dorsch-Sprotte) weniger betroffen als der östliche Bestand.

2006 schlug die Europäische Kommission einen langfristigen Bewirtschaftungsplan für Dorsch in der Ostsee vor.

2.2.2. Hering

Diese Art verfügt über ein weiträumiges Verbreitungsareal im Nordatlantik, das sich vom Golf von Biscaya nördlich über die Ostsee bis nach Nowaja Zemlja und Spitzbergen erstreckt. In westlicher Richtung dehnt es sich über Island und das südwestliche Grönland bis an die Küsten von South Carolina aus. Der Atlantische Hering lebt in Tiefen bis etwa 360 Meter sowohl pelagisch im Freiwasser wie auch in küstennahen Bereichen (vgl. [66]).

Der Heringsbestand ist im Zusammenhang mit der Entwicklung der Dorsch- und Sprottenbestände zu betrachten. Mit einer weiteren Zunahme des Dorschbestands

³ [61]

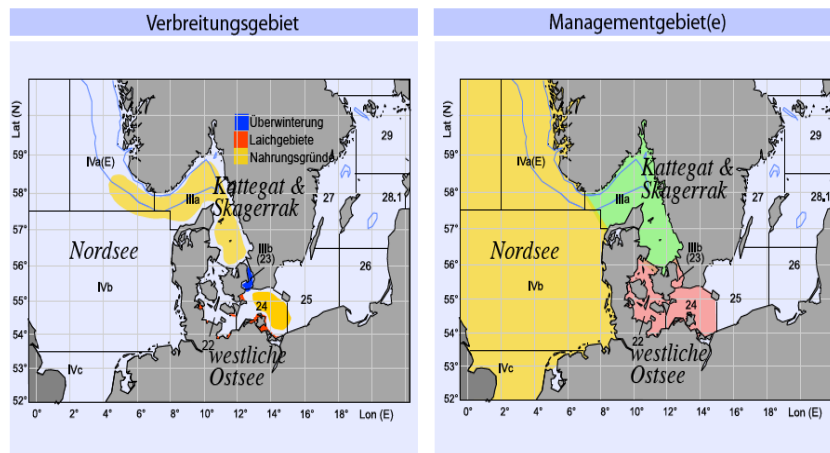


Abbildung 2.1.: Managementgebiete (Hering). Quelle: [51]

würde sich auch der Räuberdruck des Dorschs auf den Hering erhöhen.

Der Heringbestand ist in drei verschiedenen Managementgebieten verbreitet: Der westlichen Ostsee (22-24) dem Skagerrak/ Kattegat (IIIa) und der Nordsee (IV) (siehe Abb. 2.1). Für alle drei Gebiete gelten separate Fangquoten. In den beiden letzten werden Nordsee-Herbstlaicher gemischt mit Frühjahrslaichern der Westlichen Ostsee gefangen.

2.2.3. Sprotte

Die Sprottenpopulation ist die größte in der Ostsee und befindet sich seit ca. 15 Jahren in einem sehr guten Zustand. Die Laicherbestandsbiomasse liegt nach ICES in diesem Zeitraum, von zwei Ausnahmen in den Jahren 2002 und 2003 abgesehen, immer deutlich über 1.000.000 Tonnen (vgl. [64]). Als Grund solcher Tendenz war eine erfolgreiche Vermehrung und eine niedrige natürliche Sterblichkeit, da die Bestände des Haupträubers Dorsch gering sind.

Der Sprottenbestand gilt heutzutage als unterfischt. Sprotten werden hauptsächlich für industrielle Zwecke zur Herstellung von Fischmehl gefangen; nur zu einem geringen Teil gehen sie in den direkten menschlichen Konsum, z.B. als Rigaer Sprotte. Der Beifang von kleinen Heringen bei der Sprottenfischerei ist möglich. Daher ist eine gute Kontrolle der Industriefischerei und insbesondere Fischereinetze wichtig.⁴

Der Hauptteil der Sprottenfänge wird mit pelagischen Schleppnetzen gefangen. Darüber hinaus wird in einigen Teilen der Ostsee die Grundsleppnetzfisherei auf Sprotte betrieben. Die Sprottenfischerei wird das ganze Jahr lang durchgeführt, wobei das erste Halbjahr die Hauptfangsaison ist.

⁴ [42]

Die Ostseesprotte wird von zwei unterschiedlichen Flotten befischt - kleinen Kuttern (17- 24 m Länge) und mittleren Kuttern (25-27 m Länge).

2.3. Fangmethoden

In der Ostsee werden verschiedene Arten von Fanggeräten eingesetzt. Die Kiemennetz- und die Schleppnetzfisherei sind von einer besonderen Bedeutung.

Die Kiemennetze sind so konstruiert, dass die Fische durch die Maschen schlüpfen und nicht mehr zurück können, da sie darin hängen bleiben. Diese Netze werden ins Wasser gestellt und nach einer bestimmten Zeit zurück genommen.

Kiemennetze lassen sich in Stellnetze (Grundstellnetze sowie pelagische Stellnetze) und Treibnetze unterscheiden.

Stellnetze sind in der Regel aus einer einfachen Netzwand aus Nylonschnur bestehende Fischernetze (Abb. 2.2). Fisch wird gefangen, wenn er das Netz zu durchschwimmen versucht und dabei mit dem Kopf stecken bleibt. Ein Vorteil der Stellnetzfisherei besteht in der relativ einfachen Wartung des Gerätes und der Möglichkeit, durch Maschenweite und Platzierung des Netzes gezielt Fische einer bestimmten Größe oder Art zu fangen.

Die Maße der Treibnetze sind in der Regel unterschiedlich, sie reichen von 26 Metern Länge beim Heringsfang bis zu mehreren Kilometern Länge (z.B. beim Thunfischfang). Treibnetze werden in der Regel in einer aus 10 bis 20 Netzen bestehenden Fleet angewendet (Abb. 2.3). Hauptfangobjekte der Treibnetzfisherei sind Hering, Lachs und Thunfisch. Trifft eine Population auf ein im Wasser schwimmendes Treibnetz, so stoßen die Fische mit den Köpfen durch die Netzmaschen und können nicht weiter. Mit Treibnetzen lässt sich kein selektiver Fischfang betreiben und deswegen sind Treibnetze seit dem 1. Januar 2008 in allen EU-Gewässern ausnahmslos verboten ([9]).

Ein Schleppnetz ist ein nachgeschlepptes Netz, das zum Fang von Schwarmfischen oder Grundfischen genutzt wird. In der Ostsee werden zwei Typen von Schleppnetzen verwendet: das pelagische Schleppnetz oder Schwimmschleppnetz und das Grundschleppnetz oder Trawl.

Grundschleppnetze werden im Gefolge eines Schiffs über den Meeresboden gezogen. Das Gewicht eines schweren Eisengeschirrs drückt das Netz zu Boden mit dem Ziel, dass am Meeresboden lebende Fische aufgescheucht und in den Netzsack getrieben werden. Die Öffnung eines Grundschleppnetzes kann bis zu 100 Meter breit sein.⁵

Pelagische Schleppnetze sind für den Fang von Fischarten konstruiert, die im freien Wasser leben, beispielsweise sämtliche Rundfische wie Kabeljau, Heringe, Sprotten, auch Rotbarsch, Sardellen und zum geringen Teil auch Sardinen (Abb. 2.4).

⁵vgl. [68]

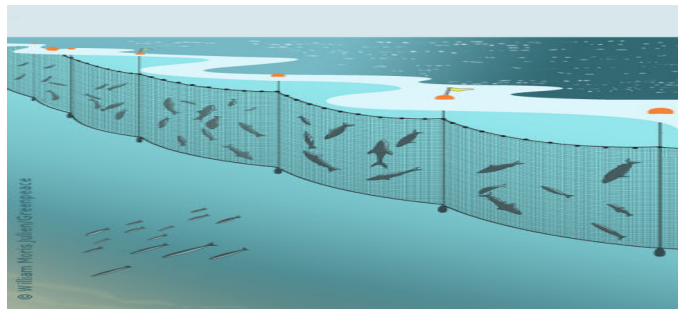


Abbildung 2.2.: Stellnetz. (Quelle: [52])

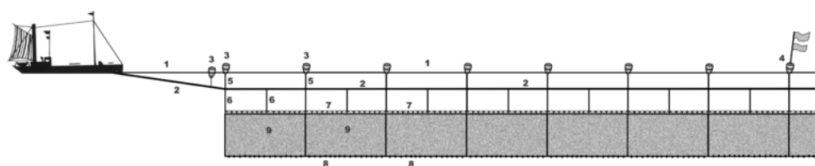


Abbildung 2.3.: Treibnetz (Heringsfleet). 1. Wasseroberfläche 2. Fleetreep 3. Brails 4. Jonas (entspr. ca. 15 Netzen) 5. Brailltau 6. Zeisinge 7. Korken 8. Unterwant 9. Netz. (Quelle: [68])

Problematisch ist bei dieser Fischereimethode, dass der Meeresboden schwer beschädigt werden kann. Dort lebende Tiere werden als Beifang tot oder verletzt zurück ins Meer geworfen. Jedoch ist die Rate des Beifangs bei einem Schleppnetz wesentlich niedriger im Vergleich zu den Treibnetz-Strategien.

Mehrere Umweltschutzorganisationen sprechen sich deutlich gegen die Grundsleppnetzfisherei aus, da bei dieser Fangmethode der Meeresgrund und die darauf lebenden Wesen zerstört werden. Das Verbot von Grundsleppnetzen ist ein wesentliches Ziel von Greenpeace ([67]).

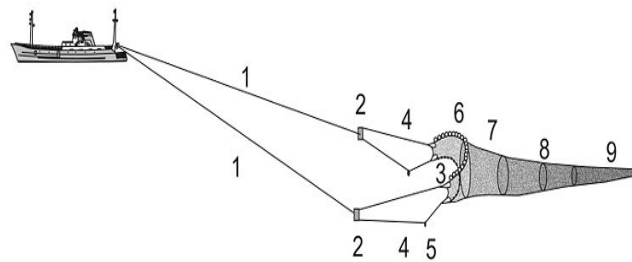


Abbildung 2.4.: Pelagisches Schleppnetz 1. Kurrleinen 2. Scherbretter 3. Grundleine (Ketten) 4. Jäger 5. Gewichte 6. Kopftau mit Auftriebskugeln 7. Vornetz 8. Tunnel 9. Steert Bei der Gespannfischerei mit zwei Schiffen entfallen die Scherbretter (Quelle: [68])

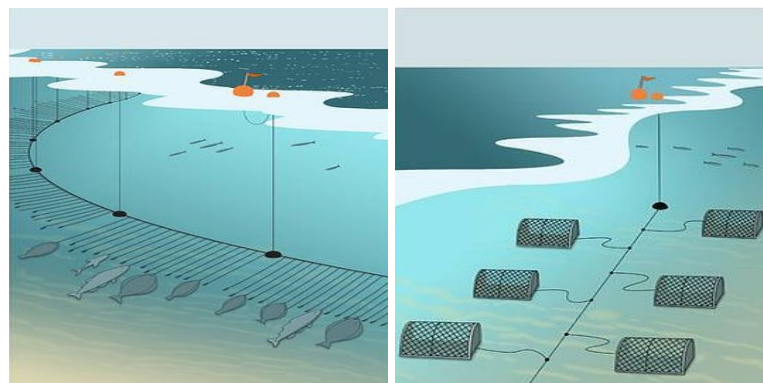


Abbildung 2.5.: Langleine (links), Reuse (rechts) (Quelle: [52])

In der Ostsee werden auch andere Fangtechniken verwendet.

Die Langleine (Abb. 2.5, links) wird waagrecht zwischen Meeresoberfläche und Grund ausgebracht. Sie wird mit Bojen und verschiedenen Gewichten im Wasser gehalten. Bei der pelagischen Langleinenfischerei halten Schwimmer die mit der Strömung treibende Hauptleine nah an der Oberfläche. Entsprechend wird bei der Grund-Langleinenfischerei die Leine in ihrer gesamten Länge am Meeresgrund verankert.⁶

Langleinenfischerei wird in der Ostsee zum Dorsch- und Aalfang ausgenutzt.

Der Fang mit Fischfallen, Korb- und anderen Reusen (Abb. 2.5, rechts) zählt, anders als z.B. die Schleppnetzfischerei, zu den passiveren und zugleich schonendsten Fangmethoden.

⁶vgl. [52]

2.4. **Ökonomische Probleme der Ostseefischerei**

Die Entwicklung der Fischerei im Ostseeraum im vergangenen Jahrhundert steht in einer Verbindung mit dem technischen Progress im Bereich der Fangmethoden im Allgemeinen und der Fangfahrzeuge im Speziellen. In den 20er Jahren wurden in der Ostsee erstmals Schleppnetze eingesetzt. Sie wurden von Kuttern gezogen, die schwach betrieben waren und konnten nur bestimmte Fischarten fangen. Später begann im südlichen Ostseeraum die Gespannfischerei. Hierbei setzte man stärker betriebene schnellere Kutter ein, von denen jeweils zwei gemeinsam ein großes Netz schleppten. Zu den Fängen zählten die heute zu den wichtigsten Fangarten gehörenden Fische Dorsch, Hering und Sprotte (vgl. [55]).

Der Dorschfang wurde in den späteren Jahren durch den Einsatz von den Fischdampfern in die Ostsee intensiver. Eine weitere Entwicklung im Ostseeraum sorgte dafür, dass die Anzahl der Kutter stark zugenommen hat. Die Fischerei-Industrie hatte über einen Zeitraum von 30 Jahren eine Fahrzeugzunahme von 60 auf ca. 700 Kutter. Gründe für diese Entwicklung waren der Einsatz moderner Techniken, welche den Dorschfang leichter machte (vgl. auch [23]).

In den 80er Jahren kam es in den meisten Ostseestaaten zu einem Rückgang der Kutterzahlen und zu einem im Vergleich dazu gemäßigeren Rückgang des allgemeinen Fischereiaufwandes. Dieses hatte zur Folge, dass es z. B. aufgrund verbesserter Technologien im Bereich stärkerer Motoren, besserer Ausrüstung und produktiver Schleppnetze zu einer Verlängerung der Fangdauer pro Tag kam.

In den 90ern folgte eine erneute Intensivierung aufgrund verbesserter Stellnetzfisherei, von der die Befischung von Hering und Sprotte im Bereich der Ostseefischerei jedoch nicht profitieren konnte.⁷

Ein ökonomisches Problem der Ostseefischerei stellt der Einbruch der Fangerträge seit den frühen 80er Jahre dar. An diesem Einbruch lassen sich neben den ökologischen zahlreiche strukturelle Veränderungen in der Fischereiwirtschaft verdeutlichen, die sich in den vergangenen 20 Jahren im Ostseeraum entwickelt haben (vgl. [55]).

Diese Entwicklung der Ostseefischerei ist deutlich an den Fangmengen von Dorsch, einer der wichtigsten und der am stärksten von Bestandsrückgängen betroffenen Fischpopulation, zu sehen. Der Dorsch ist von der günstigen Meerwasserqualität stark abhängig. Die Erträge zwischen 1970 und 1980 lagen jährlich zwischen 150.000 und 250.000 Tonnen, erreichten 1984 ihren Höchstwert mit ca. 390.000 Tonnen und fielen 1994 auf etwa 38.000 Tonnen (vgl. [23], [34]).

Zu weiteren wirtschaftlichen Aspekten, welche großen Einfluss auf die Fischereientwicklung gehabt haben und vermutlich auch zukünftig haben werden, können veränderte ökonomische Prozesse gezählt werden.

Der Einfluss der billigen Importe hatte zur die Folge, dass die Fischpreise im

⁷vgl. [55]

Allgemeinen sanken (vgl. [34]). Es kam auch in zahlreichen Ostseestaaten zur Verminderung der Fangkutter. Die Fangkapazitäten wurden auf leistungsniedrigere Schiffe verteilt. Politische Maßnahmen wurden angewendet, um ein Gleichgewicht zwischen den existierenden Ressourcen und der Fangstärke der einzelnen Fischereiflotte zu schaffen. Ebenso stark vollzog sich hier der Rückgang der Beschäftigten im Fischereisektor.

2.5. Ostseefischerei aus der Sicht einzelner Länder

Durch Bewirtschaftungspläne fördert die EU-Kommission eine nachhaltige Fischerei. Die neuen Konzepte sollen gleich für mehrere Populationen gemeinsam ausgearbeitet werden und nicht wie die Quoten bisher, nur einen Bestand betreffen. Dies ist ein sinnvoller Ansatz und für eine nachhaltige Fischerei notwendig.

Gleichzeitig soll ein einheitliches integriertes europäisches Fischereimanagement-System für alle EU-Gewässer eingesetzt werden. Bisher war es schwierig, Vorhersagen zum Bestandszustand und zur Bestandsentwicklung für viele Fischbestände zu machen, da häufig Daten kaum vorhanden, robust oder zwischen den einzelnen Ländern nicht kompatibel waren.⁸

In einer internationalen Ebene muss die Europäische Union dieselben Strategien wie auf der EU-Ebene erzielen. Die Fischereiflotten einzelner Ostsee-Staaten sollen sich an die geplanten Regelung der nachhaltigen Fischerei halten. Da die wirtschaftliche Lage dieser Länder unterschiedlich ist, wäre eine gemeinsame Regelung in dem Fischereisektor angebracht.

2.5.1. Deutschland

Die Fischerei in Deutschland ist ein traditioneller Bestandteil von Wirtschaft und Kultur, besonders an der Ostseeküste. Die mehr als 45.000 Menschen, die in diesem Sektor in Deutschland beschäftigt sind (Fischfang, Fischverarbeitung sowie Handel und Gastronomie), versorgen die Verbraucherinnen und Verbraucher jährlich mit über 1,1 Millionen Tonnen qualitativ hochwertigen Fischereierzeugnissen aus dem Meer.⁹

Die Kutter an der Ostseeküste fahren meistens ganzjährig und fangen überwiegend Dorsch und auch Wittling, Sprotte oder Hering.

Da die Maßnahmen der Gemeinsamen Fischereipolitik in der Ostsee zunehmend Wirkung zeigen, konnte die Dorschquote in Deutschland erneut um 15 Prozent (östliche Ostsee) bzw. 13 Prozent (westliche Ostsee) angehoben werden. Nach

⁸vgl. [45]

⁹vgl. [44], [62]

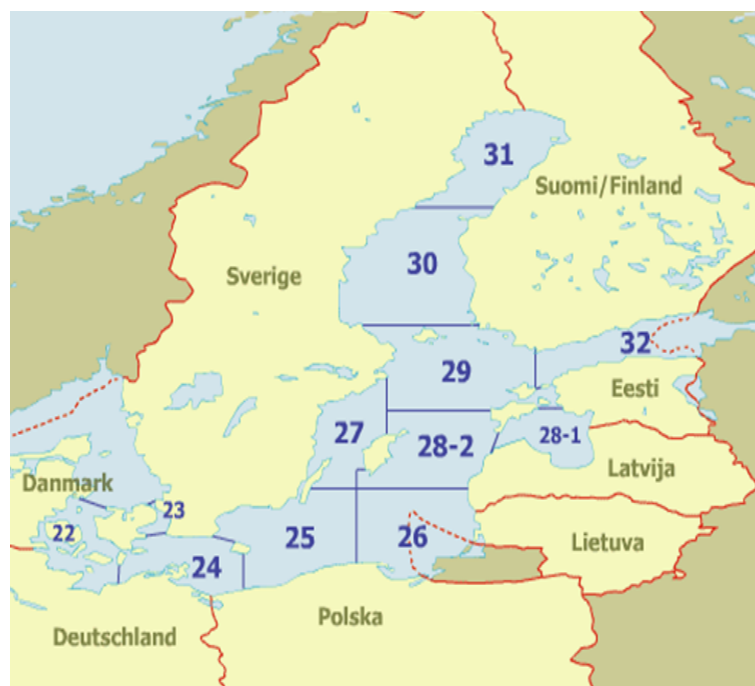


Abbildung 2.6.: Unterteilung des Ostseeraumes

deutlichen Einschnitten in den Vorjahren erhöhte sich wegen der Neuaufteilung des westlichen Heringsbestandes auch hier die Quote für die deutschen Ostseefischer deutlich, und zwar um 32 Prozent.

2.5.2. Dänemark

Die wichtigsten Gewässer der dänischen Fischerei sind Ostsee, Kattegat, Skagerrak und Nordsee. In diesen Gewässern wird von dänischen Fischern eine Vielzahl von Arten gefangen. Die dänischen Fischfänge können in zwei Gruppen unterteilt werden: Grundfischarten (Kabeljau, Scholle) und pelagische Arten. Dorsch ist eine der wichtigsten Industriearten. Er gilt hier als überfischt.

2.5.3. Schweden

Der Fischfang geht hauptsächlich auf Hering sowie Kabeljau, Flunder und Lachs. Der Fischereisektor wird durch eine öffentlich finanzierte Regelung unterstützt. Die Hauptaufgabe ist es, den modernen Tendenzen entsprechend, eine effektive Verwaltung und Kontrolle des Fanges zu gewährleisten und eine relevante und nützliche forschungsbasierte Beratung zu schaffen.

2.5.4. Finnland

In Finnland gibt es ca. 1 000 gewerbliche Fischer, etwa 2 000 Personen betreiben Fischen als Nebenbeschäftigung.

Das Fangaufkommen aus Meer und Seen beträgt jährlich etwa 100.000 Tonnen. Im Meer wird hauptsächlich Ostseehering gefischt, zu den sonstigen bedeutenden Fangfischarten gehören Sprotte, Dorsch, Barsch, Zander und Lachs. Die Binnenfischerei wird besonders in Nord- und Ostfinnland betrieben.

In der finnischen Industrie-Fischerei hält man sich an die Grundsätze der nachhaltigen Nutzung der Bestände. Das Fischen gilt hier nicht nur als Erwerbstätigkeit, sondern auch als Lebensart und wichtiger Bestandteil der Kultur der Küstenregionen.

2.5.5. Russland

Etwa 25% der russischen Fangmenge stammen aus dem Nordatlantik und dem Nordpolarmeer. Ein Großteil der atlantischen Fischfangflotte befindet sich in Häfen an der Ostsee. Der größte russische Fischereihafen an der Ostsee ist Kaliningrad. Ein anderer wichtiger Hafen ist Sankt-Petersburg. Am meisten werden in diesen Häfen Heringe und Sprotten gefangen.

Die Fischereikooperationen mit Russland wurden bislang im Rahmen der Internationalen Kommission für die Fischerei in der Ostsee, der für das Fischereimanagement in der Ostsee zuständigen regionalen Fischereiorganisation, geleistet. Diese Organisation, der die Europäische Gemeinschaft seit ca. 30 Jahren angehört, wurde durch die Konvention über die Fischerei und den Schutz der lebenden Ressourcen in der Ostsee (Danziger Konvention) eingerichtet.

Diese Organisation besorgt die Festsetzung und Zuweisung der jährlichen Fangmöglichkeiten für Dorsch, Hering und Sprotte und legt technische Erhaltungsmaßnahmen für diese Fischereien fest.

2.5.6. Estland

Die Ostsee ist die wichtigste Fangregion der estnischen Flotte. Hier werden ca. 70% ihrer Gesamtfänge, die sich jährlich auf ca. 100 000 t steigen. Die estnische Ostseeflotte, zu der etwa 150 Schiffe mit einer Länge von über 12 m und 500 kleine Küstenschiffe gehören, fängt hauptsächlich Hering und Sprotte (größere Schiffe), aber auch andere Arten wie Zander und Flunder (Küstenschiffe).

Wie andere Mitgliedstaaten hat auch in Estland die Fernfischereiflotte in den letzten Jahren an Bedeutung verloren, jedoch tragen ihre 15 Schiffe immer noch etwa 15 % zu den Gesamtfängen bei. Im Fangsektor sind rund 5 400 Fischer beschäftigt (vgl. auch [50]).

2.5.7. Lettland

Die Herings- und Sprottfischerei wird in der östlichen Gotlandsee/Golf von Riga (Untergebiet 28) durchgeführt und beinhaltet sowohl pelagische Schleppnetzfisherei auf Hering und Sprotte, mit einem Fangverbot vom 15. Mai bis 15. Juni, als auch Reusenfischerei auf Hering während der Laichperiode im April bis Juli.

Zur lettischen Ostseeflotte gehören ca. 60 Kutter zur Fischerei auf Hering und von diesen sind 47 an der Fischerei auf Sprotte beteiligt. Alle Fänge wurden grundsätzlich für Konsumzwecke verwendet.

2.5.8. Litauen

Die Fischereiindustrie in Litauen konzentriert sich im Hafen von Klaipeda (Untergebiet 26). Zur litauischen Ostseeflotte gehören ca. 70 Kutter mit einer Länge zwischen 18 und 30 Metern (2011). Rund 100 kleinere Schiffe sind in den Küstengewässern und im Kurischen Haff im Einsatz. In der Ostsee werden rund 10 000 Tonnen Dorsche, Heringe, Sprotten und Flundern gefangen. Eine aus 25 Schiffen bestehende Hochseeflotte operiert in den Regelungsbereichen von NAFO (Organisation für die Fischerei im Nordwestatlantik) und NEAFC (Übereinkommen über die Fischerei im Nordostatlantik) sowie im Südostatlantik. Diese Flotte fängt jährlich nahezu 140 000 t Fische und erbringt damit den Großteil der litauischen Produktion. 75 % der Schiffe Litauens sind älter als 26 Jahre und müssen inzwischen renoviert werden. Im Fangsektor sind rund 2 400 Fischer beschäftigt. Es gibt in Litauen 17 große Fischzuchtunternehmen.¹⁰

2.5.9. Polen

Traditionell wird in Polen meist Hering und Dorsch konsumiert. Als Folge gab es zwischen 2006 und 2011 eine starke Reduzierung der Dorschpopulation im polnischen Teil der Ostsee.

In der polnischen Fischereiflotte überwiegen Schiffe mit stationären Fanggeräten. Doch die mit Schleppfanggeräten ausgerüsteten Schiffe haben eine höhere Maschinenleistung und eine etwas höhere Tonnage. Das ist darauf zurückzuführen, dass stationäre Fanggeräte verstärkt von kleinen Schiffen verwendet werden. Ein anderes Problem ist eine illegale Fischerei, die in Polen stark betrieben wurde (vgl. auch [59]).

In dem aktuellen Programm „Nachhaltige Entwicklung des Fischereisektors und der Küstenfischereigebiete 2007-2013“ wurde festgelegt, wie die Strukturfonds in Polen einzusetzen sind.

¹⁰vgl. [48]

Wie in den meisten EU-Staaten hat der Fischereisektor in Polen zwar einen verhältnismäßig geringen Anteil an der gesamten Wirtschaft (ca. 0,03 % des BIP). Er spielt aber in wirtschaftlicher und sozialer Hinsicht in den Küstenregionen eine wichtige Rolle. In einigen Regionen (z.B. Pommern und Westpommern) stellt die Fischerei einen bedeutenden Wirtschaftsbereich dar. In diesen Regionen, die häufig unter struktureller Arbeitslosigkeit leiden, sind die Fischerei und die damit verbundenen Bereiche wie Fischverarbeitung, entsprechende Dienstleistungen oder Handel ein wichtiger Teil der lokalen Wirtschaft.

2.6. Theoretische Ansätze der Modellierung der Ostseefischerei

Die ökologischen Beeinträchtigungen der Ostseefischerei auf das gesamte Ökosystem sind von einer weitaus geringeren Wirkung auf den Bestand der Ostseefische als der direkte Einfluss des Menschen (z.B. durch die Schadstoffe).

Der Mensch verändert den Bestand und die Artenvielfalt, indem er die Bestände überfischt und einige Arten in ihrer zukünftigen Entwicklung stört. So wird es nachhaltig zu einer Veränderung der Fischgemeinschaftsstrukturen beigetragen.

Neue Grundlagen gegenwärtiger Analysen bilden dynamische Modelle, welche die zeitliche Wertänderung einer regenerativen Ressource berücksichtigen und Multi-Spezies-Modelle, bei denen die Wechselwirkung zwischen den Beständen mit einfließt.

Bei Bestimmung optimaler Fangraten verlangen wir, dass der Stand einer Population auf einem biologisch entsprechenden Niveau liegen soll. In der Populationsökologie bezeichnet man dieses Niveau als MSY (engl.: maximum sustainable yield), also die höchstmögliche Fangrate, die über einen längeren Zeitraum gehalten werden können. Das Konzept solcher MSY-Raten ist für eine sinnvolle Planung der Fischerei-Strategien wichtig.

In der Fischereipolitik gilt das Konzept des Maximum Sustainable Yield heute als allgemeine Strategie. Auf dem Weltgipfel für nachhaltige Entwicklung im Jahr 2002 in Johannesburg wurde die Wiederauffüllung der Bestände bis zum MSY bis 2015 als spezifisches Ziel allen Fischereimanagementbehörden auferlegt (vgl. [64]).

Die Hauptaufgabe der Ostsee-Fischerei ist, den Fischfang auf so einem Niveau zu halten, dass sowohl nachhaltige Entwicklung, als auch ökonomische Profite sicher gestellt werden.

Eine wichtige Erkenntnis besteht darin, dass bei jedem Einfluss auf eine Population auch Interaktionsgesetze (Lotka-Volterra-Regeln) auftreten, die beachtet werden müssen¹¹:

¹¹vgl. [2]

1. Die Dichten von Dorsch und Sprotte schwanken regelmäßig, zeitlich gegeneinander verschoben.
2. Trotz den Schwankungen bleibt die durchschnittliche Menge der Dorsch- und Sprottenpopulation über die Jahre hinweg etwa gleich (die Populationen schwanken um einen Mittelwert).
3. Werden Dorsch und Sprotte in einem Ökosystem stark dezimiert (z.B. durch Fischfang), so erholt sich die Sprottenpopulation schneller als die des Dorsches.

Alle Fischarten kommunizieren durch Nahrungsketten und Nahrungsnetze und wenn eine Population stark ausgebeutet wird, kommt es unvermeidlich dazu, dass andere Populationen innerhalb von den nächsten Jahren ebenso in Gefahr kommen. Die Anwendung von Lotka-Volterra-Modellen ermöglicht also eine vielseitige Betrachtung und bietet gute Perspektiven für weitere Forschungen an. Das Problem bei der Forschung besteht darin, dass es von vielen Ländern in der Ostsee gefischt wird.

Das stetige Schrumpfen der Fischbestände ist nicht allein Problem der Ostsee - im Gegenteil: in allen europäischen Meeren haben die Bestände mit großen, überwiegend von Menschen veranlassten Belastungen zu kämpfen ([9]). Nutzungsgrad einzelner Ostsee-Fischpopulationen kann man folgender Tabelle entnehmen:

Nutzungsgrad	Arten	
wenig ausgebeutet	25%	Fang kann noch ausgeweitet werden
maximal ausgebeutet	47%	maximale Fangmenge erreicht
übermäßig ausgebeutet	18 %	Fänge gehen stark zurück
fast ausgerottet	10 %	keine Fänge mehr möglich, Fangverbot

Tabelle 2.1.: Nutzungsgrad der Ostseefische (Quelle: FAO)

Es stellt sich also die Frage, ob sinnvolle Alternativen zu strengen Fangverboten bestehen - nicht nur für die Dorschpopulation. Dabei werden mehrere Vorschläge diskutiert (vgl. [34]): zunächst bieten sich hier abgeschwächte Verbote in Form von Schonfristen und Schutzzonen an. Da der Fischereibiologie in den häufigsten Fällen bekannt ist, wo sich die Laichgebiete der Fische konzentrieren, wäre es beispielsweise sinnvoll, speziell über diese zu den etwaigen Laichzeiten Fangverbote zu verhängen.

Ein weiteres Problem, das dringend nach neuen Regelungen verlangt, ist der Beifang. Viele gefangenen Fische, die aufgrund ihrer Art oder ihres Alters nicht als gewinnbringend betrachtet werden, kippen viele Fischer nach dem Fang wieder ins Meer zurück: besonders Jungtiere sind von dieser weit verbreiteten Methode betroffen. Die meisten der Tiere sind jedoch nach sehr kurzer Zeit außerhalb des Wassers nicht mehr überlebensfähig.

Um solch einer grenzenlosen Verlust zu vermeiden, sollten die Fischer verpflichtet werden, auch den Beifang anzulanden, damit die überflüssigen Tiere wenigstens in die

Berechnung der Fangquoten eingehen können, denn auch ein zurückgeworfenes Tier ist schließlich ein verlorenes für den Gesamtbestand. Am besten sollte natürlich auch ein vernünftiger Verwendungszweck gefunden werden.¹²

Häufig diskutiert und gegenwärtig auch noch in Weiterentwicklung ist die Idee der Selektion. Indem man die Maschengröße der Fangnetze variiert, könnte man das ungefähre Alter der gefangenen Fische definieren: Wo ausgewachsene Exemplare keine Chance zur Flucht mehr besitzen, können Jungtiere mit kürzeren und schmaleren Körpermaßen durch breitere Maschen noch entkommen. Zugrunde liegt hier das Prinzip, keine Jungtiere zu fischen, die nicht mindestens schon ein oder zwei Mal abgelaicht haben, damit überhaupt noch Nachwuchs entsteht (vgl. [17]).

Der Erfolg des Dorschmanagements wird im Wesentlichen auch davon abhängen, ob es gelingt, die illegale Fischerei wirksam einzuschränken. Nur wenn in allen Mitgliedstaaten die Regeln in gleicher Weise kontrolliert und eingehalten werden, sind hier Verbesserungen zu erwarten.

Die Modellierung erfolgte auf der Basis von heutigen Tendenzen der Fischereiforschung in der Ostsee, vorgeschlagen der Internationalen Kommission für Meeresforschung (ICES) und der Internationalen Kommission zum Schutz der Umwelt in der Ostsee (HELCOM). Bei der Bestimmung einer langfristigen Strategie für die wichtigsten Fischbestände wurden folgende Aspekte benutzt:

- Entwicklung des Fischereimanagements auf einem „Ökosystem-Ansatz“;
- Berücksichtigung der inneren Dynamik von den Spezies;
- Berücksichtigung von saisonabhängigen Einflüssen der Populationsdynamik.

Wichtig bei diesen Tendenzen ist auch ein Austausch von Informationen und die Einbeziehung von sozio-ökonomischen Daten im Fischereisektor. Auf Druck der Europäischen Union brachte die regionale Fischereiorganisation IBSFC eine Strategie für eine nachhaltige Dorschbewirtschaftung in der Ostsee auf den Weg um der Reduzierung der Population entgegenzutreten. Mehrere Maßnahmen wurden daraufhin getroffen: Verringerung der zulässigen Gesamtfangmengen (TAC), Erhöhung der Mindestanlandegrößen, Erhöhung der Maschenöffnung bestimmter Fanggeräte und Begrenzung der Beifänge von Dorsch für die pelagische Fischerei ([41]).

Seit 2006 sind alle technischen Maßnahmen bezüglich der Fanggeräte, der Beifänge, der Mindestanlandegrößen, der Schonzeiten und –gebiete in der Ostsee in einem einzigen Gesetz zusammengefasst ([41]).

Die Maßnahmen sind daher nicht nur leichter zugänglich, sondern auch präziser gekennzeichnet, um ihre Anwendung und Kontrolle zu erleichtern.

Die positive Entwicklung in der gesamten Fangmenge ist darauf zurückzuführen, dass sich in den letzten Jahren die Fänge zugunsten von Hering und Sprotte verschoben haben, für die niedrigere Durchschnittspreise gezahlt werden. Zudem

¹²vgl. [60]

werden bedeutende Mengen von Heringen und Sprotten von wenigen deutschen und dänischen Kuttern, hauptsächlich in Dänemark, zur industriellen Verwertung angelandet.¹³

2.7. Ausblick

Die Gemeinsame Fischereipolitik bildet in Gestalt der Verordnung (EG) Nr. 2371/2002 des Rates den Hauptrahmen, der die Fischereitätigkeit in der EU regelt. Ziel dieser Politik sollte es daher sein, im Rahmen einer nachhaltigen Entwicklung unter ausgewogener Berücksichtigung ökologischer, wirtschaftlicher und sozialer Aspekte für eine nachhaltige Nutzung der lebenden aquatischen Ressourcen und eine nachhaltige Aquakultur zu sorgen (vgl. [69]).

Das Entwicklungsprogramm ist also an folgenden Zielen ausgerichtet:

- Beitrag zu einem nachhaltigen Gleichgewicht zwischen den Fischereiressourcen und den Fangkapazitäten der gemeinschaftlichen Fischereiflotte;
- Sicherstellung der Nutzung der lebenden aquatischen Ressourcen und Förderung der Aquakultur, um für wirtschaftliche, ökologische und soziale Nachhaltigkeit zu sorgen;
- Förderung der nachhaltigen Entwicklung der Binnenfischerei;
- Schutz und Verbesserung der Umwelt und der natürlichen Ressourcen, wo ein Zusammenhang mit dem Fischereisektor besteht;
- Nachhaltige Entwicklung und Verbesserung der Lebensqualität in Gebieten mit fischwirtschaftlicher Tätigkeit.¹⁴

Ein vernünftiges Fischereimanagement muss die Artenvielfalt aufrechterhalten. Und es muss die Fischpopulationen für heutige und spätere Generationen sichern. Es sollte nicht nur den Schutz einer Art gewährleisten, sondern auch aller Arten.

Ein Ökosystemansatz und das Prinzip der nachhaltigen Fischerei sollten die Grundlage jeder Fischerei-Industrie sein.

¹³vgl. [42]

¹⁴vgl. [44]

2. Biologische, ökologische und wirtschaftliche Aspekte der Ostseefischerei

Mathematische Modelle in der Biologie

3.1. Modellierung von Wachstumsprozessen

Als Population wird eine räumlich und zeitlich abgrenzbare Einheit gleichartiger Organismen (Mikroorganismen, Tiere, Pflanzen, Menschen) bezeichnet, die miteinander in einem regelmäßigen biologischen Austausch stehen. Jede Art versucht durch Fortpflanzung und Ernährung die Anzahl der Individuen zu vermehren.

Da dies jede Art versucht, kommt es zu einer Konkurrenz, die das Wachstum einer Population beschränkt. Begrenzende Faktoren des Populationswachstums sind unter anderen auch Nahrungsangebot, klimatische Umweltbedingungen oder das Auftreten von Fressfeinden. Ein vierter Faktor ist die innerartige Konkurrenz um Nahrung und Geschlechtspartner. Dies begrenzt das Populationswachstum ebenfalls nach oben.

Die Umfang einer Population x wird näherungsweise an der Anzahl ihrer Individuen gemessen, also diese Größe ist eine natürliche Zahl $x \in \mathbb{N}$. Ein anderer Ansatz besteht in der Angabe der Biomasse der Individuen $x \in \mathbb{R}^+$, also als positive reelle Zahl. Man betrachtet hierbei Änderungen in diskreten Zeitschritten, beispielsweise Generationenfolgen oder geht zu kontinuierlicher Zeit über. Dies kann für große Populationen gerechtfertigt werden. Der Ansatz der kontinuierlichen Zeit kann damit als gemittelter Prozess aufgefasst werden. Mathematisch führen diese Modelle auf Systeme gewöhnlicher Differential- oder Differenzgleichungen, die man oft als dynamische Systeme bezeichnet. Diese Bezeichnung wird auch für die realen Systeme verwendet, die auf solche mathematischen Modelle führen.

Eine der wichtigsten Eigenschaften einer Population ist die Wachstumsrate. Sie ergibt sich aus der Differenz von Geburtenrate pro Zeitraum (Natalität) und Sterberate pro Zeitraum (Mortalität). Bei ausreichenden Ressourcen und fehlender Einwirkung durch natürliche Feinde oder sonstiger Einflussgrößen, die das Wachstum

3. Mathematische Modelle in der Biologie

beschränken, kommt es in Populationen zu fortgesetztem Anstieg der Zahl der Individuen. Verschiedene Modelle versuchen die zeitliche Entwicklung quantitativ zu erfassen. Für die Frage, welches Populationsmodell am besten geeignet ist, hat Lotka 1925 verschiedene Ansätze gemacht.

Das einfachste Modell bei unbegrenzten Ressourcen ist das exponentielle Wachstum. Der Begriff „exponentielles Wachstum“ besagt, dass die Größe der Population mit der Zeit exponentiell wächst.

Diese Annahme wurde 1798 durch Malthus formuliert. Eine Population, die von äußeren Einflüssen ungestört ist, hat eine konstante Wachstumsrate ε , also je mehr Individuen bereits vorhanden sind, desto schneller nimmt auch die Gesamtpopulation zu. Die Entwicklung der Population wird durch die Differentialgleichungen

$$\dot{x}(t) = \varepsilon x(t), \quad t \geq 0$$

beschrieben. Sie wird auch als Differentialgleichung des unbegrenzten Wachstums bezeichnet.

Die explizite Lösung ist bekannt und leicht zu finden: $x(t) = c \cdot e^{\varepsilon t}$ mit dem Anfangswert $c = x(0) \geq 0$. Dieses Modell des exponentiellen Wachstums beschreibt leider die Natur nicht wirklich. Realitätsnähere Modelle müssen daher zusätzliche Parameter, sowie die Kapazitäten der Umgebung, berücksichtigen.

Für das Beispiel des Populationswachstums gehen wir nun von der natürlichen Begrenzung des Lebensraumes für die Population aus. Diese ergibt sich aus der Beschränkung der zur Verfügung stehenden Ressourcen wie Nahrung und Raum, aber auch durch innerartliche Konkurrenz. Das Modell zur Beschreibung der Populationsgröße ändert sich also durch die Annahme, dass das Ausmass der Population nicht nur das Wachstum fördert, sondern auch beschränkt, da jedes Individuum in Konkurrenz um den begrenzten Lebensraum mit den anderen Populationsmitgliedern steht. 1838 formulierte Pierre François Verhulst diese Idee und schlug das logistische Entwicklungsgesetz vor:

$$\dot{x}(t) = \varepsilon x(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right),$$

dabei ist ε die Wachstumsrate (wie oben) und $K \neq 0$ ist eine logistische Beschränkung. Auch diese Differentialgleichung lässt sich explizit lösen:

$$x(t) = K \frac{c \cdot e^{\varepsilon t}}{K - c + c \cdot e^{\varepsilon t}}, \quad t \geq 0,$$

mit dem Anfangswert $c = x(0)$.

Auf dieser Basis entstehen weitere Modelle, die auf mehrere Spezies anzuwenden sind und die von Interesse sein können.

3.2. Erweiterte Modelle

3.2.1. Lotka-Volterra-Modelle

In diesem Teil sollen jeweils zwei Arten mit unterschiedlichen Beziehungen berücksichtigt werden. Die verschiedenen Modelltypen werden je nach der Art der zwischenartlichen Beziehung klassifiziert.

Mehrere Populationen können sich gegenseitig beeinflussen. Wir betrachten zuerst zwei Populationen, deren Größen durch x_1 und x_2 beschrieben werden. Eine biologische Klassifikation ergibt folgende Muster:

Symbiose: Die Existenz jeder der Populationen stimuliert das Wachstum der anderen.

Konkurrenz: Die Anwesenheit jeder der Populationen behindert das Wachstum der anderen.

Ausbeutung: Die Koexistenz behindert eine Population und fördert die andere, z. B. indem die eine der anderen als Nahrung dient. Die Arten sind also in einem Räuber-Beute-Verhältnis.

Ein bekanntes Entwicklungsmodell dazu ist das klassische Lotka-Volterra-Modell von 1925 für ein Zwei-Populationen-System. Wir bezeichnen mit x_1 die Beutepopulation und mit x_2 die Räuberpopulation. Es seien $\varepsilon_1 > 0$ die Reproduktionsrate der Beute ohne Störung und bei entsprechend großem Nahrungsangebot, $\varepsilon_2 > 0$ die Sterberate der Räuber, wenn keine Beute vorhanden ist, $\gamma_1 > 0$ die Fressrate der Räuber pro Beutelebewesen und $\gamma_2 > 0$ die Reproduktionsrate der Räuber pro Beutelebewesen. Wenn keine Beute vorhanden ist, müssen die Räuber alle bald sterben, da sie keine Nahrungsaufnahme erhalten.

Die Wechselwirkung dieser beiden Populationen lässt sich durch folgende Differentialgleichungen beschreiben:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) (\varepsilon_1 - \gamma_1 x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) (\varepsilon_2 - \gamma_2 x_1(t)).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Gegenseitige zeitliche Entwicklung solcher Spezies kann man der Abb. 3.1 entnehmen. Die graphische Darstellung der Lösungsfunktionen erhält eine Periodizität in der Wechselbeziehung der beiden Populationen. Man kann auch beweisen, dass die Periodizität für alle Lösungen des Differentialgleichungssystems (3.1) gilt und auch bei unterschiedlichen Anfangswerten erhalten bleibt.

Ein logistisches Entwicklungsmodell für ein Zwei-Populationen-System beschreibt man wie folgt: Es seien K_1, K_2 Kapazitäten oder logistische Terme. Die anderen Parameter sind wie bei dem klassischen Modell. Das Räuber-Beute-Modell, welches in beiden Populationen von begrenztem Lebensraum und damit Konkurrenz zwischen

den Individuen einer Art ausgeht, wird durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) \left(\varepsilon_1 \left(1 - \frac{x_1(t)}{K_1} \right) - \gamma_1 x_2(t) \right), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) \left(\varepsilon_2 \left(1 - \frac{x_2(t)}{K_2} \right) - \gamma_2 x_1(t) \right)\end{aligned}$$

beschrieben. Die Abb. 3.2 zeigt eine derartige Entwicklung.

Bekannt sind auch weitere Varianten des Modells:

1. Zeitabhängige Wachstumsrate der Populationen. Die Wachstumsraten, die wir zuerst konstant angenommen haben, können sich auch verändern. Wir erhalten folgendes Modell: (siehe [32])

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) \left(\varepsilon_1(t) \left(1 - \frac{x_1(t)}{K_1} \right) - \gamma_1 x_2(t) \right) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) \left(\varepsilon_2(t) \left(1 - \frac{x_2(t)}{K_2} \right) - \gamma_2 x_1(t) \right).\end{aligned}$$

2. Zeitabhängige Kapazitäten der Populationen.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) \left(\varepsilon_1 \left(1 - \frac{x_1(t)}{K_1(t)} \right) - \gamma_1 x_2(t) \right) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) \left(\varepsilon_2 \left(1 - \frac{x_2(t)}{K_2(t)} \right) - \gamma_2 x_1(t) \right).\end{aligned}$$

3. Leslie-Modell.

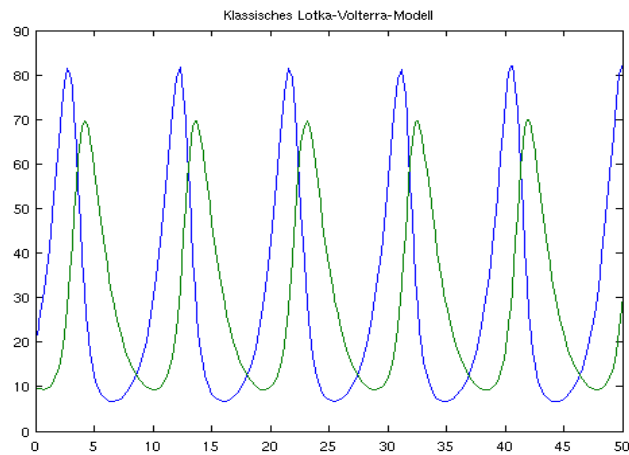
In diesem Modell ist die Geburtsrate der Räuber konstant und ihre Sterberate proportional zum Verhältnis Räuber pro Beute.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) \left(\varepsilon_1 \left(1 - \frac{x_1(t)}{K_1} \right) - \gamma_1 x_2(t) \right) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) \left(\varepsilon_2 - \gamma_2 \frac{x_2(t)}{x_1(t)} \right).\end{aligned}$$

4. Pavlidis-Modell (siehe [31]):

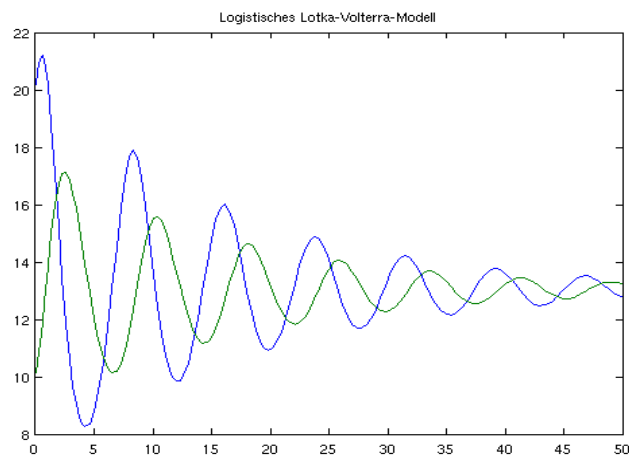
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) \left(\varepsilon_1 \left[1 - c \cdot (x_1(t) - p)^2 \right] - \gamma_1 x_2(t) \right) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) \left(\varepsilon_2 \left[1 - \frac{x_2(t)}{K_2} \right] - \gamma_2 x_1(t) \right).\end{aligned}$$

Hierbei gibt der Ausdruck $c \cdot (x_1(t) - p)^2$ die Übervölkerungseffekte an.



$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 0.9x_1(t) - 0.03 \cdot x_1(t)x_2(t), & x_1(0) &= 20; \\ \dot{x}_2(t) &= -0.6x_2(t) + 0.02 \cdot x_1(t)x_2(t), & x_2(0) &= 10.\end{aligned}$$

Abbildung 3.1.: Klassisches Lotka-Volterra-Modell



$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 1.5x_1(t) \left(1 - \frac{x_1(t)}{100}\right) - 0.1 \cdot x_1(t)x_2(t), & x_1(0) &= 20; \\ \dot{x}_2(t) &= -0.6x_2(t) \left(1 - \frac{x_1(t)}{100}\right) + 0.04 \cdot x_1(t)x_2(t), & x_2(0) &= 10.\end{aligned}$$

Abbildung 3.2.: Logistisches Lotka-Volterra-Modell

Im Weiteren werden wir Modelle mit mehr als zwei Populationen betrachten. Die Dynamik wird in diesem Falle auch durch Differentialgleichungen beschrieben. Einfachheitshalber nennen wir dabei $\varepsilon_i, i = 1, \dots, m$ Wachstumsraten und $\gamma_{ij}, i, j = 1, \dots, m; i \neq j$ Wechselwirkungskoeffizienten (oder Phagoskoeffizienten), wobei m die Anzahl von agierenden Populationen ist.

Die Räuber-Beute Beziehungen kann man auch in der Ostseefischerei-Modellierung anwenden. In dieser Arbeit werden die Populationen nicht nur im Bezug auf Lotka-Volterra-Verhältnisse simuliert, es werden auch menschlichen Aktivitäten (Fischfang) berücksichtigt. Das heißt, wir führen Steuerungsfunktionen $u_i(t), i = 1, \dots, m$ ein, die die Dezimierung der i -ter Fischpopulation beschreiben. Sie kann die durch den Fang wozunehmende Biomasse sein oder die Anzahl der Fischkutter pro Fangperiode.

Eine andere Vorgehensweise wäre ein diskretes Modell. Die Entwicklungsgleichungen werden wie folgt aussehen:

$$\dot{x}_i(t) = \varepsilon_i x_i(t) \cdot \left(1 - \frac{x_i(t)}{K_i}\right) - \sum_{j=1, i \neq j}^m \gamma_{ij} \frac{x_i(t)}{K_i} \frac{x_j(t)}{K_j} - u_i(t) r_i d \cdot \frac{x_i(t)}{K_i},$$

$$i = 1, \dots, m. \quad (3.2)$$

Döring studiert in [6] Beispiele kontinuierliche Modelle mit zwei Populationen. In unserem Artikel [39] wird ein Verfahren betrachtet, das die optimale Anzahl der Kutter für den Dorsch (als x_1 bezeichnet), den Hering (x_2) und die Sprotte (x_3) festlegt. Es handelt sich um folgendes (Drei-Spezies) Modell mit entsprechenden Steuerungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 0.4x_1(t) \cdot (1 - x_1(t)) - 1.5 \cdot 250 \cdot u_1(t) \cdot \frac{x_1(t)}{10^6} \\ &\quad - 0.02 \cdot \frac{x_1(t)x_2(t)}{1.2} - 0.02 \cdot \frac{x_1(t)x_3(t)}{1.3} \\ \dot{x}_2(t) &= 0.6x_2(t) \cdot \left(1 - \frac{x_2(t)}{1.2}\right) - 6.4 \cdot 250 \cdot u_2(t) \cdot \frac{x_2(t)}{1.2 \cdot 10^6} \\ &\quad - 0.0125 \cdot \frac{x_1(t)x_2(t)}{1.2} - 0.01 \cdot \frac{x_2(t)x_3(t)}{1.56} \\ \dot{x}_3(t) &= 0.6x_3(t) \cdot \left(1 - \frac{x_3(t)}{1.3}\right) - 6.4 \cdot 250 \cdot u_3(t) \cdot \frac{x_3(t)}{1.3 \cdot 10^6} \\ &\quad - 0.0125 \cdot \frac{x_1(t)x_3(t)}{1.3} - 0.01 \cdot \frac{x_2(t)x_3(t)}{1.56}, \end{aligned}$$

und Anfangswerte $x_1(0) = 0.25, x_2(0) = 0.8, x_3(0) = 1.0$. In dem Modell (und auch in weiteren Modellen in dieser Dissertation) übergehen wir von einem Lotka-Volterra-Modell zu einem Konkurrenz-Modell, da die Hering- bzw. die Sprottenpopulation ebenfalls einen negativen Einfluss auf den Dorsch haben, in dem sie die Eier des Dorsch fressen.

3.2.2. Altersgruppen

In den meisten Beispielen haben wir angenommen, dass die Wachstumsraten homogen über die Population verteilt sind. Das kann oft zulässig sein, oft aber ist es doch eine starke Vereinfachung.

Ökologisch gesehen, wären die Fischfangaktivitäten in Betracht unterschiedlicher Altersgruppen zu studieren. Dafür entwickelten wir ein etwas komplizierteres Modell, das drei Altersgruppen umfasst:

- junge Spezies, die noch nicht vermehrungsfähig sind (mit Größe s_1),
- erwachsene Spezies im vermehrungsfähigen Alter (mit Größe s_2),
- ältere Spezies, die sich nicht mehr vermehren (mit Größe s_3).

Das Wachstum für eine Fischart wird dann durch ein Differentialgleichungssystem beschrieben (siehe [2]):

$$\begin{aligned}\dot{s}_1(t) &= -(a_0 + a_1) \cdot s_1(t) + r \cdot s_2(t) - z_1 \cdot s_1(t), \\ \dot{s}_2(t) &= a_1 \cdot s_1(t) - (b_0 + b_1) \cdot s_2(t) - z_2 \cdot s_2(t), \\ \dot{s}_3(t) &= b_1 \cdot s_2(t) - c_0 \cdot s_3(t) - z_3 \cdot s_3(t),\end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten Folgendes bedeuten:

a_0, b_0, c_0 : Sterberate der Kinder, Erwachsenen, Alten,

a_1, b_1 : Übergangsrate Kinder zu Erwachsenen bzw. Erwachsene zu Alten,

r : Geburtenrate,

z_1, z_2, z_3 : Ausbeutungsraten durch Lotka-Volterra-Verhältnisse.

Die meisten in der Literatur behandelten Modelle der Altersstruktur bieten jedoch Ansätze mit partiellen Differentialgleichung. Eins solches Modell ist die bekannte von-Foerster-Gleichung. Die partiellen Differentialgleichungen 1.Ordnung, die in dem Modell entstehen, lassen sich in der Regel analytisch lösen.

Wir nehmen das Alter als stetig. Sei

$$n : [0; \infty) \times [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$$

die Populationsdichte im Alter x zur Zeit t . Die Anzahl der Spezies zur Zeit t im Altersbereich $[x; x + \Delta x]$ berechnen wir als $\int_x^{x+\Delta x} n(\bar{x}, t) d\bar{x}$.

Nun können wir die von-Foerster-Gleichung (1959) herleiten. Ein Alterungsprozess ohne Sterben ist durch die Gleichung $n(x, t + \Delta t) = n(x - \Delta t, t)$ darstellbar.

Sollten die natürlichen Einflüsse (Sterben) mitwirken, lässt sich diese Gleichung zu $n(x, t + \Delta t) = n(x - \Delta t, t) \cdot p(x, \Delta t)$ umschreiben, wobei $0 < p(x, \Delta t) < 1$ eine Überlebensrate ist.

Die letzte Gleichung schreiben wir um:

$$n(x, t + \Delta t) - n(x, t) = -n(x, t) + n(x - \Delta t, t) \cdot p(x, \Delta t),$$

$$n(x, t + \Delta t) - n(x, t) = -n(x, t) + n(x - \Delta t, t) + n(x - \Delta t, t) \cdot (p(x, \Delta t) - 1),$$

$$n(x, t + \Delta t) - n(x, t) = -n(x, t) + n(x - \Delta t, t) + n(x - \Delta t, t) \cdot (p(x, \Delta t) - p(x, 0)),$$

$$\frac{n(x, t + \Delta t) - n(x, t)}{\Delta t} = -\frac{n(x, t) - n(x - \Delta t, t)}{\Delta t} + n(x - \Delta t, t) \cdot \frac{p(x, \Delta t) - p(x, 0)}{\Delta t}.$$

3. Mathematische Modelle in der Biologie

Mit $\Delta t \rightarrow 0$ und $\frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = -q(x)$ erhalten wir daraus die partielle Differentialgleichung:

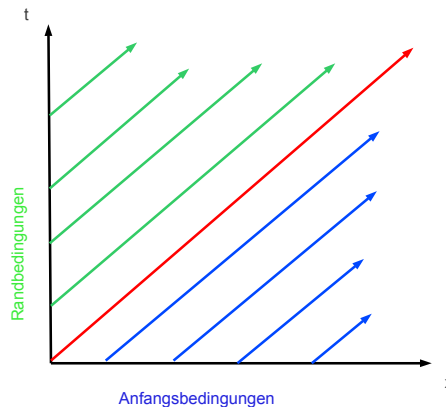
$$\frac{\partial}{\partial t}n(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}n(x, t) + q(x)n(x, t) = 0.$$

Als Randbedingungen nehmen wir

$$n(x = 0, t) = \int_0^\infty n(x, t)b(x)dx,$$

$$\text{bzw. } n(x, t = 0) = n_0(x).$$

Hier ist $n_0(x)$ eine gegebene Startverteilung und $b(x)$ die Geburtdichte. Eine Auswertung der Randbedingungen in diesem Altersklassen-Modell ist in der Regel nicht einfach. An dieser Stelle müssen wir zwei Fälle unterscheiden: $x \geq t$ (blauer Bereich) und $x < t$ (grüner Bereich).



Nun wollen wir die von-Foerster-Gleichung im blauen Bereich $x \geq t$ lösen. Zur Lösung verwenden wir die Charakteristiken-Methode. Dafür bezeichnen wir $v := x - t$ und betrachten $n(x, t) = n(s + v, s)$ für ein beliebiges (aber festes v , $v \in \mathbb{R}$) und erhalten als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$n(s + v, s) = n(s_0 + v, s_0) \cdot e^{-\int_{s_0+v}^{s+v} q(s')ds'}.$$

Im blauen Bereich gilt $x \geq t$ und $s + v = x$; $s = t$; $s_0 + v = x - t$; $s_0 = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} n(x, t) &= n(x - t, 0)e^{-\int_{x-t}^x q(s')ds'} = n_0(x - t)e^{-\int_{x-t}^x q(s')ds'} \\ &= n_0(x - t) \frac{e^{-\int_0^x q(s')ds'}}{e^{-\int_0^{x-t} q(s')ds'}} = n_0(x - t) \frac{p(x)}{p(x - t)}. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Bezeichnung $p(x) = e^{-\int_0^x q(s')ds'}$ verwendet. Startverteilung $n(x, 0) = n_0(x)$ (d.h. Anzahl der Spezies im Alter x zum Zeitpunkt $t = 0$) entnehmen wir folgender Graphik:

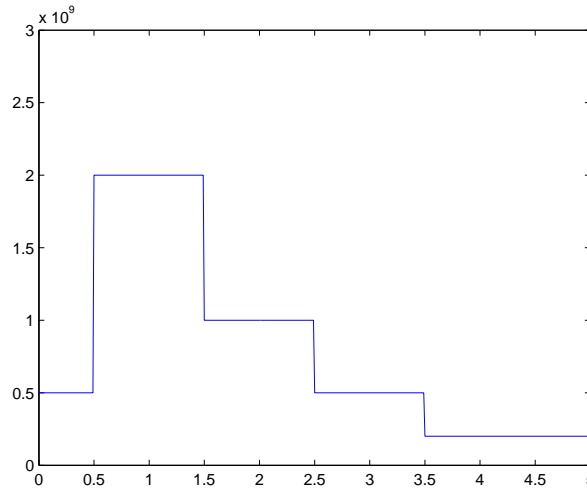


Abbildung 3.3.: Startverteilung $n(x, 0) = n_0(x)$.

Im grünen Bereich $x < t$ erhalten wir nun

$$n(s + v, s) = n(s_0 + v, s_0) \cdot e^{-\int_{s_0+v}^{s+v} q(s')ds'},$$

wobei $s + v = x$; $s = t$; $s_0 + v = 0$ und $s_0 = t - x$ gilt. Es folgt

$$n(x, t) = n(0, t - x) \cdot p(x).$$

An dieser Stelle setzen wir diesen Ausdruck in die Randbedingungen

$$n(x = 0, t) = \int_0^\infty n(x, t)b(x)dx := \tilde{n}(t), \tag{3.3}$$

ein.

Nun wählen wir eine konstante Sterberate $q(x) = r_d$ (d.h. $p(x) = e^{-r_d x}$) und eine konstante Geburtenrate im Intervall $[x_1, x_2]$:

$$b(x) = \begin{cases} r_b, & x \in [x_1; x_2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit lässt sich die Gleichung (3.3) zu

$$\begin{aligned} \tilde{n}(t) &= n(0, t) = \int_0^\infty n(x, t)b(x)dx = \int_0^\infty n(0, t - x)p(x)b(x)dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \tilde{n}(t - x)p(x)b(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \tilde{n}(t - x)r_b e^{-r_d x} dx. \end{aligned}$$

3. Mathematische Modelle in der Biologie

umschreiben. Zu lösen ist also die verzögerte Integralgleichung

$$\tilde{n}(t) = \int_{x_1}^{x_2} \tilde{n}(t-x)r_b e^{-r_d x} dx.$$

Mit dem Ansatz $\tilde{n}(t) = Ce^{\lambda t}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} Ce^{\lambda t} &= \int_{x_1}^{x_2} Ce^{\lambda(t-x)} r_b e^{-r_d x} dx, \\ Ce^{\lambda t} &= \int_{x_1}^{x_2} Ce^{\lambda t+x(-\lambda-r_d)} r_b dx, \\ Ce^{\lambda t} &= r_b \frac{-1}{\lambda+r_d} C \left(e^{\lambda t+x_2(-\lambda-r_d)} - e^{\lambda t+x_1(-\lambda-r_d)} \right), \end{aligned}$$

gdw.

$$\mu = r_b(e^{-\mu x_1} - e^{-\mu x_2}), \quad \text{wobei } \mu = \lambda + r_d \text{ ist.}$$

So berechnen wir die Lösungsfunktion, die zeit- und altersabhängig ist, und können die Populationsentwicklung einzelner Spezies darstellen.

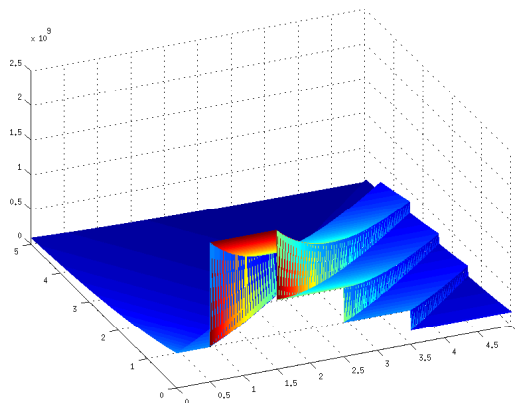


Abbildung 3.4.: Altersklassen-Modell mit $r_d = 0.5$, $r_b = 0.8$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

In einem erweiterten Modellen (Fall mit Ausbeutung, vgl. [Reznichenko, Murray]) werden häufig äußere Kräfte (z.B. Ausbeutung) mitmodelliert. In unserem Beispiel bedeutet dies, dass die Fische im Alter $x \geq c$ gefangen werden dürfen. Die Fangrate ist dabei $\delta \in (0; 1)$. Wir erhalten folgende Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} n(x, t) = -q(x)n(x, t) - \delta \cdot H(x - c) \cdot n(x, t)$$

mit

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \geq 0 : \text{ Population darf gefangen werden,} \\ 0, & \text{für } x < 0 : \text{ Population darf nicht gefangen werden.} \end{cases}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist:

$$n(x, t) = \begin{cases} n(0, t-x) \cdot p(x), & \text{für } x \leq c, x \leq t \\ n(0, t-x) \cdot p(x)e^{-\delta(x-c)}, & \text{für } c < x < t \\ n(x-t, 0) \cdot \frac{p(x)}{p(x-t)}, & \text{für } t \leq x < c \\ n(x-t, 0) \cdot \frac{p(x)}{p(x-t)}e^{-\delta(x-c)}, & \text{für } x \geq t, x \geq c, x \leq t+c \\ n(x-t, 0) \cdot \frac{p(x)}{p(x-t)}e^{-\delta t}, & \text{für } x > t+c. \end{cases}$$

Das bedeutet eine Unterscheidung einer gesamten Population in 5 Gruppen, je nach Alter:

- 1: geborene Spezies seit $t = 0$, die zu jung sind, um gefischt zu werden,
- 2: geborene Spezies seit $t = 0$, die alt genug sind, um $x - c$ Jahre gefischt zu werden,
- 3: Spezies, die zu $t = 0$ schon vorhanden waren; zu jung, um gefischt zu werden,
- 4: Spezies, die zu $t = 0$ schon vorhanden waren; alt genug, um $x - c$ Jahre gefischt zu werden,
- 5: Spezies, die zu $t = 0$ schon vorhanden waren; werden die ganze Zeit gefischt.

Es gibt viele weitere Transformationen des Modells. Von Interesse sind auch diskrete Altersklassenmodelle (vgl. Leslie), sowie stochastische Modelle, die wir in dieser Arbeit nicht betrachten.

Es gibt auch andere Modelle, die im Bereich der partiellen Differentialgleichungen erforscht werden. Einige davon beschreiben die Bewegung der Spezies in ihrem Areal. Diese Bewegung von Organismen im Raum kann mit Hilfe der Diffusion beschrieben werden. Die Diffusion wird dabei als Zufallsbewegung (engl. random walk) von Organismen interpretiert. Solche ökologische Modelle mit partiellen Differentialgleichungen sind z.B. die

- Kirstead, Slobodkin, Skellam-Modell $\frac{\partial n}{\partial t} = \varepsilon n + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$
- Fischer-Modell $\frac{\partial n}{\partial t} = \varepsilon n \left(1 - \frac{n}{K}\right) + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$
- Nagumo-Modell $\frac{\partial n}{\partial t} = n(n-L)(1-n) + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$.

Hierbei beschreiben die Ausdrücke $\frac{\partial n}{\partial t}$ und $\frac{\partial n}{\partial x}$ eine zeitliche bzw. räumliche Änderungen der Populationsgröße, D eine Diffusionskonstante, ε und K jeweils Wachstumsrate bzw. Kapazität und L eine weitere populationsspezifische Konstante.

3.2.3. Saisonabhängige Fischfang-Modelle

Um die Gesamtfangmenge auf das biologisch und wirtschaftlich sinnvolle Niveau zu beschränken, legen die Behörden Gesamtfangquoten (TAC) fest. Gesamtfangmengen genügen in der Regel jedoch nicht, um wirtschaftlichen Profit sicherzustellen. Denn wenn eine neue Fangsaison mit begrenzter Gesamtquote beginnt, wird jeder Fischer versuchen, sich einen möglichst großen Anteil der Quote zu sichern, indem er kurzfristig einen sehr hohen Fangaufwand betreibt. Ist die Quote dann nach relativ kurzer Zeit erschöpft, bleibt die Fangkapazität bis zur nächsten Fangsaison ungenutzt.

Wir haben unser ursprüngliches Modell zu modifizieren, also die Fang- und die Ruhephasen zu unterscheiden. Dabei führen wir eine Schaltfunktion $s(t)$ ein, also

$$s(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls zum Zeitpunkt } t \text{ gefangen wird,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann erhalten wir:

$$\dot{x}_i(t) = \varepsilon_i x_i(t) \cdot \left(1 - \frac{x_i(t)}{K_i}\right) - \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \frac{x_i(t)}{K_i} \frac{x_j(t)}{K_j} - u_i(t) \cdot s(t) \cdot r_i d \frac{x_i(t)}{K_i},$$

für Fang- bzw. Ruhephase.

Grundlagen der Optimalsteuerung

Historisch entstehen die Optimalsteuerungsprobleme aus den Variationsproblemen.¹ Die Optimalsteuerung hat sich vor allem im Zusammenhang mit der Entwicklung der Raumfahrt ab 1950 entwickelt. Häufig sollen Vorgänge, die sich mit Differentialgleichungen formulieren lassen, kontrolliert werden. Dies bedeutet, dass der Prozess durch eine geeignete Wahl von Kontrollgrößen so gesteuert wird, dass eine gewisse Größe, etwa die Kosten, der Ertrag oder die Zeit, die der Vorgang benötigt, optimiert wird. Anwendungen finden sich in der Steuerung von Luft- und Raumfahrzeugen, in den Wirtschaftsprozessen oder auch in der Populationsdynamik. Die allgemeine Aufgabe der Optimalsteuerung wird auf folgende Weise definiert: Gegeben sei ein nichtleerer (häufig konvexer und abgeschlossener) Steuerbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Zu vorgegeben (hinreichend glatten) Funktionen g, q, f :

$$\begin{aligned}q &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\f &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\g &: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}\end{aligned}$$

ist eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $x(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (Zustandsfunktion) sowie eine stückweise stetige (oder stückweise konstante) Funktion $u(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^m$ (Steuerfunktion) so zu bestimmen, dass das Zielfunktional (Bolza-Funktional) maximiert wird:

$$J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^T g(t, x(t), u(t)) dt + q(x(T)) \rightarrow \max_{u(\cdot)}$$

¹weitere Quellen sind Optimierung, automatische Regelung; siehe [11], [33]

unter der Nebenbedingung:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.1)$$

Eine Steuerung $u(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \Omega$ heißt zulässig, wenn die Lösung der entsprechenden Anfangswertaufgabe mit $x(t_0) = x_0$ (und unter Umständen weiteren Nebenbedingungen), auf dem gesamten Zeitintervall $[t_0, T]$ existiert.

Die Aufgabe der optimalen Steuerung besteht also darin, unter allen zulässigen Paaren $x = x(\cdot)$ und $u = u(\cdot)$ ein solches mit maximalem Zielfunktionalwert zu bestimmen.

Die optimale Steuerung kann manchmal mittels des Pontrjaginschen Maximumprinzips (notwendige Bedingungen) oder durch das Lösen der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung ausgerechnet werden.

4.1. Das Maximumprinzip von Pontrjagin

4.1.1. Stückweise stetige Steuerungen

Das klassische Maximumprinzip von Pontrjagin für die Aufgabe (4.1) ist eine notwendige Optimalitätsbedingung. Eine der ersten Formulierungen des Maximumprinzips mit dem Beweis gelang dem russischen Mathematiker V. G. Boltyanskii aus der Arbeitsgruppe von L. Pontryagin und dessen Mitarbeitern R. V. Gamkrelidze und E. F. Mishchenko.²

Ungefähr zeitgleich gelang auch Magnus R. Hestenes ein Beweis der Bedingung (vgl. [11]).

Wir definieren die Hamilton-Funktion $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ als:

$$H(x, u, \lambda, t) = g(t, x, u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot f_i(t, x, u),$$
$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

wobei die Variablen λ_i , $i = 1, \dots, n$ als adjungierte (oder Kozustände) bezeichnet werden.

²**Lew Semjonowitsch Pontrjagin** (1908-1988), russischer Mathematiker. Er beschäftigte sich mit zahlreichen mathematischen Gebieten, wie Topologie, Graphentheorie, Differentialgleichungen etc. Seit den 50er arbeitete er in der Optimierungstheorie. Das Pontrjaginsche Maximumprinzip wurde als These von Pontrjagin (und seiner Arbeitsgruppe) formuliert, für viele Aufgaben bewiesen und ist grundlegend für die moderne Theorie der Optimalsteuerungen. **Wladimir Grigorjewitsch Boltjanski** (geb. 1925) ist für seine Arbeiten über dynamische Optimierung und Steuerungstheorie (stetiger und diskreter Prozesse) bekannt. Er bewies darin u.a. das Pontrjaginsche Maximumprinzip für nichtlineare Prozesse.

Satz 4.1 Seien f, g stetig und stetig partiell nach x differenzierbar. Seien $x^*(\cdot), u^*(\cdot)$ optimal, dann gibt es eine nichttriviale Lösung der adjungierten Gleichung

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial}{\partial x} H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t), \quad t_0 \leq t \leq T, \text{ so dass}$$

➤ die Maximumbedingung

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) = \max_{u \in \Omega} H(x^*(t), u, \lambda(t), t), \quad \text{für fast alle } t \in [t_0, T]$$

➤ und die Transversalitätsbedingung

$$\lambda(T) = -\frac{\partial q}{\partial x}(x^*(T))$$

erfüllt sind.

Es gibt eine Reihe von Methoden das Maximumprinzip zu beweisen. Ein klassischer Weg ist die Verwendung von sogenannten Nadelvariationen. Das bedeutet, es werden zulässige Steuerungen betrachtet, die von der optimalen Steuerung in einer beliebiger Weise abweichen, aber nur auf einer endlichen Anzahl von kleinen Zeitintervallen. Da die Steuerungen stückweise stetig sind, lässt sich diese Transformation ausführen. Dann wird eine Linearisierung des Problems in einer Umgebung der optimalen Lösung durchgeführt und es werden konvexe Variationskegel der optimalen und der gestörten Trajektorien konstruiert. Anschließend wird ein Trennungssatz von konvexen Kegel angewendet. Die entsprechende Bedingung kann analytisch geschrieben werden, dieses führt zu dem Ergebnis, dass die optimale Steuerung $u^*(t)$ mit der entsprechenden Trajektorie das Maximum der Hamiltonfunktion $H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t)$ für fast alle t liefert. Ein genauerer Beweis für das Pontrjaginsche Maximumprinzip ist in [33] zu finden.³

4.1.2. Stückweise konstante Steuerungen

Jetzt betrachten wir Aufgabe (4.1) mit **stückweise konstanten Steuerungen**. Wir betrachten eine Folge $t_0, t_1, \dots, t_N = T$ und gehen davon aus, dass $u(t) = u(t_k)$ für alle $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, \dots, N - 1$ ist. In dem Fall, wenn die Konstantheitsintervalle vorgegeben sind oder die Länge dieser Intervalle nach unten beschränkt, gilt das Pontrjaginsche Maximum-Prinzip in der klassischen Form nicht. Es gibt eine Reihe von Publikationen, die sich mit dieser Aufgabe beschäftigen und versuchen, notwendige (und manchmal auch hinreichende) Bedingungen zu formulieren. [35] gibt z.B. einen alternativen Pontrjaginschen Weg, bei dem sich die Optimalität einer Lösung durch ein Integralkriterium prüfen lässt.

Wir gehen von einer Standard-Formulierung der Hamilton-Funktion aus und setzen die Existenz der partiellen Ableitungen f_u und g_u voraus. Bei dieser Aufgabe dürfen wir keine Nadelvariationen im Sinne von Pontrjagin benutzen. Wir stören die optimale Steuerung $u^*(t_k)$ auf dem ganzen Intervall $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0, \dots, N - 1$. Dabei

³für alle Stetigkeitspunkte von $u^*(\cdot)$

entstehen die Steuerungen $u^*(t_k) + \varepsilon v$ mit $u^*(t_k) + \varepsilon v \in \Omega$ für $v \in \mathbb{R}^m$ und für ein genügend kleines $\varepsilon : 0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$. Nur solche Vektoren v kann man verwenden.

Eine notwendige Bedingung für diese Aufgabe lautet in diesem Falle:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} H_u(x^*(t), u^*(t_k), \lambda(t), t) v dt \leq 0,$$

für alle $v \in \mathbb{R}^m$, für welche $u^*(t_k) + \varepsilon v \in \Omega$ und für alle $k = 0, \dots, N - 1$. Ist Ω offen oder $u^*(t_k) \in \text{int } \Omega$, so gilt

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} H_u(x^*(t), u^*(t_k), \lambda(t), t) dt = 0.$$

Auch dieser Satz ist im Allgemeinen nur eine notwendige Bedingung. Sie kann benutzt werden, um die berechnete Lösung einer Aufgabe auf die Optimalität zu prüfen.

4.2. Existenz der Lösungen

Eine der wichtigsten Fragen der Optimalsteuerungstheorie ist die Existenz der Lösungen.

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $S(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ für alle t auch abgeschlossen.

Wir betrachten das Steuerproblem 4.1 mit den zusätzlichen Bedingungen:

$$\begin{aligned} x(T) &\in M \\ x(t) &\in S(t), \quad \text{für alle } t \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Für die Aufgaben mit messbaren Steuerfunktionen gilt der folgende Satz von Roxin und Filippov.

Satz 4.2 *Gegeben sei das Problem 4.1, 4.2. Es seien folgende Bedingungen erfüllt:*

- Die Menge $\{g(t, x, u), f(t, x, u) \mid u \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sei konvex.
- Der Steuerbereich Ω sei kompakt.
- Es existiere ein $K \in \mathbb{R}$, so dass für alle $t \in [t_0, T], x \in S(t), u \in \Omega$ die Ungleichung $|(x, f(t, x, u))| \leq K \cdot (|x|^2 + 1)$ gilt (dabei bedeutet (\cdot, \cdot) das Skalarprodukt).
- Es existiere mindestens ein zulässiger Prozess.

Dann gibt es auch eine globale (messbare) optimale Lösung.

Wir beachten, dass die Voraussetzungen des Satzes 4.2 in den Modellen mit messbaren Funktionen, die in der Arbeit betrachtet werden, erfüllt sind. Damit wäre die Existenz einer optimalen Lösung gesichert.

4.3. Hinreichende Optimalitätsbedingungen

Wir betrachten unsere ursprüngliche Aufgabe (4.1) zu vorgegeben (hinreichend glatten) Funktionen g, q, f .

4.3.1. Hinreichende Bedingungen nach Mangasarian

Die hinreichenden Bedingungen nach Mangasarian basieren auf der Konkavität der Funktionen g, f und die etwas allgemeineren nach Arrow auf der Konkavität der bezüglich u maximierten Hamiltonfunktion H .

Satz 4.3 *Die im Maximumsprinzip (Satz 4.1) genannten Eigenschaften sind auch hinreichend für das globale Maximum von J , falls*

- 1) *die Funktionen $g(t, x, u)$ und $f(t, x, u)$ in (x, u) konkav für alle $t \in [t_0, T]$ sind,*
- 2) *die adjungierten Variablen $\lambda(t)$ für alle $t \in [t_0, T]$ in allen Komponenten nichtnegativ sind, im Fall, dass f in x oder u nichtlinear ist.*

Ist f in x und u linear, dann entfällt die Vorzeichenbeschränkung für die Adjungierten.

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [26].

4.3.2. Hinreichende Bedingungen nach Krotov

In der Literatur findet man auch andere Formulierungen von hinreichenden Bedingungen für die Aufgaben mit stückweise stetigen Steuerungen. Von Interesse ist z.B. der Satz von Krotov, der uns ermöglicht, die Hinlänglichkeit etwas allgemeiner zu betrachten und einige Aussagen für die stückweise konstante Steuerfunktionen zu gewinnen.

Wir betrachten unsere ursprüngliche Aufgabe (4.1) der optimalen Steuerung und es seien $(x(t), u(t)) \in L(t) \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $\forall t \in [t_0, T]$.

Weiterhin sei $C(t) := \{x(t) : \forall u(t), (x(t), u(t)) \in L(t)\}$ für alle $t \in [t_0, T]$ eine Projektion der Menge $L(t)$ auf \mathbb{R}^n .

Sei $K(t, x)$ eine (hinreichend glatte) Funktion von $(n+1)$ Variablen und sei $R(t, x, u)$ wie folgt definiert:

$$R(t, x, u) = \left(\frac{\partial K(t, x)}{\partial x}, f(t, x, u) \right) + \frac{\partial K(t, x)}{\partial t} + g(t, x, u),$$

$$\frac{\partial K(t, x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial K(t, x)}{\partial x_1}, \frac{\partial K(t, x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial K(t, x)}{\partial x_n} \right)^T,$$

und sei

$$r(T, x(T)) = K(T, x(T)) + q(T, x(T)).$$

Dann gilt:

Satz 4.4 *Es existiere eine stetig, in t und in x differenzierbare Funktion $K(t, x)$ und es existiere ein Paar (x^*, u^*) mit $x^* = x^*(\cdot)$, $u^* = u^*(\cdot)$, so dass*

- 1) $\max_{(x(t), u(t)) \in L(t)} R(t, x(t), u(t)) = R(t, x^*(t), u^*(t)), \forall t \in [t_0, T];$
- 2) $\max_{x(T) \in C(T)} r(T, x(T)) = r(T, x^*(T)).$

Dann ist das Paar (x^, u^*) optimal für die Aufgabe (4.1).*

Ein Beweis ist in [22] gegeben.

4.3.3. Hinreichende Bedingungen nach K.Arrow

Nun formulieren und beweisen wir das Maximumprinzip als eine hinreichende Bedingung in folgender Form.⁴

Wir definieren die maximierende Hamilton-Funktion $H^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ als:

$$H^0(x, \lambda, t) = \max_{u \in \Omega} H(x, u, \lambda, t), \quad \text{für fast alle } t \in [t_0, T] \text{ und für alle } x, \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 4.5 *Sei $x^*(\cdot), u^*(\cdot)$ ein zulässiges Paar für das Problem (4.1) und es existiere eine Funktion $\lambda : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass die notwendigen Optimalitätsbedingungen vom Satz (4.1) erfüllt sind. Ferner seien:*

1. $q(x)$ konkav,
2. $H^0(x, \lambda, t)$ sei konkav in x für alle (λ, t) , $t \in [0, T]$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Dann ist $x^(\cdot), u^*(\cdot)$ eine optimale Lösung.*

Hinweis: Die Bedingung 2 ist selten erfüllt. Daher kann auch nur selten die Hinlänglichkeit mit diesem Satz gezeigt werden.

Beweis:

Es seien $u(\cdot)$ eine beliebige zulässige Steuerfunktion und $x(\cdot)$ die entsprechende Lösung der Prozessgleichung. Um die Optimalität von $x^*(\cdot), u^*(\cdot)$ zu beweisen, müssen wir zeigen, dass die Differenz

$$\delta J := J(u^*(\cdot)) - J(u(\cdot)) \tag{4.3}$$

⁴Kenneth Joseph Arrow (geb. 1921), US-amerikanischer Ökonom.

nicht negativ ist.

Mittels der Hamiltonfunktion lässt sich die Funktion $g(t, x, u)$ als

$$g(t, x, u) = H(x, u, \lambda, t) - \lambda f(t, x, u)$$

schreiben. Damit kann man die Differenz (4.3) folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} \delta J &= q(x^*(T)) + \int_{t_0}^T g(t, x^*(t), u^*(t)) dt - \left[q(x(T)) + \int_{t_0}^T g(t, x(t), u(t)) dt \right] \\ &= q(x^*(T)) + \int_{t_0}^T (H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) - \lambda(t) \cdot f(t, x^*(t), u^*(t))) dt \\ &\quad - \left[q(x(T)) + \int_{t_0}^T (H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda(t) \cdot f(t, x(t), u(t))) dt \right] \\ &= q(x^*(T)) + \int_{t_0}^T (H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) - \lambda(t) \dot{x}^*(t)) dt \\ &\quad - \left[q(x(T)) + \int_{t_0}^T (H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda(t) \dot{x}(t)) dt \right] \\ &= q(x^*(T)) - q(x(T)) \\ &\quad + \int_{t_0}^T \left(H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) - H(x(t), u(t), \lambda(t), t) - \lambda(t)(\dot{x}^*(t) - \dot{x}(t)) \right) dt. \end{aligned}$$

Aus dem Maximumprinzip und der Konkavitätsannahme von $H^0(x, \lambda, t)$ bezüglich x folgt nun für fast alle t :

$$\begin{aligned} H(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t) - H(x(t), u(t), \lambda(t), t) \\ &\geq H^0(x^*(t), \lambda(t), t) - H^0(x(t), \lambda(t), t) \\ &\geq H_x(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t)(x^*(t) - x(t)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aus der Konkavität von $q(x)$ erhält man die Ungleichung:

$$q(x^*(T)) - q(x(T)) \geq q_x(x^*(T))(x^*(T) - x(T)).$$

Zusammen mit der adjungierten Gleichungen $\dot{\lambda} = -H_x$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \delta J &\geq q_x(x^*(T))(x^*(T) - x(T)) \\
 &+ \int_{t_0}^T (H_x(x^*(t), u^*(t), \lambda(t), t)(x^*(t) - x(t)) - \lambda(t)(\dot{x}^*(t) - \dot{x}(t))) dt \\
 &= q_x(x^*(T))(x^*(T) - x(T)) - \int_{t_0}^T (\dot{\lambda}(t)(x^*(t) - x(t)) + \lambda(t)(\dot{x}^*(t) - \dot{x}(t))) dt \\
 &= q_x(x^*(T))(x^*(T) - x(T)) - \int_{t_0}^T \left(\frac{d}{dt} [\lambda(t)(x^*(t) - x(t))] \right) dt \\
 &= q_x(x^*(T))(x^*(T) - x(T)) - [\lambda(t)(x^*(t) - x(t))]_{t_0}^T \\
 &= q_x(x^*(T))(x^*(T) - x(T)) - \lambda(t_0)[x^*(T) - x(T)] + \lambda(T)[x^*(T) - x(T)].
 \end{aligned}$$

Beachtet man die Transversalitätsbedingung sowie $x(t_0) = x^*(t_0)$ gilt, folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned}
 \delta J &\geq q_x(x^*(T))(x^*(T) - x(T)) - \lambda(t_0)[x^*(t_0) - x(t_0)] + \lambda(T)[x^*(T) - x(T)] \\
 &= q_x(x^*(T))(x^*(T) - x(T)) - q_x(x^*(T))(x^*(T) - x(T)) = 0.
 \end{aligned}$$

4.4. Untersuchung eines konkreten Modells

Im Artikel [39] suchten wir nach optimalen Steuerungen für das konkrete Lotka-Volterra-Modell, bestehend aus Dorsch(x_1), Hering(x_2) und Sprotte(x_3) für ein Zeitintervall von 20 Jahren. u_1 ist die Anzahl der Dorschkutter im entsprechenden Jahr. u_2 und u_3 sind die Anzahl der Kutter, die den Heringsfang bzw. den Sprottenfang leisten. Dies kann z.B. durch Verwenden unterschiedlicher Fangmethoden erfolgen (z.B. gleiche Kutter, aber andere Fangmethoden bzw. Netze). Die Daten für das gegenwärtige 0.Jahr basieren auf dem Stand dieser Fischbestände in der Ostsee (vgl. Döring, 2000).

Das Modell (mit stückweise stetigen oder stückweise konstanten Steuerungen) ist:

$$J(u) = \int_0^T \left\{ 1130 \cdot u_1(t) \cdot 1.5 \cdot 250 \cdot \frac{x_1(t)}{1} + 270 \cdot u_2(t) \cdot 6.4 \cdot 250 \cdot \frac{x_2(t)}{1.2} + 460 u_3(t) \cdot 6.4 \cdot 250 \cdot \frac{x_3(t)}{1.3} - 500 \cdot 250 \cdot \sum_{i=1}^3 u_i(t) \right\} e^{-0.06t} dt$$

$$J(u) \rightarrow \max_u \tag{4.5}$$

$$0 \leq u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \leq 1900, \quad 0 \leq t \leq 20,$$

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

mit Nebenbedingungen (ODE):

$$\dot{x}_1(t) = 0.4x_1(t) \cdot \left(1 - \frac{x_1(t)}{1}\right) - 1.5 \cdot 250 \cdot u_1(t) \cdot \frac{x_1(t)}{10^6} - 0.02 \cdot \frac{x_1(t)x_2(t)}{1.2} - 0.02 \cdot \frac{x_1(t)x_3(t)}{1.3}$$

$$\dot{x}_2(t) = 0.6x_2(t) \cdot \left(1 - \frac{x_2(t)}{1.2}\right) - 6.4 \cdot 250 \cdot u_2(t) \cdot \frac{x_2(t)}{1.2 \cdot 10^6} - 0.0125 \cdot \frac{x_1(t)x_2(t)}{1.2} - 0.01 \cdot \frac{x_2(t)x_3(t)}{1.56}$$

$$\dot{x}_3(t) = 0.6x_3(t) \cdot \left(1 - \frac{x_3(t)}{1.3}\right) - 6.4 \cdot 250 \cdot u_3(t) \cdot \frac{x_3(t)}{1.3 \cdot 10^6} - 0.0125 \cdot \frac{x_1(t)x_3(t)}{1.3} - 0.01 \cdot \frac{x_2(t)x_3(t)}{1.56},$$

und Anfangswerten $x_1(0) = 0.25, x_2(0) = 0.8, x_3(0) = 1.0$ und Endbedingungen $x_1(20) = 0.5792, x_2(20) = 0.7076, x_3(20) = 0.692$.

Dazu haben wir mittels direkter Verfahren (sie werden im nächsten Kapitel besprochen) eine optimale Lösung berechnet. Optimale Fangstrategien haben folgende Gestalt (s. Abbildungen 4.1, 4.2, 4.3).

4. Grundlagen der Optimalsteuerung

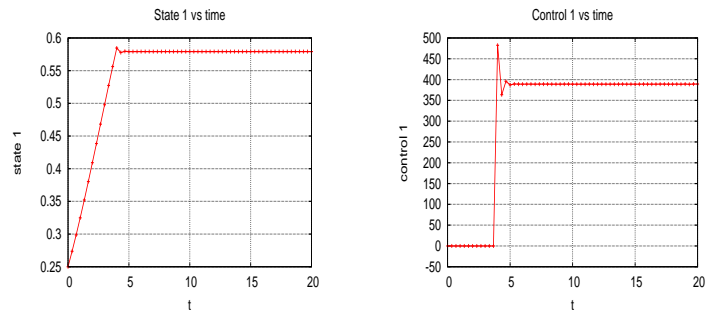


Abbildung 4.1.: 3-Populationen-System: Dorsch. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (rechts)

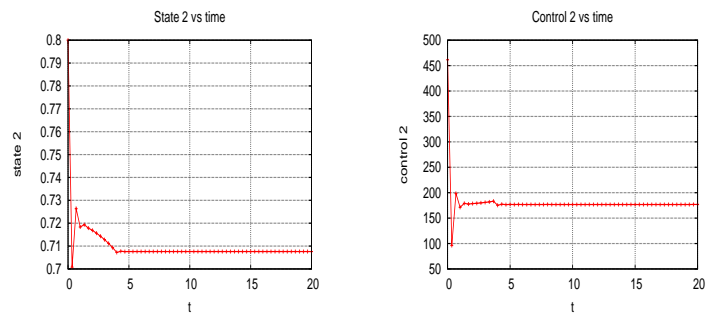


Abbildung 4.2.: 3-Populationen-System: Hering. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (rechts)

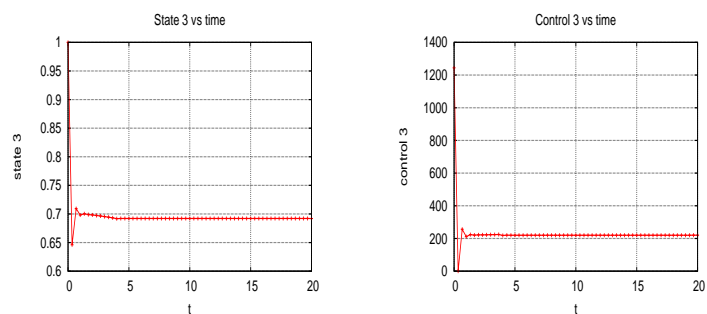


Abbildung 4.3.: 3-Populationen-System: Sprotte. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (rechts)

Jahr	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3
0	0.2500000	0.8000000	1.0000000	0.000000	263.6494	531.3586
1	0.3244954	0.7006421	0.6495999	0.000000	154.1460	150.5292
2	0.4088918	0.7221604	0.7120884	0.000000	185.2492	240.4183
3	0.4974498	0.7117310	0.6920001	0.000000	180.4876	218.8285
4	0.5843451	0.7077763	0.6928961	417.7087	176.9903	220.8658
5	0.5778183	0.7075602	0.6918569	381.3450	176.7343	219.4632
10	0.5792128	0.7076102	0.6920774	389.0092	176.7938	219.7610
15	0.5792109	0.7076101	0.6920771	388.9998	176.7938	219.7610
20	0.5791999	0.7076000	0.6919999	389.0686	176.8090	219.8855

Wenn diese Strategie angewendet wird, wird ein Gewinn von ca. 1449.2 Mio. Euro nach 20 Jahren erreicht. Dieses Modell und deren Modifikationen werden im Unterkapitel 5.4.1 ausführlicher diskutiert.

Bei den Modellen, die in der Steuerung linear sind, kommt häufig eine singuläre optimale Steuerung oder eine Bang-bang-Steuerung in Frage. In diesem Unterkapitel beschäftigen wir uns nur mit solchen Modellen.

Definition 4.1 Sei $H(x, u, \lambda, t)$ die Hamilton-Funktion des Optimalsteuerungsproblems (4.1). Der Gradient

$$\sigma(x, \lambda, t) = \nabla_u H(x, u, \lambda, t)$$

bzw. abgekürzt

$$\sigma(t) := \sigma(x(t), \lambda(t), t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_m(t))^T$$

wird als Schaltfunktion bezeichnet.

Für die Prozesse, die in $u = (u_1, \dots, u_m)$ linear sind, hängt $\sigma_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ nicht von u_i ab.

Definition 4.2 Es sei $[t_1, t_2] \subseteq [0, T]$, $u_i \in [u_i^{\min}, u_i^{\max}]$, $i = 1, \dots, m$, $t_1 < t_2$.

- $u_i(\cdot)$ heißt bang-bang in $[t_1, t_2]$, wenn die i -te Komponente der Schaltfunktion $\sigma_i(\cdot)$ in $[t_1, t_2]$ nur isolierte Nullstellen besitzt. Das bedeutet, es gilt $u_i^*(t) \in \{u_i^{\min}, u_i^{\max}\}$ für fast alle $t \in [t_1, t_2]$. Die Nullstellen von $\sigma_i(\cdot)$ heißen Schaltpunkte.
- $u_i(\cdot)$ heißt singulär in $[t_1, t_2]$, wenn $\sigma_i(t) \equiv 0$ in $[t_1, t_2]$ gilt. Die Zeitpunkte t_1 und t_2 heißen Verbindungspunkte, falls $u(\cdot)$ bang-bang ist in $[t_1 - \varepsilon, t_1]$ und in $[t_2, t_2 + \varepsilon]$ für ein $\varepsilon > 0$.

Es gibt kein generelles Kriterium dafür, ob singuläre Steuerungen auftreten oder nicht. Dies müsste für jede konkrete Aufgabe untersucht werden.

4. Grundlagen der Optimalsteuerung

Nun wollen wir das gegebene mathematische Modell analysieren. Wir bilden die Hamilton-Funktion für diese Aufgabe:

$$\begin{aligned}
 H(x, u, \lambda, t) = & \left\{ 1130 \cdot u_1 \cdot 1.5 \cdot 250 \cdot \frac{x_1}{1} + 270 \cdot u_2 \cdot 6.4 \cdot 250 \cdot \frac{x_2}{1.2} \right. \\
 & \left. + 460u_3 \cdot 6.4 \cdot 250 \cdot \frac{x_3}{1.3} - 500 \cdot 250 \cdot \sum_{i=1}^3 u_i \right\} e^{-0.06t} \\
 & + \lambda_1 \left(0.4x_1 \cdot (1 - x_1) - 1.5 \cdot 250 \cdot u_1 \cdot \frac{x_1}{10^6} \right. \\
 & \left. - 0.02 \cdot \frac{x_1x_2}{1.2} - 0.02 \cdot \frac{x_1x_3}{1.3} \right) \\
 & + \lambda_2 \left(0.6x_2 \cdot \left(1 - \frac{x_2}{1.2} \right) - 6.4 \cdot 250 \cdot u_2 \cdot \frac{x_2}{1.2 \cdot 10^6} \right. \\
 & \left. - 0.0125 \cdot \frac{x_1x_2}{1.2} - 0.01 \cdot \frac{x_2x_3}{1.56} \right) \\
 & + \lambda_3 \left(0.6x_3 \cdot \left(1 - \frac{x_3}{1.3} \right) - 6.4 \cdot 250 \cdot u_3 \cdot \frac{x_3}{1.3 \cdot 10^6} \right. \\
 & \left. - 0.0125 \cdot \frac{x_1x_3}{1.3} - 0.01 \cdot \frac{x_2x_3}{1.56} \right)
 \end{aligned}$$

oder allgemeiner (mit Konstanten $c, \varepsilon_i, p_i, K_i, s_i, i = 1, 2, 3$ und $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{21}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{32}$):

$$\begin{aligned}
 H(x, u, \lambda, t) = & \left\{ p_1u_1x_1 + p_2u_2x_2 + p_3u_3x_3 - c \cdot \sum_{i=1}^3 u_i \right\} e^{-\delta t} \\
 & + \lambda_1 \left(\varepsilon_1x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1} \right) - s_1u_1x_1 - \gamma_{12}x_1x_2 - \gamma_{13}x_1x_3 \right) \\
 & + \lambda_2 \left(\varepsilon_2x_2 \cdot \left(1 - \frac{x_2}{K_2} \right) - s_2u_2x_2 - \gamma_{21}x_1x_2 - \gamma_{23}x_2x_3 \right) \\
 & + \lambda_3 \left(\varepsilon_3x_3 \cdot \left(1 - \frac{x_3}{K_3} \right) - s_3u_3x_3 - \gamma_{31}x_1x_3 - \gamma_{32}x_2x_3 \right).
 \end{aligned}$$

Die adjungierten Differentialgleichungen lauten hier:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= -H_{x_1} = -p_1 u_1 e^{-\delta t} - \lambda_1 \left(\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_1 x_1}{K_1} - s_1 u_1 - \gamma_{12} x_2 - \gamma_{13} x_3 \right) \\ &\quad + \lambda_2 \cdot \gamma_{21} x_2 + \lambda_3 \cdot \gamma_{31} x_3; \\ \dot{\lambda}_2 &= -H_{x_2} = -p_2 u_2 e^{-\delta t} - \lambda_2 \left(\varepsilon_2 - \frac{2\varepsilon_2 x_2}{K_2} - s_2 u_2 - \gamma_{21} x_1 - \gamma_{23} x_3 \right) \\ &\quad + \lambda_1 \cdot \gamma_{12} x_1 + \lambda_3 \cdot \gamma_{32} x_3; \\ \dot{\lambda}_3 &= -H_{x_3} = -p_3 u_3 e^{-\delta t} - \lambda_3 \left(\varepsilon_3 - \frac{2\varepsilon_3 x_3}{K_3} - s_3 u_3 - \gamma_{31} x_1 - \gamma_{32} x_2 \right) \\ &\quad + \lambda_1 \cdot \gamma_{13} x_1 + \lambda_2 \cdot \gamma_{23} x_2.\end{aligned}$$

Die Populationen müssen möglichst schnell auf den Gleichgewichtspunkt gebracht werden und dann mit einer singulären Steuerung gefangen werden.

Die optimale Lösung erhalten wir durch die Berechnung der Schaltfunktion:

$$\begin{aligned}\sigma_1(x, \lambda, t) &= H_{u_1}(x, u, \lambda, t) = e^{-\delta t}(p_1 x_1 - c) - \lambda_1 s_1 x_1; \\ \sigma_2(x, \lambda, t) &= H_{u_2}(x, u, \lambda, t) = e^{-\delta t}(p_2 x_2 - c) - \lambda_2 s_2 x_2; \\ \sigma_3(x, \lambda, t) &= H_{u_3}(x, u, \lambda, t) = e^{-\delta t}(p_3 x_3 - c) - \lambda_3 s_3 x_3.\end{aligned}$$

Singuläre Steuerungen treten auf, falls gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_i(t) &= \sigma_i(x(t), \lambda(t), t) = 0 \text{ für } t \in [t_1, t_2] \subseteq [t_0, T], \quad i = 1, 2, 3 \\ \iff \lambda_i(t) &= \frac{e^{-\delta t}}{s_i x_i(t)} (p_i x_i(t) - c) = \frac{e^{-\delta t}}{s_i} \left(p_i - \frac{c}{x_i(t)} \right), \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Durch Differenzieren und Einsetzen erhalten wir (beispielsweise für $i = 1$):

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 &= -\delta e^{-\delta t}(p_1 x_1 - c) + e^{-\delta t} p_1 \dot{x}_1 - \dot{\lambda}_1 s_1 x_1 - \lambda_1 s_1 \dot{x}_1 \\ &= -\delta e^{-\delta t}(p_1 x_1 - c) \\ &\quad + e^{-\delta t} p_1 \left(\varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1} \right) - s_1 u_1 x_1 - \gamma_{12} x_1 x_2 - \gamma_{13} x_1 x_3 \right) \\ &\quad - \left[-p_1 u_1 e^{-\delta t} - \lambda_1 \left(\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_1 x_1}{K_1} - s_1 u_1 - \gamma_{12} x_2 - \gamma_{13} x_3 \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2 \cdot \gamma_{21} x_2 + \lambda_3 \cdot \gamma_{31} x_3 \right] s_1 x_1 \\ &\quad - \lambda_1 s_1 \left(\varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1} \right) - s_1 u_1 x_1 - \gamma_{12} x_1 x_2 - \gamma_{13} x_1 x_3 \right)\end{aligned}$$

4. Grundlagen der Optimalsteuerung

$$\begin{aligned}
&= -\delta e^{-\delta t}(p_1 x_1 - c) \\
&\quad + e^{-\delta t} p_1 \varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - e^{-\delta t} p_1 s_1 u_1 x_1 - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{12} x_1 x_2 - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{13} x_1 x_3 \\
&\quad + \left[e^{-\delta t} p_1 s_1 u_1 x_1 + \lambda_1 s_1 x_1 \left(\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_1 x_1}{K_1} - s_1 u_1 - \gamma_{12} x_2 - \gamma_{13} x_3 \right) \right. \\
&\quad \left. - \lambda_2 \cdot \gamma_{21} x_2 s_1 x_1 - \lambda_3 \cdot \gamma_{31} x_3 s_1 x_1 \right] \\
&\quad - \lambda_1 s_1 \left(\varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - s_1 u_1 x_1 - \gamma_{12} x_1 x_2 - \gamma_{13} x_1 x_3 \right) \\
&= -\delta e^{-\delta t}(p_1 x_1 - c) + e^{-\delta t} p_1 \varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{12} x_1 x_2 - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{13} x_1 x_3 \\
&\quad + \left[\lambda_1 s_1 x_1 \left(\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_1 x_1}{K_1} - s_1 u_1 - \gamma_{12} x_2 - \gamma_{13} x_3 \right) - \lambda_2 \cdot \gamma_{21} x_2 s_1 x_1 - \lambda_3 \cdot \gamma_{31} x_3 s_1 x_1 \right] \\
&\quad - \lambda_1 s_1 \left(\varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - s_1 u_1 x_1 - \gamma_{12} x_1 x_2 - \gamma_{13} x_1 x_3 \right) \\
&= -\delta e^{-\delta t}(p_1 x_1 - c) + e^{-\delta t} p_1 \varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{12} x_1 x_2 - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{13} x_1 x_3 \\
&\quad + \lambda_1 s_1 x_1 \left(\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_1 x_1}{K_1} - s_1 u_1 - \gamma_{12} x_2 - \gamma_{13} x_3 \right) - \lambda_2 \cdot \gamma_{21} x_2 s_1 x_1 - \lambda_3 \cdot \gamma_{31} x_3 s_1 x_1 \\
&\quad - \lambda_1 s_1 x_1 \left(\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1 x_1}{K_1} - s_1 u_1 - \gamma_{12} x_2 - \gamma_{13} x_3 \right) \\
&= -\delta e^{-\delta t}(p_1 x_1 - c) + e^{-\delta t} p_1 \varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{12} x_1 x_2 - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{13} x_1 x_3 \\
&\quad - \lambda_1 \frac{s_1 \varepsilon_1 x_1^2}{K_1} - \lambda_2 \cdot \gamma_{21} x_2 s_1 x_1 - \lambda_3 \cdot \gamma_{31} x_3 s_1 x_1 \\
&= -\delta e^{-\delta t}(p_1 x_1 - c) + e^{-\delta t} p_1 \varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{12} x_1 x_2 - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{13} x_1 x_3 \\
&\quad - \left(\frac{e^{-\delta t}}{s_1} \left(p_1 - \frac{c}{x_1} \right) \right) \frac{s_1 \varepsilon_1 x_1^2}{K_1} - \left(\frac{e^{-\delta t}}{s_2} \left(p_2 - \frac{c}{x_2} \right) \right) \cdot \gamma_{21} x_2 s_1 x_1 \\
&\quad - \left(\frac{e^{-\delta t}}{s_3} \left(p_3 - \frac{c}{x_3} \right) \right) \cdot \gamma_{31} x_3 s_1 x_1 \\
&= -\delta e^{-\delta t}(p_1 x_1 - c) + e^{-\delta t} p_1 \varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{12} x_1 x_2 - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{13} x_1 x_3 \\
&\quad - e^{-\delta t} \frac{\varepsilon_1 x_1}{K_1} (p_1 x_1 - c) - \frac{e^{-\delta t}}{s_2} (p_2 x_2 - c) \cdot \gamma_{21} s_1 x_1 - \frac{e^{-\delta t}}{s_3} (p_3 x_3 - c) \cdot \gamma_{31} s_1 x_1 \\
&= -\delta e^{-\delta t}(p_1 x_1 - c) + e^{-\delta t} p_1 \varepsilon_1 x_1 - 2e^{-\delta t} p_1 \varepsilon_1 \frac{x_1^2}{K_1} - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{12} x_1 x_2 - e^{-\delta t} p_1 \gamma_{13} x_1 x_3 \\
&\quad + ce^{-\delta t} \frac{\varepsilon_1 x_1}{K_1} - \frac{s_1}{s_2} e^{-\delta t} \cdot \gamma_{21} x_1 (p_2 x_2 - c) - \frac{s_1}{s_3} e^{-\delta t} \cdot \gamma_{31} x_1 (p_3 x_3 - c)
\end{aligned}$$

$$= e^{-\delta t} \left[-\delta(p_1x_1 - c) + p_1\varepsilon_1x_1 - 2p_1\varepsilon_1\frac{x_1^2}{K_1} - p_1\gamma_{12}x_1x_2 - p_1\gamma_{13}x_1x_3 + c\frac{\varepsilon_1x_1}{K_1} - \frac{s_1}{s_2} \cdot \gamma_{21}x_1(p_2x_2 - c) - \frac{s_1}{s_3} \cdot \gamma_{31}x_1(p_3x_3 - c) \right] \equiv 0,$$

genau dann wenn

$$-\delta(p_1x_1 - c) + p_1\varepsilon_1x_1 - 2p_1\varepsilon_1\frac{x_1^2}{K_1} - p_1\gamma_{12}x_1x_2 - p_1\gamma_{13}x_1x_3 + c\frac{\varepsilon_1x_1}{K_1} - \frac{s_1}{s_2} \cdot \gamma_{21}x_1(p_2x_2 - c) - \frac{s_1}{s_3} \cdot \gamma_{31}x_1(p_3x_3 - c) = 0.$$

Diese Gleichung charakterisiert einen optimalen singulären Zustand. Das ist eine Gleichung der Form

$$m_1x_1^2 + m_2x_1 + m_3 + m_4x_1x_2 + m_5x_1x_3 = 0, \quad (4.6)$$

wobei

$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{2p_1\varepsilon_1}{K_1}; \\ m_2 &= -\delta p_1 + p_1\varepsilon_1 + \frac{c\varepsilon_1}{K_1} + \frac{s_1}{s_2}c\gamma_{21} + \frac{s_1}{s_3}c\gamma_{31}; \\ m_3 &= \delta c; \\ m_4 &= -p_1\gamma_{12} - \frac{s_1}{s_2}p_2\gamma_{21}; \\ m_5 &= -p_1\gamma_{13} - \frac{s_1}{s_3}p_3\gamma_{31} \end{aligned}$$

sind. Analog gewinnen wir zwei weitere Gleichungen für $\dot{\sigma}_2 = 0$ und $\dot{\sigma}_3 = 0$. In unserem Modell wurden folgende Werte (mit $\delta = 0.06$, $c = 0.125$) genommen.

i	ε_i	K_i	s_i	p_i	γ_{i1}	γ_{i2}	γ_{i3}
1	0.4	1	0.000375	0.423750	0	0.0167	0.0154
2	0.6	1.2	0.001333	0.360000	0.0104	0	0.0064
3	0.6	1.3	0.001231	0.566154	0.0096	0.0064	0

Wir erhalten ein nichtlineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -0.339x_1^2 + 0.1948x_1 + 0.0075 - 0.0081x_1x_2 - 0.0082x_1x_3 &= 0 \\ -0.36x_2^2 + 0.2652x_2 + 0.0075 - 0.0289x_1x_2 - 0.0062x_2x_3 &= 0 \\ -0.522x_3^2 + 0.3705x_3 + 0.0075 - 0.0269x_1x_3 - 0.0058x_2x_3 &= 0, \end{aligned}$$

und lösen es mit Newton-Methode (Programmtexte sind im Anhang C.1 hinzugefügt). Die Lösung beträgt

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 0.5792, \\ x_2 &\approx 0.7071, \\ x_3 &\approx 0.6920. \end{aligned}$$

Diese Werte werden in die Prozessgleichungen eingesetzt und aus der Bedingung $\dot{x}(t) = 0$ werden optimale singuläre Steuerungen für diese stationären Zustände ausgerechnet.

Eine optimale Fangstrategie ist also das möglichst schnelle Erreichen dieses Zustandes vom Punkt $x_1(0), x_2(0), x_3(0)$ aus und die singuläre Steuerung auf dem weiteren Intervall.

Wir zeigen jetzt, dass die Hamilton-Funktion in Abhängigkeit von u_1, u_2, u_3 linear ist:

$$\begin{aligned}
 H(x, u, \lambda, t) &= \left\{ p_1 u_1 x_1 + p_2 u_2 x_2 + p_3 u_3 x_3 - c \cdot \sum_{i=1}^3 u_i \right\} e^{-\delta t} \\
 &+ \lambda_1 \left(\varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1} \right) - s_1 u_1 x_1 - \gamma_{12} x_1 x_2 - \gamma_{13} x_1 x_3 \right) \\
 &+ \lambda_2 \left(\varepsilon_2 x_2 \cdot \left(1 - \frac{x_2}{K_2} \right) - s_2 u_2 x_2 - \gamma_{21} x_1 x_2 - \gamma_{23} x_2 x_3 \right) \\
 &+ \lambda_3 \left(\varepsilon_3 x_3 \cdot \left(1 - \frac{x_3}{K_3} \right) - s_3 u_3 x_3 - \gamma_{31} x_1 x_3 - \gamma_{32} x_2 x_3 \right) \\
 &= u_1 \left[(p_1 x_1 - c) e^{-\delta t} - \lambda_1 s_1 x_1 \right] \\
 &+ u_2 \left[(p_2 x_2 - c) e^{-\delta t} - \lambda_2 s_2 x_2 \right] \\
 &+ u_3 \left[(p_3 x_3 - c) e^{-\delta t} - \lambda_3 s_3 x_3 \right] \\
 &+ \left[\lambda_1 \left(\varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1} \right) - \gamma_{12} x_1 x_2 - \gamma_{13} x_1 x_3 \right) \right. \\
 &+ \lambda_2 \left(\varepsilon_2 x_2 \cdot \left(1 - \frac{x_2}{K_2} \right) - \gamma_{21} x_1 x_2 - \gamma_{23} x_2 x_3 \right) \\
 &\left. + \lambda_3 \left(\varepsilon_3 x_3 \cdot \left(1 - \frac{x_3}{K_3} \right) - \gamma_{31} x_1 x_3 - \gamma_{32} x_2 x_3 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Nun möchten wir untersuchen, ob das Maximumprinzip für unser Beispiel eine hinreichende Bedingung ist.

Dazu beschäftigen wir uns mit der Funktion

$$H^0(x, \lambda, t) = \max_{u \in \Omega} H(x, u, \lambda, t), \text{ für alle } t \in [t_0, T].$$

Wenn wir zeigen können, dass die Funktion $H^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ in $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ für alle $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ konkav ist, ist die Bedingung auch hinreichend. Dabei beachten wir, dass die die Konkavität von H^0 nicht auf Teilintervallen, sondern auf dem ganzen Intervall $[t_0, T]$ untersucht werden muss.

Die Hamilton-Funktion erreicht ihr Maximum, wenn man eine optimale Steuerung einsetzt. Wie wissen aber nicht, dass die berechnete Lösung optimal ist und können uns lediglich überlegen, wie man die Struktur dieses Problems ausnutzt.

Für diese konkrete Aufgabe, die in u linear ist, kann ein Maximum erreicht werden, indem man für $u_i, i = 1, 2, 3$ die Grenzen des Intervalls $[u_{min}, u_{max}] = [0; 900]$ oder eine singuläre Steuerung $u_{sing_1}, u_{sing_2}, u_{sing_3}$ einsetzt. In beiden Fällen kann die maximierende Hamilton-Funktion in der Form

$$\begin{aligned} H^0(x, \lambda, t) = & z_1 \left[(p_1 x_1 - c) e^{-\delta t} - \lambda_1 s_1 x_1 \right] \\ & + z_2 \left[(p_2 x_2 - c) e^{-\delta t} - \lambda_2 s_2 x_2 \right] \\ & + z_3 \left[(p_3 x_3 - c) e^{-\delta t} - \lambda_3 s_3 x_3 \right] \\ & + \left[\lambda_1 \left(\varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1} \right) - \gamma_{12} x_1 x_2 - \gamma_{13} x_1 x_3 \right) \right. \\ & + \lambda_2 \left(\varepsilon_2 x_2 \cdot \left(1 - \frac{x_2}{K_2} \right) - \gamma_{21} x_1 x_2 - \gamma_{23} x_2 x_3 \right) \\ & \left. + \lambda_3 \left(\varepsilon_3 x_3 \cdot \left(1 - \frac{x_3}{K_3} \right) - \gamma_{31} x_1 x_3 - \gamma_{32} x_2 x_3 \right) \right]. \end{aligned}$$

geschrieben werden. Dabei gilt für $i = 1, 2, 3$ und feste Zeitpunkte t_i

$$z_i = \frac{u_{min}}{2} (1 + \operatorname{sgn}(t_i - t)) + \frac{u_{sing_i}}{2} (1 - \operatorname{sgn}(t_i - t)),$$

falls $x_i(t) < x_{sing_i}$ für $t < t_i$ und $x_i(t) = x_{sing_i}$ für $t \geq t_i$, bzw.

$$z_i = \frac{u_{max}}{2} (1 + \operatorname{sgn}(t_i - t)) + \frac{u_{sing_i}}{2} (1 - \operatorname{sgn}(t_i - t)),$$

falls $x_i(t) > x_{sing_i}$ für $t < t_i$ und $x_i(t) = x_{sing_i}$ für $t \geq t_i$. Hier ist $\operatorname{sgn}(0) = -1$.

t_i bezeichnen hier die Zeitpunkte, in denen die entsprechenden Population ihren Gleichgewicht erreichen.

In beiden Fällen sind $z_i, i = 1, 2, 3$ Konstanten auf gewissen Intervallen! Nun bestimmen wir die Hesse-Matrix dieser Funktion.

$$HM = \begin{pmatrix} \frac{-2\lambda_1 \varepsilon_1}{K_1} & -\lambda_1 \gamma_{12} - \lambda_2 \gamma_{21} & -\lambda_1 \gamma_{13} - \lambda_3 \gamma_{31} \\ -\lambda_1 \gamma_{12} - \lambda_2 \gamma_{21} & \frac{-2\lambda_2 \varepsilon_2}{K_2} & -\lambda_2 \gamma_{23} - \lambda_3 \gamma_{32} \\ -\lambda_1 \gamma_{13} - \lambda_3 \gamma_{31} & -\lambda_2 \gamma_{23} - \lambda_3 \gamma_{32} & \frac{-2\lambda_3 \varepsilon_3}{K_3} \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass man weder Definitheit noch Indefinitheit für beliebige Werte λ feststellen kann. Das heißt, die Konkavität der Funktion $H^0(x, \lambda, t)$ lässt sich in diesem konkreten Fall (zumindest ohne Kenntnis von λ_i) nicht nachweisen.

Trotz vieler Untersuchungen ist die Theorie der hinreichenden Bedingungen für spezielle Optimalsteuerungsprobleme (unter anderem, für die Aufgaben mit stückweise konstante Steuerungen) noch nicht abgeschlossen.

Gabasov und Kirillova haben in ihren Arbeiten studiert ([8]), dass das Pontrjaginsche Maximumprinzip für die in u stetigen Prozesse auf Prozesse mit stückweise konstanten Steuerungen im Allgemeinen **nicht** übertragbar ist.

Für stückweise konstante Steuerfunktionen gilt das Maximumprinzip nur approximativ (Quasimaximumprinzip). Gabasov und Kirillova zeigten z.B., dass die Differenz zwischen dem Maximum der Hamilton-Funktion und dem Wert der Hamilton-Funktion für die optimale Steuerung $u^*(t)$ kleiner ε gemacht werden kann und dass dieser Abstand nach Null strebt, falls die Länge der Steuerintervalle h genügend klein gewählt worden ist. Bei den Steuerintervallen fester Länge gilt das nicht.

Trotzdem wenden in der Regel viele Autoren das Pontrjaginsche Maximumprinzip auch in den Aufgaben mit stückweise konstanten Steuerungen, obwohl die notwendigen Bedingungen in solchen Fällen nicht gesichert sind.

4.5. Bellman-Prinzip

Eine zentrale Methode der Dynamischen Programmierung ist das Bellman-Prinzip. Dynamische Programmierung kann dann erfolgreich eingesetzt werden, wenn das Optimierungsproblem aus vielen gleichartigen Teilproblemen besteht, und eine optimale Lösung des Problems sich aus optimalen Lösungen der Teilprobleme zusammensetzt. Das Verfahren der dynamischen Programmierung besteht darin, zuerst die optimalen Lösungen der kleinsten Teilprobleme direkt zu berechnen, und diese dann geeignet zu einer Lösung eines nächstgrößeren Teilproblems zusammenzusetzen. Diese Idee wurde 1957 von Bellman formuliert.⁵

In der Steuerungstheorie kann man das Prinzip der dynamischen Programmierung einsetzen, um eine Gleichung herzuleiten (Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung), deren Lösung den optimalen Wert der Steuerung ergibt. Die Argumentation ist dabei folgende: Wenn das Problem zeitabhängig ist, kann man den optimalen Wert des Zielfunktional zu einem bestimmten Zeitpunkt betrachten. Zu untersuchen ist also eine Gleichung für die optimale Lösung, die das Zielfunktional auch zu einem späteren Zeitpunkt optimal erhält. Diese Überlegung führt zur Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung. Damit kann man das Problem in Zeitschritte einteilen, anstatt es auf einmal lösen zu müssen.

⁵**Richard Bellman** (1920-1984), amerikanischer Mathematiker und Physiker, Erfinder der Dynamischen Programmierung. Nach ihm sind mehrere Algorithmen und Methoden der Diskreten Optimierung und benachbarter Gebiete benannt worden, z.B. der Algorithmus von Bellman und Ford und das Optimalitätsprinzip.

Auf dieser Basis lässt sich eine notwendige und hinreichende Bedingung konstruieren.

4.5.1. Eine notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingung für die Aufgaben mit stückweise stetigen Steuerungen

Wir betrachten das Optimalsteuerungsproblem (4.1) und definieren eine Wertefunktion $V(t, x_t) : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß

$$V(t, x_t) = \max_{u(\cdot)} \int_t^T g(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + q(x(T)), \quad (4.7)$$

wobei $u(\cdot) : [t, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ zulässig auf $[t, T]$ und $x(\cdot)$ die zugehörige Trajektorie mit $x(t) = x_t \in \mathbb{R}^n$ ist.

$V(t, x_t)$ gibt den optimalen Wert des Zielfunktional ausgehend vom Zeitpunkt $t \in [t_0, T]$ und dem Ausgangspunkt $x_t \in \mathbb{R}^n$ an, also den maximalen Wert des Zielfunktional für das zum Zeitpunkt t verbleibende Zeitintervall $[t, T]$ und für den Startpunkt x_t . Dabei gilt auch $x(T) = x_T \in \mathbb{R}^n$.

Bei folgenden Überlegungen werden wir zwei unterschiedliche Formen von Steuerungen betrachten. In der Optimalsteuerung ist es üblich, Steuerungen als Funktionen von der Zeit t (und häufig vom in der Regel festen Anfangszustand x_0) zu betrachten. Diese Steuerungen nennen wir open-loop-Form (offene Schleife) und werden im Weiteren optimale Steuerung in solcher Form als $u^*(\cdot)$ bezeichnen. Diese Form hat einen Nachteil: Falls sich das System von der optimalen Trajektorie wegentwickelt, würde die Steuerung nicht optimal. Die closed-loop-Form oder Rückkopplungsform $u(t, x_t)$ beschreibt eine Abhängigkeit der Steuerfunktionen von der Zeit t und auch vom gegenwärtigen Zustand $x(t) = x_t \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen die closed-loop optimale Steuerung $\hat{u}(t, x_t)$. Bei deterministischen optimalen Steuerungsproblemen ist diese Unterscheidung nicht von einer großer Bedeutung, weil man das optimale $x = x(t, x_0)$ in die Rückkopplungslösung einsetzen kann und so eine äquivalente Lösung in offener Schleife erhalten kann. Eine optimale closed-loop-Lösung kann daher immer in eine optimale open-loop-Lösung in offener Schleife umgeformt werden und umgekehrt. Einfachheitshalber werden wir in folgenden Sätzen $V(t, x_t)$ als $V(t, x)$ und $u(t, x_t)$ als $u(t, x)$ bezeichnen.

Die Hamiltonfunktion H ist für das Problem (4.1) gemäß

$$H(t, x, u, V_x(t, x)) = g(t, x, u) + V_x(t, x) \cdot f(t, x, u).$$

erklärt. Nun können wir das Bellman-Prinzip formulieren.

Satz 4.6 (Notwendige Bedingung).

Es existiere die Wertefunktion $V(t, x)$ für das Problem (4.1) auf $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n$ und sei stetig differenzierbar: $V_x(t, x) = \frac{d}{dx}V(t, x)$.

Sei $u^*(\cdot)$ eine open-loop optimale Lösung von (4.1). Dann erfüllt die entsprechende closed-loop Lösung $\hat{u}(\cdot, \cdot)$ die Bedingung

$$\hat{u}(t, x) = \arg \max_{u \in \Omega} H(t, x, u, V_x(t, x)) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } t \in [t_0, T]$$

und $V(t, x)$ erfüllt die partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} -V_t(t, x) &= \max_{u \in \Omega} H(x, u, V_x(t, x), t), t \in [t_0, T], \\ V(T, x_T) &= q(x(T)). \end{aligned}$$

Beweis:

Laut der Definition der Funktion V ist $V(t + \Delta t, x(t + \Delta t))$ die Wertefunktion für den Teil der Lösung, der zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ mit dem Zustand $x(t + \Delta t)$ beginnt. Dann folgt für alle $\Delta t: 0 \leq \Delta t \leq T - t$:

$$V(t, x) = \max_{u(\cdot) \text{ zulässig}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau + V(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) \right\}.$$

Da V als stetig differenzierbar vorausgesetzt wird und g stetig ist, kann für jeden Stetigkeitspunkt t von $u(\cdot)$

$\int_t^{t+\Delta t} g(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau$ für kleine Δt -Werte durch $g(t, x(t), u(t))\Delta t + o(\Delta t)$ approximiert werden und es folgt:

$$V(t, x) = \max_{u(\cdot) \text{ zulässig}} \{g(t, x(t), u(t))\Delta t + V(t + \Delta t, x(t + \Delta t))\} + o(\Delta t).$$

Nach dem Satz von Taylor ergibt sich:

$$V(t + \Delta t, x(t + \Delta t)) = V(t, x(t)) + V_t(t, x(t))\Delta t + V_x(t, x(t))\dot{x}(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Setzt man dieses Ergebnis in die vorhergehende Gleichung ein, dividiert durch Δt und beachtet $\dot{x} = f(t, x, u)$, so folgt für $\Delta t \rightarrow 0$ und für jedes fixierte t die partielle Differentialgleichung

$$0 = \max_{u \in \Omega} \{g(t, x, u) + V_t(t, x) + V_x(t, x)f(t, x, u)\}.$$

Gemäß der Definition der Hamiltonfunktion H lässt sich, weil $V_t(t, x(t))$ nicht von u abhängt, die partielle Differentialgleichung in der Form

$$-V_t(t, x) = \max_{u \in \Omega} H(t, x, u, V_x(t, x)) \tag{4.8}$$

schreiben. Die Randbedingung $V(T, x_T) = q(x(T))$ folgt unmittelbar.

Die partielle Differentialgleichung (4.8) wird Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

genannt.⁶

Zusammen mit den Endbedingungen entsteht eine Evolutionsgleichung, deren globale Lösbarkeit, wie im Satz gefordert, im Allgemeinen nicht gesichert ist.

Satz 4.7 *Hinreichende Bedingung.*

Wenn es auf $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n$ eine reelle, stetig differenzierbare Funktion $V(t, x)$ gibt, die die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

$$-V_t(t, x) = \max_{u \in \Omega} H(x, u, V_x(t, x), t), \quad (4.9)$$

$$V(T, x_T) = q(x(T))$$

erfüllt, und wenn die durch

$$\hat{u}(t, x) = \arg \max_{u \in \Omega} H(x, u, V_x(t, x), t) \quad (4.10)$$

bestimmte (closed-loop) Steuerung zulässig ist, dann ist die entsprechende open-loop Steuerung $u^*(\cdot)$ mit der zugehörigen Zustandstrajektorie $x^*(\cdot)$ eine optimale Lösung von (4.1).

Beweis:

Die linke Seite von (4.9) ist unabhängig von u , daher kann diese Gleichung auch in der Form

$$\max_{u \in \Omega} [V_t(t, x) + H(x, u, V_x(t, x), t)] = 0 \quad (4.11)$$

dargestellt werden. Wir nehmen die zulässige Steuerung $u^*(\cdot)$ und wählen eine beliebige (und auf $[t_0, T]$ zulässige) Steuerung $u^-(\cdot)$.

Seien $x^*(\cdot)$ und $x^-(\cdot)$ die jeweils eindeutigen Zustandstrajektorien, die durch $u^*(\cdot)$ beziehungsweise $u^-(\cdot)$ auf dem Intervall $[t_0, T]$ erzeugt werden, so dass $x^*(t_0) = x^-(t_0) = x_0$ gilt. Dann folgt aus (4.10) und (4.11):

$$0 = V_t(t, x^*) + H(x^*(t), u^*(t), V_x^*(t, x^*), t) \geq \\ V_t(t, x^-) + H(x^-(t), u^-(t), V_x(t, x^-), t).$$

Mit der Definition der Hamiltonfunktion $H = g + V_x \cdot f$ und unter Berücksichtigung von

$$\frac{dV(t, x)}{dt} = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} f(t, x, u)$$

⁶Der Name bezieht sich auf William Rowan Hamilton (1805-1865), der zur Entwicklung der Variationsrechnung wesentliche Ergebnisse beitrug, auf Carl Gustav Jacobi (1804-1851), der in der Variationsrechnung weitreichende Beiträge zur Theorie der hinreichenden Bedingungen geleistet hat und auf Richard Bellman (1920-1984), der die dynamische Programmierung auf den Weg brachte. Eigentlich stammt diese Gleichung von Constantin Carathéodory (1873-1950), dessen Name nicht erwähnt wurde.

lässt sich die Ungleichung als

$$0 = g(t, x^*(t), u^*(t)) + \frac{dV(t, x^*)}{dt} \geq g(t, x^-(t), u^-(t)) + \frac{dV(t, x^-)}{dt}$$

schreiben. Integriert man diese Ungleichung über das Intervall $[t_0, T]$, so folgt

$$V(t_0, x_0) = \int_{t_0}^T g(t, x^*(t), u^*(t)) dt + q(x^*(T)) \geq \int_{t_0}^T g(t, x^-(t), u^-(t)) dt + q(x^-(T)),$$

wobei $\int_{t_0}^T \frac{dV}{dt} = V(T, x_T) - V(t_0, x_0)$ und $V(T, x_T) = q(x(T))$

verwendet wurde und $V(t_0, x_0)$ auf beiden Seiten addiert wurde. Da die Steuerung $u^-(\cdot)$ beliebig gewählt wurde, wird das Zielfunktional durch die Steuerung $u^*(\cdot)$ maximiert.

Nun können wir den Satz 4.6 verwenden und einen konstruktiven Algorithmus formulieren.

1. Identifiziere $f(t, x, u), g(t, x, u), q(t)$ mit den Funktionen einer konkreten Aufgabe.
2. Schreibe die Bellmansche Gleichung auf.
3. Berechne u^* als Funktion von t, x, V_x
4. Füge den maximierenden Wert $u^*(t, x, V_x)$ in die rechte Seite der Bellmanschen Gleichung ein. (PDE-Gleichung)
5. Löse die Bellmansche Gleichung. (analytisch oder numerisch)
6. Mit Hilfe von Punkt 3 berechne $x^*(t), u^*(t)$ für $t_0 \leq t \leq T$.

Eine analytische Lösung dieser HJB-Gleichungen ist nur selten und in speziellen Fällen möglich (siehe [1]). Im Maximumprinzip ist die Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung sozusagen in zwei Schritte aufgespalten. Neben der Maximumbedingung hat man ein Randwertproblem für $2n$ gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen.

Die dynamische Programmierung und das Maximumprinzip begründen zwei verschiedene Verfahren zur Lösung dynamischer Entscheidungsprobleme. Unter geeigneten Differenzierbarkeitsannahmen bezüglich der Wertefunktion der Hamilton-Jacobi-Bellman-Differentialgleichung samt der zugehörigen Randbedingung kann es

zur Herleitung der im Maximumprinzip zusammengefassten Optimalitätsbedingungen geführt werden ([4]).

Der über die dynamische Programmierung führende heuristische Beweis des Maximumprinzips wäre exakt, wenn die Wertefunktion $V(t, x_t)$ zweimal differenzierbar wäre. Dies ist in einer Reihe von Anwendungen jedoch nicht gewährleistet, wo V an manchen Punkten keine Ableitungen besitzt. Dies ist auch Ursache dafür, dass das Maximumprinzip i.A. nicht die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung impliziert, wo die stetige Differenzierbarkeit von V gefordert wird.

4.5.2. Optimalitätsbedingungen für die Aufgaben mit stückweise konstanten Steuerungen (closed-loop)

Jetzt betrachten wir Aufgabe (4.1) mit **stückweise konstanten Steuerungen**. Mit dem Bellman-Prinzip kann man auch Optimalitätsbedingungen gewinnen.

Seien $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ vorgegebene Zeitpunkte, $x(\cdot)$ sei stetig. Das Problem lautet jetzt:

Maximiere

$$J(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} g(\tau, x(\tau), u(t_k)) d\tau \right] + q(x(t_n)), \quad (4.12)$$

wobei g und q bekannte (stetige) Funktionen sind. Die Nebenbedingung sind:

$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t_k))$, dabei sind $t \in T_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Gesucht ist die optimale Steuerung $u^*(t_k)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Wir versuchen in diesem Kapitel, die entsprechende closed-loop-Steuerung $\hat{u}(t_k, x)$, wobei $x = x(t_k) \in \mathbb{R}^n$ ist, zu gewinnen.

Wir nehmen zuerst $n = 1$ (ein Steuerungsintervall), bezeichnen $u(t_0) = v$ und definieren die Wertefunktion

$$W(t, x(t), v) = \int_t^{t_1} g(\tau, x(\tau), v) d\tau + q(x(t_1)) \text{ für den Prozess } \dot{x}(s) = f(s, x(s), v),$$

der zum Zeitpunkt t mit $x(t) \in \mathbb{R}^n$ beginnt und mit der konstanten Steuerung $v \in \Omega$ geführt wird.

Diese Funktion W ist ebenfalls stetig differenzierbar bezüglich t und x . Sie ist aber nicht zu verwechseln mit der im Kapitel 3.1. eingeführten Funktion V , da hier keine Maximierung auftritt. Es gilt $V(t, x) = \max_{v \in \Omega} W(t, x, v)$.

Für die Aufgabe (4.12) können (vgl. [29]) neue notwendige (und hinreichende) Bedingungen formuliert werden.

Satz 4.8 *Notwendige Bedingung.*

Es existiere die Wertefunktion $W(t, x, v)$ für das Problem (4.12) auf $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \Omega$

und sei sie stetig differenzierbar.

Sei $u^*(\cdot)$ eine open-loop optimale Lösung von (4.12). Dann erfüllt die entsprechende closed-loop Lösung $\hat{u}(\cdot, \cdot)$ für alle $t \in [t_0, t_1]$ die Bedingung

$$\hat{u}(t, x(t)) = \hat{u}(t_0, x(t_0)) = \arg \max_{v \in \Omega} W(t_0, x(t_0), v),$$

und $W(t, x, v)$ erfüllt die partielle Differentialgleichung:

$$-\frac{\partial W(t, x, v)}{\partial t} = \frac{\partial W(t, x, v)}{\partial x} f(t, x, v) + g(t, x, v)$$

oder anders geschrieben:

$$-\frac{\partial W(t, x, v)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(t, x, v)}{\partial x_i} f_i(t, x, v) + g(t, x, v), \quad \forall (t, x, v) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \Omega$$

und

$$W(t_1, x(t_1), v) = q(x(t_1)), \quad x(t_1) \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis:

Der Beweis folgt analog vom Satz 3.2. $W(t + \Delta t, x(t + \Delta t), v)$ ist die Wertefunktion für den Teil der Lösung, der zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ mit dem Zustand $x(t + \Delta t)$ und der konstanten Steuerung v beginnt.

Es gilt folgende Gleichung:

$$W(t, x, v) = \int_t^{t+\Delta t} g(\tau, x(\tau), v) d\tau + W(t + \Delta t, x(t + \Delta t), v).$$

Da W stetig differenzierbar vorausgesetzt wird und g stetig ist, kann die

Approximation $\int_t^{t+\Delta t} g(\tau, x(\tau), v) d\tau = g(t, x(t), v) \Delta t + o(\Delta t)$ verwendet werden:

$$W(t, x, v) = \{g(t, x(t), v) \Delta t + W(t + \Delta t, x(t + \Delta t), v)\} + o(\Delta t),$$

mit $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$. Laut des Satzes von Taylor ergibt sich:

$$W(t + \Delta t, x(t + \Delta t), v) =$$

$$W(t, x(t), v) + W_t(t, x(t), v) \Delta t + W_x(t, x(t), v) \dot{x}(t) \Delta t + o(\Delta t).$$

Setzt man dieses Ergebnis in die vorhergehende Gleichung ein, dividiert durch Δt und beachtet $\dot{x} = f(t, x, v)$, so folgt für $\Delta t \rightarrow 0$ und für jedes fixierte t die partielle Differentialgleichung

$$0 = g(t, x(t), v) + W_t(t, x(t), v) + W_x(t, x(t), v) f(t, x(t), v),$$

die in der Form

$$-\frac{\partial W(t, x, v)}{\partial t} = \frac{\partial W(t, x, v)}{\partial x} f(t, x, v) + g(t, x, v).$$

geschrieben werden kann. Da die Gleichung $W(t_0, x, v) = J(v), v \in \Omega$ (für diese spezielle Aufgabe) gilt, kann die optimale Lösung durch die punktweise Maximierung dieser berechneten Funktion $W(t_0, x, v)$ erhalten werden.

$$\hat{u}(t_0, x(t_0)) = \arg \max_{v \in \Omega} W(t_0, x(t_0), v).$$

Die Randbedingung $W(t_1, x(t_1), v) = q(x(t_1))$ folgt unmittelbar.

Im Falle mehrerer Steuerungsintervalle gilt die notwendige Bedingung analog. Es sei $u(t) = v = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ mit $v_k \in \Omega, k = 0, \dots, n-1$. Die Funktion $W(t, x, v)$ wird dann für alle $t \in [t_{n-1}; t_n]$ als

$$W(t, x, v) = \int_t^{t_n} g(\tau, x(\tau), v) d\tau + q(x(t_n)),$$

und für alle $t \in [t_{s-1}; t_s], 1 \leq s \leq n-1$ als

$$W(t, x, v) = \int_t^{t_s} g(\tau, x(\tau), v) d\tau$$

definiert. Dann folgt für alle $t \in [t_{k-1}; t_k], 1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, x) &= \hat{u}(t_{k-1}, x(t_{k-1})) = \arg \max_{v \in \Omega} W(t_{k-1}, x(t_{k-1}), v), \\ -\frac{\partial W(t, x, v)}{\partial t} &= \frac{\partial W(t, x, v)}{\partial x} f(t, x, v) + g(t, x, v), \\ W(t_k - 0, x, v) &= W(t_k, x, \hat{u}(t_k, x)), 1 \leq k < n, \\ W(t_n - 0, x, v) &= q(x(t_n)), \forall v \in \Omega. \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung lässt sich analog dem Fall einer stückweise stetigen Steuerung formulieren und beweisen.

Satz 4.9 *Hinreichende Bedingung.*

Wenn es auf $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \Omega$ eine reelle, stetig differenzierbare Funktion $W(t, x, v)$ gibt, die die Gleichung

$$-\frac{\partial W(t, x, v)}{\partial t} = \frac{\partial W(t, x, v)}{\partial x} f(t, x, v) + g(t, x, v),$$

$$W(T, x(T), v) = q(x(T)), \quad x(T) \in \mathbb{R}^n.$$

erfüllt, und wenn die durch

$$\hat{u}(t, x(t)) = \hat{u}(t_0, x(t_0)) = \arg \max_{v \in \Omega} W(t_0, x(t_0), v),$$

bestimmte (closed-loop) Steuerung zulässig ist, dann ist die entsprechende open-loop Steuerung $u^*(\cdot)$ mit der zugehörigen Zustandstrajektorie $x^*(\cdot)$ eine optimale Lösung von (4.1).

4.5.3. Optimalitätsbedingungen für die Aufgaben mit stückweise konstanten Steuerungen (open-loop)

Wir können eine notwendige Bedingung für das Problem (4.12) auch in open-loop-Form formulieren und beweisen. Dafür betrachten wir $x(t, v)$ - eine Lösung der Prozessgleichung:

$$\frac{\partial x(t, v)}{\partial t} = f(t, x(t, v), v), \quad \forall (t, v) \in [t_k, t_{k+1}) \times \Omega,$$

mit $x(t_k, v) = x(t_k)$ für $k = 0, \dots, n-1$, für alle $v \in \Omega$ und bei gegebenem $x(t_0) = x_0$. Die Hamilton-Funktion für diese Aufgabe hat die besondere Gestalt $H(x(t, v), v, \lambda(t, v), t) = g(t, x(t, v), v) + \lambda(t, v) \cdot f(t, x(t, v), v)$. Hierbei betrachten wir den Fall $n = 1$ (ein Steuerungsintervall).

Satz 4.10 *Notwendige Bedingung als open-loop. Seien $u^*(\cdot), x^*(\cdot)$ optimal mit $u^*(t) = u^*(t_0), x^*(t) = x(t, u^*(t_0))$ für alle $t \in [t_0, t_1)$, dann folgt:*

$$u^*(t_0) = \arg \max_{v \in \Omega} \{S(t_0, v) + \lambda(t_0, v) \cdot x(t_0)\},$$

wobei $\lambda(t, v)$ eine Lösung der Gleichung

$$\dot{\lambda}(t, v) = -\frac{\partial}{\partial x} H(x^*(t, v), v, \lambda(t, v), t), \quad \forall (t, v) \in [t_0, t_1) \times \Omega, \quad (4.13)$$

und $S(t, v)$ eine Lösung von

$$-\frac{\partial S(t, v)}{\partial t} = H(x^*(t, v), v, \lambda(t, v), t) - \frac{\partial H(x^*(t, v), v, \lambda(t, v), t)}{\partial x} x^*(t, v) \quad (4.14)$$

mit $x(t_0, v) = x(t_0) = x_0$ ist.

Die Transversalitätsbedingungen

$$\lambda(t_1, v) = \frac{\partial q(x^*(t_1))}{\partial x} \quad \text{und}$$

$$S(t_1, v) = -\frac{\partial q(x^*(t_1))}{\partial x} \cdot x^*(t_1, v) + q(x^*(t_1)) \quad \text{sind für alle } v \in \Omega \text{ erfüllt.}$$

Beweis:

Wir betrachten die Gleichung (4.14):

$$-\frac{\partial S(t, v)}{\partial t} = H(x^*(t, v), v, \lambda(t, v), t) - \frac{\partial H(x^*(t, v), v, \lambda(t, v), t)}{\partial x} x^*(t, v),$$

diese ist äquivalent zu:

$$-\frac{\partial S(t, v)}{\partial t} = g(t, x^*(t, v), v) + \lambda(t, v) \cdot f(t, x^*(t, v), v) - \frac{\partial H(x^*(t, v), v, \lambda(t, v), t)}{\partial x} x^*(t, v).$$

Es folgt aus (4.13):

$$-\frac{\partial S(t, v)}{\partial t} = g(t, x^*(t, v), v) + \lambda(t, v) \cdot \dot{x}^*(t, v) + \dot{\lambda}(t, v) \cdot x^*(t, v).$$

Wir integrieren diese Gleichung auf $[t, t_1]$ und erhalten:

$$-S(t_1, v) + S(t, v) = \int_t^{t_1} g(t, x^*(t), v) dt + \lambda(t_1, v) \cdot x^*(t_1, v) - \lambda(t, v) \cdot x^*(t, v).$$

Aus dem vorigen Unterkapitel folgt

$$\int_t^{t_1} g(t, x(t, v), v) dt = W(t, x, v) - q(x^*(t_1, v)) = W(t, x, v) - q(x^*(t_1)).$$

Mit Hilfe der Transversalitätsbedingung erhalten wir:

$$\begin{aligned} -S(t_1, v) &= \frac{\partial q(x^*(t_1))}{\partial x} \cdot x^*(t_1, v) - q(x^*(t_1)) \\ &= \lambda(t_1, v) \cdot x^*(t_1, v) - q(x^*(t_1)). \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} S(t, v) &= W(t, x, v) - \lambda(t, v) \cdot x(t, v) \\ \text{oder} \quad W(t, x, v) &= S(t, v) + \lambda(t, v) \cdot x^*(t, v). \end{aligned}$$

Da die Steuerung stückweise konstant gewählt wird, erhalten wir

$$\hat{u}(t, x) = \hat{u}(t_0, x_0) = \arg \max_{v \in \Omega} W(t_0, x_0, v).$$

Durch $x(t_0, v) = x(t_0) = x_0$ und bei einem gegebenen x_0 erhalten wir:

$$\hat{u}(t_0, x_0) = u^*(t_0) = \arg \max_{v \in \Omega} \{S(t_0, v) + \lambda(t_0, v) \cdot x(t_0)\}.$$

Im Falle der n Steuerungsintervalle erhalten wir eine analoge notwendige Bedingung.

Zu maximieren sei das Zielfunktional:

$$J(u) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g(t, x(t), u(t_k)) dt + q(x(t_n))$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t_k)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad x(t_0) = x_0, \quad u(t_k) \in \Omega.$$

Seien $u^*(\cdot), x^*(\cdot)$ optimal mit $u^*(t) = u^*(t_k), \quad x^*(t) = x(t, u^*(t_k))$, für $k = 0, \dots, n-1$, dann folgt:

$$u^*(t_k) = \arg \max_{u \in \Omega} \{S(t_k, u) + \lambda(t_k, u) \cdot x(t_k)\},$$

wobei $S(t, v)$ die Lösung von

$$-\frac{\partial S(t, v)}{\partial t} = H(x^*(t, v), v, \lambda(t, v), t) - \frac{\partial H(x^*(t, v), v, \lambda(t, v), t)}{\partial x} x^*(t, v) \quad (4.15)$$

und $\lambda(t, v)$ die Lösung von

$$\dot{\lambda}(t, v) = -\frac{\partial}{\partial x} H(x^*(t, v), v, \lambda(t, v), t), \quad \forall (t, v) \in [t_k, t_{k+1}) \times \Omega, \quad (4.16)$$

mit

$$\begin{aligned} x(t_0, v) &= x(t_0) = x_0, & x(t_k, v) &= x(t_k) = x(t_k - 0, u^*(t_{k-1})), \\ \lambda(t_k - 0, v) &= \lambda(t_k, u^*(t_k)), & S(t_k - 0, v) &= S(t_k, u^*(t_k)) \text{ ist.} \end{aligned}$$

Die Transversalitätsbedingungen

$$\begin{aligned} \lambda(t_n, v) &= \frac{\partial q(x^*(t_n))}{\partial x}, \\ S(t_n, v) &= -\frac{\partial q(x^*(t_n))}{\partial x} \cdot x^*(t_n) + q(x^*(t_n)) \end{aligned}$$

sind erfüllt. □

4.6. Berechnung optimaler Fangraten

4.6.1. Vorbetrachtung für den eindimensionalen Fall

Wir betrachten eine eindimensionale Aufgabe der Optimalsteuerung.

$$\begin{aligned} J(u_1) &= \int_0^T \left\{ p_1 u_1(t) x_1(t) - c \cdot u_1(t) \right\} e^{-\delta t} dt \rightarrow \max_u \quad (4.17) \\ &0 \leq u_1(t) \leq u_{\max}, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

mit einer Nebenbedingung:

$$\dot{x}_1(t) = \varepsilon_1 x_1(t) \cdot \left(1 - \frac{x_1(t)}{K_1}\right) - s_1 u_1(t) x_1(t), \quad (4.18)$$

mit positiven Konstanten $p_1, c, \varepsilon_1, K_1, \delta, s_1$, dem Anfangswert $x_1(0) = x_{10}$ und ohne Endbedingungen.

In diesem Fall kommen drei verschiedene Steuerungen, die man relativ leicht berechnen kann, in Frage.

Die Hamiltonfunktion ist hier:

$$\begin{aligned} H(x, u, \lambda, t) &= \left\{ p_1 u_1 x_1 - c \cdot u_1 \right\} e^{-\delta t} + \lambda_1 \left(\varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right) - s_1 u_1 x_1 \right) \\ &= \left(e^{-\delta t} (p_1 x_1 - c) - \lambda_1 s_1 x_1 \right) u_1 + \lambda_1 \varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1}\right). \end{aligned}$$

Daher folgt die adjungierte Differentialgleichung:

$$\dot{\lambda}_1 = -H_{x_1} = -p_1 u_1 e^{-\delta t} - \lambda_1 \left(\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_1 x_1}{K_1} - s_1 u_1 \right).$$

Nun berechnen wir die Schaltfunktion

$$\sigma_1(x, \lambda, t) = H_{u_1}(x, u, \lambda, t) = e^{-\delta t} (p_1 x_1 - c) - \lambda_1 s_1 x_1.$$

Um die Hamiltonfunktion zu maximieren, muss für die optimale Steuerung

$$u_1^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{für } e^{-\delta t} (p_1 x_1 - c) - \lambda_1 s_1 x_1 > 0 \\ 0, & \text{für } e^{-\delta t} (p_1 x_1 - c) - \lambda_1 s_1 x_1 < 0, \end{cases}$$

gelten. Singuläre Steuerungen treten auf, falls gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) = \sigma_1(x(t), \lambda(t), t) &= 0 \text{ für } t \in [t_1, t_2] \subseteq [t_0, T], \\ \iff \lambda_1(t) &= \frac{e^{-\delta t}}{s_1 x_1(t)} (p_1 x_1(t) - c) = \frac{e^{-\delta t}}{s_1} \left(p_1 - \frac{c}{x_1(t)} \right). \end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich aus der Bedingung

$$\frac{d\sigma_1}{dt} = -\delta e^{-\delta t} (p_1 x_1 - c) + e^{-\delta t} p_1 \dot{x}_1 - \dot{\lambda}_1 s_1 x_1 - \lambda_1 s_1 \dot{x}_1 = 0,$$

wobei \dot{x}_1 aus der Prozessgleichung und $\dot{\lambda}_1$ aus der adjungierten Gleichung eingesetzt werden können, dass $x_1^*(t) = x_1^{\text{sing}}$ mit Hilfe der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{-2p_1 \varepsilon_1}{K_1} x_1^2 + \left(-\delta p_1 + p_1 \varepsilon_1 + \frac{c \varepsilon_1}{K_1} \right) x_1 + \delta c &= 0, \\ \text{bzw. } x_1^2 + \left(\frac{K_1 \delta}{2\varepsilon_1} - \frac{K_1}{2} - \frac{c}{2p_1} \right) x_1 - \frac{\delta c K_1}{2p_1 \varepsilon_1} &= 0 \end{aligned}$$

berechnet werden kann. Diese Gleichung hat zwei Nullstellen verschiedener Vorzeichen, da der Term $-\frac{\delta c K_1}{2p_1 \varepsilon_1}$ mit gegebenen Annahmen negativ ist. Wir interessieren uns aber nur für die positive Lösung, die sich zu

$$x_1^{sing} = \frac{K_1}{4} + \frac{c}{4p_1} - \frac{K_1 \delta}{4\varepsilon_1} + \sqrt{\left(\frac{K_1}{4} + \frac{c}{4p_1} - \frac{K_1 \delta}{4\varepsilon_1}\right)^2 + \frac{\delta c K_1}{2p_1 \varepsilon_1}}$$

ergibt. Zu diesem optimalen Zustand lässt sich unter Verwendung der Prozessgleichung eine optimale Steuerung zu

$$\begin{aligned} u_1^*(t) &= u_1^{sing} = \frac{\varepsilon_1}{s_1} \left(1 - \frac{x_1^{sing}}{K_1}\right) \\ &= \frac{\varepsilon_1}{s_1} \left(\frac{3}{4} - \frac{c}{4p_1 K_1} + \frac{\delta}{4\varepsilon_1} - \frac{1}{K_1} \sqrt{\left(\frac{K_1}{4} + \frac{c}{4p_1} - \frac{K_1 \delta}{4\varepsilon_1}\right)^2 + \frac{\delta c K_1}{2p_1 \varepsilon_1}}\right) \end{aligned}$$

berechnen. Für unsere Modelle wählen wir u_{\max} hinreichend groß, so dass die Bedingung $u_1^{sing} < u_{\max}$ gilt (ein eindimensionaler Fall, wo die singuläre Steuerung nicht zulässig ist, wäre trivial: eine optimale Lösung hätte in diesem Falle eine Bang-bang-Struktur).

Nun zerlegen wir das gesamte Intervall $[0; T]$ in Teilintervalle $[t_i; t_{i+1}]$, so dass auf jedem davon entweder eine Bang-bang-Steuerung oder eine singuläre Steuerung auftritt. Im Allgemeinen gibt es kein Kriterium für das Vorkommen von Bang-bang Steuerungen, es hängt in der Regel von dem Anfangswert x_{10} ab.

Aus wirtschaftlichen Überlegungen führen wir an dieser Stelle eine zusätzliche Bedingung ein. Damit wir einen Gewinn auf dem gesamten Planungshorizont $[0; T]$ anstreben, verlangen wir, dass ein gewisses Verhältnis zwischen Fischpreisen p_1 und Kutterkosten c gewährleistet wird. Dementsprechend muss für alle Funktionswerte $x(t)$, $t \in [0; T]$, die sich aus der Prozessgleichung (4.18) resultieren, die Bedingung $p_1 x_1(t) - c \geq 0$ gelten, anders gesagt, die Fischpreise dürfen nicht zu niedrig sein. Dies ist logisch, sonst hätten wir (zumindest auf einem Intervall $[t_k; t_{k+1}]$) überhaupt keinen Gewinn geleistet (vgl. (4.17)).

Falls $x_1(0) = x_{10} < x_1^{sing}$ ist, kann die singuläre Steuerung im ersten Intervall $[t_0; t_1] = [0; t_1]$ nicht gewählt werden, da sonst $x_1(t) = x_1^{sing}$ wäre. Würden wir in diesem Falle maximal (also mit $u(t) = u_{\max}$) fangen (also alle Fischkutter einsetzen), würde unsere Population auf den Nullzustand fallen. Das würde dazu führen, dass die Formeln

$$e^{-\delta t}(p_1 x_1 - c) - \lambda_1 s_1 x_1 > 0, \quad \text{gdw. } \lambda_1 < \frac{e^{-\delta t}}{s_1} \left(p_1 - \frac{c}{x_1}\right),$$

und

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_1 &= -p_1 u_{\max} e^{-\delta t} - \lambda_1 \left(\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_1 x_1}{K_1} - s_1 u_{\max} \right) \\
 &= -p_1 u_{\max} e^{-\delta t} + \lambda_1 s_1 u_{\max} - \lambda_1 \left(\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_1 x_1}{K_1} \right) \\
 &< -p_1 u_{\max} e^{-\delta t} + e^{-\delta t} \left(p_1 - \frac{c}{x_1} \right) u_{\max} - \lambda_1 \varepsilon_1 \left(1 - \frac{2x_1}{K_1} \right) \\
 &= -\frac{c e^{-\delta t}}{x_1} u_{\max} - \lambda_1 \varepsilon_1 \left(1 - \frac{2x_1}{K_1} \right) < 0
 \end{aligned}$$

gelten würden. Damit wäre $\lambda_1(t)$ monoton fallend und es gäbe keine Umschaltunkte. Die Transversalitätsbedingung $\lambda_1(T) = 0$ wäre erfüllt, aber die Population würde zu diesem Zeitpunkt eventuell gar nicht mehr vorhanden sein. Das heißt, im Falle $x_1(0) = x_{10} < x_1^{sing}$ muss zuerst die Steuerung $u(t) = 0$ auf dem Intervall $[t_0; t_1]$ angewendet werden, damit sich die Population erholt.

Falls $x_1(0) = x_{10} > x_1^{sing}$ ist, kann die singuläre Steuerung im ersten Intervall $[t_0; t_1] = [0; t_1]$ ebenfalls nicht vorkommen. Würden wir in diesem Falle nicht fangen (also mit $u(t) = 0$ steuern), würde die Population den maximalen Zustand erreichen. Dies würde wiederum bedeuten, dass die durch die Prozessgleichung

$$\dot{x}_1(t) = \varepsilon_1 x_1(t) \cdot \left(1 - \frac{x_1(t)}{K_1} \right), \quad x_1(0) = x_{10},$$

die $x_1(t) = \frac{K_1 x_{10} e^{\varepsilon_1 t}}{K_1 + x_{10}(e^{\varepsilon_1 t} - 1)}$ als Lösung besitzt, beschriebene Population den Zustand $x(t) = K_1$ anstrebt. Dabei muss auch die Bedingung

$$e^{-\delta t} (p_1 x_1 - c) - \lambda_1 s_1 x_1 < 0, \quad \text{gdw.} \quad \lambda_1 > \frac{e^{-\delta t}}{s_1 x_1} (p_1 x_1 - c) \geq 0$$

gelten.

Für die adjungierte Gleichung ergäbe sich damit

$$\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 \left(\varepsilon_1 - \frac{2\varepsilon_1 x_1}{K_1} \right) = -\lambda_1 \varepsilon_1 \left(1 - \frac{2x_1}{K_1} \right) \geq 0.$$

Dieses würde zu Folge führen, dass $\lambda_1(t)$ auf dem ganzen Intervall $[t_0; t_1]$ monoton wächst (besser gesagt, nicht fällt) und t_1 kein Schalterpunkt sein könnte. t_1 könnte auch kein Endpunkt T sein, da die Transversalitätsbedingung $\lambda_1(T) = 0$ offensichtlich nicht erfüllt wäre. Dies alles führt uns zur Erkenntnis, dass im Falle $x_1(0) = x_{10} > x_1^{sing}$ die Steuerung $u(t) = u_{\max}$ auf dem ganzen Intervall $[t_0; t_1]$ genommen werden muss, bis man den singulären Zustand erreicht.

Auf dem letzten Intervall $[t_{n-1}; t_n]$, $t_n = T$ (solange keine Endbedingung $x_1(T)$ vorhanden ist) muss immer maximal gefangen werden, damit $\lambda_1(T) = 0$ erfüllt wird.

4. Grundlagen der Optimalsteuerung

Eine allgemeine Methodik zur Berechnung und Abschätzung der Umschaltunkte ist noch nicht bekannt. Zelikin und Borisov betrachten in [40] u.A. spezielle Prozesse, die sowohl in u , als auch in x linear sind. Für solche Prozesse gilt der Satz von Feldbaum, der besagt, dass die Anzahl von Umschaltpunkten einer optimalen Steuerung endlich ist (vgl. [30]).

Unsere Aufgabe (4.17)-(4.18) ist linear in u und nichtlinear in x . Manchmal kann man die Anzahl von Umschaltpunkten bei solchen Prozessen mit Hilfe von Adjungierten abschätzen, es kann aber keine allgemeine Aussage getroffen werden.

Nun betrachten wir eine konkrete Aufgabe. Zu maximieren sei das Zielfunktional

$$J(u) = \int_0^T \left\{ \frac{1130 \cdot 1.5 \cdot 250}{10^6} \cdot u_1(t)x_1(t) - \frac{500 \cdot 250}{10^6} \cdot u_1(t) \right\} e^{-0.06t} dt \rightarrow \max_u$$

$$0 \leq u_1(t) \leq 900, \quad 0 \leq t \leq 20, \quad (4.19)$$

mit einer Nebenbedingung:

$$\dot{x}_1(t) = 0.4x_1(t) \cdot (1 - x_1(t)) - \frac{1.5 \cdot 250}{10^6} \cdot u_1(t)x_1(t),$$

mit dem Anfangswert $x_1(0) = 0.25$ und ohne Endbedingungen. In diesem Beispiel haben wir

$$\delta = 0.06; \quad p_1 = 0.42375; \quad \varepsilon_1 = 0.4; \quad s_1 = 0.000375; \quad K_1 = 1; \quad c = 0.125.$$

Hier erhalten wir folgende Lösung:

$$x_1^{sing} \approx 0.60883,$$

$$u_1^{sing} \approx 417.227.$$

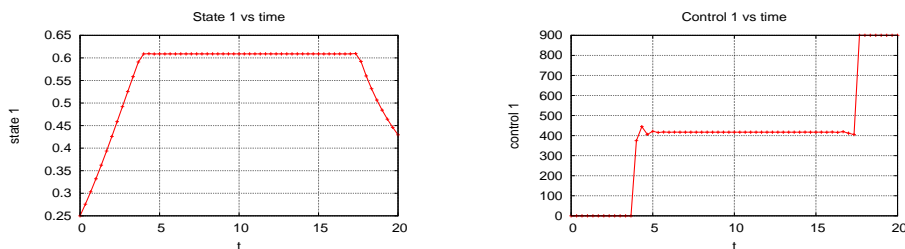


Abbildung 4.4.: Optimale Entwicklung der Population (links), optimale Steuerung (rechts), Fall $x_1(0) < x_1^{sing}$

Wird der Anfangswert der Population größer als der berechnete singuläre Zustand, z.B. $x_1(0) = 0.75$, erhalten wir solchen Verlauf der Lösung:

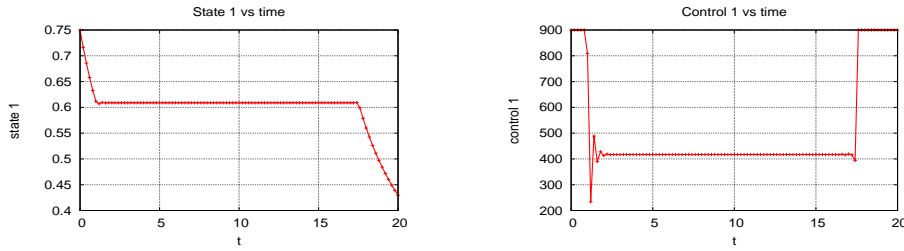


Abbildung 4.5.: Optimale Entwicklung der Population (links), optimale Steuerung (rechts), Fall $x_1(0) > x_1^{sing}$

4.6.2. Vorbetrachtung für einen mehrdimensionalen Fall

Nun betrachten wir ein aus n Populationen bestehendes System. Zu maximieren ist jetzt

$$J(u) = \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^n p_i u_i x_i - c \cdot \sum_{i=1}^n u_i \right\} e^{-\delta t} dt \rightarrow \max_u \quad (4.20)$$

$$0 \leq u_i(t) \leq u_{\max}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

mit n Nebenbedingungen ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$\dot{x}_i(t) = \varepsilon_i x_i \cdot \left(1 - \frac{x_i}{K_i}\right) - s_i u_i x_i - \sum_{r=1}^n \gamma_{ir} x_i x_r, \quad (4.21)$$

positiven Konstanten $p_i, c, \varepsilon_i, K_i, \delta, s_i, \gamma_{ir}$ Anfangswerten $x_i(0) = x_{i0}$ und ohne Endbedingungen. Wir diese Aufgabe bilden wir die Hamiltonfunktion:

$$H(x, u, \lambda, t) = \left\{ \sum_{i=1}^n p_i u_i x_i - c \cdot \sum_{i=1}^n u_i \right\} e^{-\delta t} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\varepsilon_i x_i \cdot \left(1 - \frac{x_i}{K_i}\right) - s_i u_i x_i - \sum_{r=1}^n \gamma_{ir} x_i x_r \right).$$

Durch Differenzieren von Schaltfunktionen und Einsetzen der Adjungierten, erhalten wir ein Gleichungssystem. Es enthält genau n Gleichungen.

4. Grundlagen der Optimalsteuerung

Die i -te Gleichung ($i = 1, \dots, n$) hat die Gestalt (4.22)

$$\delta c + l_i x_i^2 + m_i x_i + \sum_{k=1}^n z_k x_i x_k = 0, \quad (4.22)$$

$$l_i = \frac{-2p_i \varepsilon_i}{K_i},$$

$$m_i = -\delta p_i + p_i \varepsilon_i + \frac{c \varepsilon_i}{K_i} + \sum_{r=1}^n \frac{s_i}{s_r} c \gamma_{ri} \text{ mit } \gamma_{ii} = 0,$$

$$z_k = -p_i \gamma_{ik} - \frac{s_i}{s_k} p_k \gamma_{ki} \text{ mit } \gamma_{ii} = 0 \text{ (d.h. } z_i = 0),$$

schreiben. Diese Gleichungen charakterisieren einen optimalen singulären Zustand.

Für $n = 3$ erhalten wir die Formeln (4.6).

Numerische Methoden für verschiedene Aufgaben der Optimalsteuerung

5.1. Numerische Lösung des Steuerungsproblems

Auf Grund der Komplexität von Optimalsteuerungsproblemen werden diese Aufgaben in der Regel numerisch berechnet. Die Methoden für das numerische Lösen von optimalen Steuerungsproblemen werden in der Literatur in zwei Gruppen unterteilt: direkte und indirekte.

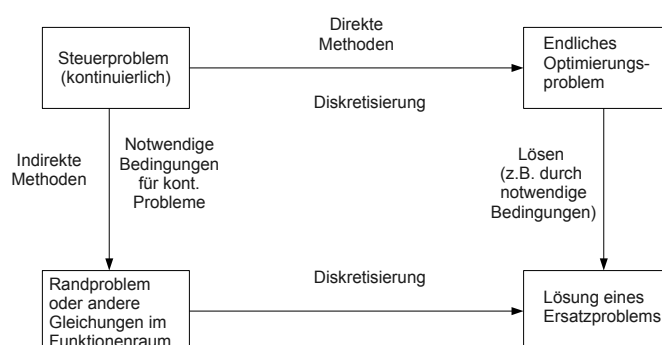


Abbildung 5.1.: Numerische Lösung des Steuerungsproblems

Als indirekt werden die Verfahren bezeichnet, die in irgendeiner Form explizit auf die notwendigen Optimalitätsbedingungen der Optimalsteuerungstheorie (e.g., das

Pontrjaginsche Maximumprinzip) zurückgreifen, denen die optimale Lösung genügen muss.

Diese Verfahren benötigen die Kovariablen, die Hamilton-Funktion und das Maximumprinzip in der Gestalt, die im Satz 4.1 formuliert worden ist. Häufig wird bei indirekten Methoden das Steuerungsproblem als nichtlineare Randwertaufgabe betrachtet, welche durch Eliminieren der Steuerung mit den notwendigen Optimalitätsbedingungen der ursprünglichen Aufgabe entstanden ist. Auf dieser Basis wurde eine Reihe von Software (so etwa wie BNDSCO) entwickelt, bei der das mehrfache Schießverfahren („multiple shooting technique“) für die Lösung von nichtlinearen Randwertaufgaben benutzt wird. Hier werden also die notwendigen Optimalitätsbedingungen im (unendlich-dimensionalen) Funktionenraum ausgenutzt, anschließend muss für die numerische Lösung des Randwertproblems diskretisiert werden.

Direkte Methoden dagegen behandeln das Steuerungsproblem sofort als eine approximierende Optimierungsaufgabe (siehe Abb. 5.1) in einem entsprechenden endlich-dimensionalen Raum. Diese Methoden benötigen keine Information über die adjungierten Variablen und erfordern minimale Kenntnisse über das Optimierungsproblem und entsprechend kaum Vorbereitungen. Eine übliche Klasse numerischer Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen bildet das sogenannte Kollokationsverfahren, das im Weiteren erklärt wird.

Der Nachteil bei der indirekten Methode ist die Tatsache, dass für jedes Optimalsteuerungsproblem Kenntnisse über das Verhalten der Lösung, z.B. durch die Struktur des Maximumprinzips (durch die adjungierten Variablen und die Hamilton-Funktion) bekannt sein müssen. Außerdem konvergiert das mehrfache Schießverfahren nur bei sehr guten Startlösungen.

5.2. Direkte Methoden

Die direkte Methode ist eine Zusammensetzung aus einer endlich-dimensionalen Approximation und einem Optimierungsalgorithmus. Wir wollen uns überlegen, wie man ein kontinuierliches Kontrollsystem durch ein diskretes System approximieren kann.

In der Theorie verwendet man in der Regel zwei Vorgehensweisen zum direkten Lösen von Optimalsteuerungsaufgaben: direkte Kollokation und direktes Schießverfahren. Bei den beiden entstehen nichtlineare Optimierungsaufgaben, die durch notwendige Bedingungen (z.B. SQP-Methode) gelöst werden.

5.2.1. Direkte Kollokation

Bei direkten Kollokationsmethoden werden sowohl Steuerungen als auch Zustandsvariablen diskretisiert. Mittels der Approximation von stetigen (zumindest stückweise) Funktionen durch stückweise Polynome wird das unendlich-dimensionale Optimalsteuerungsproblem in ein endlich-dimensionales nichtlineares Optimierungsproblem umgeformt. Die Auswertung von notwendigen Optimalitätsbedingungen für die Funktionenräume ist damit nicht erforderlich.

Das Grundprinzip des Verfahrens besteht darin, dass die Verläufe der Zustands- und Steuergrößen durch Ansatzfunktionen beschrieben werden. Im Weiteren wird dieses endlich-dimensionale Optimierungsproblem mit Hilfe von Kollokationsbedingungen an den gewählten Diskretisierungspunkten gelöst.

Ein Beispiel ist das DIRCOL-Programm von Oskar v. Stryk, in dem stückweise kubische Ansatzfunktionen für die Zustandsvariablen und stückweise lineare Steuerungen implementiert werden [37], [38]. Somit transformiert DIRCOL kontinuierliche Optimalsteuerungsprobleme in diskrete Optimierungsprobleme und löst sie dann mit Hilfe eines SQP-Solver wie NPSOL.

Wir betrachten die Standard-Aufgabe (3.1). Im Zeitintervall $[t_0, T]$ wähle man Diskretisierungspunkte

$$t_0 := t_1 < t_2 < \dots < t_N =: T.$$

Die Optimierungsvariable Y besteht aus Steuerungen $u(t)$ und Zuständen $x(t)$ an den Gitterpunkten t_k , $k = 1, \dots, N$:

$$Y = [x(t_1), u(t_1), \dots, x(t_N), u(t_N)] \in \mathbb{R}^{N(n+m)}.$$

Für $t_k < t < t_{k+1}$, $k = 1, \dots, N - 1$ wird die Steuerung als eine stückweise lineare Funktion zwischen $u(t_k)$ und $u(t_{k+1})$ angenommen (s. Abb. 5.2):

$$u_{app}(t) = u(t_k) + (t - t_k) \frac{u(t_{k+1}) - u(t_k)}{t_{k+1} - t_k}, \quad k = 1, \dots, N - 1.$$

Die Zustände werden durch durch eine stückweise kubische, stetig differenzierbare Funktion $x_{app}(t)$ approximiert. Mit $h_k = t_{k+1} - t_k$ erhalten wir:

$$x_{app}(t) = \sum_{q=0}^3 c_q^{(k)} \left(\frac{t - t_k}{h_k} \right)^q, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, \dots, N - 1.$$

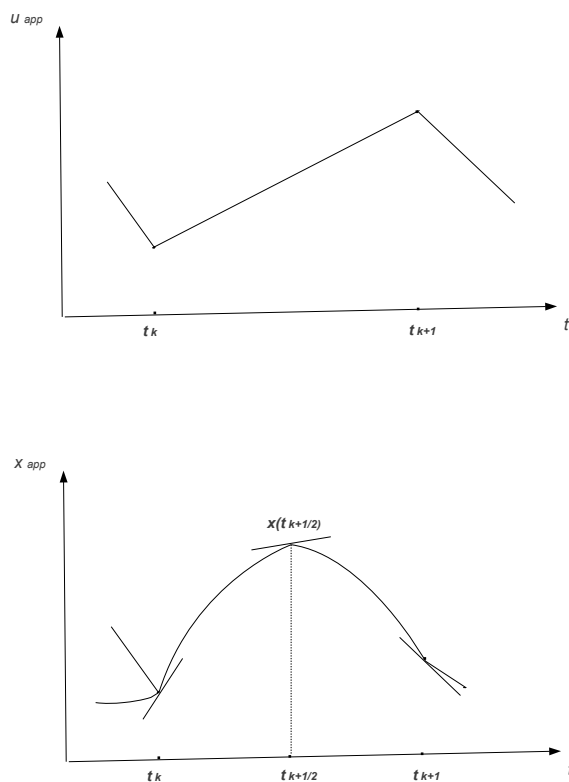


Abbildung 5.2.: Stückweise lineare Approximation der Steuerung (oben) und stückweise kubische Approximation der Trajektorie (unten)

Nutzt man die Stetigkeitsbedingungen und die Differenzierbarkeit an den Punkten t_k , $k = 1, N - 1$, so bekommt man die Unbekannten $c_q^{(k)}$ als Funktionen von $x(t_k)$, $x(t_{k+1})$, $u(t_k)$ und $u(t_{k+1})$:

$$\begin{aligned} c_0^{(k)} &= x(t_k), \\ c_1^{(k)} &= h_k f_k, \\ c_2^{(k)} &= 3[x(t_{k+1}) - x(t_k)] - h_k[f_{k+1} + 2f_k], \\ c_3^{(k)} &= -2[x(t_{k+1}) - x(t_k)] + h_k[f_{k+1} + f_k]. \end{aligned}$$

Dabei ist $f_k = f(x(t_k), u(t_k), t_k)$, $k = 1, \dots, N - 1$.

Weiterhin muss die Kollokationsbedingung:

$$f(x_{app}(t_{k+\frac{1}{2}}), u_{app}(t_{k+\frac{1}{2}}), t_{k+\frac{1}{2}}) - \dot{x}_{app}(t_{k+\frac{1}{2}}) = 0$$

für $k = 1, \dots, N - 1$ gelten. Hier wird der Ausdruck $\dot{x}_{app}(t_{k+\frac{1}{2}})$ durch

$$\begin{aligned} \dot{x}_{app}(t_{k+\frac{1}{2}}) &= \frac{c_1^{(k)}}{h_k} + \frac{2c_2^{(k)}}{h_k^2} (t_{k+\frac{1}{2}} - t_k) + \frac{3c_3^{(k)}}{h_k^3} (t_{k+\frac{1}{2}} - t_k)^2 \\ &= \frac{c_1^{(k)}}{h_k} + \frac{2c_2^{(k)}}{h_k^2} \cdot \frac{h_k}{2} + \frac{3c_3^{(k)}}{h_k^3} \cdot \frac{h_k^2}{4} \\ &= \frac{c_1^{(k)}}{h_k} + \frac{c_2^{(k)}}{h_k} + \frac{3c_3^{(k)}}{4h_k} \\ &= \frac{h_k f_k}{h_k} + \frac{3[x(t_{k+1}) - x(t_k)] - h_k[f_{k+1} + 2f_k]}{h_k} \\ &\quad + \frac{-6[x(t_{k+1}) - x(t_k)] + 3h_k[f_{k+1} + f_k]}{4h_k} \\ &= f_k + \frac{3[x(t_{k+1}) - x(t_k)]}{2h_k} - [f_{k+1} + 2f_k] + \frac{3}{4} \cdot [f_{k+1} + f_k] \\ &= \frac{3[x(t_{k+1}) - x(t_k)]}{2h_k} - \frac{1}{4} \cdot [f_{k+1} + f_k] \end{aligned}$$

ersetzt.

Daraus resultiert das endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsproblem:

Minimiere $J(Y) = J(x(t_N))$,

mit $Y = (x(t_1), u(t_1), \dots, x(t_N), u(t_N))^T \in \mathbb{R}^{N(n+m)}$,

und Kollokationsbedingung:

$$f(x_{app}(t_{k+\frac{1}{2}}), u_{app}(t_{k+\frac{1}{2}}), t_{k+\frac{1}{2}}) - \left(\frac{3[x(t_{k+1}) - x(t_k)]}{2h_k} - \frac{1}{4} \cdot [f_{k+1} + f_k] \right) = 0,$$

für $k = 1, \dots, N - 1$.

Werden bei einer Optimalsteuerungsaufgabe zusätzliche Nebenbedingungen gestellt, so werden diese Bedingungen an den diskreten Punkten t_k , $1, \dots, N - 1$ ausgewertet.

Die Eingabe erfolgt über FORTRAN-Subroutinen `USRSTV` und `USROBJ`, die Dimensionen des Problems und jeweilige Zustands- und Steuerbeschränkungen werden durch `DATDIM` und `DATLIM` ermittelt (genauere Beschreibung im Anhang A.3 zu finden).

5.2.2. Direktes Schießverfahren

Das direkte Schießverfahren diskretisiert nur die Steuerung und erzeugt mit der folgenden numerischen Integration der Differentialgleichung ein nichtlineares

Optimierungsproblem, welches ebenfalls mit dem SQP-Verfahren gelöst wird.

Matthias Gerds entwickelte das Fortran-77-Paket OC-ODE (Optimal Control of Ordinary-Differential Equations) für die numerische Lösung der optimalen Steuerung. OC-ODE ermittelt numerische Lösungen eines Optimalsteuerproblems. Das Zielfunktional wird als einfaches Mayer-Funktional gefordert.

Das Programm ermöglicht eine numerische Schätzung der Steuerungen mittels des direkten Schießverfahrens. Die Steuerung u wird in dem Programm in den Punkten

$$G_i = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}, \quad N \geq 2$$

approximiert. Sei $k \in N$, $k \geq 1$ und die Folge $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N+2k-2}$:

$$\begin{cases} \tau_1 = \dots = \tau_k = t_1, \\ \tau_{k+1} = t_2, \\ \vdots \\ \tau_{N+k-2} = t_{N-1}, \\ \tau_{N+k-1} = \dots = \tau_{N+2k-2} = t_N. \end{cases}$$

Definition 5.1 Eine wie folgt definierte Funktion $B_{ik}(\cdot)$ für $i = 1, \dots, N + k - 2$:

$$B_{i1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \tau_i \leq t \leq \tau_{i+1}, \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$B_{ik}(t) = \frac{t - \tau_i}{\tau_{i+k-1} - \tau_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{\tau_{i+k} - t}{\tau_{i+k} - \tau_i} B_{i+1,k-1}(t).$$

heißt *B-spline*.

Eine Spline-Kurve, deren Darstellung auf B-Splines beruht, nennt man B-Spline-Kurve. Bestimmt wird die Kurve durch sogenannte De-Boor-Punkte $c_i \in \mathbb{R}^m$, für $i = 1, \dots, N + k - 2$, mit denen sich das Aussehen der Kurve steuern lässt. Die Steuerfunktionen u wird durch die

$$u_N(t) = u_N(t, c_1, c_2, \dots, c_{N+k-2}) = \sum_{i=1}^{N+k-2} c_i B_{ik}(t)$$

ersetzt.

In Spezialfällen $k = 1$ und $k = 2$ sind diese De-Boor-Punkte die Funktionswerte $c_i = u_N(t_i) \approx u(t_i)$. Für $k = 1$ ist $u_N(\cdot)$ stückweise konstant. Für $k = 2$ ist die Funktion $u_N(\cdot)$ stetig und stückweise linear

$$u_N(t) = u_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} (u_{i+1} - u_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Für $k > 2$ ist $u_N(\cdot)$ $(k - 2)$ mal stetig differenzierbar.

Für die Zustände

$$G_x = \{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_M, \bar{t}_{M+1}\}, \quad M \geq 1$$

mit $t_0 = \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < \dots < \bar{t}_{M+1} = T$ wird in jedem Zustandsgitter-Teilintervall $[\bar{t}_i, \bar{t}_{i+1}]$, $i = 1, \dots, M$ die Prozessgleichung $\dot{x} = h(x, u)$ für einen unbekanntem Anfangswert $x_i = x(\bar{t}_i)$ und die durch u_N ersetzte Steuerung u mit Runge-Kutta-Methode gelöst.

5.3. Indirekte Methoden

In diesem Unterkapitel werden die wesentlichen Aspekte der anderen Verfahrensklasse, nämlich der indirekten Verfahren, dargestellt. Bei der Lösung von Optimalsteuerungsaufgaben mit indirekten Verfahren besteht die Grundidee darin, den Steuerprozess mit Hilfe der notwendigen Bedingungen (e.g. des Maximumprinzips von Pontrjagin) auf ein Randwertproblem zu übertragen.

In Abschnitt 4.1.1 wurde das Pontrjaginsche Maximumprinzip beschrieben. Bei indirekten Methoden versucht man, unter Ausnutzung der Maximumbedingung, die Steuervariable u aus der Prozessgleichung und der adjungierten Differentialgleichung zu eliminieren. So erhält man in der Regel ein Randwertproblem in den Variablen $x \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u^*(x, \lambda)) = c_1(t, x, \lambda), \\ \dot{\lambda} &= -H_x(t, x, u^*(x, \lambda), \lambda) = c_2(t, x, \lambda).\end{aligned}$$

Die Randbedingungen sind durch die Randbedingungen des Zustands und die Transversalitätsbedingungen gegeben.

Die Anwendung indirekter Verfahren erfordert umfangreiche Kenntnisse der Theorie optimaler Steuerprozesse. Außerdem werden zur Lösung eines konkreten Randwertproblems relativ genaue Startschätzungen der adjungierten Funktion benötigt, welche oft schwierig zu bekommen sind. Andererseits hat die berechnete Lösung häufig eine sehr hohe Genauigkeit.

5.3.1. Einfach-Schießverfahren

Zu betrachten sei das folgende Randwertproblem:

Definition 5.2 Seien $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$. Unter einem Randwertproblem (RWP) versteht man die Aufgabe, eine Lösung $z : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(t, z(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)) \\ f_2(t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)) \end{pmatrix}, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (5.1)$$

zu bestimmen, die den Randbedingungen

$$\psi(z(t_0), z(T)) = 0, \quad (5.2)$$

genügt.

Eines der Standardverfahren zur Lösung von Randwertproblemen ist das Einfach-Schießverfahren. Bei diesem Verfahren betrachtet man statt des Randwertproblems (5.1), (5.2) das Anfangswertproblem

$$\dot{z}(t) = f(t, z(t)), \quad z(t_0) = p \in \mathbb{R}^n. \quad (5.3)$$

Es sei $z(t, p)$ die Lösung dieses Anfangswertproblems in Abhängigkeit von dem Parameter $p \in \mathbb{R}^n$. Das Ziel des Einfach-Schießverfahrens ist die Bestimmung des Parameters \bar{p} , für welchen die Funktion $z(t, \bar{p})$ die Randbedingungen (5.2) erfüllt. Der gesuchte Parameter \bar{p} ist Nullstelle der Funktion

$$F(p) = \psi(p, z(T, p)). \quad (5.4)$$

Zur numerischen Berechnung einer Nullstelle der Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ lässt sich u.A. das Newton-Verfahren verwenden. In jedem Iterationsschritt muss dabei das Anfangswertproblem (5.3) durch ein geeignetes Einschritt- oder Mehrschrittverfahren gelöst werden.

Eine ausführliche Darstellung des Einfach-Schießverfahrens findet man z.B. in [36].

5.3.2. Mehrfach-Schießverfahren

Die mit dem Einfach-Schießverfahren berechnete Lösung $z(t, p)$ des Anfangswertproblems (5.3) hängt sehr von dem Parameter $p \in \mathbb{R}^n$ ab. Der Fehler im Zeitpunkt $t \in [t_0, T]$ hängt im Wesentlichen von dem Abstand von t zum Anfangszeitpunkt ab.

Bei großen Intervallen $[t_0, T]$ ist es daher schwierig, den Parameter p so zu bestimmen, dass die Lösung $z(t, p)$ auf dem gesamten Intervall der gesuchten Lösung des Randwertproblems (5.1), (5.2) entspricht. Die Mehrzielmethode besteht darin das Intervall $[t_0, T]$ durch die Zeitpunkte

$$t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

zu unterteilen und des Einfach-Schießverfahren auf jedem der Teilintervall $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N - 1$ anzuwenden.

Hier bezeichnen wir $z(t, t_i, p_i)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{z}(t) = f(t, z(t)), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad z(t_i) = p_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

Die stetige Lösung $z(t)$ des ursprünglichen Randwertproblems soll aus der Lösungen $z(t, t_i, p_i)$ der einzelnen Anfangswertprobleme zusammengesetzt werden, dies bedeutet

$$z(t) = z(t, t_i, p_i), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Es gelten also die Bedingungen

$$\begin{aligned} z(t_{i+1}, t_i, p_i) &= p_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ \psi(p_0, z(t_N, t_{N-1}, p_{N-1})) &= 0. \end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung $p = (p_0, p_1, \dots, p_{N-1})$ ist also eine Nullstelle der Funktion

$$F(p) = \begin{pmatrix} z(t_1, t_0, p_0) - p_1 \\ \vdots \\ z(t_{N-1}, t_{N-2}, p_{N-2}) - p_{N-1} \\ \psi(p_0, z(t_N, t_{N-1}, p_{N-1})) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

zu finden. Hierzu lässt sich z.B. wieder das Newton-Verfahren verwenden. In jedem Iterationsschritt sind N Anfangswerte zu lösen.

Außerdem erfordert die numerische Approximation der Jacobi-Matrix $J(F(p))$ weitere Lösungen von Anfangswertproblemen. Es existieren jedoch ausgereifte Techniken zur Reduzierung dieses Rechenaufwands. So wird in der Regel nicht die Jacobi-Matrix eingesetzt, sondern eine leicht zu berechnende Näherungsmatrix. Das Mehrfach-Schießverfahren hat sich als zuverlässiges Verfahren zur Lösung von Randwertproblemen erwiesen.

5.4. Lineare Beispiele nachhaltiger Fischerei

5.4.1. Berechnung optimaler Fangraten

Nun möchten wir zu einigen Modellen übergehen. Hierbei handelt es sich um die Optimierung von Fangraten und Fangperioden. An dieser Stelle berücksichtigen wir sowohl lineare als auch nichtlineare in u Modelle.

Zunächst nehmen wir das im vorigen Kapitel beschriebene Modell (4.5).

$$J(u) = \int_0^T \left\{ 1130 \cdot u_1(t) \cdot 1.5 \cdot 250 \cdot \frac{x_1(t)}{1} + 270 \cdot u_2(t) \cdot 6.4 \cdot 250 \cdot \frac{x_2(t)}{1.2} + 460 u_3(t) \cdot 6.4 \cdot 250 \cdot \frac{x_3(t)}{1.3} - 500 \cdot 250 \cdot \sum_{i=1}^3 u_i(t) \right\} e^{-0.06t} dt$$

$$J(u) \rightarrow \max_u$$

$$0 \leq u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \leq 1900, \quad 0 \leq t \leq 20,$$

$$0 \leq u_i(t) \leq 900, \quad 0 \leq t \leq 20, i = 1, 2, 3,$$

mit Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = & 0.4x_1(t) \cdot (1 - x_1(t)) - 1.5 \cdot 250 \cdot u_1(t) \cdot \frac{x_1(t)}{10^6} \\ & - 0.02 \cdot \frac{x_1(t)x_2(t)}{1.2} - 0.02 \cdot \frac{x_1(t)x_3(t)}{1.3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) = & 0.6x_2(t) \cdot \left(1 - \frac{x_2(t)}{1.2}\right) - 6.4 \cdot 250 \cdot u_2(t) \cdot \frac{x_2(t)}{1.2 \cdot 10^6} \\ & - 0.0125 \cdot \frac{x_1(t)x_2(t)}{1.2} - 0.01 \cdot \frac{x_2(t)x_3(t)}{1.56} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) = & 0.6x_3(t) \cdot \left(1 - \frac{x_3(t)}{1.3}\right) - 6.4 \cdot 250 \cdot u_3(t) \cdot \frac{x_3(t)}{1.3 \cdot 10^6} \\ & - 0.0125 \cdot \frac{x_1(t)x_3(t)}{1.3} - 0.01 \cdot \frac{x_2(t)x_3(t)}{1.56}, \end{aligned}$$

und Anfangswerten $x_1(0) = 0.25, x_2(0) = 0.8, x_3(0) = 1.0$ und **ohne Endbedingungen**. Dieses Problem wurde mit dem Dircol-Programm durch eine Aufteilung des gesamten Intervalls in 40 äquidistante Teilintervalle gelöst (Programmtext im Anhang A.1).¹

Auf den Abbildungen 5.4, 5.5, 5.6 sind stückweise stetige Lösungen für dieses Problems dargestellt.

Wenn diese Strategie angewendet wird, ist mit einem Gewinn von ca. 1494.4 Mio. Euro zu rechnen. Die Steuerungsstruktur zeigt, dass ein nachhaltiger Zustand im ersten Intervall für alle drei Populationen angestrebt wird. Sobald sich alle drei Fischarten auf diesem Niveau befinden, werden sie mit einer konstanten Anzahl der Kutter gefangen. Anschließend wird im letztem Intervall maximal abgefischt.

¹ [38]

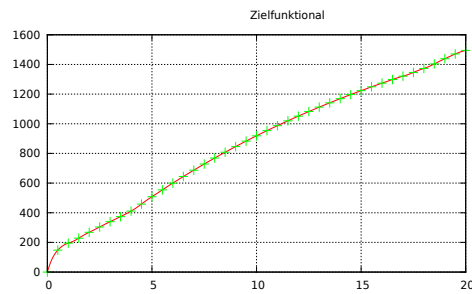


Abbildung 5.3.: DIRCOL: Ein Gewinn von der Fischerei eines 3-Populationen-Systems in Mio. Euro

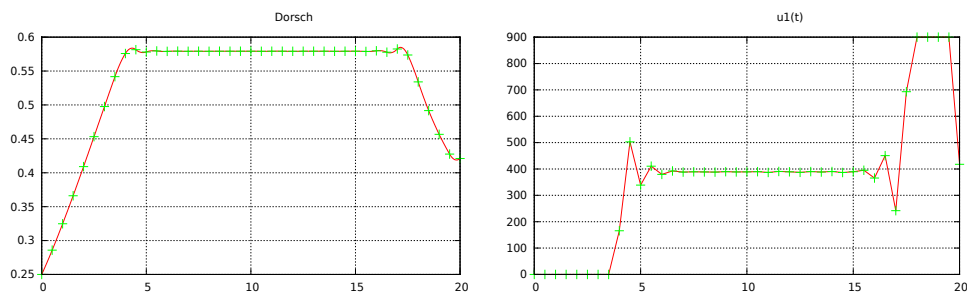


Abbildung 5.4.: DIRCOL: 3-Populationen-System: Dorsch. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (rechts)

Das Modell hat aber einen großen Nachteil: wegen Gewinnmaximierung wird in den letzten Zeitabschnitten die maximale Anzahl der Kutter eingesetzt, so dass der Gewinn zwar steigt, aber die Populationsgrößen sinken. Dies bedeutet, nach diesen 20 Jahren hätten wir eine sehr starke Reduktion einiger Fischarten, die ökologisch fatal sein könnte.

Biologen suchen aber nach den nachhaltigen Tendenzen, das heißt, dass die Bestände in den biologisch vertretbaren Grenzen (auch in der Zukunft) bleiben müssen. Dies bedeutet, man nimmt zusätzliche Endbedingungen und versucht, das starke Abfischen im letzten Intervall zu vermeiden.

5. Numerische Methoden für verschiedene Aufgaben der Optimalsteuerung

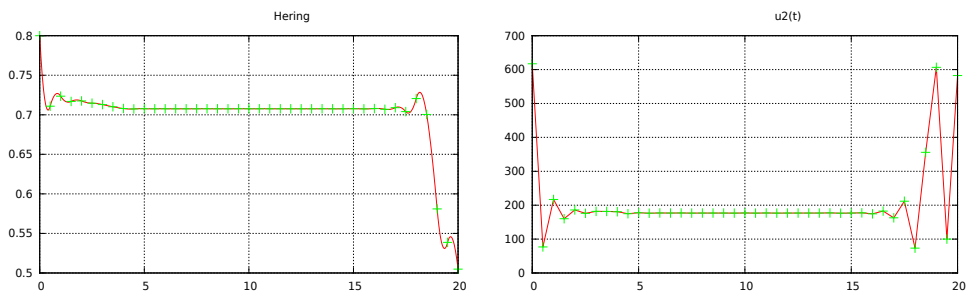


Abbildung 5.5.: DIRCOL: 3-Populationen-System: Hering. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (rechts)

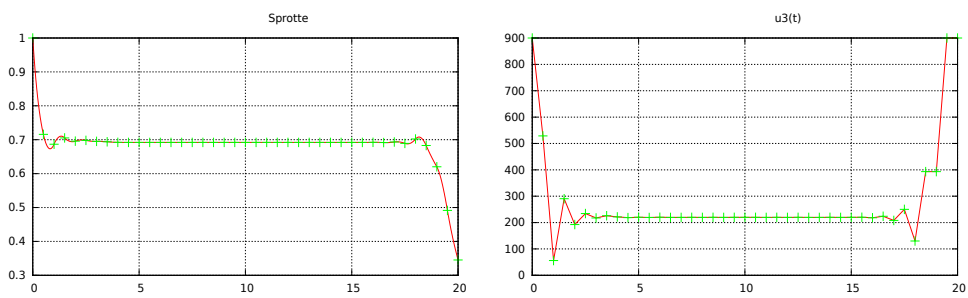


Abbildung 5.6.: DIRCOL: 3-Populationen-System: Sprotte. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (rechts)

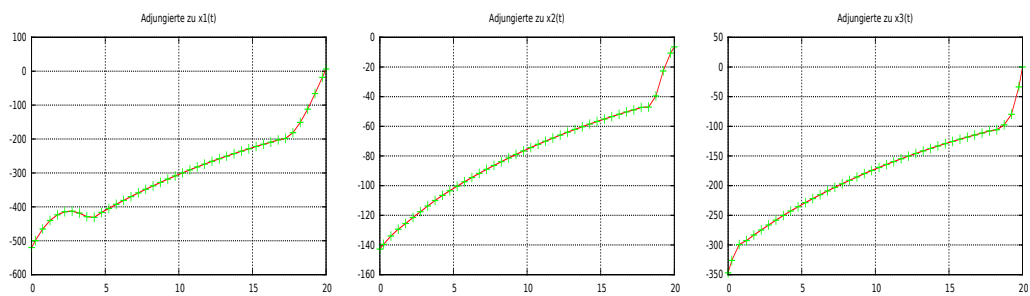


Abbildung 5.7.: DIRCOL: 3-Populationen-System: Adjungierten

Mit Hilfe von der Software OC-ODE wurde eine optimale Fangstrategie für ein 3-Populationen-System, beschrieben durch das System (4.5) und mit gegebenen Endwerten $x_1(20) = 0.5792, x_2(20) = 0.7076, x_3(20) = 0.6912$, berechnet. Die Beschreibung des Programmcodes entnehme man aus dem Anhang B.1.

Dabei wurde die Bedingung $0 \leq u_i(t) \leq 900, 0 \leq t \leq 20, i = 1, 2, 3$ weggelassen und die gesamte Anzahl der Kutter nur durch die Restriktion

$$0 \leq u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \leq 1900, \quad 0 \leq t \leq 20$$

beschränkt. Die optimale Fischereientwicklung ist auf Abb. 5.9,5.10,5.11 dargestellt.

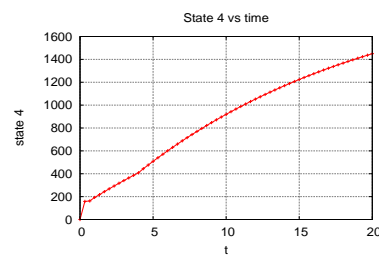


Abbildung 5.8.: OC-ODE: Ein möglicher Gewinn von der Fischerei eines 3-Populationen-Systems in Mio. Euro

Diese Strategie liefert den Gewinn von 1449.343 Mio. Euro (für stückweise stetige Steuerung) bzw. 1449.209 Mio. Euro (für stückweise konstante Steuerung) bei Berechnung mit 101 Gitterpunkten. Dabei handelt es sich um eine nachhaltige Entwicklung.

5. Numerische Methoden für verschiedene Aufgaben der Optimalsteuerung

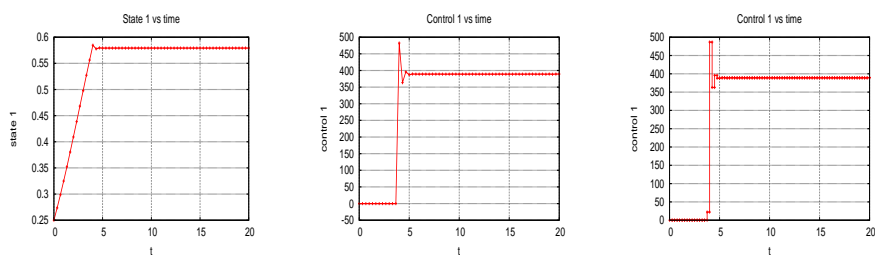


Abbildung 5.9.: OC-ODE: 3-Populationen-System: Dorsch. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (Mitte), stückweise konstante Steuerung (rechts)

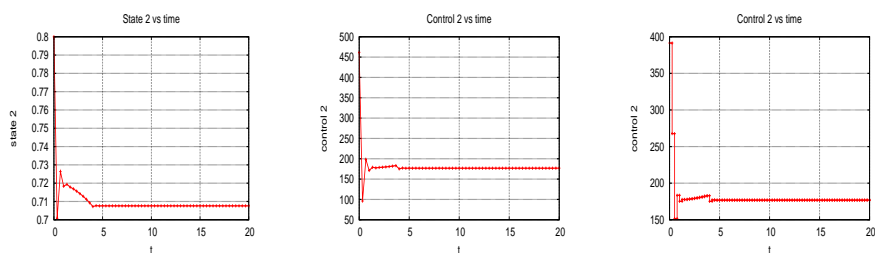


Abbildung 5.10.: OC-ODE: 3-Populationen-System: Hering. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (Mitte), stückweise konstante Steuerung (rechts)

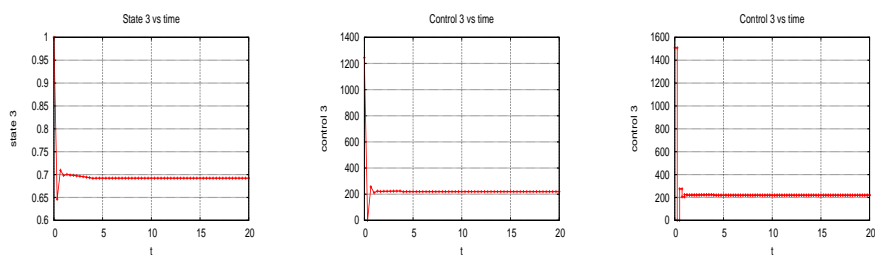


Abbildung 5.11.: OC-ODE: 3-Populationen-System: Sprotte. Entwicklung der Population (links), stückweise stetige Steuerung (Mitte), stückweise konstante Steuerung (rechts)

5.4.2. Berechnung optimaler Fangzeiten

Nun unterteilen wir ein Jahr in vier gleichlange Zeitabschnitte und verlangen, dass die Populationsgrößen am Anfang jedes Jahres und am Ende des Jahres gleich sein müssen. Die Gleichungen für die Populationsentwicklung übernehmen wir von dem Döring-Modell.

Es entsteht das System (5.6) mit $x_1(0) = 0.58, x_2(0) = 0.71, x_3(0) = 0.69$ und denselben Endwerten. Wichtig dabei ist eine Konkurrenz-Wechselwirkung beim Dorsch, der hier zwar als Räuber auftritt, aber einen Teil der Population durch das Fressen der Eier von anderen Fischarten verliert und Hering und Sprotte, die Beutefische sind und durch die Lotka-Volterra-Beziehungen reduziert werden.

Bei folgenden Modellen gehen wir von der Überlegung aus, dass es den ganzen Jahr (365 Tage und nicht 250 Tage, wie früher) gefangen werden darf.

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \int_0^T \left\{ 1130 \cdot u_1(t) \cdot 1.5 \cdot 365 \cdot \frac{x_1(t)}{1} + 270 \cdot u_2(t) \cdot 6.4 \cdot 365 \cdot \frac{x_2(t)}{1.2} \right. \\
 &\quad \left. + 460 u_3(t) \cdot 6.4 \cdot 365 \cdot \frac{x_3(t)}{1.3} - 500 \cdot 365 \cdot \sum_{i=1}^3 u_i(t) \right\} e^{-0.06t} dt \\
 J(u) &\rightarrow \max_u \\
 0 &\leq u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \leq 1900, \quad 0 \leq t \leq 1, \\
 0 &\leq u_i(t) \leq 900, \quad 0 \leq t \leq 1, i = 1, 2, 3,
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

mit Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= 0.4x_1(t) \cdot (1 - x_1(t)) - 1.5 \cdot 365 \cdot u_1(t) \cdot \frac{x_1(t)}{10^6} \\
 &\quad - 0.02 \cdot \frac{x_1(t)x_2(t)}{1.2} - 0.02 \cdot \frac{x_1(t)x_3(t)}{1.3} \\
 \dot{x}_2(t) &= 0.6x_2(t) \cdot \left(1 - \frac{x_2(t)}{1.2}\right) - 6.4 \cdot 365 \cdot u_2(t) \cdot \frac{x_2(t)}{1.2 \cdot 10^6} \\
 &\quad - 0.0125 \cdot \frac{x_1(t)x_2(t)}{1.2} - 0.01 \cdot \frac{x_2(t)x_3(t)}{1.56} \\
 \dot{x}_3(t) &= 0.6x_3(t) \cdot \left(1 - \frac{x_3(t)}{1.3}\right) - 6.4 \cdot 365 \cdot u_3(t) \cdot \frac{x_3(t)}{1.3 \cdot 10^6} \\
 &\quad - 0.0125 \cdot \frac{x_1(t)x_3(t)}{1.3} - 0.01 \cdot \frac{x_2(t)x_3(t)}{1.56}.
 \end{aligned}$$

Die Simulationen auf Abb. 5.12, 5.13, 5.14 zeigen, dass die optimale Fangwerte so nachhaltig gehalten können, dass die Populationen ihre Ausgangsgrößen zum Ende des Jahres wieder erreichen. Dabei können ca. 124.655 Mio. Euro pro Jahr erzielt werden.

5. Numerische Methoden für verschiedene Aufgaben der Optimalsteuerung

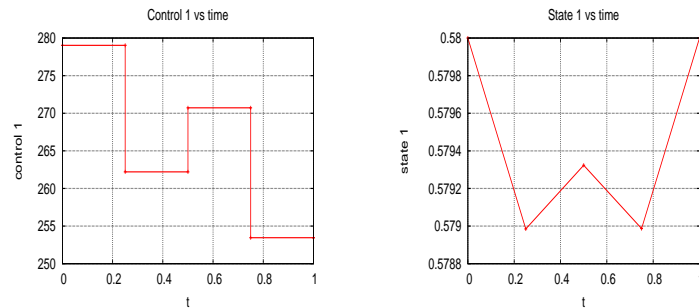


Abbildung 5.12.: OC-ODE: Dorsch. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts)

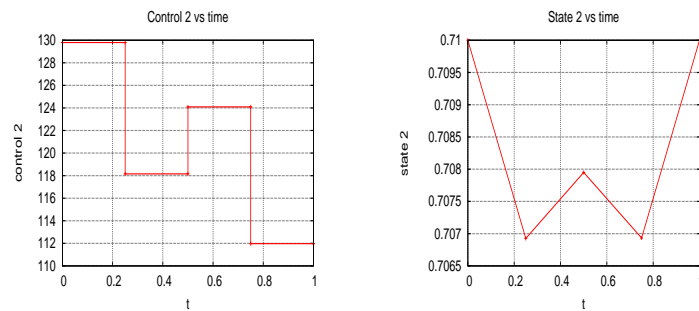


Abbildung 5.13.: OC-ODE: Hering. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts)

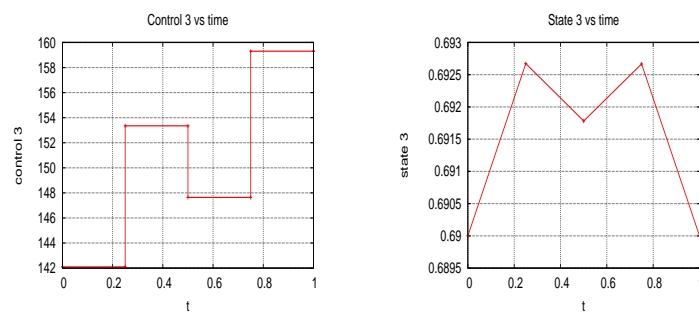


Abbildung 5.14.: OC-ODE: Sprotte. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts)

5.4.3. Berechnung optimaler Fangraten mit zeitabhängigen Wachstumsraten

In der Natur entwickeln sich die Populationen unterschiedlich je nach Saison. Deswegen lässt sich das letzte Modell transformieren, in dem man Wachstumskoeffizienten ebenfalls verändert.

In den Laichperioden (statistisch geschätzt, für den Dorsch z.B. im Frühling [57]) nehmen die Populationen zu, danach reduziert sich das Wachstum auf Grund von den natürlichen Ursachen.

Das Wachstum ε kann hier z.B. durch die Funktion $\varepsilon_1 \cdot (1 + \sin(2\pi t))$, $t \in [0; 1]$ bei den Vermehrungsraten ersetzt werden.

Die Ostseeheringe laichen vom Frühjahr bis in den Herbst.² Um deren Wachstum zu „gewichten“, verwenden wir die Funktion $\varepsilon_2 \cdot (1 - \cos(2\pi t))$, $t \in [0; 1]$, bzw. $\varepsilon_3 \cdot (1 - \cos(2\pi t))$, $t \in [0; 1]$ für die Sprottenpopulation.

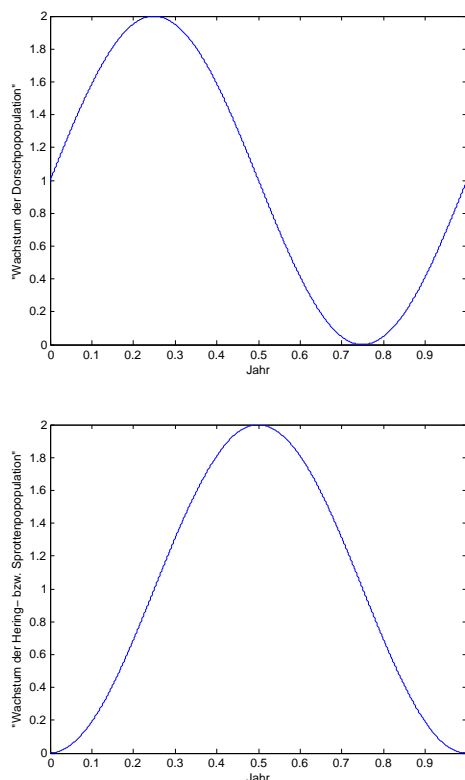


Abbildung 5.15.: Wachstum der Populationen: Proportionalitätsfaktoren $1 + \sin(2\pi t)$ bei dem Dorsch und $1 - \cos(2\pi t)$ beim Hering bzw. Sprotten

² [58]

Betrachtet wird also die Aufgabe

$$\begin{aligned}
 J(u) &= \int_0^T \left\{ 1130 \cdot u_1(t) \cdot 1.5 \cdot 365 \cdot \frac{x_1(t)}{1} + 270 \cdot u_2(t) \cdot 6.4 \cdot 365 \cdot \frac{x_2(t)}{1.2} \right. \\
 &\quad \left. + 460 u_3(t) \cdot 6.4 \cdot 365 \cdot \frac{x_3(t)}{1.3} - 500 \cdot 365 \cdot \sum_{i=1}^3 u_i(t) \right\} e^{-0.06t} dt \\
 J(u) &\rightarrow \max_u \\
 0 &\leq u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \leq 1900, \quad 0 \leq t \leq 1, \\
 0 &\leq u_i(t) \leq 900, \quad 0 \leq t \leq 1, i = 1, 2, 3,
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

mit Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= 0.4 \cdot (1 + \sin(2\pi t)) x_1(t) \cdot (1 - x_1(t)) - 1.5 \cdot 365 \cdot u_1(t) \cdot \frac{x_1(t)}{10^6} \\
 &\quad - 0.02 \cdot \frac{x_1(t)x_2(t)}{1.2} - 0.02 \cdot \frac{x_1(t)x_3(t)}{1.3} \\
 \dot{x}_2(t) &= 0.6 \cdot (1 - \cos(2\pi t)) x_2(t) \cdot \left(1 - \frac{x_2(t)}{1.2}\right) - 6.4 \cdot 365 \cdot u_2(t) \cdot \frac{x_2(t)}{1.2 \cdot 10^6} \\
 &\quad - 0.0125 \cdot \frac{x_1(t)x_2(t)}{1.2} - 0.01 \cdot \frac{x_2(t)x_3(t)}{1.56} \\
 \dot{x}_3(t) &= 0.6 \cdot (1 - \cos(2\pi t)) x_3(t) \cdot \left(1 - \frac{x_3(t)}{1.3}\right) - 6.4 \cdot 365 \cdot u_3(t) \cdot \frac{x_3(t)}{1.3 \cdot 10^6} \\
 &\quad - 0.0125 \cdot \frac{x_1(t)x_3(t)}{1.3} - 0.01 \cdot \frac{x_2(t)x_3(t)}{1.56},
 \end{aligned}$$

Anfangswerten $x_1(0) = 0.58, x_2(0) = 0.71, x_3(0) = 0.69$ und denselben Endwerten $x_1(1) = 0.58, x_2(1) = 0.71, x_3(1) = 0.69$.

Bei dieser Strategie kann ein Gewinn von 125.115 Mio. Euro nach einem Jahr erreicht werden. Dafür müsste man in jedem Vierteljahr folgende Anzahl der Kutter u_1, u_2 und u_3 verwenden.

Monat	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3
Januar	0.5800	0.7100	0.6900	492.03	48.343	48.565
April	0.5783	0.7344	0.7214	13.741	289.27	355.16
Juli	0.5821	0.6756	0.6568	520.41	0.0000	0.0000
Oktober	0.5782	0.7176	0.7038	38.631	139.21	190.68

Die Abbildungen 5.16, 5.17, 5.18 zeigen, wie durch solche Entwicklungsgesetze beschriebene Modelle verlaufen.

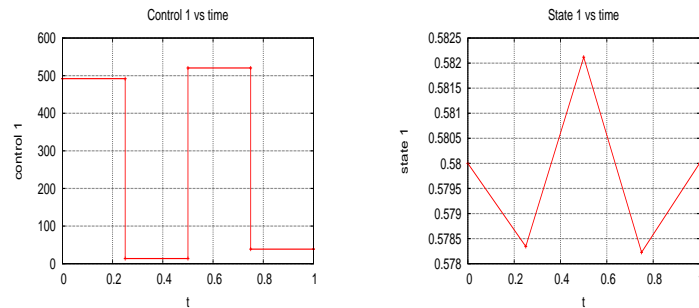


Abbildung 5.16.: OC-ODE: Dorsch. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit veränderlichen Wachstumsraten

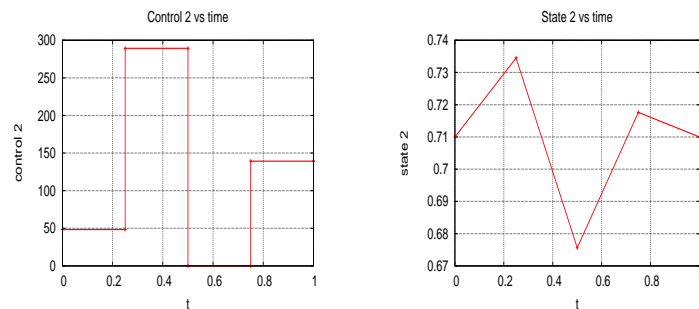


Abbildung 5.17.: OC-ODE: Hering. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit veränderlichen Wachstumsraten

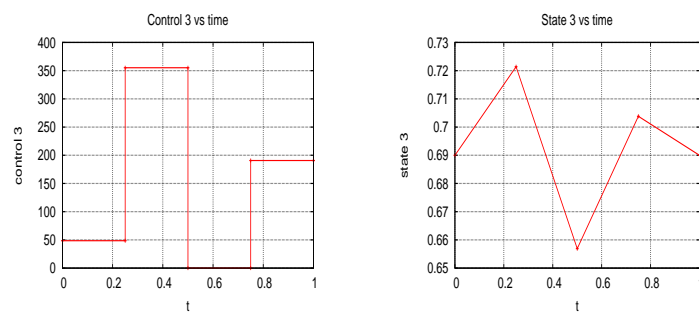


Abbildung 5.18.: OC-ODE: Sprotte. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit veränderlichen Wachstumsraten

5.5. Ökologische Modelle mit nichtlinear auftretender Steuerung

Die bereits betrachteten Modelle sind linear in der Steuerung. Als Lösung erhielten wir eine Bang-Bang oder eine Bang-Singulär-Bang-Lösung. Aus theoretischen Überlegungen möchten wir nun ein in u nichtlineares Modell studieren.

5.5.1. Modelle mit stückweise stetigen Steuerungen

Hier wählen wir zunächst einen quadratischen Steuerungsverlauf in den Kutterkosten. Eine Rechtfertigung dafür kann z.B. die sein, dass man bei Anschaffung mehrerer Kutter zusätzliche Kosten tragen muss. Biologisch werden solche Modelle eher selten betrachtet, sie können aber aus mathematischer Sicht interessant sein.

Beispielsweise nehmen wir zuerst ein eindimensionales Modell, d.h. $u = u_1, x = x_1, \lambda = \lambda_1$. Zu maximieren sei das Zielfunktional

$$J(u) = \int_0^T \left\{ p_1 u_1(t) x_1(t) - c \cdot u_1^2(t) \right\} e^{-\delta t} dt \rightarrow \max_u \quad (5.8)$$

$$0 \leq u_1(t) \leq u_{\max}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

mit einer Nebenbedingung:

$$\dot{x}_1(t) = \varepsilon_1 x_1(t) \cdot \left(1 - \frac{x_1(t)}{K_1} \right) - s_1 u_1(t) x_1(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad (5.9)$$

mit positiven Konstanten $p_1, c, \varepsilon_1, K_1, \delta, s_1$, dem Anfangswert $x_1(0) = x_{10}$ und ohne Endbedingungen.

Die Hamiltonfunktion ist hier:

$$H(x_1, u_1, \lambda_1, t) = \left\{ p_1 u_1 x_1 - c \cdot u_1^2 \right\} e^{-\delta t} + \lambda_1 \left(\varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1} \right) - s_1 u_1 x_1 \right). \quad (5.10)$$

Eine optimale Lösung kann mit Hilfe des Pontrjaginschen Maximumprinzips berechnet werden. Wir beschränken uns auf den Fall, in dem die Konstanten s_1, p_1, c, δ so gewählt sind, dass die Hamilton-Funktion ihr Maximum bezüglich u im Inneren des Intervalls $[0, u_{\max}]$ annimmt. Es folgt:

$$u_1^*(t) = \arg \max_{0 \leq u_1 \leq u_{\max}} H(x_1^*, u_1, \lambda_1, t) = \frac{p_1 x_1^*(t) - \lambda_1(t) s_1 x_1^*(t) e^{\delta t}}{2c}, \quad \text{für fast alle } t.$$

Nun können die adjungierten Gleichungen erstellt werden, so dass wir das Zweipunkt-Randwertproblem

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= \frac{-p_1^2 x_1^*(t) e^{-\delta t} + \lambda_1(t) p_1 s_1 x_1^*(t)}{2c} - \varepsilon_1 \lambda_1(t) + 2\varepsilon_1 \lambda_1(t) \frac{x_1^*(t)}{K_1} \\ &\quad + \frac{\lambda_1(t) p_1 s_1 x_1^*(t) - \lambda_1^2(t) s_1^2 x_1^*(t) e^{\delta t}}{2c}, \quad \lambda_1(T) = 0 \\ \dot{x}_1^*(t) &= \varepsilon_1 x_1^*(t) \cdot \left(1 - \frac{x_1^*(t)}{K_1}\right) - s_1 \frac{p_1 x_1^{*2}(t) - \lambda_1(t) s_1 x_1^{*2}(t) e^{\delta t}}{2c}, \quad x_1^*(0) = x_{10} \end{aligned}$$

erhalten.

Hier betrachten wir ein konkretes Beispiel, dass mit dem Pontrjaginschen Maximumprinzip auf diese Art und Weise studiert werden kann.

$$J(u) = \int_0^T \left\{ \frac{1130 \cdot 1.5 \cdot 250}{10^6} \cdot u_1(t) x_1(t) - \frac{5 \cdot 250}{10^6} \cdot u_1^2(t) \right\} e^{-0.06t} dt \rightarrow \max_u$$

$$0 \leq u_1(t) \leq 900, \quad 0 \leq t \leq 20, \quad (5.11)$$

mit einer Nebenbedingung:

$$\dot{x}_1(t) = 0.4x_1(t) \cdot (1 - x_1(t)) - \frac{1.5 \cdot 250}{10^6} \cdot u_1(t)x_1(t),$$

mit dem Anfangswert $x_1(0) = 0.25$ und ohne Endbedingungen.

Eine optimale Lösung wurde numerisch mit MATLAB und parallel dazu mit OC-ODE-Programm von Gerdtts berechnet (Programmtexte C.3 im Anhang) und hat folgenden Verlauf:

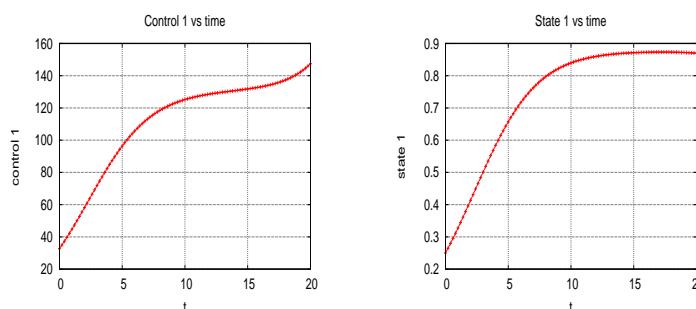


Abbildung 5.19.: Eindimensionales Modell mit quadratisch auftretender Steuerung. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts)

Dabei erhalten wir einen Gewinn von 208,68 Mio. Euro.

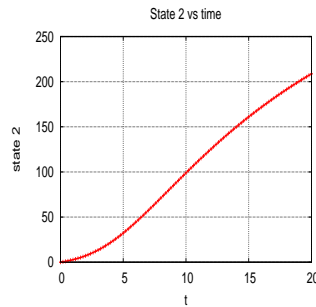


Abbildung 5.20.: Eindimensionales Modell mit quadratisch auftretender Steuerung (Gewinn nach 20 Jahren)

Nun suchen wir nach optimalen Steuerungen für das dreidimensionale Lotka-Volterra-Modell, bestehend aus Dorsch(x_1), Hering(x_2) und Sprotte(x_3) und „Anzahl der Kutter“ für Fang der einzelnen Spezies $u = (u_1, u_2, u_3)$ für ein Zeitintervall von 20 Jahren, das folgendermaßen formuliert wird.

$$J(u) = \int_0^T \left\{ 1130 \cdot u_1(t) \cdot 1.5 \cdot 250 \cdot \frac{x_1(t)}{10^6} + 270 \cdot u_2(t) \cdot 6.4 \cdot 250 \cdot \frac{x_2(t)}{1.2 \cdot 10^6} + 460 u_3(t) \cdot 6.4 \cdot 250 \cdot \frac{x_3(t)}{1.3 \cdot 10^6} - \frac{5 \cdot 250}{10^6} \cdot \sum_{i=1}^3 u_i^2(t) \right\} e^{-0.06t} dt$$

$$J(u) \rightarrow \max_u \tag{5.12}$$

$$0 \leq u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \leq 1900, \quad 0 \leq t \leq 20,$$

$$0 \leq u_i(t) \leq 900, \quad 0 \leq t \leq 20, i = 1, 2, 3,$$

mit Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 0.4x_1(t) \cdot (1 - x_1(t)) - 1.5 \cdot 250 \cdot u_1(t) \cdot \frac{x_1(t)}{10^6} \\ &\quad - 0.02 \cdot \frac{x_1(t)x_2(t)}{1.2} - 0.02 \cdot \frac{x_1(t)x_3(t)}{1.3}, \\ \dot{x}_2(t) &= 0.6x_2(t) \cdot \left(1 - \frac{x_2(t)}{1.2}\right) - 6.4 \cdot 250 \cdot u_2(t) \cdot \frac{x_2(t)}{1.2 \cdot 10^6} \\ &\quad - 0.0125 \cdot \frac{x_1(t)x_2(t)}{1.2} - 0.01 \cdot \frac{x_2(t)x_3(t)}{1.56}, \\ \dot{x}_3(t) &= 0.6x_3(t) \cdot \left(1 - \frac{x_3(t)}{1.3}\right) - 6.4 \cdot 250 \cdot u_3(t) \cdot \frac{x_3(t)}{1.3 \cdot 10^6} \\ &\quad - 0.0125 \cdot \frac{x_1(t)x_3(t)}{1.3} - 0.01 \cdot \frac{x_2(t)x_3(t)}{1.56} \end{aligned}$$

und Anfangswerten $x_1(0) = 0.25, x_2(0) = 0.8, x_3(0) = 1.0$ und ohne Endbedingungen. Auf den Abbildungen 5.21,5.22,5.23 erhalten wir den entsprechenden Lösungsverlauf.

5.5. Ökologische Modelle mit nichtlinear auftretender Steuerung

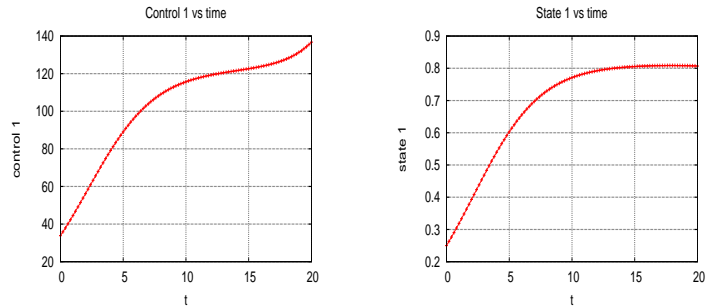


Abbildung 5.21.: Dorsch. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit quadratischen Kostenfunktionen

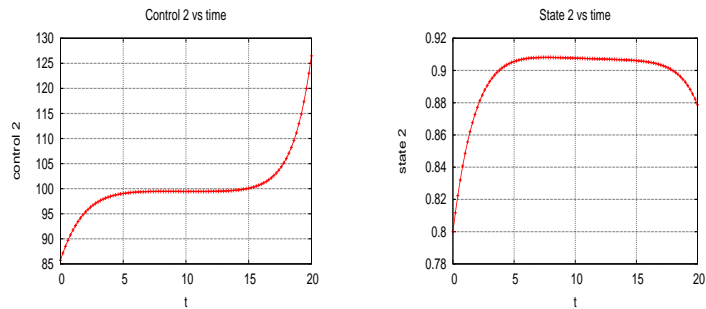


Abbildung 5.22.: Hering. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit quadratischen Kostenfunktionen

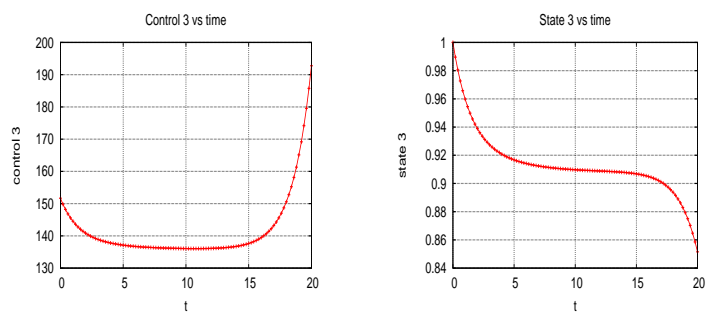


Abbildung 5.23.: Sprotte. Optimale „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit quadratischen Kostenfunktionen

Eine quadratische Abhängigkeit der Steuerung ist hier nur eine theoretische Annahme und liefert einen mathematisch interessanten Lösungsverlauf. Andere in u nichtlineare Modelle, z.B. mit dem Kostenterm $c \cdot \ln u_1(t)$ oder $c \cdot \sqrt{u_1(t)}$ sind mathematisch nicht so interessant, da die mit den in der Fischerei üblichen Koeffizienten erzeugten optimalen Steuerungen nicht in einem realistischen Intervall liegen, so dass für ein beschränktes Steuerintervall häufig wieder eine Bang-Bang-Struktur entstehen kann. Dies kann man beispielsweise an dem folgenden logarithmischen Modell sehen:

Zu maximieren sei das Zielfunktional

$$J(u) = \int_0^T \left\{ p_1 u_1(t) x_1(t) - c \cdot \ln u_1(t) \right\} e^{-\delta t} dt \rightarrow \max_u \quad (5.13)$$

$$0 \leq u_1(t) \leq u_{\max}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

mit der üblichen Nebenbedingung:

$$\dot{x}_1(t) = \varepsilon_1 x_1(t) \cdot \left(1 - \frac{x_1(t)}{K_1} \right) - s_1 u_1(t) x_1(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad (5.14)$$

mit gegebenen $p_1, c, \varepsilon_1, K_1, \delta, s_1$, dem Anfangswert $x_1(0) = x_{10}$ und ohne Endbedingungen.

Die Hamiltonfunktion lautet:

$$H(x_1, u_1, \lambda_1, t) = \left\{ p_1 u_1 x_1 - c \cdot \ln u_1 \right\} e^{-\delta t} + \lambda_1 \left(\varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1} \right) - s_1 u_1 x_1 \right).$$

Hier wählen wir die Konstanten so, dass eine optimale Steuerung im Inneren des Steuerintervalls angenommen wird. Daher ergibt sich

$$u_1^*(t) = \arg \max_{0 \leq u_1 \leq u_{\max}} H(x_1^*, u_1, \lambda_1, t) = \frac{c}{x_1^*(t)(p_1 - \lambda_1(t)s_1 e^{\delta t})}, \quad \text{für fast alle } t.$$

Löst man das entsprechende Randwertproblem:

$$\dot{\lambda}_1(t) = \frac{-p_1 c e^{-\delta t}}{x_1^*(t)(p_1 - \lambda_1(t)s_1 e^{\delta t})} - \varepsilon_1 \lambda_1(t) + 2\varepsilon_1 \lambda_1(t) \frac{x_1^*(t)}{K_1} + \frac{s_1 \lambda_1(t) c}{x_1^*(t)(p_1 - \lambda_1(t)s_1 e^{\delta t})},$$

$$\dot{x}_1^*(t) = \varepsilon_1 x_1^*(t) \cdot \left(1 - \frac{x_1^*(t)}{K_1} \right) - \frac{c s_1}{p_1 - \lambda_1(t)s_1 e^{\delta t}},$$

$$x_1^*(0) = x_{10}, \quad \lambda_1(T) = 0,$$

so erhält man mit gegebenen Konstanten eine optimale Steuerung $u_1^*(0) \approx 0.012$ und sie strebt nach Null mit wachsenden t (Programme C.5). Die Tatsache lässt sich leicht erklären: $\ln(u_1^*(t))$ würde nach minus Unendlich streben, falls $u_1^*(t)$ gegen 0 geht, das heißt, das Zielfunktional würde in diesem Modell stark wachsen, aber diese Lösung ist aus praktischen Gründen nicht besonders interessant, da es überhaupt keinen Fang gäbe.

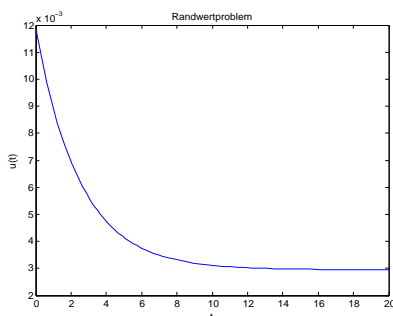


Abbildung 5.24.: Optimale Steuerung in einem Modell mit logarithmisch auftretender Steuerung

5.5.2. Modelle mit stückweise konstanten Steuerungen

Jetzt betrachten wir zunächst die eindimensionale quadratische Aufgabe (5.11) und suchen eine stückweise konstante Lösung. Das Modell wird für den Fall stückweise konstanter Steuerungen auf n Intervallen einer fixierten Länge folgendermaßen umgeschrieben:

$$\dot{x}_1(t) = 0.4x_1(t) \cdot (1 - x_1(t)) - \frac{1.5 \cdot 250}{10^6} \cdot u_1(t_k)x_1(t), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1;$$

$$x_1(0) = x_{10} = 0.25,$$

$u_1(\cdot)$ stückweise konstant:

$$u_1(t) = (u_1(t_0), u_1(t_1), \dots, u_1(t_{n-1})) = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) = \vec{v},$$

$$0 \leq v_i \leq 900, \quad i = 0, \dots, n - 1, \quad 0 \leq t \leq 20,$$

$$J(\vec{v}) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ \frac{1130 \cdot 1.5 \cdot 250}{10^6} \cdot v_k(t)x_1(t) - \frac{5 \cdot 250}{10^6} \cdot v_k^2(t) \right\} e^{-0.06t} dt \rightarrow \max_{\vec{v}},$$

$$t_n = T = 20, \quad t_i = i, \quad i = 0, \dots, 19$$

und ohne Endbedingungen.

Die Hamilton-Funktion für diese Aufgabe lautet:

$$H(x_1, u_1, \lambda_1, t) = \left\{ p_1 u_1 x_1 - c \cdot u_1^2 \right\} e^{-\delta t} + \lambda_1 \left(\varepsilon_1 x_1 \cdot \left(1 - \frac{x_1}{K_1} \right) - s_1 u_1 x_1 \right). \quad (5.15)$$

Dieses Modell wurde mit dem Programm OC-ODE von Gerdtz zunächst für $n = 20$ (d.h., die Anzahl der Kutter ändert sich jedes Jahr einmal) gelöst. Wir erhalten die

graphische Lösung 5.25. ³ Das Programmsystem MATLAB zeigt, dass diese Lösung

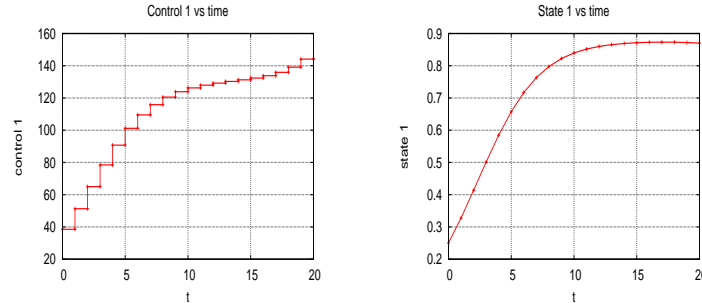


Abbildung 5.25.: Eindimensionales Modell mit quadratisch auftretender Steuerung. Optimale stückweise konstante Steuerung (links) und die Populationsentwicklung (rechts)

das Integral-Maximumprinzip für die stückweise konstanten Steuerungen erfüllt. Die notwendige Bedingung

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} H_{u_1}(x_1^*(t), u_1^*(t_k), \lambda_1(t), t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(p_1 x_1^*(t) e^{-\delta t} - 2c \cdot u_1^*(t_k) e^{-\delta t} - \lambda_1(t) s_1 x_1^*(t) \right) dt = 0.$$

gilt auf jedem Intervall $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0, \dots, n - 1$.

So erhalten wir z.B. auf dem Intervall $[0; 1)$ mit den Konstanten $\delta = 0.06$; $p_1 = 0.42375$; $\varepsilon_1 = 0.4$; $s_1 = 0.000375$; $K_1 = 1$; $c = 0.00125$, der konstanten Steuerung $u_1^*(0) = 38.519$ und der aus dazugehöriger Prozessgleichung entstandenen Zustandsfunktion

$$x_1^*(t) = \frac{\left(K_1 - \frac{s_1 K_1 u_1^*(0)}{\varepsilon_1} \right) x_{10} e^{(\varepsilon_1 - s_1 u_1^*(0))t}}{\left(K_1 - \frac{s_1 K_1 u_1^*(0)}{\varepsilon_1} \right) + x_{10} (e^{(\varepsilon_1 - s_1 u_1^*(0))t} - 1)} = \frac{\left(K_1 - \frac{s_1 u_1^*(0)}{\varepsilon_1} \right) x_{10}}{\left(K_1 - \frac{s_1 K_1 u_1^*(0)}{\varepsilon_1} - x_{10} \right) e^{(s_1 K_1 u_1^*(0) - \varepsilon_1)t} + x_{10}}, \quad t \in [0, 1),$$

³siehe [10]

mit $x_1(0) = x_{10} = 0.25$ und numerisch berechneten Adjungierten, dass die Gleichung

$$\int_0^1 \left(p_1 x_1^*(t) e^{-\delta t} - 2c \cdot u_1^*(0) e^{-\delta t} - \lambda_1(t) s_1 x_1^*(t) \right) dt = 0$$

erfüllt wird (Programme C.4 im Anhang). Analog zeigt man diese Eigenschaft für weitere Konstantheitsintervalle.

Wenn man an dieser Stelle die im Kapitel 4.5.3 gewonnenen notwendigen Pantelejew-Bedingungen ausnutzen würde, müsste man viel aufwändigere Berechnungen durchführen. Wir sehen dies bei folgenden Überlegungen an dem Modell mit einem exponentiellem Wachstum und ohne Diskontierung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 0.1x_1(t) - \frac{1.5 \cdot 250}{10^6} \cdot u_1(t_k)x_1(t), \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \\ x_1(0) &= x_{10} = 0.25, \\ u_1(\cdot) &\text{ stückweise konstant:} \\ u_1(t) &= (u_1(t_0), u_1(t_1), \dots, u_1(t_{n-1})) = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) = \vec{v}, \\ 0 &\leq v_i \leq 900, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad 0 \leq t \leq 20, \\ J(\vec{v}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\{ \frac{1130 \cdot 1.5 \cdot 250}{10^6} \cdot v_k(t)x_1(t) - \frac{5 \cdot 250}{10^6} \cdot v_k^2(t) \right\} dt \rightarrow \max_{\vec{v}}, \\ t_n &= T = 20, \end{aligned} \tag{5.16}$$

Werden zwei Steuerintervalle genommen, liefert das OC-ODE-Programm folgendes Ergebnis: $u_1^*(0) = 6.16$; $u_1^*(10) = 115.44$ mit dem Wert des Zielfunktional 279.328 Mio. Euro.

Nun verwenden wir die Bedingungen aus 4.5.3. Es muss für die optimalen $u_1^*(\cdot), x_1^*(\cdot)$ mit $u_1^*(t) = u_1^*(t_k)$, $x_1^*(t) = x(t, u_1^*(t_k))$, jeweils für $t \in [t_k, t_{k+1})$ und $k = 0, 1$ gelten:

$$u_1^*(t_k) = \arg \max_{u_1 \in \Omega} \{ S_1(t_k, u_1) + \lambda_1(t_k, u_1) \cdot x_1(t_k) \},$$

wobei $S_1(t, v)$ die Lösung von

$$-\frac{\partial S_1(t, v)}{\partial t} = H(x_1^*(t, v), v, \lambda_1(t, v), t) - \frac{\partial H(x_1^*(t, v), v, \lambda_1(t, v), t)}{\partial x_1} x_1^*(t, v) \tag{5.17}$$

und $\lambda_1(t, v)$ die Lösung von

$$\dot{\lambda}_1(t, v) = -\frac{\partial}{\partial x_1} H(x_1^*(t, v), v, \lambda_1(t, v), t), \quad \forall (t, v) \in [t_k, t_{k+1}) \times \Omega, \tag{5.18}$$

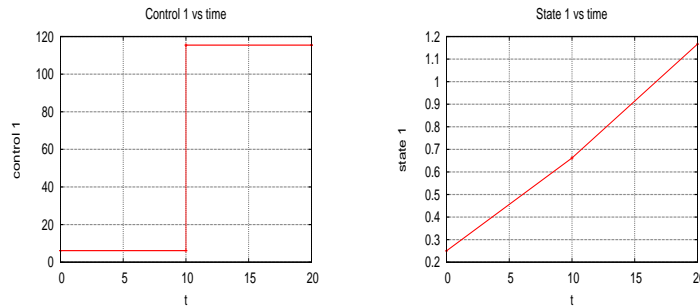


Abbildung 5.26.: Eindimensionales Modell mit quadratisch auftretender Steuerung für 2 Steuerungsintervalle. Optimale stückweise konstante Steuerung (links) und die Populationsentwicklung (rechts)

mit

$$x_1(t_0, v) = x_1(t_0) = 0.25, \quad x_1(t_1, v) = x_1(t_1) = x_1(t_1 - 0, u^*(t_0)),$$

$$\lambda_1(t_1 - 0, v_0) = \lambda_1(t_1, u_1^*(t_1)), \quad S_1(t_1 - 0, v_0) = S_1(t_1, u_1^*(t_1))$$

und mit den Transversalitätsbedingungen

$$\lambda(20, v) = 0, \quad S(20, v) = 0, \quad \forall v \in \Omega \quad \text{ist.}$$

Daraus erhalten wir:

$$u_1^*(0) = \arg \max_{v_0 \in \Omega} \{S_1(0, v) + \lambda_1(0, v) \cdot 0.25\},$$

und

$$u_1^*(10) = \arg \max_{v \in \Omega} \{S_1(10, v) + \lambda_1(10, v) \cdot x_1(10, v)\}. \quad (5.19)$$

Die zugehörige Differentialgleichungen (5.17) und (5.18) für $k = 0, 1$ lauten hier:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t, v_k) &= -p_1 v_k - \varepsilon_1 \lambda_1(t, v_k) + s_1 \lambda_1(t, v_k) v_k, \\ -\dot{S}_1(t, v_k) &= -c \cdot v_k^2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Weiterhin gilt auch die Prozessgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t, v_k) &= \varepsilon_1 x_1(t, v_k) - s_1 v_k x_1(t, v_k), \quad k = 0, 1, \\ x_1(0, v_0) &= 0.25, \quad x_1(10, v_1) = x_1(10 - 0, v_0). \end{aligned}$$

sowie Übergangsbedingungen:

$$\lambda_1(t_1 - 0, v_0) = \lambda_1(t_1, u_1^*), \quad S_1(t_1 - 0, v_0) = S_1(t_1, u_1^*).$$

Nun lösen wir die Prozessgleichungen für konstante v_k :

$$\dot{x}_1(t, v_k) = (\varepsilon_1 - s_1 v_k) x_1(t, v_k), \quad k = 0, 1$$

mit entsprechenden Anfangsbedingungen $x_1(t_k) = x_{1k}$, $k = 0, 1$ und erhalten:

$$x_1(t, v_k) = e^{(\varepsilon_1 - s_1 v_k)t}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}),$$

mit $x_1(0, v_0) = 0.25$. Nun berechnen wir $\lambda_1(t, v_k)$ und $S_1(t, v_k)$ für $k = 0, 1$ zu:

$$\lambda_1(t, v_k) = -\frac{p_1 v_k}{\varepsilon_1 - s_1 v_k} + L_1 \cdot e^{(s_1 v_k - \varepsilon_1)t},$$

$$S_1(t, v_k) = c_1 v_k^2 t + L_2.$$

Dabei sind L_1, L_2 Integrationskonstanten. Auf dem Intervall $[10; 20)$ erhalten wir mit Hilfe der Transversalitätsbedingungen

$$\lambda_1(t, v_1) = -\frac{p_1 v_1}{\varepsilon_1 - s_1 v_1} + \frac{p_1 v_1}{\varepsilon_1 - s_1 v_1} \cdot e^{(s_1 v_1 - \varepsilon_1)(t-20)},$$

$$S_1(t, v_1) = c_1 v_1^2 t - 20c_1 v_1^2.$$

Durch Übergangsbedingungen resultieren im Intervall $[0; 10)$:

$$\lambda_1(t, v_0) = -\frac{p_1 v_0}{\varepsilon_1 - s_1 v_0} + \left(\frac{p_1 v_0}{\varepsilon_1 - s_1 v_0} - \frac{p_1 v_1}{\varepsilon_1 - s_1 v_1} \right) \cdot e^{(s_1 v_0 - \varepsilon_1)(t-10)}$$

$$+ \frac{p_1 v_1}{\varepsilon_1 - s_1 v_1} \cdot e^{-10 \cdot (s_1 v_0 + s_1 v_1 - 2\varepsilon_1)} \cdot e^{(s_1 v_0 - \varepsilon_1)t},$$

$$S_1(t, v_0) = c_1 v_0^2 t - 10c_1(v_0^2 + v_1^2).$$

Die optimalen Steuerungen werden mit Hilfe folgender Formeln berechnet:

$$u_1^*(0) = \arg \max_{v_0 \in \Omega} \left\{ -10c_1(v_0^2 + v_1^2) \right.$$

$$+ \left[-\frac{p_1 v_0}{\varepsilon_1 - s_1 v_0} + \left(\frac{p_1 v_0}{\varepsilon_1 - s_1 v_0} - \frac{p_1 v_1}{\varepsilon_1 - s_1 v_1} \right) \cdot e^{(s_1 v_0 - \varepsilon_1)(-10)} \right.$$

$$\left. \left. + \frac{p_1 v_1}{\varepsilon_1 - s_1 v_1} \cdot e^{-10 \cdot (s_1 v_0 + s_1 v_1 - 2\varepsilon_1)} \right] \cdot 0.25 \right\},$$

$$u_1^*(10) = \arg \max_{v_1 \in \Omega} \left\{ -10c_1 v_1^2 \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{p_1 v_1}{\varepsilon_1 - s_1 v_1} + \frac{p_1 v_1}{\varepsilon_1 - s_1 v_1} \cdot e^{(s_1 v_1 - \varepsilon_1)(-10)} \right] \cdot 0.25 \cdot e^{(\varepsilon_1 - s_1 v_0) \cdot 10} \right\}.$$

Durch notwendige Optimalitätsbedingungen resultiert daraus das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 0 &= -20c_1v_0 + 0.25 \cdot \left[-\frac{p_1\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - s_1v_0)^2} + \frac{p_1\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - s_1v_0)^2} \cdot e^{(s_1v_0 - \varepsilon_1)(-10)} \right. \\
 &\quad + \left(\frac{p_1v_0}{\varepsilon_1 - s_1v_0} - \frac{p_1v_1}{\varepsilon_1 - s_1v_1} \right) \cdot (-10s_1) \cdot e^{(s_1v_0 - \varepsilon_1)(-10)} \\
 &\quad \left. + \frac{p_1v_1}{\varepsilon_1 - s_1v_1} \cdot (-10s_1) \cdot e^{-10 \cdot (s_1v_0 + s_1v_1 - 2\varepsilon_1)} \right], \\
 0 &= -20c_1v_1 + 0.25 \cdot e^{(\varepsilon_1 - s_1v_0) \cdot 10} \\
 &\quad \cdot \left[-\frac{p_1\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - s_1v_1)^2} + \frac{p_1\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - s_1v_1)^2} \cdot e^{(s_1v_1 - \varepsilon_1)(-10)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{p_1v_1}{\varepsilon_1 - s_1v_1} \cdot (-10s_1) \cdot e^{(s_1v_1 - \varepsilon_1)(-10)} \right].
 \end{aligned}$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem lösen wir mit Hilfe der Newton-Methode (Programm C.6 im Anhang).

Die optimalen Steuerungen sind hier $u_1^*(0) = 5.2062$; $u_1^*(10) = 115.8157$ mit dem Wert des Zielfunktional 281.156 Mio. Euro, was größer ist, als die mit dem OC-ODE-Programm berechnete Lösung.

Jetzt betrachten wir das Modell (5.16) mit 10 Steuerungsintervallen. Als Lösung erhalten wir hier folgende Werte (vgl. auch Abb. 5.27):

Jahr	x	u	$J(u)$
0.0	0.25000	0.00000	0.00000
2.0	0.30535	0.00000	0.00000
4.0	0.37295	0.00000	0.00000
6.0	0.45553	11.2777	0.00000
8.0	0.55169	29.9886	4.48075
10.0	0.65885	52.3139	17.5753
12.0	0.77376	78.5078	42.4233
14.0	0.89104	108.642	82.3067
16.0	1.00315	142.537	139.900
18.0	1.10103	179.708	216.108
20.0	1.17523	179.708	308.650

Tabelle 5.1.: Lösung der Aufgabe (5.16) mit 10 Steuerungsintervallen

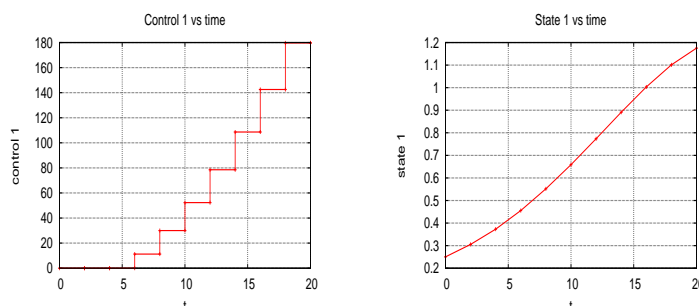


Abbildung 5.27.: Eindimensionales Modell mit quadratisch auftretender Steuerung für 10 Steuerungsintervalle. Optimale stückweise konstante Steuerung (links) und die Populationsentwicklung (rechts)

Diese Lösung erfüllt ebenfalls neue notwendige Bedingungen (5.17)-(5.18). In der Tat, die optimalen Steuerungswerte können aus dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 0 = & -4c_1v_0 + 0.25 \cdot \left[-\frac{p_1\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - s_1v_0)^2} + \frac{p_1\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - s_1v_0)^2} \cdot e^{(s_1v_0 - \varepsilon_1)(-2)} \right. \\
 & + \left\{ \frac{p_1v_0}{\varepsilon_1 - s_1v_0} - \frac{p_1v_1}{\varepsilon_1 - s_1v_1} \right. \\
 & + \left(\frac{p_1v_1}{\varepsilon_1 - s_1v_1} - \frac{p_1v_2}{\varepsilon_1 - s_1v_2} + \dots \right. \\
 & + \left. \left. \left\{ \frac{p_1v_9}{\varepsilon_1 - s_1v_9} - \frac{p_1v_{10}}{\varepsilon_1 - s_1v_{10}} + \frac{p_1v_{10}}{\varepsilon_1 - s_1v_{10}} \cdot e^{-2 \cdot (s_1v_{10} - \varepsilon_1)} \right\} \dots \cdot e^{-2 \cdot (s_1v_2 - \varepsilon_1)} \right) \right. \\
 & \left. \left. \cdot e^{-2 \cdot (s_1v_1 - \varepsilon_1)} \right\} \cdot (-2s_1) \cdot e^{-2 \cdot (s_1v_0 - \varepsilon_1)} \right], \\
 & \dots \\
 0 = & -4c_1v_{10} + 0.25 \cdot e^{(\varepsilon_1 - s_1v_0) \cdot 2} \dots \cdot e^{(\varepsilon_1 - s_1v_9) \cdot 2} \\
 & \cdot \left[-\frac{p_1\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - s_1v_{10})^2} + \frac{p_1\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - s_1v_{10})^2} \cdot e^{(s_1v_{10} - \varepsilon_1)(-2)} \right. \\
 & \left. + \frac{p_1v_{10}}{\varepsilon_1 - s_1v_{10}} \cdot (-2s_1) \cdot e^{(s_1v_{10} - \varepsilon_1)(-2)} \right]
 \end{aligned}$$

erhalten werden.

Wird nun das dreidimensionale quadratische Modell (5.12) mit stückweise konstanten Steuerungen betrachtet, so bekommen wir entsprechende Lösungen auf Abbildungen 5.28, 5.29, 5.30. Es wird dabei ein Gewinn von 969.75 Mio. Euro erzielt.

5. Numerische Methoden für verschiedene Aufgaben der Optimalsteuerung

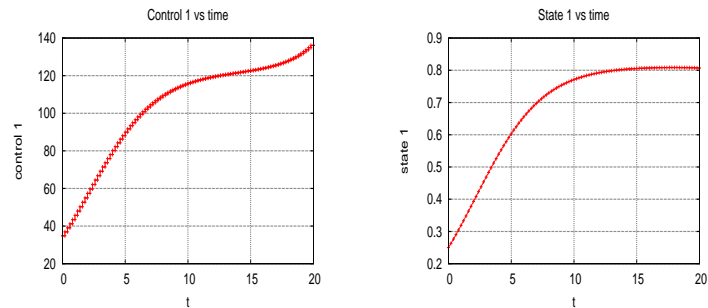


Abbildung 5.28.: Dorsch. Optimale stückweise konstante „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit quadratischen Kostenfunktionen

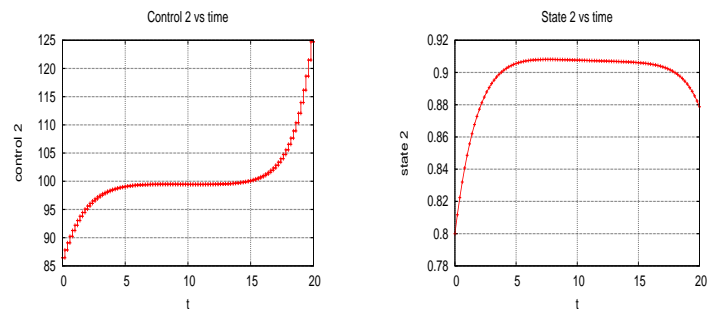


Abbildung 5.29.: Hering. Optimale stückweise konstante „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit quadratischen Kostenfunktionen

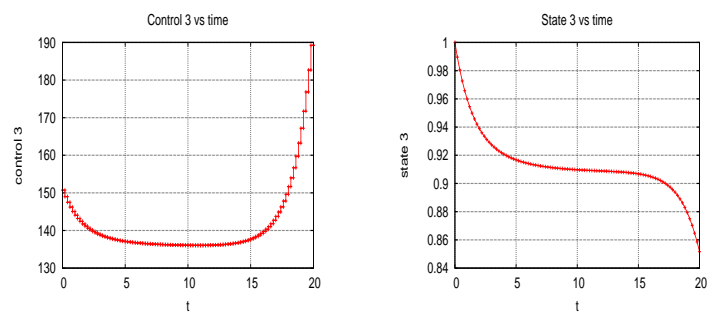


Abbildung 5.30.: Sprotte. Optimale stückweise konstante „Anzahl der Kutter“ (links) und die Populationsentwicklung (rechts) in Modellen mit quadratischen Kostenfunktionen

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich mit mathematischen Aspekten für einige biologische Probleme. Es geht um eine Anwendung der Optimalsteuerungstheorie in einer nachhaltigen Ostsee-Fischerei. Die Motivation dieser Arbeit ist eine Untersuchung bei der Dorschpopulation. Diese war in den letzten fünfzehn Jahren stark abgesunken. Es gilt die Bestände nachhaltig zu retten und die gesamte ökologische Lage in der Ostsee zu verbessern.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Koexistenz der Organismen zu beschreiben, wie z.B. Symbiose, Protokooperation oder Räuber-Beute-Verhältnisse. Bei einem Räuber-Beute-Modell betrachtet man in der Regel zwei oder mehrere Spezies mit gegenseitigen Wechselwirkungen. Dabei werden Individuen einer Population von den Individuen einer anderen Population als Nahrung benutzt.

Das zentrale Modell der Arbeit ist eine Aufgabe der Gewinnmaximierung bei einem Dreipopulationen-System (bestehend aus Dorsch, Hering und Sprotte). Das Zielfunktional mit Nebenbedingungen (ODE) und gegebenen Anfangswerten, wird maximiert. Bei den Prozessgleichungen handelt es sich um ein bekanntes logistisches Lotka-Volterra-Modell (1925), das auf mehrere Populationen verallgemeinert wird. Außerdem beinhalten die Gleichungen des Modells gewisse Steuerkomponenten, die den Einfluss durch die Fischerei beschreiben.

Die Steuerungen können dabei als Anzahl der Fischkutter oder als abzufangende Biomasse aufgefasst werden. Dabei betrachten wir sowohl klassische Modelle, die Steuerungen in der Klasse der stückweise stetigen Funktionen nehmen, als auch besondere Modelle, die stückweise konstante Steuerungen verlangen. Dies kann bei dem Fischfangmodell eine gravierende Rolle spielen, da man z.B. die Anzahl der Kutter stückweise konstant (besser ganzzahlig) betrachten muss.

- Für beide Steuerungsklassen werden notwendige Bedingung untersucht. In der klassischen Theorie gilt das Maximumprinzip von Pontrjagin, dessen Gültigkeit

in einem Modell mit stückweise konstanten Steuerungen nicht gewährleistet ist. Aus diesem Grunde wurden neue notwendige Optimalitätsbedingungen, die aus dem Bellmanprinzip resultieren, bewiesen und an einem Modell bestätigt.

Solche Optimalitätsbedingungen erlauben es, optimale Steuerungen auf den Intervallen konstanter Länge durch geeignete Hilfsfunktionen zu berechnen. Dabei werden die Prozessgleichungen, Transversalitätsbedingungen, Anfangs- bzw. Übergangsbedingungen verwendet.

Dies ist häufig mit dem Lösen größerer (nichtlinearer) Gleichungssysteme verbunden. Die Methode funktioniert für klassische open-loop-Modelle und auch für closed-loop-Modelle.

Die Vorgehensweise mit solchen Hilfsfunktionen ist neu und bietet eine Alternative bei den Berechnungen stückweise konstanter Steuerungen. Ein Nachteil bei solchen Modellen ist ein hoher Speicherbedarf, insbesondere, wenn die Anzahl der Umschaltpunkten steigt.

Die berechneten Lösungen wurden durch bekannte notwendige Optimalitätsbedingungen (Integrales Maximumprinzip) für stückweise konstante Steuerungen bestätigt.

- Bei der Anwendung der notwendigen Optimalitätsbedingung wurde zwischen linearen und nichtlinearen (in der Steuerung) Modellen unterschieden. Bei vielen wissenschaftlichen Untersuchungen werden Aufgabenklassen modelliert, bei denen Steuerungen in dem Zielfunktional und in den Prozessgleichungen linear sind.

Eine optimale Lösung in diesen Modellen besitzt in der Regel sogenannte Bang-Singulär-Bang oder eine einfache Bang-Bang-Struktur. Für die praktischen Aufgaben hat sich erwiesen, dass eine derartige optimale Lösung das Zielfunktional in einem gewissen Zeitabschnitt maximiert.

Bei den Modellen, die in den Steuerungen nichtlinear sind (und in der Arbeit lediglich aus einem theoretischen Interesse entstanden sind) wurden sowohl die Methoden benutzt, die notwendige Bedingungen verwenden, als auch die sogenannten Direkten Verfahren, die das Problem durch ein endlich-dimensionales Optimierungsproblem annähern.

Das Direkte Verfahren wird mit dem Programm OC-ODE von Gerdt's realisiert. Dabei werden die Zustände durch stückweise lineare Funktionen und die Steuerungen durch stückweise stetige (stückweise konstante) Funktionen approximieren. Auf diesem Wege wurden optimale Fangraten berechnet und auch weitere ökologische Fischfangmodelle untersucht.

- Hinreichende Optimalitätsbedingungen wurden diskutiert und die Gültigkeit der von K.Arrow an einem konkreten Beispiel getestet. Es stellte sich heraus, dass deren Gültigkeit häufig nicht nachzuweisen ist.
- Es wurden weitere ökologische Fragestellungen untersucht, i.e., Modelle mit

optimalen Fangzeiten und Fangphasen, Altersgruppenmodelle und Modelle mit wechselnden Wachstumsraten.

Die betrachteten Fischereimodelle besitzen eine Reihe interessanter Aspekte, sowohl für Ökonomie, als auch für Ökologie. Daraus ergeben sich gewisse Empfehlungen für die Fischerei-Industrien.

Vorgeschriebene Fangnormen sollen nicht überhöht werden. Für jede Fischpopulation müssen eine kontrollierte Fang- und Ruhephasen-Unterscheidung beachtet werden. Jüngere Fische dürfen möglichst nicht gefangen werden, um eine spätere Generationsentwicklung zu sichern. Dies kann z.B. durch Optimieren der Fischereinetze erreicht werden.

Die Dissertation kann als Grundlage weiterer Forschungen dienen. Die Modelle des Fischfangs können noch mehr vielfältiger sein und mehrere ökologischen Aspekte beeinflussen, so wie z.B. die Konkurrenz in einer Population, den Klimawandel oder saisonabhängige Faktoren.

Die politischen Förderschwerpunkte in der Ostsee müssten durch umweltverträgliche Strategien des Fischfangs und durch eine strenge Kontrolle von Fischereigebieten erfolgen. Der Fischereischutz muss auf einem internationalen Niveau betrieben werden. Bilaterale Fischereiabkommen sollten langfristig gepflegt werden.

Besonders wichtig ist der Aspekt der Nachhaltigkeit. Eine optimale Lösung sollte auch für längere Zeitabschnitte gelten, die Fische erhalten und wirtschaftliche Besonderheiten (z.B. Diskontierung des Kapitals) berücksichtigen.

Wie die letzten Studien zeigen, lohnen sich nachhaltige Bewirtschaftung, Kontrolle und Durchsetzung von Fangquoten. Sie verbessern die Situation in der Ostsee.

Die gegenwärtige Lage zeigt, dass die Bestände sich gut erholen haben. Kleine Schwankungen der Bestandsgrößen und der Fangquoten treten zwar auf, aber sie sind in ökologischen Systemen normal. Sie werden in der Regel durch die Natur geregelt.

Die Heringpopulation zeigt nach einigen Jahren Quotensenkung eine deutliche Bestandserholung. Die weiteren Perspektiven für die Heringsfischer an der Ostseeküste verbessern sich, da die Erzeugerpreise auf dem Markt stabil bleiben.

Die Sprotten zeigen ebenfalls eine positive Bestandsentwicklung. Zunächst wurde mit abnehmenden Populationsgrößen gerechnet, da sich die in den letzten Jahren gestiegenen Dorschbestände hauptsächlich von Sprotten ernähren. Hier ist jedoch eine Stabilisierung durch räumliche Trennung erkennbar. Die größten Sprottenareale finden sich dort, wo wenig Dorsch vorkommt (vgl. [47]).

Der östliche Dorschbestand wird seit Jahren im Rahmen von Managementplänen nachhaltig bewirtschaftet. Gegenwärtige Populationsgrößen befinden sich im Bereich der Nachhaltigkeit. Die Bestandsgröße scheint eine logistische Obergrenze erreicht zu haben, denn bei der Dorschpopulation gibt es bereits deutliche Anzeichen von Nahrungsmangel. Schwankungen der Bestandsgröße und der Fangquoten sind in

6. Zusammenfassung und Ausblick

diesem natürlichen System normal.

Zur Erholung der Fischpopulationen wurden selektive Gebietsschließungen und Schonzeiten erfolgreich eingesetzt. Langfristige Maßnahmen, wie Schutzgebiete, müssen im Weiteren durch wirksame Managementprojekte gestärkt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [2] M. Begon, M. Mortimer. *Populationsökologie*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1997.
- [3] V. G. Boltyanski. *Optimale Steuerung diskreter Systeme*. Nauka, Moskau, 1973.
- [4] M. Brokate. *Steuerungstheorie*. Institut für Informatik und Praktische Mathematik, TU München, 1994.
- [5] T. Christiaans. *Neoklassische Wachstumstheorie*. Books on Demand GmbH, Norderstedt, 2004.
- [6] R. Döring. *Die Zukunft der Fischerei im Biosphärenreservat Südost-Rügen*. Peter Lang GmbH, 2001.
- [7] R. Döring; I. Laforet et al. *Wege zu einer natur- und ökosystemverträglichen Fischerei am Beispiel ausgewählter Gebiete der Ostsee*. Endbericht des F+E Vorhabens, Bonn – Bad Godesberg, 2005.
- [8] R. Gabasov; F. M. Kirillova; B. S. Mordukhovich. *The epsilon-maximum principle for suboptimal controls*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 268 (1983), 525-529.
- [9] O. Gabriel, W. Hartmann, B. Klenz, U. Richter. *Fischereiforschungskutter „Clupea „50 Jahre*. Inf. Fischwirtsch. Fischereiforsch. 46(4): 3–8, 1999.
- [10] M. Gerdts. *OC-ODE. Optimal Control of Ordinary-Differential Equations. User's Guide*. University of Hamburg, 2006.
- [11] M. Gerdts. *Optimale Steuerung*. Vorlesungsskript, Universität Würzburg, WS 2009/2010.
- [12] H.-J. Girlich; P. Köchel; H.-U. Kuenle. *Steuerung dynamischer Systeme*. Fachbuchverlag Leipzig, 1990.
- [13] L. Grüne. *Modellierung mit Differentialgleichungen*. Vorlesungsskript, Universität Bayreuth, 2003.
- [14] L. Grüne. *Viskositätslösungen von Hamilton–Jacobi–Bellman Gleichungen — eine Einführung*. Vortrag im Seminar “Numerische Dynamik von Kontrollsystemen”, 2004.

- [15] M. Hermann, *Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen: Anfangs- und Randwertprobleme*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2004.
- [16] P. Ernst; W. Müller. *Die deutsche und internationale Dorschfischerei in der Ostsee im Jahr 1998*. Inf. Fischwirtsch. Fischereiforsch. 46 (3): 32–35, 1999.
- [17] P. Ernst; W. Müller. *Konzept für eine bestandsschonendere Nutzung der Dorschvorkommen in der westlichen Ostsee*. Inf. Fischwirtsch. Fischereiforsch. 47(1), 2000.
- [18] R. Fedorenko. *Die approximative Lösung der Optimalsteuerprobleme*. Nauka, Moskau, 1978.
- [19] P. Hoffman. *Dynamische Programmierung*. Vorlesungsskript, Universität Bayreuth, 2008.
- [20] B. Klenz. *Schwacher Nachwuchsjahrgang 2000 des Herings in der westlichen Ostsee*. Inf. Fischwirtsch. Fischereiforsch. 47(4): 191–192, 2000.
- [21] S. Konyagin. *Variationsrechnung und Optimale Steuerung (russisch)*. Vorlesungsskript, Moskau, 2005.
- [22] V. Krotov. *Grundlagen der Optimalsteuerungstheorie (russisch)*. Verlag „Vysshaya shkola“, 1990.
- [23] M. Lange. *Mittelseminar: Die Ostseeregion im Wandel*. Skript, Kiel, 2004.
- [24] P. Lions. *On the Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*. Acta Applicandae Mathematicae 1, 17-41, 1983.
- [25] A. J. Lotka. *Elements of mathematical biology*. Dover, New York, 1956.
- [26] O. L. Mangasarian. *Sufficient Conditions for the Optimal Control of Nonlinear Systems*. SIAM Journal of Control, V. 4, 139-152, 1966.
- [27] H. Müller. *Ökologie*. Gustav Fischer Verlag, Jena, 2. Auflage, 1991.
- [28] W. Mönkemeyer. *Numerische Lösung von Optimalsteuerungsproblemen am Beispiel nachhaltiger Fischerei in der Ostsee*. Diplomarbeit, Greifswald, 2004.
- [29] A. Pantelejew; A. Bortakovskij. *Optimalsteuerungstheorie an Beispielen und Aufgaben (russisch)*., Verlag „Vysshaya shkola“, 2003.
- [30] M. Papageorgiou. *Optimierung*. R. Oldenbourg Verlag, München, 1996.
- [31] T. Pavlidis. *Biological Oscillators: Their Mathematical Analysis*. Academic Press, New York 1973.
- [32] K. Pommerening. *Computersimulation dynamischer Systeme, dargestellt am Beispiel der Räuber-Beute-Systeme und anderer Wachstumsmodelle aus der Ökologie*. Skript, Leipzig, 1987.
- [33] L. Pontrjagin; V. Boltjanskij; R. Gamkrelidze; E. Miscenko. *Mathematische Theorie optimaler Prozesse*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.
- [34] O. Rechlin. *Fischbestände der Ostsee, ihre Entwicklung in den Jahren seit 1970 und Schlussfolgerungen für ihre Nutzung*. Rostock, 1999.

- [35] W.H.Schmidt. *Durch Integralgleichungen beschriebene optimale Prozesse mit Nebenbedingungen in Banachräumen - notwendige Optimalitätsbedingungen*. ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 65–75, 1982.
- [36] J. Stoer; R. Bulirsch. *Numerische Mathematik II*. Springer-Verlag, 2005.
- [37] O. von Stryk. *User's Guide for DIRCOL Version 2.1*. Simulation and Systems Optimization Group, Technische Universität Darmstadt, 1999.
- [38] O. von Stryk. *Numerische Lösung optimaler Steuerungsprobleme: Diskretisierung, Parameteroptimierung und Berechnung der adjungierten Variablen*. VDI Verlag GmbH, Düsseldorf, 1995.
- [39] D. Stukalin; W. H. Schmidt. *Some Applications of Optimal Control in Sustainable Fishing in the Baltic Sea*. Applied Mathematics, Vol. 2, Juli 2011, 854-865.
- [40] M. Zelikin; V. Borisov. *Theory of Chattering Control*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [41] Europäischen Kommission. *Ostsee. Bewirtschaftung nach Maß*. Eine Publikation der Europäischen Kommission, Nr. 29, 2006.
- Einige der Quellen sind Dokumente im Internet. Diese Quellen können sich in der Zwischenzeit verändert haben oder wurden eventuell sogar vom Betreiber entfernt.
- [42] http://www.asc-westküste.de/Recht/Bericht_LR_16.pdf (11.12.2012)
- [43] http://www.bfn.de/habitatmare/de/downloads/berichte/Oekosystemvertraegliche_Fischerei_Ostsee_2005.pdf (02.02.2013)
- [44] http://www.bmelv.de/DE/Landwirtschaft/Fischereipolitik/D-Fischerei/fischerei_node.html (10.01.2013)
- [45] http://www.bund.net/themen_und_projekte/meeresschutz/belastungen/fischerei/eu_fischereireform/ (19.09.2012)
- [46] <http://www.bundestag.de/dokumente/analysen/2009/ueberfischung.pdf> (13.10.2012)
- [47] http://www.deutscher-fischerei-verband.de/downloads/Pressemitteilung_31.05.2012.pdf (15.08.2012)
- [48] [http://eeo.uni-klu.ac.at/index.php?title=Litauen_\(Land\)](http://eeo.uni-klu.ac.at/index.php?title=Litauen_(Land)) (21.09.2012)
- [49] http://ec.europa.eu/fisheries/documentation/magazine/mag29_de.pdf (01.03.2013)
- [50] <http://www.europa.eu/rapid/pressReleasesAction.doc> (10.10.2011)
- [51] http://fischbestaende.portal-fischerei.de/Fischarten/?c=stock&a=detail&stock_id=199 (11.12.2012)
- [52] http://www.greenpeace.de/themen/meere/fischerei/artikel/welche_fangmethoden_gibt_es/ (18.10.2012)
- [53] http://gruppen.greenpeace.de/wuppertal/themen_files/meere_files/aktion_fischerei_zootag_files/fischstbchen_im_aus_kabeljau.pdf (14.06.2011)

- [54] http://www.ifgivor.uni-muenster.de/vorlesungen/Num_Modellierung/Populat_Modelle/population_einf.html (19.10.2011)
- [55] http://www.ikzm-d.de/seminare/pdf/MS_Ostseeregion_Lange.pdf (18.04.2012)
- [56] <http://www.landtag.ltsh.de/infothek/wahl16/drucks/1500/drucksache-16-1553.pdf> (21.10.2011)
- [57] http://www.literatur.vti.bund.de/digbib_extern/dk039458.pdf (30.01.2012)
- [58] <http://www.luontoportti.com/suomi/de/kalat/ostseehering> (12.03.2013)
- [59] <http://www.mare-nostrum.org> (10.10.2011)
- [60] <http://nat-meer.geomar.de/OzeanOnline/oekologie/ostseedorsch/dorsch.htm> (2.05.2012)
- [61] http://www.planet-wissen.de/laender_leute/ostsee/binnenmeer_ostsee/dorsch_hering_und_sprotte.jsp (23.01.2013)
- [62] <http://www.portal-fischerei.de/index.php%3Fid%3D1326> (14.11.2012)
- [63] <http://www.tagesspiegel.de/wirtschaft/fischerei-quoten-deutschland-will-mehrdorsch-fangen/1076596.html> (23.02.2012)
- [64] <http://www.umweltschulen.de/sites/ostsee/webside-fischerei/ostseefischerei1.htm> (15.11.2011)
- [65] <http://www.vdw-ev.de/index.php/de-DE/arbeitsfelder-der-vdw/biodiversitaet-nachhaltigkeit-und-landnutzung> (30.03.2012)
- [66] http://de.wikipedia.org/wiki/Atlantischer_Hering (20.11.2011)
- [67] <http://de.wikipedia.org/wiki/Nachhaltigkeit> (19.10.2011)
- [68] <http://de.wikipedia.org/wiki/Schleppnetz> (7.03.2012)
- [69] <http://worldoceanreview.com/fischerei/fischereimanagement/> (11.04.2012)
- [70] <http://www.wwf.de/themen-projekte/artenlexikon/kabeljau/> (12.02.2013)

Anhang

DIRCOL

A.1. Programm 1. Hauptprogramm user.f (wesentliche Teile)

```

SUBROUTINE USRSTV( IPHASE, NX, LU, TAU, X, U)
C* Purpose:
C* -----
C* This subroutine contains the initial estimates of the
C* state and control variable histories, (on a normalized
C* time interval), the control parameters, and initial
C* estimates of the events as provided by the user.
C*
C* The values of the arguments of this subroutine depend
C* on the value of the integer parameter IPHASE.
C*
C* If IPHASE > 0 then:
C* =====
C* ENTRY-Parameters:
C* -----
C* IPHASE...number of the actual phase (integer)
C* 1 <= IPHASE <= M1
C* NX.....the number of the state variables (integer)
C* LU.....the number of the control variables (integer)
C* TAU.....normalized time (i.e. 0. <= TAU <= 1.) (real)
C* (where the initial estimates of the state and
C* control variables are required.
C* The length of phase no. IPHASE corresponds

```

A. DIRCOL

```
C* to the interval [0,1].)
C*
C* EXIT-Parameters:
C* -----
C* X.....initial estimates of the state variables at
TAU
C* (real array)
C* U.....initial estimates of the control variables at
TAU
C* (real array)
C*
C* If IPHASE = 0 then:
C* =====
C* ENTRY-Parameters:
C* -----
C* LU.....the number of events (integer)
C*
C* EXIT-Parameters:
C* -----
C* U.....initial estimates of the events E(1), ...,
E(M)
C* (real array)
C*
C* If IPHASE < 0 then:
C* =====
C* ENTRY-Parameters:
C* -----
C* LU.....the number LP of the control parameters
(integer)
C*
C* EXIT-Parameters:
C* -----
C* U.....initial estimates of the control parameters
C* P(1), ..., P(LP) (real array)
C*****
C
IMPLICIT NONE
C
INTEGER IPHASE, NX, LU
C*** REAL
DOUBLE PRECISION
+ TAU, X(NX), U(LU)
C
```

A.1. Programm 1. Hauptprogramm user.f (wesentliche Teile)

```
C-----BEGIN--PROBLEM
C
IF (IPHASE .GT. 0) THEN
C
C ---- Initial estimates of X and U at TAU
C X(1) = 0.25D0
X(2) = 0.8D0
X(3) = 1.0D0
X(4) = 0D0
U(1) = 0D0
U(2) = 0D0
U(3) = 0D0
C
ELSE IF (IPHASE .EQ. 0) THEN
C
C ---- Initial estimates of the events E
C
U(1) = 0.D0
U(2) = 0.1D0
U(3) = 0.D0
C
ELSE IF (IPHASE .LT. 0) THEN
C
C ---- Initial estimates of the control parameters P
C
C There are none.
C
END IF
C
C-----END---PROBLEM-
C
RETURN
C -- End of subroutine USRSTV
END

SUBROUTINE USROBJ( NR, NX, LU, LP, ENR, XL, UL, P, FOBJ,
XR, UR)
C* Purpose:
C* -----
C* This subroutine provides the objective of the optimal
C* control problem in a Mayer type form.
C* The objective of a multi-phase program is assumed to
be
```

A. DIRCOL

```
C* of the form
C* F(E) = F1(E(1)) + F2(E(2)) + ... + FM(E(M))
C* which is a sum of functions F_i, i = 1,...,M, that
depend
C* either only on the state, control and parameter values
C* at initial (i=1) or final (i=M) time, or on the left-
and
C* rightsided limites at a switching point (i=2,...M-1).
C*
C*
C* -----
C* EXIT-Parameters:
C* -----
C* FOBJ...computed value of the NR-th part FNR(E(NR)) of
the sum
C* defines the objective (real)
C
IMPLICIT NONE
C
INTEGER NX, LU, LP, NR
C**** REAL
DOUBLE PRECISION
+ ENR, XL(NX), UL(LU), P(LP), FOBJ, XR(NX), UR(LU)
C
C-----BEGIN--PROBLEM
C
IF (NR .EQ. 2) THEN
FOBJ = -XL(4)
ELSE
FOBJ = 0.0D0
END IF
C
C-----END---PROBLEM
C
RETURN
C -- End of subroutine USROBJ
END

SUBROUTINE USRDEQ( IPHASE, NX, LU, LP, X, U, P, T, F)
C*****
C* Purpose:
C* -----
C* Computation of the right hand side F of the
```


A.1. Programm 1. Hauptprogramm user.f (wesentliche Teile)

```
C* differential equations
C* DX/DT = F(X, U, P, T)
C*
C* in phase number IPHASE.
C*
C* ENTRY-Parameters:
C* -----
C* IPHASE...number of the actual phase (integer)
C* 1 <= IPHASE <= M1
C* NX.....the number of the state variables (integer)
C* LU.....the number of the control variables (integer)
C* LP.....the number of control parameters (integer)
C* X.....the state variables at time T (real array)
C* U.....the control variables at time T (real array)
C* P.....the control parameters (real array)
C* T.....the time, where F has to be computed (real)
C*
C* EXIT-Parameters:
C* -----
C* F.....computed value of the right hand side of the
C* differential equations in phase IPHASE at time T
C* (real array)
C*****
C
IMPLICIT NONE
C
INTEGER IPHASE, NX, LU, LP
C*** REAL
DOUBLE PRECISION
+ X(NX), U(LU), P(LP), T, F(NX)
DOUBLE PRECISION
& PI
INTRINSIC COS, SIN
C
COMMON /USRCOM/ PI
C
C-----BEGIN--PROBLEM-----
C
F(1) = 0.4*X(1)*(1-X(1))-U(1)*1.5*25*X(1)/1E05
& -0.02*X(1)*X(2)/1.2 - 0.02*X(1)*X(3)/1.3
F(2) = 0.6*X(2)*(1-X(2)/1.2)-U(2)*6.4*250*X(2)/1.2E06-
& 0.0125*X(1)*X(2)/1.2 - 0.01*X(2)*X(3)/1.56
F(3) = 0.6*X(3)*(1-X(3)/1.3)-U(3)*6.4*250*X(3)/1.3E06-
```

A. DIRCOL

```
& 0.0125*X(1)*X(3)/1.3 - 0.01*X(2)*X(3)/1.56
F(4) = (1130*U(1)*1.5*250*X(1)/1E06+270*U(2)*
& 6.4*250*X(2)/1.2E06+460*U(3)*
& 6.4*250*X(3)/1.3E06-500*250*(U(1)+U(2)+U(3))/1.0E06)
& *exp(-0.06*T)
C
C-----END---PROBLEM-----
C
RETURN
C -- End of subroutine USRDEQ
END
```

A.2. Programm 2. Programm DATDIM

```
*****
* file DATDIM
* (dimensions of the parameterized optimal control
problem)
***** *****
*
* NAME of the OPTIMAL CONTROL PROBLEM
*2345678901234567890123456789* (<- max. length of name)
fischpopulationen
*
* ACTION:
* - OPTIMIZATION by using NPSOL (0)
* or a check of all dimensions of feasibility (1)
* or a check of subroutines/computation of starting
trajectory (2)
* or computation of a FEASIBLE TRAJECTORY by
* - objective min-max1 / use NPSOL (4)
* - objective min-max2 / use NPSOL (5) ??
0 , -1
*
* PARAMETERS of NPSOL:
* Optimality Tolerance EPOPT = ?
1.0E-5
* Nonlinear Feasibility Tolerance EPNFT = ?
1.0E-8
* Major Print Level (0 or 5) = ?
5
*
```

```

* which SCALINGS have to be used:
* - automatic scaling (but for X, U, E in each phase the
same) (0)
* - read scalings from file 'DATSKA' (1)
* - use no scaling (2)
* - automatic scaling (X, U, E in each phase different)
(3)
* - automatic scaling (X, U in each phase the same, but E
different) (4) ??
2
* NUMBER of STATE VARIABLES ( NX ),
* of CONTROL VARIABLES ( LU ),
* of CONTROL PARAMETERS ( LP ),
* NX, LU, LP = ?
4, 3, 0
* NUMBER of PHASES M1 = ?
1
* NUMBERS of NONLINEAR IMPLICIT BOUNDARY CONSTRAINTS
* NRNLN(1)
* ...
* NRNLN(M1)
0
* NUMBERS of NONLINEAR INEQUALITY and EQUALITY
* CONSTRAINTS in PHASES 1 through M1:
* NGNLN(1) , NHNLN(1)
* ...
* NGNLN(M1) , NHNLN(M1)
1,0
*
*
* NUMBER of GRID POINTS in PHASES 1 through M1
* ( NI(K) >= 3 ):
* NI(1)
* ...* NI(M1)
41
*
* GRID POINTs parameters:
* STARTING POSITIONS: | during OPTIMIZATION:
* - equidistant (0) | - fixed grid points (0)
* - as in file DATGIT (1) | - movable (collocation
* error)(1)
* - as Cebyshev points (2) | - movable (variation) (2)
* | - movable (no add. eq. cons.)(3) ??

```

A. DIRCOL

```
0, 0
*
* STARTING VALUES of X(t), U(t), P, and E:
* - as specified in subroutine USRSTV (0)
* - as in files GDATX, GDATU (unchanged number of phases)
(1)
* - X, U, P as in files GDATX, GDATU and
* E as specified in USRSTV (changed number of phases) (2)
??
0
*
* ESTIMATES of the ADJOINT VARIABLES and of
* the SWITCHING STRUCTURES of state and control
* constraints
* - are NOT required (0)
* - are required (1) ??
1
*
* NAMES of the NX state variables:
* X(1)_Name
* ...
* X(NX)_Name
*2345678901234* (<- max. length of name)
x1(t)
x2(t)
x3(t)
J(u)
*
* NAMES of the LU control variables:
* U(1)_Name
* ...
* U(LU)_Name
*2345678901234* (<- max. length of name)
u1(t)
u2(t)
u3(t)
*
* the I-th STATE VARIABLE (I = 1, ..., NX) is an
* UNCONSTRAINED ANGLE and varies only in
* [ -PI, PI [ : 1 (if yes) or 0 (if not)
*
0
0
```

```

0
0
*
* the K-th control variable (K = 1,.., LU) is an
* UNCONSTRAINED ANGLE and varies only in
* [ -PI, PI [ : 1 (if yes) or 0 (if not)
*
0
0
0
*
*
* NAMES of the NGNLN(1) nonlinear INEQUALITY
* CONSTRAINTS of the 1-st phase:
* 1-st name
* ...
* NGNLN(1)-th name
*2345678901234* (<- max. length of name)
u(1)+u(2)+u(3) <= 1900

```

A.3. Programm 3. Programm DATLIM

```

*****
* file DATLIM
* (prescribed values at initial time,
* final time and switching points,
* lower and upper bounds for all variables X, U, P, E) *
*****
*
* the NX values of X(1) through X(NX) at E(1)=T0,
* E(M)=TF are
1 , 0, 0.25E0
1 , 0, 0.8E0
1 , 0, 1.0E0
1, 0, 0.0E0
* the LU values of U(1) through U(LU) at E(1)=T0,
* E(M)=TF are
0 , 0
0 , 0
0 , 0
*
* 1. switching point E(2):

```

A. DIRCOL

```
* -----
* the NX values of X(1) through X(NX) at the switching
* point are
* ...
* the LU values of U(1) through U(LU) at the switching
* point are
*
* 2. switching point E(3):
* -----
* the NX values of X(1) through X(NX) at the switching
* point are
* ...
* the LU values of U(1) through U(LU) at the switching
* point are
* ...
*
* the lower and upper bounds of the events
* E(2), ..., E(M)=TF are
* -----
* MIN , MAX
20.0E0 , 20.0E0
*
* 1. phase:
* -----
* the NX lower and upper bounds of the state
* variables X are
* X(I)MIN , X(I)MAX
0.25 , 1.0
0.3 , 1.2
0.3 , 1.3
0.0E+10 , 1.0E+10
*
* the LU lower and upper bounds of the control
* variables U are
* U(K)MIN , U(K)MAX
0.0 , 900.0
0.0 , 900.0
0.0 , 900.0
*
* 2. Phase:
* -----
* the NX lower and upper bounds of the state
* variables X are
```

```
* X(I)MIN , X(I)MAX
*-1.E+10 , +1.0E+10
* -1.E+10 , +1.0E+10
* -1.E+10 , +1.0E+10
* -1.E+10 , +1.0E+10
* -1.E+10 , +1.0E+10
* -1.E+10 , +1.0E+10
*
* the LU lower and upper bounds of the control
* variables U are
* U(K)MIN , U(K)MAX
* 0.0 , 950.0
* 0.0 , 950.0
* 0.0 , 950.0
* 0.0 , 950.0
* 0.0 , 950.0
*
*
* the LP lower and upper bounds of the control
* parameters P are
* -----
* P(K)MIN , P(K)MAX
*
*
```

A. DIRCOL

Jahr	x_1	x_2	x_3	$J(u)$	u_1	u_2	u_3
0.0	0.25000	0.80000	1.00000	0.0000	0.0000	617.22	900.00
0.5	0.28585	0.71089	0.71574	148.27	0.0000	76.776	528.63
1.0	0.32478	0.72351	0.68663	194.86	0.0000	216.89	56.097
1.5	0.36603	0.71688	0.70526	228.58	0.0000	160.14	290.57
2.0	0.40907	0.71749	0.69574	268.34	0.0000	185.87	192.41
2.5	0.45320	0.71464	0.69796	304.01	0.0000	175.87	234.25
3.0	0.49767	0.71292	0.69503	339.79	0.0000	181.72	217.62
3.5	0.54170	0.71014	0.69393	374.07	0.0000	181.56	225.90
4.0	0.57586	0.70790	0.69218	411.15	165.63	180.79	221.50
4.5	0.58150	0.70743	0.69200	458.57	502.91	174.86	218.86
5.0	0.57814	0.70768	0.69209	508.23	338.91	177.62	220.23
5.5	0.57965	0.70757	0.69207	554.49	410.50	176.42	219.38
6.0	0.57901	0.70762	0.69209	600.21	379.60	176.95	220.03
6.5	0.57932	0.70760	0.69204	644.24	392.55	176.71	219.72
7.0	0.57917	0.70759	0.69208	687.12	388.16	176.91	219.64
7.5	0.57919	0.70761	0.69209	728.67	389.41	176.62	219.83
8.0	0.57919	0.70763	0.69208	769.01	388.81	176.85	219.72
8.5	0.57923	0.70760	0.69205	808.15	388.34	176.86	219.91
9.0	0.57922	0.70758	0.69206	846.14	389.76	176.80	219.57
9.5	0.57919	0.70762	0.69210	883.00	388.78	176.60	219.78
10.0	0.57921	0.70761	0.69208	918.77	388.92	177.03	219.79
10.5	0.57917	0.70761	0.69205	953.51	389.82	176.53	219.88
11.0	0.57924	0.70761	0.69207	987.18	386.99	177.04	219.57
11.5	0.57925	0.70759	0.69208	1019.8	390.65	176.65	219.85
12.0	0.57914	0.70761	0.69209	1051.6	389.39	176.83	219.62
12.5	0.57922	0.70761	0.69207	1082.4	387.16	176.74	219.99
13.0	0.57925	0.70761	0.69204	1112.2	390.18	176.83	219.68
13.5	0.57921	0.70762	0.69209	1141.2	388.53	176.70	219.57
14.0	0.57916	0.70756	0.69207	1169.4	390.49	177.14	220.01
14.5	0.57920	0.70760	0.69208	1196.7	386.79	176.32	219.50
15.0	0.57928	0.70768	0.69209	1223.2	389.62	176.88	219.92
15.5	0.57892	0.70750	0.69200	1249.0	395.15	177.46	220.03
16.0	0.57986	0.70786	0.69223	1273.7	365.58	174.60	218.41
16.5	0.57775	0.70700	0.69161	1298.5	450.70	182.54	223.99
17.0	0.58249	0.70903	0.69323	1320.7	242.01	162.67	208.07
17.5	0.57364	0.70400	0.68917	1346.0	693.21	211.67	250.07
18.0	0.53401	0.72047	0.70205	1373.0	900.00	73.364	130.10
18.5	0.49168	0.70037	0.68284	1403.5	900.00	355.79	393.37
19.0	0.45667	0.58097	0.62006	1438.3	900.00	606.63	393.36
19.5	0.42752	0.53870	0.49139	1470.6	900.00	100.00	900.00
20.0	0.42100	0.50488	0.34530	1494.4	417.60	582.39	900.00

Tabelle A.1.: DIRCOL: Berechnete optimale Lösung

OC-ODE

B.1. Programm 1. Berechnung mit stückweise konstanten Steuerungen

```

PROGRAM FISCH6
IMPLICIT NONE
INTEGER DIM(8), INFO(31), LIW, LRW, IRES, IREALTIME, NREALTIME,
+ ISTEUER, IADJOINT, LRWADJ, LIWADJ, IUPDATE, LENACTIVE,
IPARAM(5), NVAR
DOUBLE PRECISION T(0:1), XL(0:1,6), XU(0:1,6),
+ UL(-1:1,3), UU(-1:1,3),
+ P(0:2,1), G(0:1,1), BC(0:1,6),
+ TOL(6), TAUU(1), TAUX(1),
+ HREALTIME, PARAM(12), DIMACH, SOL(1000)
CHARACTER*5 MERIT
PARAMETER (ISTEUER=1, LRW=3019074, LIW=5263, LIWADJ=500,
+ LRWADJ=655, LENACTIVE=1000)
CHARACTER*2 ACTIVE(LENACTIVE)
INTEGER I, IWORK(LIW), IWADJ(LIWADJ), IUSER(2)
DOUBLE PRECISION RWORK(LRW), RWADJ(LRWADJ), USER(2)
C
TOL(1) = 1.0d-10 ! Feasibility tolerance
TOL(2) = DSQRT(D1MACH(4)) ! Optimality tolerance
TOL(3) = 1.0d-15 ! Function precision
TOL(4) = 1.0d-12 ! Tolerance state
TOL(5) = 1.0d+7 ! Tolerance sensitivities
TOL(6) = 1.0d-6 ! finite difference step size

```

B. OC-ODE

```
C
MERIT = 'AUSQP'
IUPDATE = 4
C INTEGER PARAMETER
IPARAM(2)=1 ! IPRINT
IPARAM(4)=1 ! NONMON ON
C DOUBLE PARAMETER
PARAM(5) = 0.5D0 ! BETA
PARAM(6) = 1.0D-1 ! SIGMA
C
DIM(1) = 4 ! NX
DIM(2) = 3 ! NU
DIM(3) = 0 ! NP
DIM(4) = 1 ! NG
DIM(5) = 3 ! NBC
DIM(6) = 101 ! NGITU
DIM(7) = 1 ! NGITX
DIM(8) = 0 ! NROOT
INFO(1) = 0 ! IEQ
INFO(2) = 11 ! INTEG
INFO(3) = 1 ! ISTEUER (stückweise konstante Steuerungen)
INFO(4) = 1000 ! ILIMIT
INFO(5) = 1 ! IMETHOD
INFO(6) = 0 ! IMASS
INFO(7) = 1 ! IITMAT
INFO(8) = 0 ! IGJAC
INFO(9) = 6 ! ISTREAM
INFO(10)= 1 ! IFD
c Realtime Optimization
IREALTIME=0
NREALTIME=2
HREALTIME=1.D-3
C Adjoints
IADJOINT = 1
C Box constraints at t0
XL(0,1) = 0.25D0
XL(0,2) = 0.8D0
XL(0,3) = 1.0D0
XL(0,4) = 0.0D0
XU(0,1) = 0.25D0
XU(0,2) = 0.8D0
XU(0,3) = 1.0D0
XU(0,4) = 0.0D0
```

B.1. Programm 1. Berechnung mit stückweise konstanten Steuerungen

```
C Box constraints in (t0,tf)
XL(1,1) = 0.2D0
XL(1,2) = 0.3D0
XL(1,3) = 0.3D0
XL(1,4) = 0.0D0
XU(1,1) = 1.0D0
XU(1,2) = 1.2D0
XU(1,3) = 1.3D0
XU(1,4) = 1.0D+20
C Box constraints at t0
UL(-1,1) = 0.0D0
UL(-1,2) = 0.0D0
UL(-1,3) = 0.0D0
UU(-1,1) = 1900.0D0
UU(-1,2) = 1900.0D0
UU(-1,3) = 1900.0D0
C Box constraints in (t0,tf)
UL(0,1) = 0.0D0
UL(0,2) = 0.0D0
UL(0,3) = 0.0D0
UU(0,1) = 1900.0D0
UU(0,2) = 1900.0D0
UU(0,3) = 1900.0D0
C Box constraints at tf
UL(1,1) = 0.0D0
UL(1,2) = 0.0D0
UL(1,3) = 0.0D0
UU(1,1) = 1900.0D0
UU(1,2) = 1900.0D0
UU(1,3) = 1900.0D0
C State constraints
G(0,1) = 0.0D0
G(1,1) = +1.0D+20
C Initial time, length time interval
T(0) = 0.0D0
T(1) = 20.0D0
c Boundary conditions
BC(0,1) = 0.5792d0
BC(1,1) = 0.5792d0
BC(0,2) = 0.7076d0
BC(1,2) = 0.7076d0
BC(0,3) = 0.692d0
BC(1,3) = 0.692d0
```

B. OC-ODE

```
c Call to OC-ODE
c OPEN( INFO(9),FILE='OUT',STATUS='UNKNOWN' )
CALL OCODE( T, XL, XU, UL, UU, P, G, BC,
+ TOL, TAUU, TAUX, LIW, LRW, IRES,
+ IREALTIME, NREALTIME, HREALTIME,
+ IADJOINT, RWADJ, LRWADJ, IWADJ, LIWADJ, .FALSE.,
+ MERIT, IUPDATE, LENACTIVE, ACTIVE, IPARAM, PARAM,
+ DIM, INFO, IWORK, RWORK, SOL, NVAR, IUSER, USER)

PRINT*, 'Ausgabe der Loesung: NVAR=', NVAR
WRITE(*, ' (E30.16) ' ) (SOL(I), I=1, NVAR)

c CLOSE(INFO(9))

c READ(*,*)
END
c-----
c Objective Function
c-----
SUBROUTINE OBJ( X0, XF, TF, P, V, IUSER, USER )
IMPLICIT NONE
INTEGER IUSER(*)
DOUBLEPRECISION X0(*), XF(*), TF, P(*), V, USER(*)
V = -XF(4)
RETURN
END
c-----
c Differential Equation
c-----
SUBROUTINE DAE( T, X, XP, U, P, F, IFLAG, IUSER, USER )
IMPLICIT NONE
INTEGER IFLAG, IUSER(*)
DOUBLEPRECISION T, X(*), XP(*), U(*), P(*), F(*), USER(*)

F(1) = 0.4D0*X(1)*(1-X(1))-U(1)*1.5D0*25.0D0*X(1)/1.0
+ D+5-0.02D0*X(1)*X(2)/1.2D0-0.02D0*X(1)*X(3)/1.3D0
F(2) = 0.6D0*X(2)*(1-X(2)/1.2D0)-U(2)*6.4D0*250.0D0*X(2)
+ /1.2D+6-0.0125D0*X(1)*X(2)/1.2D0 - 0.01D0*X(2)*X(3)
+ /1.56D0
F(3) = 0.6D0*X(3)*(1-X(3)/1.3D0)-U(3)*6.4D0*250.0D0*X(3)
+ /1.3D+6-0.0125D0*X(1)*X(3)/1.3D0 - 0.01D0*X(2)*X(3)
+ /1.56D0
F(4) = ((1130.0D0*U(1)*1.5D0*250.0D0*X(1)/1.0D+6)+(270.0D0
```

B.1. Programm 1. Berechnung mit stückweise konstanten Steuerungen

```
+ *U(2)*6.4D0*250.0D0*X(2)/1.2D+6)+(460.0D0*U(3)*
+ 6.4D0*250.0D0*X(3)/1.3D+6)-500.0D0*250.0D0*(U(1)+U(2)
+ +U(3))/1.0D+6)*exp(-0.06D0*T)
RETURN
END
c-----
c Nonlinear Constraints
c-----
SUBROUTINE NLCSTR( T, X, U, P, G, IUSER, USER )
IMPLICIT NONE
INTEGER IUSER(*)
DOUBLEPRECISION T,X(*),U(*),P(*),G(*),USER(*)
DOUBLE PRECISION L
L = 1900.0D0
G(1) = -U(1)-U(2)-U(3)+L
RETURN
END
c-----
c JACOBIAN OF Nonlinear Constraints
c-----
SUBROUTINE JACNLC( T, X, U, P, NG, GJAC, IUSER, USER )
IMPLICIT NONE
INTEGER NG,IUSER(*)
DOUBLEPRECISION T,X(*),U(*),P(*),GJAC(NG,*),USER(*)
RETURN
END
c-----
c Boundary Conditions
c-----
SUBROUTINE BDCOND( T0,TF,X0,XF,U0,UF,P,PSI,IUSER,USER )
IMPLICIT NONE
INTEGER IUSER(*)
DOUBLEPRECISION T0,TF,X0(*),XF(*),U0(*),UF(*),P(*),
+ PSI(*),USER(*)
PSI(1) = XF(1)
PSI(2) = XF(2)
PSI(3) = XF(3)
RETURN
END
c-----
c Initial Estimate STATE VARIABLES
c-----
SUBROUTINE INESTX( T, X, IUSER, USER )
```

B. OC-ODE

```
IMPLICIT NONE
INTEGER IUSER(*)
DOUBLEPRECISION T,X(*),USER(*)
X(1) = 0.25D0
X(2) = 0.8D0
X(3) = 1.0D0
X(4) = 0.0D0
RETURN
END

c-----
c Initial Estimate CONTROL VARIABLES
c-----
SUBROUTINE INESTU( T, U, IBOOR, IUSER, USER )
IMPLICIT NONE
INTEGER IBOOR,IUSER(*)
DOUBLEPRECISION T,U(*),USER(*)
U(1)= 0.0D0
U(2)= 0.0D0
U(3)= 0.0D0
RETURN
END

c-----
c Mass Matrix
c-----
SUBROUTINE MASS( NX,T,X,XP,U,P,MMASS,IUSER,USER )
IMPLICIT NONE
INTEGER NX,IUSER(*)
DOUBLE PRECISION T,X(*),XP(*),U(*),P(*),
+ MMASS(NX,*),USER(*)
MMASS(1,1)=1.0d0
MMASS(2,1)=1.0d0
MMASS(3,1)=1.0d0
MMASS(4,1)=1.0d0
RETURN
END

c-----
c Iteration Matrix
c-----
SUBROUTINE ITMAT( T,X,XP,U,P,JAC1,JAC2,CJ,NX,
+ NSTAB,IUSER,USER )
IMPLICIT NONE
INTEGER NX,NSTAB,IUSER(*)
DOUBLE PRECISION T,X(*),XP(*),U(*),P(*),JAC1(NX,*),
```

B.1. Programm 1. Berechnung mit stückweise konstanten Steuerungen

```
+ JAC2 (NSTAB, *), CJ, USER (*)
RETURN
END
C-----
c Root Functions
C-----
SUBROUTINE ROOT( NX, T, X, U, P, NROOT, R, IUSER, USER )
IMPLICIT NONE
INTEGER NX, NROOT, IUSER (*)
DOUBLE PRECISION T, X (*), U (*), P (*), R (*), USER (*)
RETURN
END
C-----
c Jump Function
C-----
SUBROUTINE DJUMP( IC, T, XL, UL, P, D, IUSER, USER )
INTEGER IC, IUSER (*)
DOUBLE PRECISION T, XL (*), UL (*), P (*), D (*), USER (*)
RETURN
END
```

MATLAB-Programme

C.1. Programm 1. Berechnung stationärer Zustände.

```
clear all; format long;
p=[0.42375, 0.36, 0.566154];
e=[0.4, 0.6, 0.6];
K=[1, 1.2, 1.3];
b=[0,0.0167,0.0154;0.0104,0,0.0064;0.0096,0.0064,0];
c=0.125; d=0.06;
s=[0.000375, 0.001333, 0.001231];
for i=1:3
l(i)=0;
for j=1:3
l(i)=l(i)+s(i)/s(j)*c*b(j,i);
end;
end;
for k=1:3
ps1(k)=-2*p(k)*e(k)/K(k);
ps2(k)=-d*p(k)+p(k)*e(k)+c*e(k)/K(k)+l(k);
ps3(k)=d*c;
ps4(1)=-p(1)*b(1,2)-(s(1)/s(2))*p(2)*b(2,1);
ps4(2)=-p(2)*b(2,1)-(s(2)/s(1))*p(1)*b(1,2);
ps4(3)=-p(3)*b(3,1)-(s(3)/s(1))*p(1)*b(1,3);
ps5(1)=-p(1)*b(1,3)-(s(1)/s(3))*p(3)*b(3,1);
ps5(2)=-p(2)*b(2,3)-(s(2)/s(3))*p(3)*b(3,2);
ps5(3)=-p(3)*b(3,2)-(s(3)/s(2))*p(2)*b(2,3);
```

```

end; ps=[ps1;ps2;ps3;ps4;ps5],
f1=@(x1,x2,x3) ps(1,1)*x1^2+ps(2,1)*x1+ps(3,1) ...
+ps(4,1)*x1*x2+ps(5,1)*x1*x3;
f2=@(x1,x2,x3) ps(1,2)*x2^2+ps(2,2)*x2+ps(3,2) ...
+ps(4,2)*x1*x2+ps(5,2)*x2*x3;
f3=@(x1,x2,x3) ps(1,3)*x3^2+ps(2,3)*x3+ps(3,3) ...
+ps(4,3)*x1*x3+ps(5,3)*x2*x3;
f1x1=@(x1,x2,x3) ps(1,1)*2*x1+ps(2,1) ...
+ps(4,1)*x2+ps(5,1)*x3;
f1x2=@(x1) ps(4,1)*x1;
f1x3=@(x1) ps(5,1)*x1;
f2x1=@(x2) ps(4,2)*x2;
f2x2=@(x1,x2,x3) ps(1,2)*2*x2+ps(2,2) ...
+ps(4,2)*x1+ps(5,2)*x3;
f2x3=@(x2) ps(5,2)*x2;
f3x1=@(x3) ps(4,3)*x3;
f3x2=@(x3) ps(5,3)*x3;
f3x3=@(x1,x2,x3) ps(1,3)*2*x3+ps(2,3) ...
+ps(4,3)*x1+ps(5,3)*x2;
x=[1;1;1];
i=0;
epsilon=1e-6
while norm([f1(x(1),x(2),x(3));f2(x(1),x(2),x(3)); ...
f3(x(1),x(2),x(3))]) > epsilon
sol=[f1x1(x(1),x(2),x(3)),f1x2(x(1)),f1x3(x(1)); ...
f2x1(x(2)),f2x2(x(1),x(2),x(3)),f2x3(x(2));...
f3x1(x(3)),f3x2(x(3)),f3x3(x(1),x(2),x(3))] \ ...
-[f1(x(1),x(2),x(3));f2(x(1),x(2),x(3)); ...
f3(x(1),x(2),x(3))];
x(1)=x(1)+sol(1);
x(2)=x(2)+sol(2);
x(3)=x(3)+sol(3);
disp(['Iteration: ' num2str(i)]);
disp(['Lösung : ' num2str(x','%1.7f\t')]);
i=i+1;
end;

```

C.2. Programm 2. Berechnung der Adjungierten.

```

clear all;
format long;
e=[0.4, 0.6, 0.6];

```

```

p=[0.42375, 0.36, 0.566154];
K=[1, 1.2, 1.3];
b=[0, 0.0167, 0.0154; 0.0104, 0, 0.0064; 0.0096, 0.0064,
0];
c=0.125; d=0.06;
s=[0.000375, 0.001333, 0.001231];
x=[0.5792, 0.7071, 0.6920];
w=[0.1253, 0.4094, 3.9333];
t=20; z=0.0001;
for i=20/z+1:-1:w(3)/z+1;
l(i,1)=t;
for j=1:3
l(i,j+1)=(p(j)-c/x(j))*exp(-d*t)/s(j);
end;
t=t-z;
end;
% plot(l(:,1),l(:,2:4));
a1=0;a2=176.7985;a3=219.7581;
x2=0.7071;x3=0.6920;
y0=[l(w(3)/z+1,2:4) w(3) 0.5792];
[t,y]=ode45(@fua5,w(3):-0.0001:w(2),y0);
% plot(t,y(:,1:3));
size(y);
for j=1:size(y,1)-1
l(w(3)/z+1-j,2:4)=y(1+j,1:3);
l(w(3)/z+1-j,1)=y(1+j,4);
end;
% plot(l(:,1),l(:,2:4));
a1=0;a2=176.7985;a3=900;
x2=0.7076;
y0=[l(ceil(w(2)/z+1),2:4) w(2) y(size(y,1),5) 0.692];
[t,y]=ode45(@fua55,w(2):-0.0001:w(1),y0);
% plot(t,y(:,1:3));
size(y);
for j=1:size(y,1)-1
l(ceil(w(2)/z+1)-j,2:4)=y(1+j,1:3);
l(ceil(w(2)/z+1)-j,1)=y(1+j,4);
end;
% plot(l(:,1),l(:,2:4));
a1=0;a2=900;a3=900;
y0=[l(w(1)/z+1,2:4) w(1) y(size(y,1),5) y(size(y,1),6)
0.7071];
[t,y]=ode45(@fua56,w(1):-0.0001:0,y0);

```

```
% plot(t,y(:,1:3));
size(y);
for j=1:size(y,1)-1
l(w(1)/z+1-j,2:4)=y(1+j,1:3);
l(w(1)/z+1-j,1)=y(1+j,4);
end;
plot(l(:,1),l(:,2:4));
l(1,:);
```

C.3. Programm 3. Berechnung bei quadratischen Modellen (optimaler Fang).

```
clear all;
options = [];
sol = bvpinit(linspace(0,20,50),[1 0 0]);
sol = bvp4c(@odesys,@bc,sol,options);
x = [sol.x];
y1 = [sol.y(1,:)]; y2 = [sol.y(2,:)]; y3 = [sol.y(3,:)];
y=[y1;y2;y3];
for i=1:size(y,2)
y4(i)=(0.42375*y(1,i)-y(1,i)*0.000375* ...
exp(0.06*y(3,i))*y(2,i))/(2*0.00125);
end; y,
%plot(x,y1(1,:))
plot(y3,y4)
title('Randwertproblem')
xlabel('t')
ylabel('u(t)')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function res = bc(ya,yb)
%Boundary conditions
res = [ ya(1)-0.25
yb(2)
ya(3)];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function dydx = odesys(x,y,n)
% ODE function
dydx = [ 0.4*y(1)*(1-y(1))-0.000375* ...
((0.42375*y(1)^2-y(2)*0.000375 ...
*y(1)^2*exp(0.06*y(3)))/(2*0.00125))
((-0.42375^2*y(1)*exp(-0.06*y(3)))+ ...
```

```

y(2)*0.42375*0.000375 ...
*y(1))/(2*0.00125))-0.4*y(2)+2*0.4*y(2)*y(1)+ ...
((y(2)*0.42375*0.000375*y(1)-y(2)^2*0.000375^2 ...
*y(1)*exp(0.06*y(3)))/(2*0.00125)
1]);

```

C.4. Programm 4. Das Integral-Maximumprinzip.

```

clear all;
options = [];
sol = bvpinit(linspace(0,1,50),[1 1 1]);
sol = bvp4c(@odesys4,@bc4,sol,options);
x = [sol.x];
y1 = [sol.y(1,:)]; y2 = [sol.y(2,:)]; y3 = [sol.y(3,:)];
y=[y1;y2;y3];
x=linspace(0,1,50);
f=((1-0.000375*38.519/0.4)*0.25* ...
exp((0.4-0.000375*38.519).*x)./ ...
((1-0.000375*38.519/0.4)+0.25.* ...
(exp((0.4-0.000375*38.519).*x)-1)));
z=0.42375.*f.*exp(-0.06.*x)-2*0.00125*38.519.* ...
exp(-0.06.*x)-y2.*0.000375.*f;
l = trapz(x,z),
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function dydx = odesys4(x,y,n)
% ODE function
dydx = [ 0.4*y(1)*(1-y(1))-0.000375*(38.519*y(1))
(-0.42375*38.519*exp(-0.06*y(3))-0.4*y(2)+ ...
2*0.4*y(2)*y(1)+ 0.000375*38.519*y(2))
1];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function res = bc4(ya,yb)
% Boundary conditions
res = [ ya(1)-0.25
yb(2)-206.46
ya(3)];

```

C.5. Programm 5. Logarithmisches Modell.

```

clear all
options = [];

```

```

sol = bvpinit(linspace(0,20,50),[1 0 0]);
sol = bvp4c(@odesys2,@bc2,sol,options);
x = [sol.x];
y1 = [sol.y(1,:)]; y2 = [sol.y(2,:)]; y3 = [sol.y(3,:)];
y=[y1;y2;y3];
for i=1:size(y,2)
y4(i)=(0.00125)/(y(1,i)*(0.42375-y(2,i)* ...
0.000375*exp(0.06*y(3,i))));
end; y,
%plot(x,y1(1,:))
plot(y3,y4)
title('Randwertproblem')
xlabel('t')
ylabel('u(t)')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function dydx = odesys2(x,y,n)
% ODE function
dydx = [ 0.4*y(1)*(1-y(1))-(0.000375*0.00125/ ...
((0.42375-y(2))* ...
0.000375*exp(0.06*y(3)))) ...
((-0.42375*0.00125*exp(-0.06*y(3))) ...
/((y(1))*(0.42375-y(2))* ...
0.000375*exp(0.06*y(3)))))- ...
0.4*y(2)+2*0.4*y(2)*y(1)+ ...
((0.000375*0.00125*y(2)) ...
/((y(1))*(0.42375-y(2))* ...
0.000375*exp(0.06*y(3))))
1];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function res = bc2(ya,yb)
%Boundary conditions
res = [ ya(1)-0.25
yb(2)
ya(3)];

```

C.6. Programm 6. Newton-Methode für ein nichtlineares Gleichungssystem.

```

clear all
syms x y
f1=-20*0.00125*x+0.25*((-0.42375*0.1)/ ...

```

C.6. Programm 6. Newton-Methode für ein nichtlineares Gleichungssystem.

```
(0.1-0.000375*x)^2)+ ...
((0.42375*0.1)/(0.1-0.000375*x)^2)* ...
exp(-10*(0.000375*x-0.1))+ ...
((0.42375*x/(0.1-0.000375*x))- ...
(0.42375*y/(0.1-0.000375*y))) ...
*(-10*0.000375)*exp(10*(0.1-0.000375*x))+...
(0.42375*y/(0.1-0.000375*y))*...
(-10*0.000375)*exp(10*(0.2-0.000375*(x+y)))));
f1x=diff(f1,x); f1y=diff(f1,y);
f2=-20*0.00125*y+0.25*exp(10*(0.1-0.000375*x))* ...
(((0.42375*0.1)/(0.1-0.000375*y)^2)+ ...
((0.42375*0.1)/(0.1-0.000375*y)^2)*...
exp(-10*(0.000375*y-0.1))...
+((0.42375*y)/(0.1-0.000375*y))*(-10*0.000375)*...
exp(-10*(0.000375*y-0.1)));
f2x=diff(f2,x); f2y=diff(f2,y);
s=[0;0];
i=0;
epsilon=1e-9;
while norm([subs(f1,{x,y},s);subs(f2,{x,y},s)]) > epsilon
sol=[subs(f1x,{x,y},s),subs(f1y,{x,y},s); ...
subs(f2x,{x,y},s),subs(f2y,{x,y},s)]\...
-[subs(f1,{x,y},s);subs(f2,{x,y},s)]);
s(1)=s(1)+sol(1);
s(2)=s(2)+sol(2);
s,
i=i+1;
end;
```

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Werner H. Schmidt bedanken, der mich während meiner Doktorarbeit umfangreich unterstützt hat.

Ein herzliches Dankeschön geht an die Rosa-Luxemburg-Stiftung, die mich bei der Erstellung der Promotion finanziell unterstützt hat.

Mein Dank geht auch an meine Eltern und an meine Verwandtschaft für die seelische Unterstützung. Ich bedanke mich außerdem bei der Forschungsgruppe Numerik/Optimale Steuerung unter der Leitung von Prof. Leonhard Bittner, Prof. Bernd Kugelman und Prof. Werner Schmidt für die nützlichen Hinweise und Bemerkungen sowie bei meinen Kolleginnen und Kollegen von der Universität Greifswald für die schöne Zeit.

Versicherung

Hiermit erkläre ich, dass diese Arbeit bisher von mir weder an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald noch einer anderen wissenschaftlichen Einrichtung zum Zwecke der Promotion eingereicht wurde. Ferner erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die darin angegebenen Hilfsmittel und Hilfen benutzt und keine Textabschnitte eines Dritten ohne Kennzeichnung übernommen habe.

Greifswald, den 27. Juni 2013

Dmitriy Stukalin