# Neue Invarianten der 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten.

Thomas Friedrich (Berlin)

(Vortrag am 9.2.1995 im Seminar des SFB 288)

## Inhaltsverzeichnis


**1 Einleitung.** 1

**2 Topologie der Mannigfaltigkeiten - Geschichte.** 1

**3 Spin$^{\mathbb{C}}$-Strukturen.** 5

**4 Dirac-Operatoren für Spin$^{\mathbb{C}}$-Strukturen.** 11

**5 Die Seiberg-Witten-Gleichung.** 13

**6 Die Seiberg-Witten-Invariante.** 18

**7 Verschwindungssätze.** 28

**8 Der Fall** $\dim \mathfrak{M}_L(g) = 0$. 29

**9 Der Kähler-Fall.** 30

**10 Anwendungen.** 39


## 1 Einleitung.

Wir beschreiben - mit vollständigen Beweisen - die Konstruktion der Seiberg-Witten-Invarianten und besprechen einige ihrer Anwendungen.

## 2 Topologie der Mannigfaltigkeiten - Geschichte.

$\cdots$ 1935 Riemann, Poincare, Brouwer, Hopf, Morse, $\cdots$
Klassifikation der Flächen, Abbildungsgrad
Homologie- und Homotopietheorie, Variationsrechnung.

1935-1960 Whitney, Pontrjagin, Thom, Milnor
Charakteristische Klassen, Berechnung der Bordismentheorie, Differentialstrukturen
$Top \underset{\neq}{\supset} PL \underset{\neq}{\supset} Diff.$

1960-1980 Klassifikationstheorie für Mannigfaltigkeiten der Dimension $n \geq 5$, h-Kobordismensatz
Smale - Lösung der Poincare-Vermutung.
C.T.C. Wall, Browder, Novikov - Sugery-Techniken.

- Spezielle Situation der niedrig-dimensionalen Topologie $n = 3, 4$.

$\boxed{n=3}$ $Top^3 = PL^3 = Diff^3$

- Jede 3-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit $M^3$ ist triangulierbar und besitzt genau eine Differentialstruktur.
- Hauptvermutung: Je zwei Triangulierungen einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit sind kombinatorisch äquivalent.
- Poincare-Vermutung offen.

$\boxed{n=4}$ Freedman 1982:
Jede unimodulare quadratische Form $\mathcal{L}$ über $Z$ kann als Schnittform $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^4)$ einer 4-dimensionalen, kompakten, 1-zusammenhängenden topologischen Mannigfaltigkeit $X^4$ realisiert werden. $X^4$ kann "fast glatt" gewählt werden.

Rochlin 1952:
$X^4$-kompakte, 1-zusammenhängende, glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{L}(X^4)$ sei vom Typ II. Dann ist $\sigma(X^4)/16$ ganzzahlig.

Beispiel:

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$E_8 \geq 0$ ist vom Typ II. $\sigma(E_8) = dim E_8 = 8$.

Folgerung: $Diff(4) \to Top(4)$ ist nicht surjektiv ( und auch nicht injektiv).

S. K. Donaldson 1981/82: Man benutze die nicht-abelsche Eichfeldtheorie zum Studium von $Diff(4)$

**Satz von Donaldson:**

$X^4$-glatte, kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit, $\mathcal{L}(X^4)$ sei positiv definit.

Dann ist $\mathcal{L}(X^4)$ über $Z$ die triviale quadratische Form.

Beweisskizze:

Wähle eine Metrik $g$ auf $X^4$ und betrachte das $SU(2)-HFB$

$$\begin{array}{ccc} SU(2) & \longrightarrow & P \\ & & \downarrow \\ & & X^4 \end{array}$$

mit $c_2(P) = 1$. Sei $A^+$ der Raum aller irreduziblen selbst-dualen Zusammenhänge in $P$

$$\star\Omega^Z = \Omega^Z.$$

Allgemein gilt $(G = SU(2))$

$$\dim A^+ = 2p_1(ad(\mathfrak{g})) - \frac{\dim G}{2}(\chi(X^4) - \sigma(X^4))$$

Wegen $\mathcal{L}(X^4) \geq 0$ folgt $\chi - \sigma = 2$ und dann $\dim A^+ = 5$

- Kompaktifizierung von $A^+$ mittels $X^4$
- In der Umgebung der reduziblen Instantons ist $A^+$ der Kegel über $CP^2$
- $A^+$ ist orientierbar.

$\Longrightarrow$ $X^4$ ist bordant zu $CP^2 \cup \cdots \cup CP^2$. ■

Die Gleichung $\star\Omega^Z = \Omega^Z$ bedeutet

$$\star(dZ + \frac{1}{2}[Z, Z]) = dZ + \frac{1}{2}[Z, Z]$$

und ist eine nichtlineare Gleichung, weil $SU(2)$ keine abelsche Gruppe ist.

Typische Resultate:

Es werden unter Verwendung der $SU(2)$-Theorie Invarianten $q_k(X^4)$ $(b_2^+(X^4)$ ungerade) definiert. $q_k(X^4)$ sind Polynome auf $H_2(X^4; R)$

$$q_k(X) : H_2(X^4; R) \longrightarrow R$$

A) Spaltungsfragen:

Satz: $\pi_1(X^4) = 0$, $b_2^+(X^4)$ ungerade, $X^4 = (X_1^4)\#(X_2^4)$ , $b_2^+(X_i^4) > 0$ $\Longrightarrow q_k(X^4) = 0.$

Satz: $S$ - kompakte, einfach-zusammenhängende komplexe Fläche, $b_2^+ \geq 3 \Rightarrow$

$q_k(S) \neq 0$ für hinreichend großes $k$.

Folgerung: $S \underset{\text{diff.}}{\neq} X_1 \# X_2$ mit $b_2^+(X_i) > 0$, d.h. $S$ spaltet nicht auf.

$\Longrightarrow$ Konstruktion verschiedener Differentialstrukturen auf topologisch gleichen Mannigfaltigkeiten.

B) Realisierungsfragen

Welche unimodularen $Z$-Formen $\mathcal{L}$ können durch 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten realisiert werden? Zum Beispiel:

$$\mathcal{L} = n(-E_8) \oplus m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rochlin-Satz $\Longrightarrow$ $n = 2k$ ist gerade.

Vermutung: $m \geq \frac{3}{2}n$ notwendig.

Donaldson: $m \geq 3$ bewiesen. $(n = 2)$.

C) Thom-Vermutung:

Adjunktionsformel: $C \subset M^4$ komplexe Kurve in einer algebraischen Fläche,
$k_M$ - kanonisches Bündel von $M^4$ $\Longrightarrow$

$$g(\mathcal{C}) = \frac{k_M \cdot C + C \cdot C}{2} + 1$$

Ist $M^4 = CP^2$ $\Longrightarrow \mathcal{C} \subset CP^2$ komplexe Kurve.

$$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Thom-Vermutung: Für jede glatte Fläche $C \subset CP^2$ gilt

$$g(C) \geq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

**Neue Ideen durch Witten 1994:**

Man benötigt nicht-abelsche Eichtheorien weitgehend nicht.

## 3 Spin$^{\mathbb{C}}$-Strukturen.

$Spin(n) \subset Cliff(n) \subset Cliff^{\mathbb{C}}(n) \xrightarrow{\kappa} End(\triangle_n)$ , - $\kappa$ - komplexe Spin-Darstellung.

<u>Definition:</u> Spin$^{\mathbb{C}}(n) \overset{Def.}{=} Spin(n) \times_{Z_2} S^1 \subset Cliff^{\mathbb{C}}(n)$.

Wir erhalten folgende Gruppenhomomorphismen:

$\lambda : Spin(n) \to SO(n)$ zweifache Überlagerung.

$\lambda : Spin^{\mathbb{C}}(n) \to SO(n) \quad \lambda[g,z] = \lambda(g)$

$i : Spin(n) \to Spin^{\mathbb{C}}(n) \quad i(g) = [g,1]$

$k : Spin(n) \to S^1 \quad k[g,z] = z^2$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \downarrow 1 & & & \\ & & & S^1 & & & \\ & & & \downarrow j & \searrow z \longrightarrow z^2 & & \\ 1 \longrightarrow & Spin(n) & \xrightarrow{i} & Spin^{\mathbb{C}}(n) & \xrightarrow{k} & S^1 & \longrightarrow 1 \\ & & \lambda \searrow & \downarrow \lambda & & & \\ & & & SO(n) & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 1 & & & \end{array} \qquad (\star)$$

Die Zeile ist exakt. Die Spalte ist exakt.

Aus $k : Spin^{\mathbb{C}}(n) \to S^1$ und $\lambda : Spin^{\mathbb{C}}(n) \to SO(n)$ ergibt sich:

$$\pi : Spin^{\mathbb{C}}(n) \longrightarrow SO(n) \times S^1 \quad , \quad \pi[g,z] = (\lambda(g), z^2)$$

und $\pi$ ist eine 2-fache Überlagerung.

Die Gruppe $Spin^{\mathbb{C}}(n)$ ist enthalten in $Cliff^{\mathbb{C}}(n)$ und hat damit eine Spin-Darstellung

$$\kappa : Spin^{\mathbb{C}}(n) \longrightarrow U(\triangle_n)$$

Ist $\psi \in \triangle_n$ und $[g,z] \in Spin^{\mathbb{C}}(n)$, so gilt

$$\kappa[g,z](\psi) = z \cdot g(\psi)$$

wobei $g(\psi)$ die Spin-Wirkung von $Spin(n)$ ist.

Weil $\kappa : Spin(n) \longrightarrow SU(\triangle_n)$ gilt (!!) $(Tr(e_i e_j | \triangle_n) = 0!!)$ folgt

$$\det \kappa[g,z] = z^{\dim \triangle_n} = z^{2^{[n/2]}}$$

Ist $n = 2k$, so haben wir analog $\kappa^{\pm} : Spin^{\mathbb{C}}(n) \longrightarrow SU(\triangle_n^{\pm})$

und $\det \kappa^{\pm}[g,z] = z^{\dim \triangle^{\pm}} = z^{2^{k-1}}$.

Speziell für $n = 4 = 2 \cdot 2$ erhalten wir also $\det \kappa^{\pm}[g,z] = z^2 \quad (n=4)$.

und somit ist in der Dimension 4 die Darstellung $\Lambda^2(\triangle_4^{\pm})$ äquivalent zur Darstellung $(\mathbb{C}, k)$ der Gruppe $Spin^{\mathbb{C}}(4)$.

Sei $(P, \pi, X; SO(n))$ ein $SO(n)$-Hauptfaserbündel (HFB).

Eine $Spin^{\mathbb{C}}(n)$-Struktur ist eine Reduktion, d.h.

$$\begin{tikzcd}
Spin^{\mathbb{C}}(n) \arrow[d] & SO(n) \arrow[d] \\
Q \arrow[r, "\wedge"] \arrow[dr, "\pi"'] & P \arrow[d, "\pi"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

ein $Spin^{\mathbb{C}}(n)$-HFB $\quad (Q, \pi, X; Spin^{\mathbb{C}}(n))$ und eine Abbildung $\wedge : Q \to P$ mit

$$\wedge(q \cdot x) = \wedge(q) \cdot \lambda(x) \qquad q \in Q, x \in Spin^{\mathbb{C}}(n)$$

Dann gilt $Q/S^1 = P$ als $SO(n)$-HFB was aus der exakten Sequenz $1 \to S^1 \to Spin^{\mathbb{C}} \to SO \to 1$ folgt. Weiterhin ist

$$P_{U(1)} = Q/Spin(n)$$

ein $S^1$-Hauptfaserbündel. Jede $Spin^{\mathbb{C}}$-Reduktion von $P$ definiert also ein $U(1)$-HFB $P_{U(1)}$ bzw. ein Linienbündel

$$L = Q \times_k \mathbb{C}$$

<u>Lemma</u>: $c_1(L) \equiv \omega_2(P) \quad mod\, 2 \;\; in \quad H^2(X; Z_2)$

<u>Beweis:</u> Wir betrachten $L$ als reelles zweidimensionales Bündel $L = Q \times_k R^2$ und

$$E = P \times_{SO(n)} R^n = Q \times_\lambda R^n.$$

Dann gilt $L \oplus E = Q \times_\pi (R^n \oplus R^2)$ mit $\pi : Spin^{\mathbb{C}}(n) \to SO(n) \times SO(2) \to SO(n+2)$.

Weiterhin haben wir

$$\begin{array}{ccc} Spin^{\mathbb{C}}(n) & & Spin(n+2) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ SO(n) \times SO(2) & \longrightarrow & SO(n+2) \end{array}$$

Aus dem Diagramm der Gruppen $(\star)$ ergibt sich folgendes Diagramm der Fundamentalgruppen:

$$\begin{array}{cccccc} & & \downarrow 1 & & & \\ & & \pi_1(S^1) & & & \\ & & \downarrow j_\# & \searrow z \longrightarrow 2z & & \\ \to 0 = \pi_1(Spin(n)) & \longrightarrow & \pi_1(Spin^{\mathbb{C}}(n)) & \xrightarrow{k_\#} & \pi_1(S^1) & \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow \lambda_\# & & & \\ & & \pi_1(S0(n)) & & & \\ & & \downarrow & & & \\ & & 1 & & & \end{array}$$

Damit ist $k_\# : \pi_1(Spin^{\mathbb{C}}(n)) \to \pi_1(S^1)$ ein Isomorphismus. Weiterhin, ist $x$ das erzeugende Element in $\pi_1(Spin^{\mathbb{C}}(n))$ und würde $\lambda_\#(x) = 0$ gelten, so haben wir $x = j_\#(z)$ für ein $z \in \pi_1(S^1)$ und dann

$$k_\#(x) = k_\# j_\#(z) = 2z$$

entgegen der Tatsache, daß $k_\#(x)$ erzeugendes Element von $\pi_1(S^1)$ ist. Somit ergibt sich:

Ist $x \in \pi_1(Spin^{\mathbb{C}}(n))$ - erzeugendes Element

$y \in \pi_1(SO(n))$ - erzeugendes Element

$z \in \pi_1(SO(2))$ - erzeugendes Element

so gilt unter $\pi : Spin^{\mathbb{C}}(n) \to SO(n) \times SO(2)$

$$\pi_\#(x) = y + z$$

Damit wird

$$\pi_\# : \pi_1(Spin^{\mathbb{C}}(n)) \to \pi_1(SO(n) \times SO(2)) \to \pi_1(SO(n+2))$$

trivial und somit existiert eine Hebung

$$\begin{array}{ccc} Spin^{\mathbb{C}}(n) & \longrightarrow & Spin(n+2) \\ \big\downarrow \pi & & \big\downarrow \\ SO(n)\times SO(2) & \longrightarrow & SO(n+2) \end{array} \qquad (\star\star)$$

Damit hat $L \oplus E$ eine Spin-Struktur $\Longrightarrow \omega_2(L\oplus E) = 0$.

$$\omega_2(L) \equiv \omega_2(E) = \omega_2(P). \quad \text{Aber} \quad c_1(L) \equiv \omega_2(L)\ mod\, 2.$$

∎

<u>Satz:</u> Ein $SO(n)$-HFB $(P, \pi, X; SO(n))$ besitzt eine Spin$^{\mathbb{C}}$-Struktur $\Longleftrightarrow$ $\omega_2(P) \in H^2(X; Z_2)$ ist die $Z_2$-Reduktion einer Klasse aus $H^2(X; Z)$.

<u>Beweis:</u> Die Notwendigkeit wurde oben abgeleitet. Umgekehrt gelte $\omega_2(P) \equiv \alpha \quad mod\, 2$.

Zu $\alpha \in H^2$ wählen wir ein $SO(2)$-HFB mit $c_1(L) = \alpha$. Dann ist $P \times L$ ein $SO(n) \times SO(2)$-Bündel mit $\omega_2 = 0$, d.h. mit Spin-Struktur. Unter Verwendung von $(\star\star)$ schließen wir dann die Existenz einer Spin$^{\mathbb{C}}$-Struktur.

∎

Wir betrachten jetzt speziell 4-dimensionale, orientierbare und kompakte Mannigfaltigkeiten $M^4$. Zunächst gilt mit dem Satz über die universellen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} H^3(M^4, Z) &= Hom(H_3(M^4; Z), Z) \oplus Ext\,(H_2(M^4; Z), Z) \\ &= H_3(M^4, Z)/Tor\,(H_3(M^4, Z)) \oplus Ext\,(H_2/Tor\,(H_2) \oplus Tor\,(H_2), Z) \\ &= H_3(M^4, Z)/Tor\,(H_3(M^4, Z)) \oplus Tor\,(H_2(M^4, Z)) \end{aligned}$$

Mit der ganzzahligen Poincaré-Dualität haben wir jedoch $H_2(M^4, Z) \cong H^2(M^4, Z)$

und somit $Tor\,(H_2(M^4, Z)) = Tor\,(H^2(M^4; Z))$.

Insgesamt folgt

$$Tor\,(H^3(M^4, Z)) = Tor\,(H^2(M^4; Z))$$

Wir betrachten jetzt $1 \to Z \xrightarrow{2} Z \to Z_2 \to 1$ und die exakte Sequenz

$$H^2(M^4, Z) \xrightarrow{2} H^2(M^4, Z) \xrightarrow{r} H^2(M^4, Z_2) \xrightarrow{\beta_\star} H^3(M^4, Z) \xrightarrow{2} H^3(M^4, Z) \to \cdots$$

Dann gilt $Im\,(\beta_\star) = H^2(M^4; Z_2)/Im\,(r)$. Aber

$$\begin{aligned} Im\,(\beta_\star) &= \{\alpha^3 \in H^3(M^4;Z) : 2\alpha^3 = 0\} = \{\alpha^3 \in Tor\,(H^3(M^4;Z)) : 2\alpha^3 = 0\} \\ &\approx \{\gamma^2 \in Tor\,(H^2(M^4,Z)) : 2\gamma^2 = 0\} = \{\gamma^2 \in T : 2\gamma^2 = 0\} \end{aligned}$$

wobei $T \subset H^2(M^4;Z)$ die Torsionsuntergruppe ist.

Wir haben $\{\gamma^2 \in T : 2\gamma^2 = 0\} \to T \xrightarrow{2} T \to T/2T \to 1$ und fassen dies als eine exakte Sequenz von $Z_2$-Vektoren auf. So folgt $\dim_{Z_2}(T/2T) = \dim_{Z_2}\{\gamma^2 \in T : 2\gamma^2 = 0\}$.

Damit ergibt sich wegen $r(T) = T/2T$.

$$\dim_{Z_2} H^2(M^4;Z_2) = \dim_{Z_2}(Im\,(r)) \oplus \dim_{Z_2} Im\,(\beta_\star) = \dim_{Z_2}(Im\,(r)) \oplus \dim_{Z_2}(r(T))$$

und natürlich

$$H^2(M^4;Z_2) \supset Im\,(r) \supset r(T)$$

Sei nun $x \in Im\,(r)$ , d.h. $r = r(\alpha)$, $\alpha \in H^2(M^4,Z)$ und $y \in r(T)$, d.h. $y = r(\beta), \beta \in T$.

Dann gilt in $H^4(M^4;Z)$ $\alpha \cup \beta = 0$, weil $\beta$ ein Torsionselement ist und $H^4(M^4;Z) \approx Z$. Somit folgt $x \cup y = 0$.

Betrachte

$$Z = \{z \in H^2(M^4;Z_2) : \forall y \in r(T) \quad z \cup y = 0\}$$

Dann wissen wir

- $Im\,(r) \subset Z$
- $\dim_{Z_2} Z = \dim_{Z_2} H^2(M^4;Z_2) - dim\,[r(T)]$

weil nach $Z_2$-Poincaré-Dualität die Abbildung

$$H^2 \to (H^2)^\star$$

$$x \to \{y \to y \cup x\}$$

ein Isomorphismus ist.

Wegen $\dim_{Z_2} H^2(M^4;Z_2) - \dim_{Z_2} r(T) = \dim[Im\,(r)]$ folgt $Im\,(r) = Z$, also

Satz:

Ist $M^4$ eine kompakte, orientierbare, 4-dimensionale Mannigfaltigkeit, $T \subset H^2(M^4,Z)$ die Torsionsuntergruppe und $r : H^2(M^4;Z) \to H^2(M^4;Z_2)$ die Reduktion modulo 2, so gilt

$$Im\,(r) = \{z \in H^2(M^4;Z_2) : \forall y \in r(T)\; z \cup y = 0\}$$

■

Die Stiefel-Whitney-Klassen einer kompakten Mannigfaltigkeit sind wie folgt gegeben (Wu-Formeln).

Durch $Sq^k(x) = \vee_k \cup x, \quad x \in H^{n-k}(M^n; Z_2),$ wird eine Klasse $\vee_k \in H^k(M^n; Z_2)$ definiert.

Dann gilt

$$w_k = \sum_{i+j=k} Sq^i(\vee_j)$$

Also

$$w_1 = Sq^0(\vee_1) + Sq^1(\vee_0) = \vee_1 + 0 = \vee_1$$

$$w_2 = Sq^0(\vee_2) + Sq^1(\vee_1) + Sq^2(\vee_0) = \vee_2 + Sq^1(\vee_1)$$

Ist $w_1 = 0$ und $\dim M = 4$ so folgt $w_2 = \vee_2$ und $\vee_2$ ist charakterisiert durch

$$Sq^2(x) = \vee_2 \cup x \quad x \in H^2$$

$$x^2 = \vee_2 \cup x$$

Damit ergibt sich:

Ist $M^4$ eine kompakte, orientierbare 4-dimensionale Mannigfaltigkeit, so ist $w_2 \in H^2(M^4; Z_2)$ charakterisiert durch die Gleichung

$$x^2 = w_2 \cup x$$

für alle $x \in H^2(M^4; Z_2)$.

Satz: (Hirzebruch und Hopf 1958)

Sei $M^4$ eine kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit. Dann ist $w_2$ die $Z_2$-Reduktion einer ganzzahligen Klasse aus $H^2(M^4; Z)$. Insbesondere besitzt $M^4$ eine $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$-Struktur.

Beweis:

Wir haben $x^2 = w_2 \cup x$ für alle $x \in H^2(M^4; Z_2)$. Ist $x \in r(T)$, so gilt $x^2 = 0$ und somit

$$w_2 \cup x = 0$$

für alle $x \in r(T)$. Daraus folgt nach dem letzten Satz $w_2 \in Im\,(r)$.

■

# 4 Dirac-Operatoren für Spin$^{\mathbb{C}}$-Strukturen.

Sei $(Q, \pi, M^n; Spin^{\mathbb{C}}(n))$ eine Spin$^{\mathbb{C}}$-Struktur.

$$
\begin{tikzcd}
Spin^{\mathbb{C}}(n) \arrow[r] \arrow[d] & SO(n) \arrow[d] \\
Q \arrow[r, "\wedge"] \arrow[dr] & P \arrow[d] \\
& M
\end{tikzcd}
$$

und sei $P_{U(1)} = Q|Spin(n)$ das $U(1)$-Hauptfaserbündel. Dann ist

$$\pi : Q \longrightarrow P \times P_{U(1)}$$

eine 2-fache Überlagerung.

Wir betrachten:

- das Spinorbündel $S = Q \times_{Spin^{\mathbb{C}}} \triangle_n$
- das Linienbündel $L = P_{U(1)} \times_{U(1)} \mathbb{C}$

Ist $A \in \mathcal{C}(P_{U(1)})$ ein Zusammenhang, so induziert $A$ zusammen mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ein Zusammenhang in $Q$ und daher eine kovariante Ableitung

$$\nabla^A : \Gamma(S) \to \Gamma(T^* \otimes S)$$

und wir erhalten den Dirac-Operator

$$D_A \Phi = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla^A_{e_i} \Phi.$$

Weitzenböck-Formel für $D_A^2$:

$A : T\, P_{U(1)} \to \underline{S^1} = iR^1$ - Zusammenhang.

$\Omega_A = dA$ - Krümmung - 2-Form auf $M^n$ mit Werten in $i \cdot R^1$.

$c_1(L) = -\frac{1}{2\pi i}\Omega_A = \frac{i}{2\pi}\Omega_A$

$\Phi \in \Gamma(S)$ , $D_A^2 \Phi = (\nabla^A)^* \nabla^A \Phi + \frac{R}{4}\Phi - \frac{1}{2}\Omega_A \Phi$

wobei mit $\Omega_A = i \sum\limits_{\alpha<\beta} \omega_{\alpha\beta}\, e_\alpha \wedge e_\beta$ gilt $\Omega_A \Phi = i \sum\limits_{\alpha<\beta} \omega_{\alpha\beta}\, e_\alpha \cdot e_\beta \cdot \Phi$.

Index-Formel für $D_A^+$: $dim\, M = 2k$ - gerade, $D_A^+ : \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-)$ , $c = c_1(L) \in H^2(M^{2k}; Z)$.

Dann gilt

$$index(D_A^+) = \{e^{1/2c} \cdot \hat{\mathcal{A}}(M^{2k})\} \quad , \quad c \equiv \omega_2(M^{2k})\, mod\, 2.$$

Für $n = 4$ erhält man einfach $\hat{\mathcal{A}}(X^4) = 1 - \frac{1}{24}p_1(X^4)$.

Damit entsteht

$$e^{1/2c}\hat{\mathcal{A}}(M^4)[M^4] = (1 + 1/2c + 1/8c^2)(1 - \frac{1}{24}p_1) = 1/8c^2 - 1/24p_1$$

also $\quad Index\ (D_A^+) = \frac{1}{8}c^2 - \frac{1}{24}p_1 \quad$ auf $M^4$.

Andererseits gilt der Signatursatz: $\quad \sigma(M^4) = 1/3 \int\limits_{M^4} p_1$

Wir verbleiben in der Dimension $n = 4$ und stellen einige spezielle Tatsachen der Spin-Algebra in dieser Dimension zusammen. Wir betrachten den Euklidischen Vektorraum $R^4$ und die Aufspaltung

$$\Lambda^2(R^4) = \Lambda^2_+(R^4) \oplus \Lambda^2_-(R^4)$$

sowie $\triangle_4 = \triangle_4^+ \oplus \triangle_4^-$.

Satz:

- Ist $\omega^2 \in \Lambda^2_-$ und $\varphi \in \triangle_4^+$, so $\omega^2 \cdot \varphi = 0$
- Für $\varphi \in \triangle_4^+$ definieren wir $\omega^\varphi(X,Y) = \langle X\,Y\,\varphi, \varphi\rangle + \langle X, Y\rangle |\varphi|^2$.

  Dann ist $\omega^\varphi$ eine 2-Form mit Werten in $i \cdot R^1$ und $\omega^\varphi \in \Lambda^2_+$. Weiterhin gilt

  $\langle \omega^\varphi \cdot \varphi, \varphi\rangle = -2|\varphi|^4$ und $|\omega^\varphi|^2 = 2|\varphi|^4$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $\omega^\varphi$ eine 2-Form mit Werten in $iR^1$ ist. Wir haben

$\omega^\varphi(X,Y) = \langle XY\varphi, \varphi\rangle + \langle X, Y\rangle|\varphi|^2 = \langle(-YX - 2\langle X, Y\rangle)\varphi, \varphi\rangle + \langle X, Y\rangle|\varphi|^2$

$= -\langle Y\,X\varphi, \varphi\rangle - \langle X, Y\rangle|\varphi|^2 = -\omega^\varphi(Y, X)$.

Weiterhin gilt

$$\bar{\omega^\varphi}(X,Y) = \langle \overline{XY\varphi,\varphi}\rangle + \langle X,Y\rangle|\varphi|^2 = \langle \varphi, XY\varphi\rangle + \langle X,Y\rangle|\varphi|^2 =$$

$$= \langle YX\varphi,\varphi\rangle + \langle X,Y\rangle|\varphi|^2 = \omega^\varphi(Y,X) = -\omega^\varphi(X,Y)$$

also $\omega^\varphi(X,Y) \in iR^1$.

Wir benutzen jetzt eine Realisierung der Cliffordalgebra und eine Basis in $\triangle_4^+$ mit $\triangle_4^+ \approx \mathbb{C}^2$.

Die Endomorphismen $e_ie_j : \triangle_4^+ \to \triangle_4^+$ sind gegeben durch

$$e_1e_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad e_1e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_1e_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad e_2e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_3e_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Daraus ersehen wir, daß

$$e_1e_2 - e_3e_4 = 0 \quad , \quad e_1e_3 + e_2e_4 = 0 \quad , \quad e_1e_4 - e_2e_3 = 0$$

als Endomorphismen $\triangle_4^+ \to \triangle_4^+$ und damit ist 1). bewiesen.

Wir setzen $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ Dann folgt

$$\omega^\varphi(e_1,e_2) = i\{|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2\} = \omega(e_3,e_4), \quad \omega(e_1,e_3) = -\varphi_2\bar{\varphi}_1 + \varphi_1\bar{\varphi}_2 = -\omega^\varphi(e_2,e_4)$$

$$\omega^\varphi(e_1,e_4) = -i\varphi_2\bar{\varphi}_1 - i\varphi_1\bar{\varphi}_2 = \omega^\varphi(e_2,e_3)$$

Dann erhalten wir

$$\langle \omega^\varphi \cdot \varphi, \varphi\rangle = \sum_{i<j} \omega^\varphi(e_i,e_j)\langle e_ie_j\varphi,\varphi\rangle = \sum_{i<j} \omega^\varphi(e_i,e_j)^2 =$$

$$= 2\{-(|\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2)^2 + (-\varphi_2\bar{\varphi}_1 + \varphi_1\bar{\varphi}_2)^2 - (\varphi_2\bar{\varphi}_1 + \varphi_1\bar{\varphi}_2)^2\} =$$

$$= 2\{-|\varphi_1|^4 + 2|\varphi_1|^2|\varphi_2|^2 - |\varphi_2|^4 + \varphi_2^2\bar{\varphi}_1{}^2 - 2|\varphi_1|^2|\varphi_2|^2 + \varphi_1^2\bar{\varphi}_2{}^2 - \varphi_2^2\bar{\varphi}_1{}^2 - 2|\varphi_1|^2|\varphi_2|^2 - \varphi_1^2\bar{\varphi}_2{}^2\}$$

$$= 2\{-|\varphi_1|^2 - 2|\varphi_1|^2|\varphi_2|^2 - |\varphi_2|^4\} = -2(|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)^2 = -2|\varphi|^4$$

Analog berechnet man $|\omega^\varphi|^2 = 2|\varphi|^4$. ■

## 5 Die Seiberg-Witten-Gleichung.

Mit diesen Vorbemerkungen fomulieren wir jetzt die Seiberg-Witten-Gleichungen:

$M^4$ sei eine orientierte (kompakte) 4-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei eine $Spin^{\mathbb{C}}(4)$-Struktur fixiert und $A \in \mathcal{C}(P_{U(1)})$ ein Zusammenhang im assoziierten $U(1) - HFB$. Dann betrachten wir für $\Phi \in \Gamma(S^+)$:

$$D_A\Phi = 0, \quad \Omega_A^+ = \tfrac{1}{4}\omega^\Phi \qquad \text{Seiberg-Witten-Gleichung.}$$

Bemerkung: (die Analogie zu den Wirbelgleichungen)

Das Landau-Ginzburg-Modell der Supraleitfähigkeit:

$(M^2, g)$ – Riemannsche Fläche, $\quad P \longrightarrow M^2 - U(1) -$ HFB
$L = P \times_{U(1)} \mathcal{C}, \quad A \in \mathcal{C}(P), \Phi \in \Gamma(L)$

Gleichungen: $\partial_A''\Phi = 0 \quad \Omega_A = \frac{1}{2} \star (1 - |\Phi|^2)$

Zum Verständnis der Seiberg-Witten-Gleichung betrachten wir für einen beliebigen Schnitt $\Phi \in \Gamma(S^+)$ und einen beliebigen Zusammenhang $A \in \mathcal{C}(P_{U(1)})$ das Integral

$$\int_{M^4} \left|\Omega_A^+ - \frac{1}{4}\omega^\Phi\right| + |D_A\Phi|^2$$

Weil $\Omega_A^+$ und $\omega^\Phi$ Formen mit rein imaginären Werten sind, es gibt die Berechnung der Länge:

$$\begin{aligned}
\left|\Omega_A^+ - \frac{1}{4}\omega^\Phi\right|^2 &= -\sum_{i<j}\left[\Omega_A^+(e_i, e_j) - \frac{1}{4}\omega^\Phi(e_i, e_j)\right]^2 \\
&= |\Omega_A^+|^2 + \frac{1}{16}|\omega^\Phi|^2 + \frac{1}{2}\sum_{c<j}\Omega_A^+\langle e_i, e_j\rangle\langle e_ie_j\Phi, \Phi\rangle \\
&= |\Omega_A^+|^2 + \frac{1}{16}|\omega^\Phi|^2 + \frac{1}{2}\langle\Omega_A^+\Phi, \Phi\rangle \\
&= |\Omega_A^+|^2 + \frac{1}{8}|\Phi|^4 + \frac{1}{2}\langle\Omega_A^+\Phi, \Phi\rangle
\end{aligned}$$

Andererseits ist nach der Weitzenböck-Formel

$$\int_{M^4} |D_A\Phi|^2 = \int_{M^4} |\nabla^A\Phi|^2 + \frac{R}{4}|\Phi|^2 - \frac{1}{2}\langle\Omega_A^+\Phi, \Phi\rangle$$

Daraus folgt die Formel:

$$\int_{M^4} |\Omega_A^+ - \frac{1}{4}\omega^\Phi|^2 + |D_A\Phi|^2 = \int_{M^4}\left\{|\Omega_A^+|^2 + |D^A\Phi|^2 + \frac{R}{4}|\Phi|^2 + \frac{1}{8}|\Phi|^4\right\}$$

Somit ist das Funktional

$$\varepsilon(\Phi, A) = \int_{M^4}\left\{\ \Omega_A^+|^2 + |\ \nabla^A\ \Phi|^2 + \frac{R}{4}|\Phi|^2 + \frac{1}{8}|\Phi|^4\right\}$$

nicht negativ und seine Nullstellen sind genau die Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichung.

Satz: Sei $(\Phi, A)$ einer Lösung von

$$D_A\Phi = 0 \qquad \Omega_A^+ = \frac{1}{4}\omega^\Phi$$

über einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M^4, g)$ mit Skalverkrümmung $R$. Dann gilt in jedem Punkte

$$|\Phi(x)|^2 \leq -R_{min} \quad \text{mit } R_{min} = min\{R(m) : m \in M^4\}$$

<u>Beweis:</u> In einem Maximumpunkt von $|\Phi(x)|^2$ gilt $0 \leq \triangle|\Phi|^2$. Aber

$0 \leq \triangle|\Phi|^2 = 2\langle(\bigtriangledown^A)^\star \bigtriangledown^A \Phi, \Phi\rangle - 2\langle\bigtriangledown^A\Phi, \bigtriangledown^A\Phi\rangle \leq 2\langle(\bigtriangledown^A)^\star \bigtriangledown^A \Phi, \Phi\rangle =$

$= 2\left\{\langle -\frac{R}{4}\Phi, \Phi\rangle + \frac{1}{2}\langle\Omega_A\Phi, \Phi\rangle\right\} = -\frac{R}{2}|\Phi|^2 + \langle\Omega_A^+\Phi, \Phi\rangle = -\frac{R}{2}|\Phi|^2 + \langle\frac{1}{4}\omega^\Phi\Phi, \Phi\rangle = -\frac{R}{2}|\Phi|^2 - \frac{1}{2}|\Phi|^4$

Ist nun $|\Phi|^2_{max} > 0$, so folgt $0 \leq -\frac{R}{2} - 1/2|\Phi|^2_{max} \Rightarrow |\Phi(x_{max})|^2 \leq -R_{min}$ ■

Wir erinnern jetzt an die Eichfeldtheorie bei $U(1) - HFB$.

$P \stackrel{\pi}{\to} M$ sei ein $U(1) - HFB$ und $A : TP \longrightarrow \underline{S}^1 = iR^1$ ein Zusammenhang.

Eine Eichtransformation $P \longrightarrow P$ ist durch eine Funktion $f : M^n \longrightarrow S^1$ mit

$$f(p) = p \cdot f\pi(p))$$

gegeben.

Sei $\Theta = \frac{dz}{z} = \bar{z}dz$ die 1-Form $\Theta : TS^1 \longrightarrow \underline{S}^1 \approx iR^1$ (Mauerer-Cartan-Form von $S^1$).
Dann gilt

$$f^\star(A) = A + \pi^\star f^\star(\Theta)$$

für die Wirkung der Eichgruppe $\mathcal{G}(P) = Map(M^n, S^1)$ auf $\mathcal{C}(P)$ und die Krümmungsform von $A$ ist

$$\Omega_A = dA, \quad \Omega_{f^\star(A)} = \Omega_A$$

Wir beschreiben jetzt die Wirkung der Eichgruppe $\mathcal{G}(P_{U(1)}) = \mathcal{G}(L) =$ Map $(M^4, S^1)$ genauer.
Sei $f : M^4 \longrightarrow S^1$. Dann wirkt $f$ auf $\mathcal{C}(P)$ durch

$$f^\star(A) = A + \pi^\star\frac{df}{f}.$$

Für die Zusammenhänge in $P \times P_{U(1)}$ gilt dann

$$LC \oplus A \longrightarrow LC \oplus (A + \pi^\star\frac{df}{f})$$

als 1-Form $T(P \times P_{U(1)}) \longrightarrow \underline{so(n)} \oplus \underline{S}^1$

Damit ist $LC \oplus (A + \bar{u}^{\star}\frac{df}{f}) - LC \oplus A$ eine 1-Form auf $P \times P_{u(1)}$ mit Werten in $\underline{S}^1$ die Null auf $TP$ ist. Wir liften beide Zusammenhänge in die $Spin^{\mathbb{C}}(4)-$Struktur und für die kovarianten Ableitungen in $S$ gilt dann

$$\nabla_t^{f^{\star}(A)}\Phi - \nabla_t^A\Phi = \frac{df(\vec{t})}{f} \cdot \Phi$$

Damit folgt für die Dirac-Operatoren $D_A, D_{f^{\star}(A)} : \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S)$ die Formel

$$D_{f^{\star}(A)}\Phi - D_A\Phi = \frac{1}{f}grad(f) \cdot \Phi.$$

Wir lassen nun die Gruppe
$\mathcal{G}(P) = \{f : M^4 \longrightarrow S^1\}$ auf $\Gamma(S) \times \mathcal{C}(P)$ durch $f \cdot (\Phi, A) = (\frac{1}{f} \cdot \Phi, f^{\star}(A))$ wirken. Dann gilt

$$\begin{aligned} D_{f^{\star}(A)}(\frac{1}{f}\Phi) &= D_A(\frac{1}{f}\Phi) + \frac{1}{f}grad(f) \cdot (1/f\Phi) \\ &= \frac{1}{f}D_A(\Phi) - \frac{1}{f^2}grad(f) \cdot \Phi + 1/f^2 grad(f) \cdot \Phi \\ &= \frac{1}{f}D_A(\Phi) \end{aligned}$$

und es folgt:

Ist $(\Phi, A)$ eine Lösung der Seiberg-Witten-Gleichung, so ist $f \cdot (\Phi, A) = (\frac{1}{f}\Phi, f^{\star}A)$ auch eine Lösung der Seiberg-Witten-Gleichung.
Tatsächlich, die zweite Gleichung verändert sich nämlich nicht wegen

$$\Omega_{f^{\star}A} = \Omega_A \quad \text{und} \quad \omega^{\frac{1}{f}\Phi} = \omega^{\Phi} \ (|f| \equiv 1!).$$

<u>Definition des Modulraumes:</u>
$M^4$ - kompakte, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit.
$L \longrightarrow M^4$ komplexes Linienbündel mit hermitischen Produkt.

$$\mathfrak{M}_L = \{(\Phi, A) \in \Gamma(S^+) \times \mathcal{C}(P_{U(1)}) : \ D_A\Phi = 0 \quad \Omega_A^{\star} = \frac{1}{4}\omega^{\Phi}\}/\mathcal{G}$$

<u>Satz:</u> $\mathfrak{M}_L$ ist kompakt.

<u>Beweis:</u> Sei

$$F(L) = \{\omega^2 \in \Lambda^2(M^4) : d\omega^2 = 0, [\frac{i}{2\pi}\omega^2]_{DR} = c_1(L)\}$$

und sei $\omega^2_{harm}$ die einzige harmonische Form in $F(L)$. Weil die Krümmungsform $\Omega_A$ für $A \in \mathcal{C}(P_{U(1)})$ eichinvariant ist, erhalten wir eine Abbildung

$$P : \mathfrak{M}_L \longrightarrow F(L) \quad P[\Phi, A] = \Omega_A$$

<u>1. Schritt:</u>
$P(\mathfrak{M}_L) \subset F(L)$ ist eine kompakte Teilmenge (in $L^2$-Topologie von $F(L)$).

<u>Beweis:</u> Gelte $D_A\Phi = 0 \quad \Omega_A^+ = \frac{1}{4}\omega^{\Phi}$.

Die Krümmungsform $\Omega_A$ schreiben wir als $\Omega_A = (\Omega_A)^+ + (\Omega_A)^- = \omega^2_{harm} + d\eta^1$.

Sind $\mathcal{H}^1$ die harmonischen 1-Formen und $Im(d^0) = Im(d : \Lambda^0 \longrightarrow \Lambda^1)$, so können wir $\eta^1$ orthogonal zu $Im(d^0) \oplus \mathcal{H}^1$ in $\Gamma(\Lambda^1)$ wählen. Aus

$$\triangle|\Phi|^2 = 2\langle(\nabla^A)^\star \nabla^A \Phi, \Phi\rangle - 2\langle\nabla^A\Phi, \nabla^A\Phi\rangle = -\frac{R}{2}|\Phi|^2 - \frac{1}{2}|\Phi|^4 - 2\langle\nabla^A\Phi, \nabla^A\Phi\rangle$$

folgt wegen $\int\limits_{M^4} \triangle|\Phi|^2 = 0$

$$2||\nabla^A \Phi||^2_{L^2} = \int\limits_{M^4} (-\frac{R}{2}|\Phi|^2 - 1/2|\Phi|^4) \leq \int\limits_{\{R<0\}} (-R/2|\Phi|^2 \leq \int\limits_{R<0} (-R/2 \cdot (-R_{min})) = C_1(R)$$

Also haben wir eine $L^2$-Schranke für $||\nabla^A \Phi||^2_{L^2} \leq C_1$.

Weiterhin gilt

$$\begin{array}{rcl} \delta\Omega^+_A &=& \star d \star (\Omega_A + \star\Omega_A) = \star d \star \Omega_A \\ \delta\Omega^-_A &=& \star d \star (\Omega_A - \star\Omega_A = \star d \star \Omega_A \end{array}$$

das heißt $\delta\Omega_A = 2\delta\Omega^+_A = 1/2\delta(\omega^\Phi)$.

Nun ist der

$$\begin{array}{rcl} \delta(\omega^\Phi)(\vec{t}) &=& \sum\limits_{i=1}^4 (\nabla_{e_i}\omega^\Phi)(e_i, t) = \sum\limits_i \nabla_{e_i}(\omega^\Phi)(e_i, t) = \\ &=& \sum\limits_i \Big\{\langle e_i \cdot t \cdot \nabla_{e_i}\Phi, \Phi\rangle + \langle e_i, t\rangle \nabla_{e_i} |\Phi|^2\Big\} = \left\{-\langle\nabla_{e_1}\Phi, \Phi\rangle + \nabla_{e_1}|\Phi|^2 - \sum\limits_{i\geq 2}\langle te_i \nabla_{e_i} \Phi, \Phi\rangle\right\} = \\ &=& \Big\{-\langle\nabla_{e_1}\Phi, \Phi\rangle + \nabla_{e_1}|\Phi|^2 + \langle te_1 \nabla_{e_1} \Phi, \Phi)\Big\} = \\ &=& \Big\{-2\langle\nabla_{e_1}\Phi, \Phi\rangle + \nabla_{e_1}|\Phi|^2\Big\} = \{\langle\Phi, \nabla_t\Phi\rangle - \langle\nabla_t\Phi, \Phi\rangle\} \end{array}$$

Diese Rechnung zeigt

$$\delta\Omega_A(\vec{t}) = \frac{1}{2}(\langle\Phi, \nabla^A_t\Phi\rangle - \langle\nabla^A_t\Phi, \Phi\rangle)$$

und daraus folgt

$$||\delta\Omega_A||^2_{L^2} \leq C^\star_2 \, ||\Phi||^2_{L^2}||\nabla^A \Phi||^2_{L^2}$$

und weil wir eine $C^0$-Schranke für $|\Phi|$ haben folgt

$$||\delta\Omega_A||^2_{L^2} \leq C_2.$$

Wegen $\Omega_2 = \omega^2_{harm} + d\eta^1$ erhalten wir dann $||\delta d\eta^1||^2_{L^2} \leq C_2$.

Nun ist der $\eta^1$ othogonal zu $Im(d^0)$ gewählt $\Longrightarrow \delta\eta^1 = 0 \Longrightarrow \triangle\eta^1 = \delta d\eta^1$, also $||\triangle \eta^1||^2_{L^2} \leq C_2$.

Weil $\eta^1 \perp \mathcal{H}^1 = Ker(\triangle)$ und weil das Spektrum von $\triangle$ diskret ist, gilt

$$\|\eta^1\|_{L^2}^2 \leq C_3^\star \| \triangle \eta^1\|_{L^2}^2.$$

Damit haben wir

$$\|\eta^1\|_{L^2}^2 \leq C_3, \quad \| \triangle \eta^1\|_{L^2}^2 \leq C_2.$$

Soweit ist die Menge der infragekommenden 1-Formen $\eta^1$ beschränkt im Sobolev-Raum $H^2(\Lambda^1(M^4))$. Weil

$$d : H^2(\Lambda^1(M^4)) \longrightarrow H^1(\Lambda^2(M^4))$$

stetig ist, ist die Menge $d\eta^1$ - d. h. die Menge $\Omega_A$ im Bild von $P : \mathfrak{M}_L \longrightarrow F(L)$ beschränkt in $H^1(\Lambda^2(M^4))$. Letztlich ist nach Rellich-Lemma

$$H^1(\Lambda^2(M^4)) \longrightarrow L^2(\Lambda^2(M^4))$$

eine kompakte Einbettung: $\Longrightarrow \quad P(\mathfrak{M}_L) \subset F(L) \quad$ ist eine kompakte Teilmenge.

<u>2. Schritt:</u> Wir betrachten $\quad P_1 : \mathfrak{M}_L \longrightarrow \mathcal{C}(P_{U(1)})|\mathfrak{G}(P_{U(1)}) \quad P_1[\Phi, A] = [A]$.

Dann ist $P_1(\mathfrak{M}_L) \subset \mathcal{C}(P_{U(1)})/\mathfrak{G}(P_{U(1)})$ eine kompakte Teilmenge.

<u>Beweis:</u> Dies ist der Satz von Weyl. Die Abbildung

$$\mathcal{C}(P_{U(1)})/\mathfrak{G} \longrightarrow F(L), \quad A \longrightarrow \Omega_A$$

ist nämlich eine Faserung mit der kompakten Faser $Pic(M^4) = H^1(M^4; R)|H^1(M^4; Z) \approx T^{b_1(M^4)}$.

Weil

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_L & \xrightarrow{P_1} & \mathcal{C}(P_{U(1)})|\mathfrak{G}\ (P_{U(1)}) \\ P \searrow & & \swarrow \\ & F(L) & \end{array}$$

kommutiert, $P(\mathfrak{M}_L) \subset F(L)$ kompakt ist, folgt sofort $P_1(\mathfrak{M}_L) \subset \mathcal{C}(P_{U(1)})/\mathfrak{G}(P_{U(1)})$ kompakt.

<u>3. Schritt:</u> $\mathfrak{M}_L$ ist kompakt.

Ist $A \in \mathcal{C}(P_{U(1)})|\mathfrak{G}(P_{U(1)})$ gegeben, so besteht $\mathfrak{M}_L$ aus den Lösungen der Gleichung

$$D_A\Phi = 0 \quad max|\Phi(x)| \leq -R_{min}$$

Dies ist eine beschränkte Kugel in einem endlich dimensionalen Vektorraum.

## 6 Die Seiberg-Witten-Invariante.

Wir kommen jetzt zur Linearisierung für den Raum $\mathfrak{M}_L$. Die Seiberg-Witten-Gleichungen lauten

$$D_A\Phi = 0 \quad , \quad \Omega_A^+ = 1/4\, \omega^\Phi$$

Wir betrachten die Linearisierung dieser Gleichung an der Stelle $(\Phi, A)$. Das ist ein Operator

$$P_{(\Phi,A)} : \Gamma(S^+) \oplus \Gamma(\Lambda^1) \to \Gamma(S^-) \oplus \Gamma(\Lambda^2_+)$$

Sind $\Psi \in \Gamma(S^+)$ und $\eta^1 \in \Gamma(\Lambda^1)$ gegeben, so betrachten wir die Variation

$$A_t = A + t\eta^1 \quad , \quad \Phi_t = \Phi + t\Psi$$

Dann ist
$\Omega_{A_t} = dA + td\eta^1$, also $\frac{d}{dt}(\Omega^+_{A_t})_{|t=0} = (d\eta^1)^+$

Weiterhin, mit $\omega^\Phi(X,Y) = \langle XY\Phi, \Phi\rangle + \langle X,Y\rangle|\Phi|^2$ erhalten wir

$$(\frac{d}{dt}\omega^{\Phi_t}_{|t=0})(X,Y) = \langle XY(\frac{d\Phi_t}{dt})_{|t=0}, \Phi\rangle + \langle XY\Phi, \frac{d\Phi_t}{dt}{}_{|t=0}\rangle + \langle X,Y\rangle\langle\Psi,\Phi\rangle + \langle X,Y\rangle\langle\Phi,\Psi\rangle =$$

$$= \langle XY\Psi, \Phi\rangle + \langle XY\Phi; \Psi\rangle + \langle X,Y\rangle\langle\Psi,\Phi\rangle + \langle X,Y\rangle\langle\Phi,\Psi\rangle =$$

$$= \langle XY\Psi, \Phi\rangle + \langle \Phi, YX\Psi\rangle + \langle X,Y\rangle\langle\Psi,\Phi\rangle + \langle X,Y\rangle\langle\Phi,\Psi\rangle =$$

$$= \langle XY\Psi, \Phi\rangle + \overline{\langle YX\Psi, \Phi\rangle} + \langle X,Y\rangle\langle\Psi,\Phi\rangle + \langle X,Y\rangle\langle\Phi,\Psi\rangle =$$

$$= \langle XY\Psi, \Phi\rangle + \overline{\langle \{-XY - 2\langle X,Y\rangle\}\Psi, \Phi\rangle} + \langle X,Y\rangle\langle\Psi,\Phi\rangle + \langle X,Y\rangle\langle\Phi,\Psi\rangle =$$

$$= \langle XY\Psi, \Phi\rangle - \overline{\langle XY\Psi, \Phi\rangle} - 2\langle X,Y\rangle\overline{\langle\Psi,\Phi\rangle} + \langle X,Y\rangle\langle\Psi\Phi\rangle + \langle X,Y\rangle\langle\Phi,\Psi\rangle =$$

$$= \langle XY\Psi, \Phi\rangle - \overline{\langle XY\Psi, \Phi\rangle} + \langle X,Y\rangle\{\langle\Psi,\Phi\rangle - \overline{\langle\Psi,\Phi\rangle}\} \overset{Def}{=} \omega^{\Phi,\Psi}(X,Y)$$

Also linearisiert sich $\Omega^+_A = \frac{1}{4}\omega^\Phi$ zu $(d\eta^1)^+ = \frac{1}{4}\omega^{\Phi,\Psi}$.

Weiterhin gilt

$$D_{A_t}\Phi_t = D_{A_t}(\Phi) + tD_{A_t}\Psi$$

und damit

$$\frac{d}{dt}(D_{A_t}\Phi_t)_{|t=0} = \frac{d}{dt}(D_{A_t}\Phi)_{|t=0} + D_A\Psi.$$

Wir erhalten

$$(D_{A_t}\Phi) = \sum_i e_i \nabla^{A_t}_{e_i}(\Phi) = \sum e_i(d\Phi(e_i) + t\eta^1(e_i)\Phi) \text{ d.h. } \frac{d}{dt}(D_{A_t}\Phi_t)_{|t=0} = \eta^1 \cdot \Phi.$$

Somit linearisiert sich $D_A\Phi = 0$ zu

$$\eta^1\Phi + D_A\Psi = 0$$

Insgesamt ist $P_{(\Phi,A)} : \Gamma(S^+) \oplus \Gamma(\Lambda^1) \to \Gamma(S^-) \oplus \Gamma(\Lambda^2_+)$ gegeben durch

$$P^1_{(\Phi,A)}(\Psi, \eta^1) = (\eta^1\Phi + D_A\Psi, d\eta^1_+ - \frac{1}{4}\omega^{\Phi,\Psi}).$$

Analog errechnet man den Tangentialraum an den Orbit $\mathfrak{G}(P_{U(1)})\cdot(\Phi, A)$ an der Stelle $(\Phi, A)$. Ist $f_t : M \to S^1$ eine Familie von Eichtransformationen, $f_0 \equiv 1$, so gilt

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{f_t}\Phi) = \frac{d}{dt}(\overline{f_t}\Phi) = \overline{h}\Phi = -h\Phi$$

mit $h := \frac{d}{dt}f_{t|t=0}$ und $f_t^\star A - A = \frac{df_t}{f_t}$, also

$$\frac{d}{dt}(f_t^\star A - A)_{|t=0} = dh.$$

Damit ist $P^0_{(\Phi,A)} : \Gamma(\Lambda^0) \to \Gamma(S^+) \oplus \Gamma(\Lambda^1)$ gegeben durch

$$P^0_{(\Phi,A)}(h) = (-h\Phi, dh).$$

Es gilt tatsächlich

$$P^1_{(\Phi,A)} \circ P^0_{(\Phi,A)} = 0$$

Ist nämlich $\Psi = -h\Phi$ und $\eta^1 = dh$, so folgt

$$\eta^1\Phi + D_A(\Psi) = dh\cdot\Phi - D_A(h\Phi) = dh\Phi - dh\cdot\Phi + hD_A(\Phi) = hD_A(\Phi) = 0$$

und $d\eta^1 = 0$ sowie (wegen $\Psi = h\Phi$, $h$ - rein imaginär)

$$\omega^{\Phi,\Psi}(X,Y) = \langle XYh\Phi, \Phi\rangle - \overline{h}\overline{\langle XY\Phi, \Phi\rangle} + \langle XY\rangle\{h\langle\Phi,\Phi\rangle + h\langle\Phi,\Phi\rangle\} =$$
$$= h\{\langle XY\Phi,\Phi\rangle + \langle\Phi, XY\Phi\rangle + 2\langle X,Y\rangle\langle\Phi,\Phi\rangle\} \equiv 0$$

■

Wir berechnen jetzt den Index des elliptischen Komplexes (über den reellen Zahlen )

$$\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{P^0_{(\Phi,A)}} \Gamma(S^+) \oplus \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{P^1_{(\Phi,A)}} \Gamma(S^-) \oplus \Gamma(\Lambda^2_+) \qquad (\star)$$

Weil bei der Index-Berechnung Operatoren kleinerer Ordnung als das Hauptsymbol keine Rolle spielen, ist der Index gleich dem Index des Komplexes

$$\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{(0,d)} \Gamma(S^+) \oplus \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{(D_A, pr+d)} \Gamma(S^-) \oplus \Gamma(\Lambda^2_+)$$

Der letzte Komplex ist die Summe zweier Komplexe $\Longrightarrow$

$Index_R = Index_R(\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{pr+d} \Gamma(\Lambda^2_+)) + Index_R(0 \longrightarrow \Gamma(S^+) \xrightarrow{D_A} \Gamma(S^-)) =$
$= Index_R(\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{pr+d} \Gamma(\Lambda^2_+)) - 2\, Index_{\mathbb{C}}(D^+_A)$

Nun gilt aber nach der oben aufgeführten Index-Berechnung

$$Index_{\mathbb{C}}(D_A^+) = \frac{1}{8}c^2 - \frac{1}{8}\sigma$$

Daraus folgt

$$Index_R = Index_R(\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^1) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^2_+)) - \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}\sigma$$

Der Index des Komplexes $\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^1) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^2_+)$ ist jedoch $\frac{1}{2}\chi + \frac{1}{2}\sigma$.

Somit folgt

$$Index_R(\star) = \frac{1}{2}\chi + \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}\sigma = \frac{1}{4}(2\chi + 3\sigma) - \frac{1}{4}c^2$$

Aus dieser Rechnung ergibt sich

$$\dim_R \ker(P^0_{(\Phi,A)}) - \dim_R \mathcal{H}^1 + \dim_R \mathcal{H}^2 = \frac{1}{4}(2\chi + 3\sigma) - \frac{1}{4}c^2$$

wobei $\mathcal{H}^1, \mathcal{H}^2$ jeweils die erste - bzw. die zweite Kohomologie des Komplexes $\star$ ist. Also gilt

$$\dim_R \mathcal{H}^1 + \dim_R \mathcal{H}^2 - \dim_R \ker(P^0_{(\Phi,A)}) = \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}(2\chi + 3\sigma).$$

<u>Definition:</u>

Eine Lösung der Seiberg-Witten-Gleichung heißt reduzibel falls $\Phi \equiv 0$. Dann ist $\Omega_A^+ \equiv 0$.

Ist $(\Phi, A)$ irreduzibel, so gilt wegen $P^0_{(\Phi,A)}(h) = (-h\Phi, dh)$

$$\ker(P^0_{(\Phi,A)}) = 0 \qquad (\Phi, A)\ \text{irreduzibel.}$$

Dann folgt

$$\dim_R \mathcal{H}^1 - \dim_R \mathcal{H}^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}(2\chi + 3\sigma).$$

Damit haben wir die virtuelle Dimension $v - \dim_R \mathfrak{M}_L$ des Modulraumes berechnet. Es gilt

Satz: $v - \dim_R \mathfrak{M}_L = \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}(2\chi + 3\sigma)$.

Wir beweisen jetzt nachstehenden generischen Verschwindungssatz für die zweite Kohomologie $\mathcal{H}^2$ des Komplexes $(\star)$.

Satz: Sei $M^4$ eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit und $c \in H^2(M^4; Z)$ eine $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$-Struktur. Für eine generische Menge von Metriken $g \in Met\,(M^4)$ ist für jede irreduzible Lösung $(\Phi \neq 0), A)$ der Seiberg-Witten-Gleichung die zweite Kohomologie $\mathcal{H}^2$ des Komplexes $(\star)$ trivial.

Beweis: Wir fixieren eine Metrik $g \in Met\,(M^4)$ und werden nur lokale Störungen der Metrik in einer Umgebung $g \in U \subset Met\,(M^4)$ betrachten, sodaß wir die Spinorbündel zu verschiedenen Metriken miteinander identifizieren können.Wir betrachten dann die Seiberg-Witten-Gleichung $D^g_A\Phi = 0$, $(\Omega_A)^{+(g)} = \frac{1}{4}\omega^\Phi$ in Abhängigkeit auch von der Metrik $g \in U$. Ist $g_t = g + t \cdot h$ eine Variation der Metrik, so wird die Variation des Operators gegeben durch

$$P_{(\Phi,A,g)}(\varphi, \varepsilon, h) = (\varepsilon\Phi + D^g_A\Phi + \frac{d}{dt}(D^{g+th}_A\Phi)_{/t=0}\,,\; (d\varepsilon)^{+(g)} - \frac{1}{2}\omega^{\Phi,\Psi} + \frac{d}{dt}(\Omega_A)^{+(g+th)})$$

$$P_{(\Phi,A,g)} : \Gamma(S^+) \oplus \Gamma(\Lambda^1) \oplus \Gamma(S^2(T)) \longrightarrow \Gamma(S^-) \oplus \Gamma(\Lambda^2).$$

Natürlich müssen wir nur Variation der Metrik transversal zur Wirkung der Diffeomorphismengruppe von $M^4$ betrachten, d.h. wir können $\delta^g(h) = 0$ annehmen. Dann geht in die Variation des Dirac-Operators unter anderem das Clifford-Produkt $d(Tr(h)) \cdot \Phi$ ein und die Variation der Aufspaltung $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ hängt andererseits nur vom spurlosen Bestandteil des symmetrischen Tensors $h$ ab, weil der Hodge-Operator $\star$ einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit auf $\Lambda^2$ konform-invariant ist. Liegt somit $(\Psi, \eta) \in \Gamma(S^-) \oplus \Gamma(\lambda^2)$ im Kokern des Operators $P_{(\Phi,A,g)}$, so erhalten wir unter anderem die Bedingungen

$$(d(Tr(h)) \cdot \Phi, \Psi^-) \equiv 0$$

$$(\rho(h), \eta) \equiv 0$$

wobei $\rho(h)$ die Änderung des $\star$-Operators beschreibt. Variieren wir $h \in \Gamma(S^2(T))$, ergibt sich $\eta \equiv 0$ sofort und $\Psi \equiv 0$ weil $\Phi$ als Lösung der elliptischen Differentialgleichung $D^g_A\Phi = 0$ $(\Phi \not\equiv 0)$ auf einer dichten Menge von $M^4$ nicht verschwinden.

Folgerung: Sei $c \in H^2(M^4; Z)$ mit $c \equiv \omega_2 \; mod\, 2$. Dann ist die virtuelle Dimension modulo 4 gegeben durch

$$v - \dim_R \mathfrak{M}_L = \frac{1}{4}[c^2 - (2\chi + 3\sigma)] \equiv -1 + b_1 - b_2^+ \quad mod\, 4$$

Beweis: Wir haben

$$\frac{1}{4}[c^2 - (2\chi + 3\sigma)] = -\frac{1}{2}(\chi + \sigma) + 2\dim_{\mathbb{C}} \ker(D_A^+).$$

Nun ist aber die 4-dimensionale Spin-Darstellung eine quaternionische Darstellung.

Damit gilt $\dim_{\mathbb{C}} \ker(D_A^+) \equiv 0 \quad mod\ 2.$ und modulo 4 erhalten wir

$$v - dim_R \mathfrak{M}_L \equiv -\frac{1}{2}(\chi + \sigma) = -\frac{1}{2}[1 - b_1 + b_2^+ + b_2^- - b_3 + 1 + b_2^+ - b_2^- =$$

$$= -\frac{1}{2}[2 - 2b_1 + 2b_2^+] = -1 + b_1 - b_2^+$$

Analog rechnet man:

Folgerung: Sei $M^4$ eine Spin-Mannigfaltigkeit mit der kanonischen Spin$^{\mathbb{C}}$(4)-Struktur $(L \equiv \ominus^1)$. Dann gilt

$$v - dim \mathfrak{M}_{\ominus^1} = -1 + b_1 - b_2^+ - \frac{\sigma}{4}$$

Beweis: $c = 0 \Rightarrow$
$v - dim \mathfrak{M}_{\ominus^1} = -\frac{1}{4}(2\chi + 3\sigma) = -\frac{1}{4}(4 - 4b_1 + 2b_2^+ + 2b_2^- + 3b_2^+ - b_2^-)$

$= -\frac{1}{4}(4 - 4b_1 + 4b_2^+ + \sigma) = -1 + b_1 - b_2^+ - \frac{\sigma}{4}.$ ■

Sei $L \to M^4$ ein Linienbündel über $M^4$ und $c_1(L) \in H^2_{DR}(M^4; R)$ die Chern-Klasse in der de-Rham Kohomologie. Eine Riemannsche Metrik $g$ auf $M^4$ heißt "$L$-gute-Metrik", falls keine 2-Form $\omega^2$ mit

1. $\triangle \omega^2 = 0$
2. $\star \omega^2 = -\omega^2$
3. $[\omega^2]_{DR} = c_1(L)$

existiert.

Das $\wedge$-Produkt definiert eine Bilinearform

$$\wedge : H^2_{DR}(M^4; R) \times H^2_{DR}(M^4; R) \longrightarrow R$$

Ist $g$ eine Metrik und $H^2(g)$ der Raum aller harmonischen Formen, so haben wir einen Isomorphismus

$$H^2(g) \approx H^2_{DR}(M^4; R).$$

Der Hodge-Operator $\star : H^2(g) \to H^2(g)$ ist eine Involution. Somit definiert jede Metrik $g$ auf der de-Rham Kohomologie eine Involution

$$\star_g : H^2_{DR}(M^4; R) \to H^2_{DR}(M^4; R)$$

und $\star_g$ erhält das $\wedge$-Produkt.

Sei $E^+(g)$ und $E^-(g)$ jeweils der Eigenunterraum zu $\pm 1$ von $\star_g$ . Es gilt $\dim E^+(g) = b_2^{\pm}$.

1. Fall:

Ist $b_2^+ = 0$ und $c_1(L) \neq 0$, so existiert in $c_1(L)$ eine $g$-harmonische Form $\omega_2$ : $\triangle\omega_2 = 0$, $[\omega_2] = c_1(L)$. Wegen $b_2^+ = 0$ muß $\star\omega_2 = -\omega_2$ gelten. In diesem Fall existiert also zu $c_1(L)$ keine gute Metrik.

2. Fall:

$b_2^+ = 1$. Dann ist $H^2_{DR}$ ein pseudoeuklidischer Raum von $Index(1, b_2^-)$. Ist $b_2^- = 0$, so ist jede Metrik gut. Wir betrachten die Situation $b_2^- > 0$.

Dann ist $(H^2_{DR}, \Lambda) \simeq (R^{b_2}, z^2 - x_1^2 - \cdots - x_{b_2-1}^2)$

und es ist aus Transversalitätsgründen klar, daß eine Metrik $g$ gewählt werden kann, die $L$-gut ist. Aber zwei solche Metriken müssen nicht verbunden werden können, weil $E^-(g_t)$ immer im Bereich $z^2 - x_1^2 - \cdots - x_{b_2-1}^2 < 0$ liegen muß !!

$\Longrightarrow$ Ist $b_2^+ = 1$ und $b_2^- > 0$ und $c_1^2(L) < 0$ , so ist der Raum der $L$-guten Metriken nicht zusammenhängend. (Ist $c_1^2(L) > 0$, so ist jede Metrik $L$-gut !!)

3. Fall:

$b_2^+ \geq 2$. Es ist klar, daß je zwei $E^-(g)$ innerhalb von $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{b_2^+}^2 - y_1^2 - \cdots y_{b_2^-}^2 < 0$ ineinander so deformiert werden können, daß $c_1^2(L)$ nicht getroffen wird.

$\Longrightarrow$ $b_2^+ \geq 2$ und $c_1^2(L) > 0$, so ist jede Metrik $L$-gut.

$\Longrightarrow$ $b_2^+ \geq 2$ und $c_1^2(L) < 0$, so ist der Raum der $L$-guten Metrik zusammenhängend.

Satz: Sei $(M^4, g)$ eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c$ eine $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$-Struktur mit Linienbündel $L$. Sei $g$ eine $L$-gute Metrik. Dann existieren keine reduziblen Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichung.

Beweis:

$$D_A\Phi = 0 \quad \Omega_A^+ = \frac{1}{4}\omega^\Phi$$

impliziert mit $\Phi \equiv 0$ sofort $\Omega_A^+ = 0$ .

$\Longrightarrow \quad \star\Omega_A = -\Omega_A, \quad \triangle\Omega_A = 0$ weil $d\Omega_A = 0$ und $[\frac{i}{2\pi}\Omega_A]_{DR} = c_1(L)$.

Nach Voraussetzung über die Metrik existiert aber eine solche Form $\Omega_A$ nicht. ■

Damit ergibt sich für den Modulraum $\mathfrak{M}_L = \mathfrak{M}_L(g)$ folgendes Bild. $M^4$ sei eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$-Struktur und $L$ bezeichne das assoziierte Linienbündel.

1. Fall: $b_2^+(M^4) \geq 2$.

Dann gilt für eine generische Metrik $g$ auf $M^4$

1. $g$ ist eine $L$-gute Metrik.
2. $\mathcal{H}^2 \approx \ker((P^1_{(\Phi,A)})^\star) = 0$

und der Raum dieser Metriken ist bogenzusammenhängend. In Konsequenz ist $\mathfrak{M}_L(g)$ für eine derartige Metrik leer oder eine kompakte, glatte Mannigfaltigkeit der Dimension

$$\dim \mathfrak{M}_L(g) = \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}(2\chi + 3\sigma)$$

und die Bordismenklasse im unorientierten Bordismenring $\mathcal{N}_\star$ ist unabhängig von der Metrik. Definiere

$$S - W(M^4, c) = [\mathfrak{M}_L(g)] \ \in \mathcal{N}_\star$$

2. Fall: $b_2^+(M^4) = 1$.

Fall 2.1: $c_1^2(L) > 0, \quad b_2^+(M^4) = 1$

In diesem Fall ist jede Metrik $g$ eine $L$-gute Metrik und generisch gilt
$\mathcal{H}^2 \approx \ker((P^1_{(\Phi,A)})^\star) = 0$.
Wie oben ist die Bordismenklasse $\mathfrak{M}_L(g)$ eindeutig definiert.

$$S - W(M^4, c) = [\mathfrak{M}_L(g)] \ \in \mathcal{N}_\star$$

falls $\mathfrak{M}_L(g)$ nicht leer ist.

<u>Fall 2.2:</u> $c_1^2(L) < 0, \quad b_2^+(M^4) = 1$

Eine generische Metrik $g$ ist $L$-gute Metrik und es gilt $\mathcal{H}^2 \approx \ker((P^1_{(\Phi,A)})^\star) = 0$. Damit ist $\mathfrak{M}_L(g)$ leer oder eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit, jedoch muß der Raum der fraglichen Metriken nicht zusammenhängend sein. Eine Definition von

$$S - W(M^4, c) = [\mathfrak{M}_L(g)] \ \in \mathcal{N}_\star$$

ist nur nach Auswahl eine Zusammenhangskomponente im entsprechenden Raum der Metriken (oder nach anderen Argumenten) möglich.

<u>3. Fall:</u> $b_2^+(M^4) = 0$.

In diesem Fall gilt $\mathcal{H}^2 \approx \ker((P^1_{(\Phi,A)})^\star) = 0$ für eine generische Metrik, jedoch existieren reduzible Lösungen. Ist $\Phi \equiv 0$, so folgt aus $\Omega_A^+ \equiv 0$, daß die Krümmung $\Omega_A$ die einzige $g$-harmonische Form in $c_1(L)$ ist. Nach dem Weyl-Satz ist die Menge

$$\{(\Phi \equiv 0, A) : [\frac{i}{2\pi}\Omega_A] = c_1(L)\}/\mathfrak{G}(P)$$

diffeomorph zur Picard-Mannigfaltigkeit $Pic(M^4) = H^2(M^4; R)/H^2(M^4; Z)$ von $M^4$. Der Modulraum $\mathfrak{M}_L(g)$ ist leer oder eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Singularitätenmenge $Pic(M^4) = T^{b_1(M^4)}$

Seine "Bordismenklasse" ist wiederum eindeutig.

<u>Bemerkung:</u> Die Seiberg-Witten-Invariante im unorientierten Bordismenring zu definieren

$$S - W(M^4, c) = [\mathfrak{M}_L(g)] \in \mathfrak{N}_\star$$

ist die einfachste Variante. Feinere Invarianten erhält man durch nachstehende Beobachtungen.

<u>Beobachtung 1:</u>

Über $\mathfrak{M}_L(g)$ existiert ein universelles $S^1$-Hauptfaserbündel. Ist $m_0 \in M^4$ ein fixierter Punkt, so betrachten wir die Untergruppe $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}(P_{U(1)})$ der Eichgruppe gegeben durch

$$\mathfrak{G}_0 = \{f : M^4 \to S^1 : f(m_0) = 1\}$$

Dann ist $\mathfrak{M}_L^0(g) = \{(\Phi, A) : D_A\Phi = 0, \Omega_A^+ = \frac{1}{4}\omega^\Phi\}/\mathfrak{G}_0$ ein $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0 = S^1$-Hauptfaserbündel über $\mathfrak{M}_L(g)$. Damit besitzt $\mathfrak{M}_L(g)$ eine ausgezeichnete Kohomologieklasse $e \in H^2(\mathfrak{M}_L(g), Z)$. Die Seiberg-Witten-Invariante kann also als Paar $([\mathfrak{M}_L(g)], e)$ bestehend aus einer Bordismenklasse und einem Kohomologieelement aus $H^2$ verstanden werden.

<u>Beobachtung 2:</u>

Der Tangentialraum $T_{(\Phi,A)}\mathfrak{M}_L(g)$ kann - grob gesprochen - für eine generische Metrik mit der Summe

$$\{\Psi \in \Gamma(S^+) : D_A\Psi = 0\} \oplus \{\eta^1 \in \Gamma(\Lambda^1) : \delta\eta^1 = 0 \ (d\eta^1)^+ = 0\}$$

identifiziert werden. Der erste Raum ist ein komplexer Vektorraum und hat somit eine kanonische Orientierung. Der zweite Raum entsteht aus dem Komplex

$$\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{d^+} \Gamma(\Lambda^2_+)$$

oder aus dem Operator

$$\delta \oplus d^+ : \Gamma(\Lambda^1) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^0) \oplus \Lambda(\Lambda^2_+)$$

Damit ist die Determinante des zweiten Raumes gegeben durch

$$det(\delta \oplus d^+) = det \ker(\delta \oplus d^+) \otimes det\ coker(\delta \oplus d^+) = det H^1 \oplus det H^2_+$$

Ist somit eine Orientierung in $H^1(M^4; R) \oplus H^2_+(M^4; R)$ gegeben, so läßt sich $\mathfrak{M}_L(g)$ orientieren. Betrachten wir demnach Tripel $(M^4, c, \mathfrak{O})$ bestehend aus

- einer 4-dimensionalen, kompakten und orientierten Mannigfaltigkeit $M^4$
- einer $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$-Struktur $c \in H^2(M^4, Z)$
- einer Orientierung $\mathfrak{O}$ in $H^1(M^4; R) \oplus H^2_+(M^4; R)$,

so ist in den Fällen $b_2^+(M^4) \geq 2$ oder $b_2^+(M^4) = 1$ und $c^2 < 0$ die Seiberg-Witten-Invariante im orientierten Bordismenring $\Omega_*^{SO}$ definiert,

$$S - W(M^4, c, \mathfrak{O}) \in \Omega_*^{SO}.$$

# 7 Verschwindungssätze.

Wir betrachten eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit $M^4$ mit $b_2^+ \geq 1$ und nehmen an, daß $M^4$ eine Metrik mit Skalarkrümmung $R > 0$ hat. Durch Störungen der Metrik können wir erreichen, daß diese eine L-gute Metrik ist. Dann gilt

$$\mathfrak{M}_L(g) = \{(\Phi \equiv 0, A) : \Omega_A^+ = 0\}/\mathfrak{G} = \{A \in \mathcal{C}(P_{U(1)}) : \Omega_A = 0\}/\mathfrak{G}$$

$$= \text{Raum aller flachen Zusammenhänge.}$$

Ist $c_1(L) \in H^2(M^4)$ kein Torsionselement, so folgt $\mathfrak{M}_L(g) = 0$. Somit gilt

Satz: Besitze $M^4$ eine Metrik positiver Skalarkrümmung und sei $c_1(L) \in H^2(M^4, Z)$ kein Torsionselement. Dann ist

$$S - W(M^4, c) = 0.$$

Dies gilt für $b_2^+(M^4) \geq 2$ allgemein, im Fall $b_2^+(M^4) = 1$ verstehen wir unter $S - W(M^4, c)$ die bezüglich der Komponente der Metrik positiver Skalarkrümmung berechnete Seiberg-Witten-Invariante.

Wir betrachten bei fester Metrik $g$ Lösungen von

$$D_A\Phi = 0 \quad , \quad \Omega_A^+ = \frac{1}{4}\omega^\Phi$$

Wir wissen bereits, daß in jedem Punkte $|\Phi(x)|^2 \leq -R_{\min}$ gilt.

Nach Weitzenböck-Formel haben wir

$$\Delta|\Phi|^2 = -\frac{R}{2}|\Phi|^2 - \frac{1}{2}|\Phi|^4 - 2|\nabla^A \Phi|^2$$

und somit

$$\int\limits_{M^4} |\Phi|^4 \leq \int\limits_{M^4} (-R)|\Phi|^2 \leq R_{\min}^2 vol(M^4).$$

Damit folgt

$$\int\limits_{M^4} |\Omega_A^+|^2 = \frac{1}{16}\int\limits_{M^4} |\omega^\Phi|^2 = \frac{1}{8}\int\limits_{M^4} |\Phi|^4 \leq \frac{1}{8} \cdot R_{\min}^2\, vol(M^4).$$

Weil $\Omega_A$ eine Krümmung in $L$ ist gilt

$$c_1^2(L) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{M^4} (|\Omega_A^+|^2 - |\Omega_A^-|^2).$$

Ist $\mathfrak{M}_L(g) \neq 0$, so folgt

$$c_1^2(L) - (2\chi + 3\sigma) \geq 0$$

$$\text{und damit} \quad 2\chi + 3\sigma \leq c_1^2(L) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{M^4} (|\Omega_A^+|^2 - |\Omega_A^-|^2)$$

also

$$\int\limits_{M^4} |\Omega_A^-|^2 \leq \int\limits_{M^4} |\Omega_A^+|^2 - 4\pi^2(2\chi + 3\sigma).$$

Damit ist sowohl $\int\limits_{M^4} |\Omega_A^+|^2$ als auch $\int\limits_{M^4} |\Omega_A^-|^2$ beschränkt, falls $\mathfrak{M}_L$ nicht leer ist.

Wir erhalten demnach den

Satz:

Sei $(M^4, g)$ eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit mit fixierter Riemannschen Metrik $g$. Dann existieren höchstens endlich viele Spin$^{\mathbb{C}}(4)$-Strukturen $c \in H^2(M^4, Z)$ derart, daß $\mathfrak{M}_L(g)$ nicht leer ist.

## 8 Der Fall $\dim \mathfrak{M}_L(g) = 0$.

Die Seiberg-Witten-Invariante wird als Element im Bordismenring eine numerische Invariante, falls $\dim \mathfrak{M}_L(g) = 0$ gilt. Ist $M^4$ eine kompakte, orientierte 4-dimensionale Mannigfaltigkeit und $c \in H^2(M^4)$ eine Spin$^{\mathbb{C}}(4)$-Struktur mit

$$c^2 - (2\chi + 3\sigma) = 0$$

so definieren wir die $Z_2$-Invariante

$n_L(g) =$ Anzahl der Punkte im Modul-Raum $\mathfrak{M}_L(g)$ *modulo* 2.

Im Fall $b_2^+ \geq 2$ ist $n_L(g) \in Z_2$ für eine generische Metrik eindeutig bestimmt, im Fall $b_2^+ = 1$ ist noch eine "Komponente" im Raum der $L$-guten Metriken zu fixieren. Liegt weiterhin eine Orientierung in $H^1(M^4, R) \oplus H^2_+(M^4; R)$ fest, so wird $n_L^{\mathcal{O}}(g) \in Z$ als ganzzahlige Invariante durch die alternierende Summe der vorzeichenbelasteten Punkte in $\mathfrak{M}_L(g)$ definiert. Diese numerische Seiberg-Witten-Invariante existiert jedoch nicht für jede Mannigfaltigkeit $M^4$. Die Existenz eines Kohomologieelements $c \in H^2(M^4; R)$ mit $c^2 = 2\chi + 3\sigma$ und $c \equiv \omega_2(M^4)\ mod\ 2$ ist notwendig. Die Zahl $2\chi + 3\sigma = (2e + p_1)[M^4]$ muß sich durch ein Element $c \in H^2(M^4; R)$ darstellen lassen. Hier bezeichnet $e \in H^4(M^4; R)$ die Euler-Klasse und $p_1$ die erste Pontrjagin-Klasse. Mit anderen Worten, die entstehende notwendige Bedingung an $M^4$ besagt, daß die Kohomologie-Klasse $2e + p_1 \in H^4(M^4; R)$ im Bild der quadratischen Schnittform
$H^2(M^4; R) \in c \longrightarrow c^2 \in H^4(M^4; R)$ liegen muß. Angenommen, $M^4$ hat eine fast-komplexe

Struktur $J : TM^4 \to TM^4$, welche die Orientierung induziert. Dann ist $TM^4$ ein komplexes 2-dimensionales Vektorbündel über $M^4$ und besitzt Chern-Klassen $c_1 \in H^2(M^4; R)$ und $c_2 \in H^2(M^4; R)$. Weil die komplexe Struktur $J$ verträglich mit der Orientierung ist, stehen die reellen charakteristischen Klassen $\omega_2, e$ und $p_1$ von $M^4$ in Beziehung zu $c_1$ und $c_2$. Es gilt

$$e \equiv c_2, \quad \omega_2 \equiv c_1 \, mod\ 2 \quad p_1 = c_1^2 - 2c_2$$

Daraus folgt sofort $2e + p_1 = c_1^2$. Diese Überlegung kann man auch umkehren.

Satz (Hirzebruch + Hopf, 1958):
Sei $M^4$ eine kompakte, orientierte 4-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine die Orientierung induzierende fast-komplexe Struktur auf $M^4$ genau dann falls ein Element $c \in H^2(M^4; R)$ mit $c^2 = 2e + p_1$ existiert.

# 9 Der Kähler-Fall.

Wir betrachten die Inklusion $j : U(n) \longrightarrow SO(2n)$ sowie $j \times \det : U(n) \longrightarrow SO(2n) \times S^1$.

Dieser Homomorphismus hebt sich in die 2-fache Überlagerung

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(2n) \arrow[d, "\pi"] \\ U(n) \arrow[ur, "l"] \arrow[r, "j \times \det"] & SO(2n) \times S^1 \end{tikzcd}$$

und die Abbildung $k \circ l : U(n) \to Spin^{\mathbb{C}}(2n) \to S^1$ ist die Determinante $\det : U(n) \to S^1$.

Der maximale Torus in $U(n)$

$$\begin{pmatrix} e^{i\Theta_1} & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & e^{i\Theta_n} \end{pmatrix}$$

geht unter $l : U(n) \to Spin^{\mathbb{C}}(2n)$ über in

$$[\underbrace{\prod_{i=1}^{n}(\cos\frac{\Theta_i}{2} + e_{2i-1}e_{2i}\sin\frac{\Theta_i}{2})}_{Spin(2n)}, \underbrace{e^{\frac{i}{2}(\Theta_1 + \cdots \Theta_n)}}_{S^1}]$$

Sei $(M^{2n}, g, J)$ eine Kähler-Mannigfaltigkeit (oder eine Hermitische Mannigfaltigkeit zunächst) und bezeichne $P_J \subset P(M^{2n}, g)$ das entsprechende $U(n)$-Hauptfaserbündel. Dann besitzt $M^{2n}$ die kanonische $Spin^{\mathbb{C}}(2n)$-Struktur

$$Q = P_J \times_l Spin^{\mathbb{C}}(2n)$$

mit dem assoziierten Linienbündel

$$L = Q \times_k \mathbb{C} = P_J \times_{kol} \mathbb{C} = P_J \times_{\det} \mathbb{C} = \Lambda^n(TM^{2n})$$

Somit gilt für die kanonische $Spin^{\mathbb{C}}(2n)$-Struktur

$$c_1(L) = c_1(M^{2n})$$

Im Fall $n = 2$ ist bekanntlich die Signatur und die Euler Charakteristik der Kählerschen Mannigfaltigkeit $M^4$ gegeben durch

$$\sigma = \frac{1}{3}(c_1^2 - 2c_2) \quad , \quad \chi = c_2$$

Damit folgt

$$v - dim\mathfrak{M}_L(g) = \frac{1}{4}c_1^2(L) - \frac{1}{4}(2\chi + 3\sigma) = \frac{1}{4}\{c_1^2 - (2c_2 + c_1^2 - 2c_2)\} = 0$$

Die virtuelle Dimension des Modulraumes $\mathfrak{M}_L(g)$ einer Kählerschen Mannigfaltigkeit bezüglich der kanonischen $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(2n)$-Struktur ist demnach Null.

Bemerkung: Diese Berechnung der virtuellen Dimension läßt sich in einer allgemeinen Situation durchführen. Wir betrachten eine orientierte Mannigfaltigkeit $M^4$ und fast-komplexe Strukturen $J \cdot TM^4 \to TM^4$, $J^2 = -Id$. Dann gilt $\det(J) = 1$. Die Menge der fast-komplexen Strukturen zerfällt in zwei Komponenten, je nachdem $\{X, JX, Y, JY\}$ die Orientierung definiert oder nicht. Seien $\mathfrak{J}^+(M^4, \mathfrak{O})$ und $\mathfrak{J}^-(M^4, \mathfrak{O})$ die entsprechenden Bündel. Ist nun $J$ ein Schnitt in $\mathfrak{J}^+(M^4, \mathfrak{O})$, so ist $(TM^4, J)$ ein komplexes Vektorbündel und die zweite Chern-Klasse $c_2$ ist mit der Euler-Klasse von $M^4$ identisch. Betrachten wir $c = c_1(TM^4, J) \in H^2(M^4; Z)$, so gilt

$$v - dim\mathfrak{M}_L(g) = \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}(2\chi + 3\sigma) = \frac{1}{4}c_1^2 - \frac{1}{4}(2c_2 + p_1) = \frac{1}{4}c_1^2 - \frac{1}{4}(2c_2 + c_1^2 - 2c_2) = 0$$

wobei wir für die Pontrjagin-Klasse $p_1$ des reellen, orientierten Bündels $TM^4$ die Formel $p_1(TM^4) = c_1^2(TM^4, J) - 2c_2(TM^4, J)$ benutzen.

$\blacksquare$

Sei $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$ die Kähler-Form von $(M^4, g, J)$. $\Omega$ wirkt als Endomorphismus auf dem Spinbündel $\Omega : S^+ \to S^+$ und hat dort die Eigenwerte $\pm 2i$. Tatsächlich, in einer Basis aus dem Hauptfaserbündel $P_J$ gilt nämlich

$$\Omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$$

und die Endomorphismen $e_1 \wedge e_2 = e_3 \wedge e_4 : S^+ \to S^+$ sind gleich und durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

gegeben. Sei $S^+(\pm 2i) \subset S^+$ das jeweilige Teilbündel. Sei $\Phi \in S^+$ ein Spinor aus $S^+(2i)$, $\Omega\Phi = 2i\Phi$. In der Basis von $S^+ \approx \mathbb{C}^2$ hat $\Phi$ dann die Komponenten $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Berechnung der 2-Form $\omega^\Phi$ ergibt nun

$$\omega^\Phi(e_1, e_2) = \omega^\Phi(e_3, e_4) = i|\Phi|^2, \quad \omega^\Phi(e_1, e_3) = -\omega^\Phi(e_2, e_4) = 0, \quad \omega^\Phi(e_1, e_4) = \omega^\Phi(e_2, e_4) = 0.$$

Daher gilt

$$\omega^\Phi = i|\Phi|^2\Omega$$

für $\Phi \in S^+(2i)$. Analog berechnet man

$$\omega^\Phi = -i|\Phi|^2\Omega$$

für Spinoren $\Phi \in S^+(-2i)$.

Die Bündel $S^+(2i)$ beziehungsweise $S^+(-2i)$ sind isomorph zu $\Lambda^{0,2}$ bzw. $\Lambda^{0,0}$. Tatsächlich ist

$$\begin{pmatrix} e^{i\Theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\Theta_2} \end{pmatrix}$$

ein Element aus dem maximalen Torus von $U(2)$, so ist seine Hebung nach $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ gegeben durch das Paar

$$\Big((\cos\frac{\Theta_1}{2} + e_1e_2\sin\frac{\Theta_1}{2})\ (\cos\frac{\Theta_2}{2} + +e_1e_2\sin\frac{\Theta_2}{2}), e^{\frac{i}{2}(\Theta_1+\Theta_2)}\Big)$$

Auf $\triangle_4^+$ wirkt dieses Element durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\Theta_1}{2} + i\sin\frac{\Theta_1}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\Theta_1}{2} - i\sin\frac{\Theta_1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\Theta_2}{2} + i\sin\frac{\Theta_2}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\Theta_2}{2} - i\sin\frac{\Theta_2}{2} \end{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\Theta_1+\Theta_2)} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\Theta_1}e^{i\Theta_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$S^+(2i) \simeq \Lambda^2 T \quad , \quad S^+(-2i) \simeq \Lambda^{0,0}$$

Nun ist aber

$$\Lambda^{0,1} = \{\eta : T \to \mathbb{C} \quad : \eta(Jv) = -i\,\eta(v)\}$$

und durch $T \in v \longrightarrow \eta^v \in \Lambda^{0,1}$ mit $\eta^v(w) = g(v, w) + ig(v, Jw)$

wird ein $\mathbb{C}$-linearer Isomorphismus $T \simeq T^{0,1}$ definiert. Damit ergibt sich

$$S^+(2i) = \Lambda^2 T \simeq \Lambda^{0,2}$$

Mit $\Phi_0$ bezeichnen wir den Spinor in $S^+(-2i) \simeq \Lambda^{0,0}$, welcher die Funktion Eins entspricht. Dann gilt in den gewählten Koordinaten

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \omega^{\Phi_0} = -i\Omega$$

Das Bündel $L = \Lambda^2 T$ der kanonischen Spin$^{\mathbb{C}}$-Struktur hat einen ausgewählten Zusammenhang $A_0$, nämlich den Levi-Civita-Zusammenhang. Betrachtet man dazu den Dirac-Operator

$$D_{A_0} : \Gamma(S^+) \longrightarrow \Gamma(S^-)$$

und identifiziert wie oben

$$S^+ \simeq \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2} \quad , \quad S^- = \Lambda^{0,1}$$

so ist $D_{A_0}$ durch den $\bar{\partial}$-Operator des Dolbeault-Komplexes gegeben:

$$D_{A_0} = \sqrt{2}(\bar{\partial}_0 \oplus \bar{\partial}_2^*)$$

Wir nehmen jetzt an, daß die Skalarkrümmung $R$ der Kählerschen Mannigfaltigkeit $(M^4, g, J)$ negativ und konstant ist

$$R \equiv const < 0$$

Dann ist $\Phi = \sqrt{-R}\Phi_0$ ein Schnitt in $S^+$ und es gilt

$$D_{A_0}\Phi = 0$$

$$\omega^\Phi = -|\Phi|^2 i\Omega = -(-R)i\Omega = Ri\Omega$$

Andererseits ist die Krümmung $\Omega_{A_0}$ im Linienbündel $L = \Lambda^2 T$ durch die Ricci-Form $\rho$ gegeben

$$\Omega_{A_0} = i\rho$$

mit $\rho(X,Y) = g(X, JRicY)$. Dabei bezeichnet $Ric : T \to T$ den Ricci-Tensor. In einer Basis ist $J : T \to T$ und der Ricci-Tensor jeweils durch eine Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Ric = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{12} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{13} & R_{13} & R_{33} & R_{34} \\ R_{14} & R_{24} & R_{34} & R_{44} \end{pmatrix}$$

gegeben. Weil $J$ mit $Ric$ kommutiert, ergibt sich die spezielle Gestalt für den schiefsymmetrischen Endomorphismus

$$J \circ Ric = \begin{pmatrix} 0 & -A & D & -C \\ A & 0 & C & D \\ -D & -C & 0 & -B \\ C & -D & B & 0 \end{pmatrix} \qquad A = R_{11} = R_{22}; \quad B = R_{33} = R_{44}$$

und somit nimmt $\rho$ die Form

$$\rho = Ae_1 \wedge e_2 + Be_3 \wedge e_4 + C(e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3) - D(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4)$$

an. Nun sind jedoch $e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3$ und $e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ 2-Formen in $\Lambda^2_-$. Damit ergibt sich für die Projektion $\rho^+$ der Form $\rho$ auf das Teilbündel $\Lambda^2_+$ die Formel

$$\rho^+ = \frac{A+B}{2}(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4).$$

Wegen $A + B = R_{11} + R_{33} = \frac{1}{2}(R_{11} + R_{22} + R_{33} + R_{44})$ erhalten wir demnach die in jeder 4-dimensionalen Kähler Mannigfaltigkeit gültige Beziehung

$$\boxed{\rho^+ = \tfrac{R}{4}\Omega}$$

Wegen

$$\Omega_{A_0} = i\rho = i\frac{R}{4}\Omega = \frac{1}{4}\omega^{\Phi}$$

ist demnach das Paar $(\Phi, A_0) = (\sqrt{-R}\Phi_0, A_0)$ eine Lösung der Seiberg-Witten-Gleichung.

Satz (Le Brun 1994)

Sei $M^4, J, g)$ eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit konstanter Skalarkrümmung $R < 0$ und sei die kanonische $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$-Struktur fixiert. Dann gilt für die Seiberg-Witten-Invariante

$$n_c(g) = 1 \quad \text{in } Z_2$$

($b_2^+ \geq 2$ -damit die Seiberg-Witten-Invariante unabhängig von der Metrik definiert ist).

Beweis: Sei $(\Phi, A)$ eine beliebige Lösung der Gleichung $D_A\Phi = 0, \quad \Omega_A^+ = \frac{1}{4}\omega^{\Phi}$.

Dann gilt $|\Phi(m)|^2 \leq -R_{\min} = -R$ und $|\Omega_A^+|^2 = \frac{1}{16}|\omega^{\Phi}|^2 = \frac{1}{8}|\Phi|^4 \leq \frac{R^2}{8}$.

Damit folgt wegen $\rho^+ = \frac{R}{4}\Omega$ und $|\Omega|^2 = 2$

$$\int\limits_{M^4} |\Omega_A^+|^2 \leq \int\limits_{M^4} \frac{R^2}{8} = \int\limits_{M^4} \frac{R^2|\Omega|^2}{16} = \int\limits_{M^4} \left(\frac{R|\Omega|}{4}\right)^2 = \int\limits_{M^4} |\rho^+|^2 \qquad (\star)$$

Andererseits, weil $\rho$ die Krümmungsform des Levi-Civita-Zusammenhanges in Bündel $\Lambda^2 T$ ist, erhalten wir

$$c_1^2(\Lambda^2 T) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{M^4} (|\rho^+|^2 - |\rho^-|^2)$$

und somit

$$\int\limits_{M^4} |\rho^+|^2 = 2\pi^2 c_1^2(\Lambda^2 T) + \frac{1}{2} \int\limits_{M^4} |\rho|^2$$

Die Skalarkrümmung der Kähler Mannigfaltigkeit ist konstant. Dann ist die Ricci-Form $\rho$ eine harmonische 2-Form, eine Konsequenz der Bianchi-Indentität. Die harmonischen Formen realisieren das Minimum der $L^2$-Form in jeder Kohomologie-Klasse. $A$ ist ein Zusammenhang in $\Lambda^2 T$ und somit gilt

$$\int\limits_{M^4} |\rho|^2 \leq \int\limits_{M^4} |\Omega_A|^2$$

Damit erhalten wir

$$\int\limits_{M^4} |\rho^+|^2 \leq 2\pi^2 c_1^2(L) + \tfrac{1}{2} \int\limits_{M^4} |\Omega_A|^2 = \int\limits_{M^4} |\Omega_A^+|^2 \qquad (\star\star)$$

Kombinieren wir $(\star)$ und $(\star\star)$, so folgt $\Omega_A = i\rho$ und $|\Phi|^2 \equiv -R$. Aus dem Beweis der Abschätzung $|\Phi|^2 \leq -R_{\min}$ folgt dann sofort $\nabla^A \Phi \equiv 0$. Wir zerlegen $\Phi$ gemäß der Aufspaltung des Spinorbündels $S^+ = \Lambda^{0,0} \oplus \Lambda^{0,2}$ in

$$\Phi = \Phi^{0,0} \oplus \Phi^{0,2}$$

$\Phi^{0,2}$ ist ein $\nabla^A$-paralleler Schnitt in $\Lambda^{0,2}$. Wäre er nichttrivial, würde $c_1(\Lambda^{0,2}) = c_1(\Lambda^2 T) = 0$ folgen. Die Krümmungsform des Levi-Civita-Zusammenhangs $A_0$ in $\Lambda^2 T$ ist jedoch

$$\Omega_{A_0}^+ = i\rho^+ = i\frac{R}{4}\Omega \neq 0$$

wegen $R < 0$. Daher verschwindet $\Phi^{0,2}$ und $\Phi$ ist proportional zum Standardspinor $\Phi = f\Phi_0$. Die Länge $|f|^2 = -R$ ist konstant, weil $|\Phi|^2$ konstant ist. Der Zusammenhang $A$ unterscheidet sich vom Levi-Civita-Zusammenhang $A_0$ durch ein imaginär-wertige 1-Form $\eta^1$, $A - A_0 = \eta^1$. Wegen $\Omega_A = i\rho$ gilt $d\eta^1 = 0$. Aber

$$0 = D_A \Phi = D_{A_0} \Phi + \eta^1 \cdot \Phi = grad\,(f) \cdot \Phi_0 + \eta^1 f \Phi_0$$

Damit folgt

$$grad\, f + \eta^1 f = 0$$

Wir betrachten jetzt die Eichtransformation

$$g = \frac{f}{|f|} : M^4 \longrightarrow S^1$$

Lokal können wir $f$ schreiben als $f = \sqrt{-R}e^{iF}$ und $dg = \frac{1}{-R} df$. Dann gilt $g = e^{iF} = \frac{1}{-R} df$. Wegen $grad\,(f) + f\eta^1 = 0$ folgt daraus $\eta^1 = -\frac{dg}{g}$. Wir haben also eine Eichtransformation $g : M^4 \longrightarrow R^1$ mit

$$A = A_0 - \frac{dg}{g} \qquad \Phi = g \cdot (\sqrt{-R}\Phi_0)$$

gefunden, d.h. $(\Phi, A)$ ist äquivalent zu $(\sqrt{-R}\Phi_0, A_0)$.

■

Folgerung:
$M^4$ sei eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit mit $b_2^+ \geq 2$. Besitzt $M^4$ eine Kähler-Struktur mit konstanter Skalarkrümmung, so läßt $M^4$ keine Riemannsche Metrik positiver Skalarkrümmung zu.

Bemerkung: Die letzte Folgerung ist ein Spezialfall eines allgemeinen Sachverhaltes. Wir betrachten eine 4-dimensionale, kompakte und orientierte Mannigfaltigkeit $M^4$ mit einer symplektischen Struktur $\omega$ und setzen voraus, daß $\omega \wedge \omega > 0$ die fixierte Orientierung definiert. Wir wählen eine fast-komplexe Struktur $J : TM^4 \to TM^4$ mit folgenden Eigenschaften:

a). $J^2 = -Id$

b). $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ ist eine Riemannsche Metrik.

Aus $\omega \wedge \omega > 0$ folgt leicht, daß $J$ ein Schnitt im Bündel $\mathfrak{J}^+(M^4, \mathfrak{O})$ ist. Sei $c = c(\omega) \in H^2(M^4; Z)$ die erste Chern-Klasse des komplexen Vektorbündels $(TM^4; J)$. Wir wissen dann aus den Betrachtungen oben, daß

$$v - dim\mathfrak{M}_L = 0$$

gilt, d.h. für eine generische Metrik ist der Modulraum diskret. Nun gilt

Satz (Taubes 1994):
Sei $(M^4, \mathfrak{O})$ eine orientierte, kompakte 4-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $\omega$ eine symplektische Form mit $\omega \wedge \omega > 0$. Weiterhin sei $b_2^+(M^4) \geq 2$, sodaß die Seiberg-Witten-Invarianten definiert sind. Ist $c = c(\omega) \in H^2(M^4; Z)$ die Chern-Klasse einer zu $\omega$ assoziierten fast-komplexen Struktur, so gilt

$$n_c(M^4) = 1 \quad mod\ Z_2.$$

Folgerung: $(M^4, \mathfrak{O})$ sei eine orientierte, kompakte 4-dimensionale Mannigfaltigkeit, welche zwei Bedingungen erfüllt:

1. $b_2^+(M^4) \geq 2$
2. $M^4$ besitzt eine symplektische Struktur $\omega$ mit $\omega \wedge \omega > 0$.

Dann läßt $M^4$ keine Riemannsche Metrik positiver Skalarkrümmung zu.

Wir wenden uns jetzt dem Fall einer Kählerschen Mannigfaltigkeit $(M^4, gJ)$ zu, wobei die $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$-Struktur $c \in H^2(M^4; Z)$ nicht notwendig die kanonische von $M^4$ ist. Das Linienbündel bezeichnen wir wie zuvor mit $L$. Die Kähler-Form $\Omega$ wirkt als Endomorphismus auf dem Spinorbündel, hat dort die Eigenwerte $\pm 2i$ und definiert somit eine Aufspaltung des Spinorbündels

$$S^+ = S^+(2i) \oplus S^+(-2i).$$

$L$ ist isomorph zu $\Lambda^2 S^+$ für jede $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$-Struktur und daher erhalten wir den Isomorphismus

$$S^+(2i) \otimes S^+(-2i) = L$$

Die Kähler-Form $\Omega$ ist für jeden Zusammenhang $A \in \mathcal{C}(L)$ eine parallele Form und somit ist die Aufspaltung $S^+ = S^+(i) \oplus S^+(-i)$ $\nabla^A$-parallel. Die Integralformal von Seite (??) nimmt jetzt für einen Spinor $\Phi = \Phi_+ + \Phi_-$ die folgende Gestalt:

$$\int\limits_{M^4} |\Omega_A^+ - \frac{1}{4}\omega^\Phi|^2 + |D_A\Phi|^2 = \int\limits_{M^4} \{|\Omega_A^+|^2 + |\nabla^A \Phi_+|^2 + |\nabla^A \Phi_-|^2 +$$
$$+ \tfrac{R}{4}(|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2) + \tfrac{1}{8}(|\Phi_+|^2 + |\Phi_-|^2)^2\}.$$

Daraus ersehen wir, daß mit $(\Phi = \Phi_+ + \Phi_-, A)$ auch $(\hat{\Phi} = \Phi_+ - \Phi_-, A)$ eine Lösung der Seiberg-Witten-Gleichung ist. Diese Bemerkung gestattet es nun, die Seiberg-Witten-Gleichung stark zu vereinfachen. Wir gehen aus von einer Lösung der Gleichung

$$D_A\Phi = 0$$

$$\Omega_A^+ = \frac{1}{4}\omega^\Phi$$

mit $\Phi = \Phi_+ + \Phi_-$ und wissen, daß auch

$$D_A\hat{\Phi} = 0$$

$$\Omega_A^+ = \frac{1}{4}\omega^{\hat{\Phi}}$$

mit $\hat{\Phi} = \Phi_+ - \Phi_-$ gilt. Wählen wir ein lokales orthonormales Reper $e_1, \cdots e_4$ auf $M^4$, so hat die Kähler-Form $\Omega$ die Gestalt

$$\Omega = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$$

und der Spinor $\Phi = (\Phi_+, \Phi_-)$ ist durch seine Komponenten gegeben. Dann gilt auf Grund der Definition von $\omega^\Phi$

$$\omega^\Phi = i(|\Phi_+|^2 - |\Phi_-|^2)\,(e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4) + (\Phi_+\bar{\Phi}_- - \bar{\Phi}_+\Phi_-)\,(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4)$$
$$-i(\Phi_+\bar{\Phi}_- + \bar{\Phi}_+\Phi_-)\,(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3)$$

woraus sofort

$$\omega^{\Phi} + \omega^{\hat{\Phi}} = 2i(|\Phi_+|^2 - |\Phi_-|^2)\Omega$$

folgt. Wegen $\Omega_A^+ = \frac{1}{4}\omega^{\Phi} = \frac{1}{4}\omega^{\hat{\Phi}}$ erhalten wir

$$\Omega_A^+ = i(|\Phi_+|^2 - |\Phi_-|^2)\Omega$$

und

$$\Phi_+ \cdot \bar{\Phi}_- \equiv 0.$$

Damit gilt entweder $\Phi_+ \equiv 0$ oder $\Phi_- \equiv 0$. Weiterhin ist $\Omega$ eine $\Lambda^{1,1}$-Form und somit folgt wegen $\Lambda^{0,2} \cap \Lambda^2_- = \{0\} = \Lambda^{2,0} \cap \Lambda^2_-$ sofort

$$\Omega_A^{0,2} = 0 = \Omega_A^{2,0}.$$

Die Krümmungsform des Zusammenhangs $A$ in $L$ ist also eine $(1,1)$-Form. Damit definiert $A$ eine holomorphe Struktur in $L$ und dann auch in $S^+(\pm 2i)$. Die Dirac-Gleichung $D_A\Phi_+ = 0$ (bzw. $D_A\Phi_- = 0$) bedeutet in diesem Fall, daß $\Phi_\pm$ holomorph ist. Die Chern-Klasse von $L$ ist gegeben durch

$$c_1(L) = \frac{i}{2\pi}\Omega_A,\ c_1^+(L) = \frac{i}{2\pi}\Omega_A^+ = \frac{1}{2\pi}(|\Phi_-|^2 - |\Phi_+|^2)\Omega$$

und daher erhalten wir wegen $\Omega \wedge c_1 = \Omega \wedge c_1^+$

$$J \stackrel{Def}{:=} \int_{M^4} \Omega \wedge c_1(L) = \frac{1}{2\pi}\int_{M^4} (|\Phi_-|^2 - |\Phi_+|^2)\Omega \wedge \Omega.$$

$J$ ist das Cup-Produkt von $\Omega$ und $c_1(L)$, also eine topologische Invariante. Ist $J < 0$, so gilt $\Phi_- \equiv 0$, im Fall $J > 0$ haben wir $\Phi_+ \equiv 0$. Berücksichtigen wir nun noch die Wirkung der Eichgruppe, so ergibt sich der

<u>Satz (Witten 1994):</u>

Die Lösungen der Seiberg-Witten-Gleichung über einer Kählerschen Mannigfaltigkeit $M^4$ zur Spin$^{\mathbb{C}}$-Struktur $c \in H^2(M^4; Z)$ korrespondieren zu Paaren bestehend aus einer holomorphen Struktur im Bündel $S^+(\pm 2i)$ und einem Element aus

$$\mathbb{P}H^0(M^4; S^+(2i)) \quad \text{falls}\, \Omega \wedge c < 0$$

$$\mathbb{P}H^0(M^4; S^+(-2i)) \quad \text{falls}\, \Omega \wedge c > 0.$$

Gilt $b_1(M^4) = 0$, so ist die holomorphe Struktur in $S^+(\pm 2i)$ eindeutig und

$$\mathfrak{M}_L(g) \approx \mathbb{P}H^0(M^4; S^+(\pm 2i)).$$

<u>Bemerkung:</u> Im Allgemeinen kann $\mathfrak{M}_L(g)$ nicht zur Bestimmung der Seiberg-Witten-Invariante $S - W(M^4, c) \in \mathcal{N}_\star$ benutzt werden, weil die Kähler Metrik $g$ nicht generisch ist.

# 10 Anwendungen.

a). Beweis der Thom-Vermutung - siehe Kronheimer-Mrowka Arbeit [3]

b). Die Seiberg-Witten-Invariante verschwindet für Mannigfaltigkeiten $M^4 = M_1^4 \# M_2^4$ mit $b_2^+(M_i^4) > 0$. Daher können (siehe zitierten Satz von Taubes) solche Mannigfaltigkeiten keine symplektische Struktur $\omega$ mit $\omega \wedge \omega > 0$ zulassen (Taubes-Arbeiten [4] [5]).

c). $n\ E_8 + m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ kann als Schnittform realisiert werden $\Longrightarrow$ $m \geq \frac{3}{2} n$ ist nun bewiesen für (außer $n = 2$) $n = 4, 6, 8$ (von Kronheimer angekündigt).

d). Neuer Beweis der ersten Donaldson-Sätze, zum Beispiel

Satz: $M^4$ sei eine orientierte, kompakte einfach-zusammenhängende Spin-Mannigfaltigkeit mit negativer Schnittform. Dann ist die Schnittform trivial.

Beweis (Witten): Nach dem Rochlin-Satz gilt $\sigma = b_2^+ - b_2^- = -b_2^- = -16m$.

Wir wählen die zur Spin-Struktur von $M^4$ assoziierte $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$-Struktur. Dann ist das Bündel L trivial und der Modulraum $\mathfrak{M}_L$ hat die Dimension $4m - 1$. Er ist eine singuläre Mannigfaltigkeit mit Singularitätenmenge $Pic(M^4) = 0$, hat (Fall $b_2^+ = 0$ !) also einen singulären Punkt $x_0 \in \mathfrak{M}_L$. Eine lokale Analyse zeigt, daß eine Umgebung von $x_0$ in $\mathfrak{M}_L$ diffeomorph zu einem Kegel über $\mathbb{C}P^{2m-1}$ ist und

$$\int_{CP^{2m-1}} e^{2m-1} = 1$$

gilt. Dies ist aber ein Widerspruch, weil wir mit dem Satz von Stokes

$$\int_{CP^{2m-1}} e^{2m-1} = \int_{\mathfrak{M}_{L-U}} d(e^{2m-1}) = 0$$

erhalten, wobei $e$ die Chern-Klasse des $S^1$-Bündels $\mathfrak{M}_L^0 \to \mathfrak{M}_L$ ist.

■

# Literatur

[1] C. Le Brun, Einstein Metrics and Mostow Rigidity, Preprint November 1994.

[2] C. Le Brun, On the Scalar Curvature of Complex Surfaces, Preprint Dezember 1994.

[3] P. B. Kronheimer, T. S. Mrowka, The Genus of embedded Surfaces in the Projective Plane, Preprint November 1994.

[4] C. H. Taubes, The Seiberg-Witten Invariants and Symplectic Forms, Preprint November 1994.

[5] C. H. Taubes, More Constraints on Symplectic Forms from Seiberg-Witten-Invaraints, Preprint Dezember 1994.

[6] E. Witten, Monopoles and Four-Manifolds, Preprint November 1994.

Ergänzende Literatur:

[7] H. Baum, Th. Friedrich, R. Grunewald, I. Kath, Twistors and Killing Spinors on Riemannian Manifolds, Teubner Verlag Leipzig/ Stuttgart 1991.

[8] J.-P. Bourguignon, P. Gauduchon, Spinors, Operators de Dirac et Variations de Metriques, Comm. Math. 144 (1992), 581-599.

[9] H. B. Lawson, M. L. Michelson, Spin Geometry, Princeton University Press 1989.

[10] Self-dual Riemannian Geometry and Instantons, (Ed. Th. Friedrich), Teubner Verlag 1981.