Modultheorie von Burnsideringen endlicher Gruppen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Ulrike Reichenbach
aus Minneapolis

Göttingen 1997

D7
Referent: Prof. Dr. T. tom Dieck
Korreferent: Prof. Dr. D. Notbohm
Tag der mündlichen Prüfung: 24.4.1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **3**

1 Burnsideringe endlicher Gruppen **5**
1.1 Grundlegende algebraische Eigenschaften 5
1.2 Das Primidealspektrum 6
1.3 Beispiele für Burnsideringe 7

2 Modultheorie **10**
2.1 Projektive Moduln 10
2.2 Darstellungen 11
2.2.1 Kommutative Ordnungen von endlichem Darstellungstyp 13
2.2.2 Ein Beispiel 15
2.3 Das Klassifikationsproblem für p-Gruppen 17
2.3.1 Geschlechter von Moduln 18
2.3.2 Darstellungsäquivalenz von Kategorien 18
2.3.3 Unterkategorien von wildem Darstellungstyp 21
2.3.4 Unzerlegbare Objekte für p-Gruppen von endlichem Darstellungstyp 22
2.3.5 Die Moduln in einem Geschlecht 26
2.4 Burnsideringe von Gruppen mit quadratfreier Ordnung 29

3 Topologisch realisierte Moduln **31**
3.1 Mackey-Funktoren 31
3.2 Äquivariante stabile Homotopiegruppen 33

4 Der äquivariante Satz von Hopf **37**
4.1 Der äquivariante Satz von Hopf für CW-Komplexe 37
4.2 Der Satz von Hopf für Kettenkomplexe 43
4.2.1 Erweiterungsprobleme für Kettenkomplexe 44
4.2.2 Erweiterungen über Familien von Untergruppen 49
4.2.3 Der Satz von Hopf 52

5 Realisierungen von Moduln **56**
5.1 Hopfmoduln für Burnsideringe zyklischer p-Gruppen 57
5.2 Realisierungen von Hopfmoduln 61

Literaturverzeichnis **70**

Einleitung

Diese Arbeit behandelt Aspekte der Modultheorie von Burnsideringen endlicher Gruppen und Zusammenhänge zur äquivarianten algebraischen Topologie.

Zu einer endlichen Gruppe G bilden die Isomorphieklassen der endlichen G-Mengen mit der disjunkten Vereinigung und dem direkten Produkt als Verknüpfungen einen Halbring. Der Burnsidering der Gruppe G ist definiert als der Grothendieckring dieses Halbrings. Damit ist ein Burnsidering eine algebraische Invarinate der Gruppe G, ähnlich wie der Gruppenring oder der Darstellungsring.

Für topologische Räume, auf denen die Gruppe G operiert, haben viele wichtige algebraische Invarianten eine Struktur als Modul über dem Burnsidering der Gruppe G. Daher stammt die Motivation für die vorliegende Arbeit.

Typische Beispiele für solche algebraischen Invarianten sind stabile äquivariante Homotopiegruppen. Vereinfacht gesagt ist diese Arbeit eine Annäherung an die Frage, welche Moduln als stabile Homotopiegruppen auftreten.

In dieser Form ist die Problemstellung viel zu allgemein und wir schränken uns auf solche topologischen Situationen ein, in denen die stabilen Homotopiegruppen über $\mathbb{Z}$ frei und endlich erzeugt sind. Genauer behandeln wir Situationen, in denen eine äquivariante Version des Satzes von Hopf gilt. Dieser Satz besagt unter recht schwachen Voraussetzungen, daß stabile äquivariante Homotopieklassen von Abbildungen durch die Abbildungsgrade der Einschränkungen auf alle Fixpunktmengen charakterisiert sind. Durch die Abbildungsgrade ist eine Injektion der stabilen Homotopiegruppe in eine freie abelsche Gruppe gegeben, deren Bild eine ganz bestimmte Form hat.

Eine Klasse von Moduln mit besonders einfachen algebraischen Eigenschaften bilden die projektiven Moduln vom Rang 1. Ein Ergebnis von tom Dieck [tD 85] zeigt, daß sich alle projektiven Moduln vom Rang 1 durch eine einfache Konstruktion aus dem Burnsidering ableiten lassen.

Für gewisse Räume, die Verallgemeinerungen von Darstellungssphären sind und die die Voraussetzungen für den Satz von Hopf erfüllen, sind die stabilen Homotopiegruppen nach Resultaten von tom Dieck und Petrie ([tD, P 78], [tD, P 83]) projektive Moduln vom Rang 1. Umgekehrt entsteht jeder projektive Modul vom Rang 1 in dieser Weise.

Damit sind die projektiven Moduln von Burnsideringen weitgehend verstanden, sowohl algebraisch als auch als topologische Realisierungen durch stabile Homotopiegruppen. Leider ist dieser Fall nicht typisch.

Um eine Vermutung darüber zu entwickeln, welche anderen Moduln auf diese Weise entstehen, ist es interessant zu wissen, welche über $\mathbb{Z}$ torsionsfreien Moduln es zu

einem Burnsidering überhaupt gibt. Es stellt sich heraus, daß eine Klassifikation für die Burnsideringe fast aller Gruppen nur unter größter Mühe durchführbar, wenn nicht sogar prinzipiell unmöglich ist. Für die einzigen p-Gruppen mit nur endlich vielen über $\mathbb{Z}$ torsionsfreien unzerlegbaren Moduln – den zyklischen Gruppen der Ordnung p und p^2 – klassifizieren wir diese.

Da wir uns auf die Situation des Satzes von Hopf eingeschränkt haben, ist eine gewisse Bedingung an die Moduln gegeben, die als stabile Homotopiegruppen auftreten können: Sie müssen in einer ganz bestimmten Weise in eine freie abelsche Gruppe einzubetten sein. Unsere Resultate zeigen, daß im allgemeinen nicht alle über $\mathbb{Z}$ torsionsfreien Moduln diese Eigenschaft haben. Andererseits scheint es nicht möglich zu sein, dieses an algebraischen Invarianten des Moduls festzustellen – außer, der Modul ist projektiv; dann gibt es immer Einbettungen der gewünschten Form.

Die Komplexität des Problems hängt stark von der Gruppe ab. Selbst für so einfache Gruppen wie zyklische p-Gruppen sind die über $\mathbb{Z}$ freien unzerlegbaren Moduln für Ordnungen größergleich p^4 nicht klassifizierbar. Dennoch kann man die Moduln eines bestimmten Ranges und der Form, wie sie der Satz von Hopf vorgibt, relativ explizit angeben.

Auch das Problem, diese Moduln als stabile äquivariante Homotopiegruppen zu realisieren, ist in dieser Form noch zu schwierig. Konstruktionsversuche mit CW-Komplexen stoßen sehr schnell an ihre Grenzen. Wir beschränken uns daher auf das homologische Problem, solche Moduln als Homotopiemengen von Kettenabbildungen zu realisieren. Auf diese Weise realisieren wir für alle zyklischen p-Gruppen eine bestimmte Unterklasse der Moduln, die wie in dem Satz von Hopf eingebettet sind.

Es folgt ein kurzer Überblick über die einzelnen Kapitel dieser Arbeit:

Das erste Kapitel enthält eine Zusammenstellung der für die weitere Arbeit wichtigen Eigenschaften von Burnsideringen. In dem zweiten Kapitel geht es um die Modultheorie von Burnsideringen.

Das dritte Kapitel enthält einige Eigenschaften von stabilen äquivarianten Homotopiegruppen. In dem vierten Kapitel wird die äuqivariante Form des Satzes von Hopf formuliert und auf Kettenkomplexe über der Orbitkategorie übertragen. Das fünfte Kapitel enthält die Konstruktion bestimmter Moduln für Burnsideringe zyklischer p-Gruppen als Homotopiegruppen von Kettenabbildungen.

In dieser Arbeit ist G immer eine endliche Gruppe, obwohl sich einige der Resultate ohne großen Aufwand für kompakte Liegruppen verallgemeinern lassen. Das gilt insbesondere für den Satz von Hopf 4.2.

Ich danke Herrn Professor tom Dieck für das gestellte Thema und seine geduldige Unterstützung. Für hilfreiche Gespräche bedanke ich mich sehr herzlich bei Jörg Jahnel, Ruth Kellerhals, Helmut Morgenroth und Frank Neumann.

Kapitel 1

Burnsideringe endlicher Gruppen

Dieses Kapitel enthält eine Zusammenfassung bekannter Eigenschaften von Burnsideringen, die in den folgenden Kapiteln verwendet werden. Es werden Bezeichnungen festgelegt und einige Beispiele betrachtet.

Der Burnsidering einer endlichen Gruppe wurde in einer Arbeit von Solomon [So 67] eingeführt. Beweise der hier angegebenen Eigenschaften und weitere Quellen finden sich in [tD 79], [tD 87], [Dr 69] und [L,M,St 80].

1.1 Grundlegende algebraische Eigenschaften

Sei G eine endliche Gruppe. Die Isomorphieklassen endlicher G-Mengen bilden mit den Verknüpfungen disjunkte Vereinigung und direktes Produkt einen Halbring. Der Grothendieckring zu diesem Halbring heißt Burnsidering der Gruppe G. Wir bezeichnen ihn mit $A(G)$. Es ist ein kommutativer Ring, dessen Einselement von der G-Menge G/G repräsentiert wird.

Jede endliche G-Menge ist disjunkte Vereinigung von Bahnen, die als G-Mengen jeweils isomorph zu transitiven G-Mengen G/H sind. Zwei G-Mengen G/H und G/K sind genau dann isomorph, wenn die Untergruppen H und K in G konjugiert sind. Wir verwenden dafür das Symbol $H \sim K$. Bezeichne $\Phi(G)$ die Menge der Konjugationsklassen von Untergruppen in G. Dann bilden die Isomorphieklassen $[G/H]$ für $(H) \in \Phi(G)$ eine Basis von $A(G)$ als freie abelsche Gruppe. Als erste wichtige algebraische Eigenschaft folgt, daß Burnsideringe als Gruppen endlich erzeugt und daher noethersche Ringe sind.

Die multiplikative Struktur eines Burnsiderings ist komplizierter. Die Bahnen einer G-Menge $G/H \times G/K$ hängen von dem Untergruppengitter der Gruppe G ab:

$$G/H \times G/K \cong \sum_{HgK \in H\backslash G/K} G/(H \cap gKg^{-1}).$$

Bezeichne $C(G)$ den Ring der $\mathbb{Z}$-wertigen Abbildungen auf der Menge $\Phi(G)$:

$$C(G) = \prod_{(H)\in\Phi(G)} \mathbb{Z}.$$

Wir bezeichnen die primitiven Idempotenten in $C(G)$ mit e_H für $(H) \in \Phi(G)$. Für ein $x \in C(G)$ bezeichnen wir die Koordinaten bezüglich dieser Standardbasis mit x_H.

Zu einer G-Menge S und einer Untergruppe $H \subset G$ ist S^H die H-Fixpunktmenge, d.h. die Menge der Punkte in S, deren Standgruppe H enthält.

Bemerkung 1.1. *Die Abbildung, die einer G-Menge S das Element $(|S^H|)_{(H)\in\Phi(G)}$ in $C(G)$ zuordnet, liefert einen injektiven Ringhomomorphismus $A(G) \to C(G)$.*

Der Ring $C(G)$ ist der ganze Abschluß von $A(G)$ in dem vollen Quotientenring $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A(G) \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C(G)$.

Das Bild der Injektion $A(G) \to C(G)$ läßt sich durch Kongruenzen beschreiben:

Satz 1.2. *Der Burnsidering ist die Menge der $x \in C(G)$, die für jede Konjugationsklasse $(H) \in \Phi(G)$ die folgende Kongruenz lösen:*

$$\sum_{\substack{(K)\in\Phi(G)\\ H\lhd K\\ K/H\ zykl.}} |NH/NK \cap NH|\, \varphi(|K/H|)\, x_K \equiv 0 \mod |WH|.$$

Dabei ist φ die Eulersche φ-Funktion, d.h. $\varphi(|K/H|)$ ist gleich der Anzahl von Erzeugern der zyklischen Gruppe K/H.

Eine einfache aber nützliche Folgerung ist, daß $|G|C(G)$ in $A(G)$ enthalten ist.

1.2 Das Primidealspektrum

Das Primidealspektrum von Burnsideringen endlicher Gruppen wurde bereits von Dress in [Dr 69] bestimmt.

Satz 1.3. *Jedes Primideal in dem Burnsidering $A(G)$ ist der Schnitt eines Primideals von $C(G)$ mit $A(G)$, hat also die Form*

$$\mathfrak{q}(H,p) := A(G) \cap [\prod_{(K)\neq(H)} \mathbb{Z} \times \prod_{(H)} (p)], \quad p = 0 \text{ oder prim}, \ (H) \in \Phi(G).$$

Zwei Ideale $\mathfrak{q}(H,0)$ und $\mathfrak{q}(K,r)$ sind genau dann gleich, wenn $r = 0$ und $(H) = (K)$ ist. Für jede Primzahl p sind zwei Ideale $\mathfrak{q}(H,p)$ und $\mathfrak{q}(K,r)$ genau dann gleich, wenn $r = p$ ist und die Gruppen $O^p(H)$ und $O^p(K)$ konjugiert sind. Dabei bezeichnet $O^p(H)$ die kleinste normale Untergruppe in H, so daß der Quotient $H/O^p(H)$ eine p-Gruppe ist.

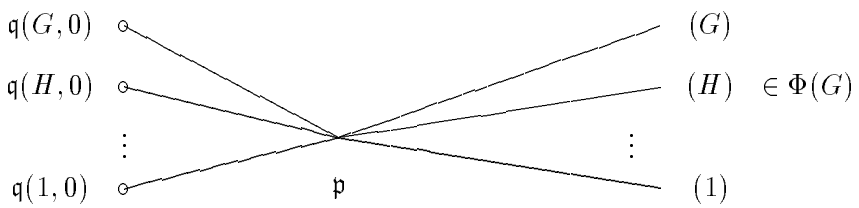
Es folgt, daß die Krulldimension eines Burnsiderings gleich 1 ist.

Wir bezeichnen ein Ideal $\mathfrak{p}$ aus dem Primidealspektrum Spec $A(G)$ als n-fach-Punkt, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}(H,p)$ ist für n verschiedene Konjugationsklassen $(H) \in \Phi(G)$. Wir nennen die Zahl n dann die Ordnung von $\mathfrak{p}$. Es zeigt sich in dem folgenden Kapitel, daß die Ordnungen der Primideale für die Modultheorie von $A(G)$ von großer Bedeutung ist.

Wenn G eine p-Gruppe ist, dann hat $\operatorname{Spec} A(G)$ genau einen Mehrfachpunkt, denn nach Satz 1.3 gibt es in $A(G)$ genau die Primideale

$$\begin{array}{rll} & \mathfrak{q}(H,r) & \text{für } r=0 \text{ oder } r \neq p \text{ prim und } (H) \in \Phi(G) \\ \text{und} \quad \mathfrak{p} := \mathfrak{q}(1,p) = \mathfrak{q}(H,p) & & \text{für alle } (H) \in \Phi(G). \end{array}$$

Die Ordnung dieses Mehrfachpunkts $\mathfrak{p}$ ist also gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von Untergruppen in G. Stellt man das Spektrum von $\mathbb{Z}$ als eine Kurve mit ausgezeichnetem Nullideal $(0) = \circ$ dar, so hat das Primidealspektrum $\operatorname{Spec} A(G)$ die folgende Gestalt:



Für Gruppen G und G' mit relativ primen Gruppenordnungen lassen sich die in $\operatorname{Spec} A(G \times G')$ auftretenden Ordnungen aus den Ordnungen von Primidealen in $A(G)$ und $A(G')$ bestimmen.

Satz 1.4. *Seine G und G' endliche Gruppen mit relativ primen Gruppenordnungen. Dann hat jede Untergruppe in $G \times G'$ die Form $H \times H'$ für Untergruppen $H \subset G$ und $H' \subset G'$. Der Burnsidering $A(G \times G')$ ist isomorph zu $A(G) \otimes_{\mathbb{Z}} A(G')$. Für Untergruppen $H, K \subset G$ und $H', K' \subset G'$ gilt:*

$$\mathfrak{q}(H \times H', p) = \mathfrak{q}(K \times K', p) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{q}(H,p) = \mathfrak{q}(K,p), \ \mathfrak{q}(H',p) = \mathfrak{q}(K',p).$$

Ein Primideal $\mathfrak{q}(H,p) \in \operatorname{Spec} A(G)$ ist genau dann ein n-fach-Punkt, wenn für jedes $(H') \in \Phi(G')$ das Ideal $\mathfrak{q}(H \times H', p) \in \operatorname{Spec} A(G \times G')$ ein n-fach-Punkt ist.

Beweis. Zum Beweis werden nur elementare Aussagen der Gruppentheorie benötigt. Die letzten beiden Behauptungen folgen im wesentlichen daraus, daß $O^p(H \times H') = O^p(H) \times O^p(H')$ ist. □

1.3 Beispiele für Burnsideringe

Als Illustration sind in diesem Abschnitt einige einfache Burnsideringe mit ihrem Primidealspektrum angegeben.

1. Beispiel: Für die zyklische p-Gruppe $G = \mathbb{Z}/p$ wird der Burnsidering von den Elementen $x := [G/1]$ und $1 = [G/G]$ erzeugt. Es gilt die Relation $x^2 = px$. Daher ist $A(G)$ isomorph zu dem Ring $A(G) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^2 - px)$. Als Unterrring in $C(G)$ ist der Burnsidering die Lösungsmenge der Kongruenz

$$x_1 - x_G \equiv 0 \mod p.$$

Allgemeiner hat eine zyklische p-Gruppe $G = \mathbb{Z}/p^n$ die Untergruppen

$$1 = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = G \quad \text{mit } H_i = \mathbb{Z}/p^i.$$

Seien die Koordinaten von Elementen aus $C(G)$ entsprechend mit $x_0, \ldots, x_n$ bezeichnet. Dann ist der Burnsidering $A(G) \subset C(G)$ die Lösungsmenge der Kongruenzen

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 &\equiv 0 \mod p^n \\ x_1 - x_2 &\equiv 0 \mod p^{n-1} \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_{n-1} - x_n &\equiv 0 \mod p. \end{aligned}$$

2. Beispiel: Für Primzahlen $p < q$ hat die zyklische Gruppe $G = \mathbb{Z}/pq$ die Untergruppen

$$H_0 = 1, \quad H_1 = \mathbb{Z}/p, \quad H_2 = \mathbb{Z}/q, \quad H_3 = G.$$

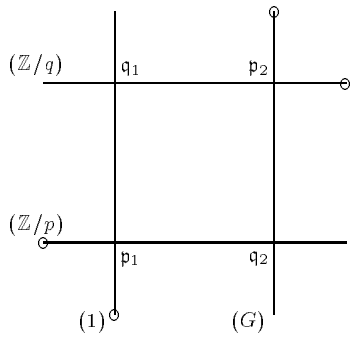
Als Unterring in $C(G)$ ist der Burnsidering $A(G)$ gegeben durch die Kongruenzen

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 - x_2 + x_3 &\equiv 0 \mod pq \\ x_1 - x_3 &\equiv 0 \mod q \\ x_2 - x_3 &\equiv 0 \mod p \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} x_0 - x_1 &\equiv 0 \mod p \\ x_0 - x_2 &\equiv 0 \mod q \\ x_1 - x_3 &\equiv 0 \mod q \\ x_2 - x_3 &\equiv 0 \mod p. \end{aligned}$$

In dem Primidealspektrum gibt es vier Doppelpunkte:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 &:= \mathfrak{q}(H_0, p) = \mathfrak{q}(H_1, p), & \mathfrak{q}_1 &:= \mathfrak{q}(H_0, q) = \mathfrak{q}(H_2, q), \\ \mathfrak{p}_2 &:= \mathfrak{q}(H_2, p) = \mathfrak{q}(H_3, p), & \mathfrak{q}_2 &:= \mathfrak{q}(H_1, q) = \mathfrak{q}(H_3, q). \end{aligned}$$

Es hat folgende Gestalt:



3. Beispiel: Sei q eine Primzahl und p ein Primteiler von $q - 1$. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n \neq 1$, so daß $n^p \equiv 1 \mod q$ ist. Die Gruppe $\mathbb{Z}/p = \langle a \mid a^p = 1 \rangle$ operiert auf $\mathbb{Z}/q = \langle b \mid b^q = 1 \rangle$ durch $aba^{-1} = b^n$. Das semidirekte Produkt

$$G := \mathbb{Z}/q \rtimes \mathbb{Z}/p = \langle a, b \mid a^p = 1,\, b^q = 1,\, aba^{-1} = b^n \rangle$$

ist eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung pq. Da Sylowgruppen zu einer Primzahl immer konjugiert sind, repräsentieren die folgenden Untergruppen alle Konjugationsklassen:

$$H_0 = 1, \quad H_1 = \langle a \,|\, a^p = 1 \rangle, \quad H_2 = \langle b \,|\, b^q = 1 \rangle, \quad H_3 = G.$$

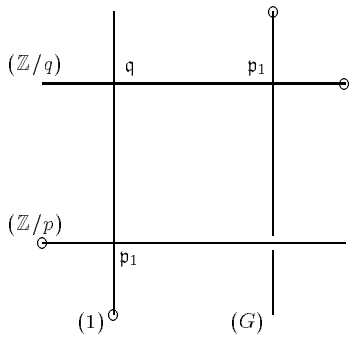
Der Burnsidering $A(G)$ ist gegeben durch die Kongruenzen

$$\begin{aligned} x_0 - qx_1 + (q-1)x_2 &\equiv 0 \mod pq \\ x_2 - x_3 &\equiv 0 \mod p \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} x_0 - x_1 &\equiv 0 \mod p \\ x_0 - x_2 &\equiv 0 \mod q \\ x_2 - x_3 &\equiv 0 \mod p. \end{aligned}$$

In dem Primidealspektrum gibt es drei Doppelpunkte:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_1 &:= \mathfrak{q}(H_0, p) = \mathfrak{q}(H_1, p), \qquad \mathfrak{q} := \mathfrak{q}(H_0, q) = \mathfrak{q}(H_2, q), \\ \mathfrak{p}_2 &:= \mathfrak{q}(H_2, p) = \mathfrak{q}(H_3, p), \end{aligned}$$

Es hat folgende Gestalt:



Kapitel 2

Modultheorie

In diesem Kapitel werden einige Aspekte der Modultheorie von Burnsideringen untersucht. Wir konzentrieren uns auf Moduln, die über $\mathbb{Z}$ frei und endlich erzeugt sind.

Zunächst knüpfen wir an bekannte Ergebnisse über projektive Moduln vom Rang 1 an und zeigen, wie daraus alle endlich erzeugten projektiven Moduln entstehen.

In dem zweiten Abschnitt untersuchen wir unzerlegbare, über $\mathbb{Z}$ torsionsfreie Moduln. Wir geben ein hinreichendes und notwendiges Kriterium dafür an, daß es bis auf Isomorphie nur endlich viele dieser Moduln gibt. Für den Burnsidering der Gruppe $\mathbb{Z}/p$ berechnen wir alle unzerlegbaren $\mathbb{Z}$-torsionsfreien Moduln.

In dem dritten Abschnitt beschäftigen wir uns genauer mit Moduln über Burnsideringen von p-Gruppen. Unter anderem klassifizieren wir die unzerlegbaren $\mathbb{Z}$-torsionsfreien Moduln von $A(\mathbb{Z}/p^2)$.

Der letzte Abschnitt behandelt eine Familie von Burnsideringen, deren Darstellungstheorie besonders einfach ist, die dafür allerdings auch nur sehr klein ist.

2.1 Projektive Moduln

Zunächst eine Bemerkung zu der projektiven Dimension von Moduln über Burnsideringen:

Satz 2.1. *Für einen endlich erzeugter $A(G)$-Modul M ist die projektive Dimension* $\mathrm{pd}(M)$ *gleich* 0, 1 *oder* ∞. *Ist M außerdem über $\mathbb{Z}$ torsionsfrei, dann kann die projektive Dimension nur* 0 *oder* ∞ *sein.*

Beweis. Sei $A := A(G)$. Die projektive Dimension $\mathrm{pd}(M)$ eines Moduls M läßt sich lokal berechnen:

$$\mathrm{pd}(M) = \sup\{\, \mathrm{pd}_{A_{\mathfrak{m}}}(M_{\mathfrak{m}}) \mid \mathfrak{m} \text{ maximales Primideal von } A\}.$$

Sei $M_{\mathfrak{m}} \neq 0$. Falls $M_{\mathfrak{m}}$ endliche projektive Dimension hat, gilt nach dem Satz von Auslander und Buchsbaum:

$$\mathrm{pd}(M_{\mathfrak{m}}) + t(M_{\mathfrak{m}}) = t(A_{\mathfrak{m}}).$$

Die Tiefe $t(A_{\mathfrak{m}})$ ist höchstens so groß wie die Krulldimension von $A_{\mathfrak{m}}$, welche 1 ist. Wenn die projektive Dimension von $M_{\mathfrak{m}}$ endlich ist, kann sie also höchstens 1 sein.

Das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ in A hat die Form $\mathfrak{m} = A \cap [\mathbb{Z} \times \ldots \times (q) \times \ldots \times \mathbb{Z}]$ für eine Primzahl q. Wenn M über $\mathbb{Z}$ torsionsfrei ist, ist $q = \frac{q}{1} \in \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ ein Nichtnullteiler für $M_{\mathfrak{m}}$. Also gibt es in diesem Fall eine reguläre Folge der Länge 1 für $M_{\mathfrak{m}}$, d.h. $t(M_{\mathfrak{m}}) \geq 1$. □

Die Theorie der projektiven Moduln über einem Burnsidering $A(G)$ ist durch Untersuchungen von tom Dieck sehr gut verstanden. In [tD 85] wird die Picard-Gruppe von $A(G)$ in Abhängigkeit von der Struktur der Gruppe G bestimmt. Damit kann man zu einer Gruppe G prinzipiell alle projektiven Moduln vom Rang 1 als Untermoduln in $C(G)$ angeben.

Weitere projektive Moduln sind die Moduln der Form ϵN, wobei $\epsilon \in A(G)$ ein idempotentes Element ist und N ein projektiver $A(G)$-Modul vom Rang 1. Die Idempotenten von $A(G)$ lassen sich ebenfalls aus der Gruppenstruktur von G bestimmen ([tD 87] IV.7.6). Der folgende Satz zeigt, daß alle projektiven $A(G)$-Moduln aus diesen einfachen Bausteinen zusammengesetzt sind.

Satz 2.2. *Sei M ein endlich erzeugter projektiver $A(G)$-Modul. Zu jedem primitiven idempotenten Element $\epsilon \in A(G)$ mit $\epsilon M \neq 0$ gibt es einen projektiven $A(G)$-Modul N vom Rang 1, so daß gilt:*

$$\epsilon M \cong \epsilon N \oplus [\epsilon A(G)]^n.$$

Die Zahl n ist durch den Rang von ϵM als $\epsilon A(G)$-Modul bestimmt. Auch ϵN ist im wesentlichen eindeutig:

$$\epsilon N \oplus [\epsilon A(G)]^n \cong \epsilon N' \oplus [\epsilon A(G)]^n \quad \Longleftrightarrow \quad \epsilon N \cong \epsilon N'.$$

Beweis. Weil $\operatorname{Spec} \epsilon A(G)$ zusammenhängend ist, ist der projektive Rang von ϵM als $\epsilon A(G)$-Modul konstant. Nach Serres Abspaltungssatz ([K 79], IV 3.18) ist ϵM isomorph zu einem Modul $\epsilon M \cong R \oplus [\epsilon A(G)]^n$ mit einem projektiven $\epsilon A(G)$-Modul R vom Rang 1. Der $A(G)$-Modul $N = R \oplus \sum_{\bar{\epsilon} \neq \epsilon} \bar{\epsilon} A(G)$ ist ein projektiver Modul vom Rang 1 und $\epsilon N = R$.

Die Kürzungseigenschaft ergibt sich daraus, daß für einen projektiven Modul N vom Rang 1 über einem kommutativen Ring A die äußere Algebra von $N \oplus A^n$ isomorph zu N ist. □

2.2 Darstellungen

In diesem Abschnitt betrachten wir ausschließlich Moduln, die über $\mathbb{Z}$ frei und endlich erzeugt sind. Solche Moduln werden auch Gitter oder Darstellungen genannt. Die Methoden stammen aus der Theorie von Gittern über Ordnungen, wie sie z.B. in [C,R 81] entwickelt wird.

Da Burnsideringe noethersch sind, ist jeder endlich erzeugte $A(G)$-Modul direkte Summe unzerlegbarer Moduln. Eine solche Zerlegung ist nicht eindeutig, wie schon Satz 2.2 zeigt: Für je zwei projektive Moduln M und M' vom Rang 1 ist auch deren direkte

Summe projektiv und hat daher die Form $N \oplus A(G)$ für einen projektiven Modul N vom Rang 1 . (Jedoch gilt das Krull-Schmidt-Azumaya-Theorem für an einer Primzahl lokalisierte Burnsideringe.)

Es stellt sich die Frage, ob man die unzerlegbaren Darstellungen eines Burnsiderings klassifizieren kann. Nach dem Satz von Jordan-Zassenhaus gibt es jedenfalls zu jedem festen $\mathbb{Z}$-Rang nur endlich viele Isomorphieklassen von Darstellungen. Die Darstellungen mit $\mathbb{Z}$-Rang 1 lassen sich sofort angeben:

Bemerkung 2.3. *Zu einer Konjugationsklasse $(H) \in \Phi(G)$ bezeichne e_H das entsprechende idempotente Element in $C(G)$. Dann repräsentieren die Moduln $e_H C(G)$ die Isomorphieklassen der $A(G)$-Darstellungen mit $\mathbb{Z}$-Rang 1.*

Beweis. Eine $A(G)$-Modulstruktur auf $\mathbb{Z}$ ist durch einen Ringhomomorphismus

$$A(G) \to \mathrm{End}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

gegeben. Jeder Ringhomomorphismus $A(G) \to \mathbb{Z}$ ist von der Form $[S] \mapsto |S^H|$ für eine Untergruppe H von G ([tD 79] Prop.5.7.4). Der entsprechende Modul ist $e_H C(G)$.

Wenn $e_H C(G)$ und $e_K C(G)$ isomorph sind, ist $|S^H| = |S^K|$ für jede endliche G-Menge S, also $(H) = (K) \in \Phi(G)$. □

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob es unzerlegbare Darstellungen nur bis zu einem beschränkten Rang gibt, bzw. ob es bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare Darstellungen gibt. Wir sprechen dann von endlichem Darstellungstyp.

Der folgende Satz stellt einen Zusammenhang zwischen der Struktur der Gruppe G und dem Darstellungstyp von $A(G)$ her. Er beruht auf dem zentralen Resultat 2.6 von Jacobinski, Drozd und Roiter über den Darstellungstyp von kommutativen Ordnungen und der lokalen Aussage 2.9 von Raggi-Cardenas. Der Beweis folgt im nächsten Abschnitt, weil dafür ein Exkurs in die Gittertheorie notwendig ist.

Satz 2.4. *Ein Burnsidering $A(G)$ hat genau dann endlichen Darstellungstyp, wenn für jede Primzahl p und jede p-perfekte Untergruppe H in G gilt:*

$$|\{\,(K) \in \Phi(G) \mid O^p(K) \sim H\,\}| \leq 3.$$

Das bedeutet, daß es in dem Primidealspektrum Spec $A(G)$ *höchstens Dreifachpunkte gibt.*

Folgerung 2.5. *Ein Burnsidering $A(G)$ hat unendlichen Darstellungstyp, falls für eine Primzahl p die Gruppenordnung von p^3 geteilt wird.*

Ein Burnsidering $A(G)$ hat endlichen Darstellungstyp, falls für alle Primteiler p der Gruppenordnung die Sylowgruppen zyklisch der Ordnung p oder p^2 sind.

Wenn der Burnsidering $A(G)$ endlichen Darstellungstyp hat, dann sind die Sylowgruppen von G zyklisch der Ordnung p oder p^2 – oder isomorph zu $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ und alle Untergruppen der Ordnung p sind konjugiert.

Für eine p-Gruppe hat der Burnsidering genau dann endlichen Darstellungstyp, wenn sie zyklisch der Ordnung p oder p^2 ist.

Sind G und G' endliche Gruppen mit relativ primen Gruppenordnungen, so hat der Burnsidering $A(G \times G')$ genau dann endlichen Darstellungstyp, wenn $A(G)$ und $A(G')$ endlichen Darstellungstyp haben.

Beweis. Die erste und vierte Aussage sind offensichtlich. Einen Beweis der zweiten Behauptung findet man in [R-C 90].

Wenn $A(G)$ endlichen Darstellungstyp hat, können höchstens Sylowgruppen der Ordnung p^2 auftreten. Insbesondere sind alle Sylowgruppen abelsch. Wenn es eine nicht zyklische Sylowgruppe $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ gibt, müssen alle Untergruppen der Ordnung p konjugiert sein. Das beweist die dritte Behauptung.

Die letzte Aussage ist eine direkte Folgerung aus Satz 1.4. □

Ein Beispiel für eine Gruppe mit einer nicht zyklischen Sylowgruppe, deren Burnsidering aber endlichen Darstellungstyp hat, ist die Tetraedergruppe A_4. Die 2-Sylowgruppe ist $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, aber alle Untergruppen der Ordnung 2 sind konjugiert.

Es sei angemerkt, daß die Gruppen G, deren Sylowgruppen alle zyklisch der Ordnung p oder p^2 sind, genau die Gruppen sind, für die der Gruppenring $\mathbb{Z}G$ endlichen Darstellungstyp hat ([C,R 81] Theorem 33.6).

2.2.1 Kommutative Ordnungen von endlichem Darstellungstyp

Ähnlich wie Gruppenringe kann man einen Burnsidering $A(G)$ als Ordnung über dem Ring $\mathbb{Z}$ auffassen.

Allgemein sei R ein Dedekindring mit Quotientenkörper K und A eine K-Algebra. Eine R-Ordnung in A ist ein Unterring Λ, der $R \subset A$ enthält, der als R-Modul frei und endlich erzeugt ist und für den $K \otimes_R \Lambda = A$ ist.

Ein Gitter oder eine Darstellung einer R-Ordnung Λ ist ein Λ-Modul, der als R-Modul frei und endlich erzeugt ist.

In dem Fall $\Lambda = A(G)$ ist der Koeffizientenring $R = \mathbb{Z}$ und die Algebra $A = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A(G) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C(G)$. Die $\mathbb{Q}$-Algebra A enthält genau eine maximale Ordnung, nämlich $C(G)$. Auch der bei einer Primzahl p lokalisierte Burnsidering $A(G)_p$ ist eine Ordnung in diesem Sinne. Hier ist der Koeffizientenring $R = \mathbb{Z}_p$.

Die Theorie der Gitter über Ordnungen wurde in den sechziger Jahren u.a. in Hinblick auf ganzzahlige Darstellungen ausgebaut. Die Untersuchungen zum Darstellungstyp von kommutativen Ordnungen wurden 1967 durch das folgende Resultat gekrönt, das unabhängig einerseits von Jacobinski, andererseits von Drozd und Roiter entdeckt wurde.

Es bezeichne für einen Λ-Modul M die Zahl $\mu_\Lambda(M)$ die minimale Anzahl von Erzeugern und $\mathrm{rad}_\Lambda(M)$ den Durchschnitt aller maximalen Untermoduln in M.

Satz 2.6 (Jacobinski, Drozd-Roiter). *Sei R ein Dedekindring, dessen Quotientenkörper K ein globaler Körper oder eine Komplettierung eines globalen Körpers ist. Sei A eine seperable, kommutative, endlichdimensionale K-Algebra und Λ eine R-Ordnung in A. Sei Λ' die maximale R-Ordnung in A. Dann hat die Ordnung Λ genau dann endlichen Darstellungstyp, wenn gilt:*

$$\mu_\Lambda(\Lambda'/\Lambda) \leq 2 \quad \textit{und} \quad \mu_\Lambda(\mathrm{rad}_\Lambda(\Lambda'/\Lambda)) \leq 1.$$

Beweis. In [C,R 81] ist ein zwölfseitiger Überblick (!) über den Beweis gegeben. Dort sind auch weitere Literaturangaben zu finden. □

Die Kriterien $\mu_\Lambda(\Lambda'/\Lambda) \leq 2$ und $\mu_\Lambda(\mathrm{rad}_\Lambda(\Lambda'/\Lambda)) \leq 1$ sind gewissermaßen lokale Eigenschaften, allerdings bezüglich Lokalisierungen an Primidealen des Koeffizientenrings R; diese Ideale werden mit P und Q bezeichnet, um sie deutlich von Idealen in Λ zu unterscheiden.

Lemma 2.7. *Sei R ein Dedekindring und Λ eine R-Ordnung. Weiter sei M ein endlich erzeugter Λ-Modul, der ein R-Torsionsmodul ist, d.h. es ist $aM = 0$ für ein $a \in R$. Dann gilt:*

1. $\mu_\Lambda(M) = \max\{\, \mu_{\Lambda_P}(M_P) \mid P \subset R \text{ Primideal}, aR \subset P \,\}$
2. $\mu_\Lambda(\mathrm{rad}_\Lambda(M)) = \max\{\, \mu_{\Lambda_P}(\mathrm{rad}_{\Lambda_P}(M_P)) \mid P \subset R \text{ Primideal}, aR \subset P \,\}$

Beweis. Die R-Moduln M und $\Lambda/a\Lambda$ haben Primärzerlegungen ([C,R 81] 4.31)

$$M \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{P \supset aR} M_P \quad \text{bzw.} \quad \Lambda/a\Lambda \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{P \supset aR} \Lambda_P/a\Lambda_P.$$

Die zweite Abbildung ist ein Isomorphismus von Ringen. Da $aM = 0$ ist, faktorisiert die Λ-Operation auf M über $\Lambda/a\Lambda$. Die $\Lambda/a\Lambda$-Operation auf der Primärzerlegung von M faktorisiert über die Primärzerlegung von $\Lambda/a\Lambda$. Daraus folgt die erste Behauptung.

Der Untermodul $\mathrm{rad}_\Lambda(M)$ in M ist ebenfalls ein Torsionsmodul mit $a\,\mathrm{rad}_\Lambda(M) = 0$. Nach dem eben Bewiesenen genügt es zu zeigen, daß für jedes Primideal P, das aR enthält, gilt:

$$\Big(\mathrm{rad}_\Lambda(M)\Big)_P = \mathrm{rad}_{\Lambda_P}(M_P).$$

Aus der Primärzerlegung von M folgt

$$\mathrm{rad}_\Lambda(M) = \bigoplus_{P \supset aR} \mathrm{rad}_\Lambda(M_P).$$

Der Modul M_P ist P-primär (d.h. $P^n M_P = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$), also auch der Untermodul $\mathrm{rad}_\Lambda(M_P)$. Daher gilt ([C,R 81] 4.29 bzw. 4.30)

$$\Big(\mathrm{rad}_\Lambda(M_P)\Big)_P = \mathrm{rad}_\Lambda(M_P), \quad \Big(\mathrm{rad}_\Lambda(M_P)\Big)_Q = 0 \quad \text{für jedes } Q \neq P.$$

Durch Lokalisieren der oberen Gleichung erhält man also für jedes Primideal P, das aR enthält:

$$\Big(\mathrm{rad}_\Lambda(M)\Big)_P = \mathrm{rad}_\Lambda(M_P).$$

Es bleibt zu zeigen, daß $\mathrm{rad}_\Lambda(M_P) = \mathrm{rad}_{\Lambda_P}(M_P)$ ist: Da M_P P-primär ist, ist es auch jeder Untermodul $N \subset M$. Daraus folgt, daß $N = N_P$ ist. Also ist jeder Λ-Untermodul schon ein Λ_P-Modul. Umgekehrt ist natürlich jeder Λ_P-Untermodul ein Λ-Untermodul. Damit folgt

$$\mathrm{rad}_\Lambda(M_P) = \bigcap_{\substack{N \subset M_P \text{max.} \\ \Lambda\text{-Untermod.}}} N = \bigcap_{\substack{N \subset M_P \text{max.} \\ \Lambda_P\text{-Untermod.}}} N = \mathrm{rad}_{\Lambda_P}(M_P).$$

□

Aus Satz 2.6 zusammen mit Lemma 2.7 folgt unmittelbar, daß endlicher Darstellungstyp eine lokale Eigenschaft bezüglich Lokalisierungen an Primidealen in R ist.

Korollar 2.8. *Sei R ein Dedekindring mit Quotientenkörper K, der ein globaler Körper oder eine Komplettierung eines globalen Körpers ist. Sei A eine seperable, kommutative, endlichdimensionale K-Algebra und Λ eine R-Ordnung in A. Sei $a \in R$, so daß $a\Lambda' \subset \Lambda$ für die maximale Ordnung Λ' in A. Dann gilt:*

Λ hat genau dann endlichen Darstellungstyp, wenn für jedes Primideal P in R, das das Ideal aR enthält, die lokalisierte R_P-Ordnung Λ_P endlichen Darstellungstyp hat.

Satz 2.4 ergibt sich damit aus der folgenden lokalen Aussage:

Satz 2.9. *Sei p eine Primzahl und $A(G)_p$ der bei p lokalisierte Burnsidering einer endlichen Gruppe G. Der Ring $A(G)_p$ hat genau dann endlichen Darstellungstyp, wenn für jede p-perfekte Untergruppe H in G gilt:*

$$|\{\,(K) \in \Phi(G) \mid O^p(K) \sim H\,\}| \leq 3.$$

Beweis. [R-C 90]. Auch dieser Satz beruht auf dem Kriterium 2.6 von Jacobinski, Drozd und Roiter. Raggi-Cardenas zeigt zunächst, daß die minimale Anzahl von Erzeugern $\mu_\Lambda(\Lambda'/\Lambda)$ für $\Lambda = A(G)_p$ um 1 größer ist als die maximale Anzahl von Idempotenten in Λ', in die ein primitives idempotentes Element aus Λ zerfällt. Hier werden keine speziellen Eigenschaften von Burnsideringen verwendet. Allerdings ist der lokale Koeffizientenring wichtig.

Durch Ausnutzen der engen Beziehung zwischen der Struktur der Gruppe und des Burnsiderings kann man dann zeigen, daß aus $\mu_\Lambda(\Lambda'/\Lambda) \leq 2$ schon $\mu_\Lambda(\mathrm{rad}_\Lambda(\Lambda'/\Lambda)) \leq 1$ folgt. □

Anmerkungen. Lemma 2.7 ist in [C,R 81] für Komplettierungen statt Lokalisierungen formuliert.

Der Satz 2.6 von Jacobinski, Drozd und Roiter ist sehr tiefliegend und gilt in viel allgemeineren Situationen als der hier betrachteten. Insbesondere ist die Algebra $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A(G)$ denkbar einfach. Es wäre daher durchaus möglich, daß es einen einfacheren direkten Beweis von Satz 2.4 gibt.

Wenn es in Spec $A(G)$ einen Vierfachpunkt gibt, kann man mit einem verblüffend einfachen Verfahren, das auf E. Dade [Da 63] zurückgeht, beliebig große unzerlegbare Darstellungen explizit konstruieren.

2.2.2 Ein Beispiel

Sei p eine Primzahl und $G = \mathbb{Z}/p$ die zyklische Gruppe mit p Elementen. Nach Satz 2.4 hat der Burnsidering dieser Gruppe endlichen Darstellungstyp. Für diesen Ring lassen sich die unzerlegbaren Darstellungen relativ einfach klassifizieren.

Mit etwas Gedult, aber sehr elementar läßt sich nachrechnen, daß alle Untermoduln in $C(G)$ isomorph zu einem der folgenden Liste sind:

$$e_1C(G), \quad e_GC(G)$$

$$M_s = \{\,(x_1, x_G) \mid x_1 \equiv sx_G \mod p\,\}, \quad s = \begin{cases} 1, \ldots, \frac{p-1}{2} & \text{für } p \text{ ungerade,} \\ 1 & \text{für } p = 2 \end{cases}$$

$$C(G) = e_1C(G) \oplus e_GC(G).$$

Die Moduln M_s sind die in $C(G)$ invertierbaren Moduln ($M_s M_t = A$, falls $st \equiv 1(p)$) Jeder projektive Modul vom Rang 1 ist isomorph zu einem solchen Modul M_s ([tD 85], Prop.1.3.).

Satz 2.10. *Jede unzerlegbare $A(\mathbb{Z}/p)$-Darstellung ist isomorph zu einem der Moduln $e_1 C(G)$, $e_G C(G)$ oder M_s.*

Beweis. Zur Abkürzung sei $e_1 C(G) = M_p$ und $e_G C(G) = M_0$.

Sei M ein endlich erzeugter, $\mathbb{Z}$-torsionsfreier A-Modul. Dann ist M als Gruppe isomorph zu einer Gruppe $\mathbb{Z}^n$. Die Operation von A auf M wird vollständig durch die Operation von $[G/1]$ auf M, also durch die Operation einer $(n \times n)$-Matrix X mit ganzzahligen Einträgen und der Eigenschaft $X^2 = pX$, beschrieben.

Da $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A(G) \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C(G)$, ist der $A(G)$-Modul $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ sogar ein $C(G)$-Modul. Als solcher zerfällt er in eine direkte Summe

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M_0)^a \oplus (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M_p)^b, \quad a + b = n.$$

Wir betrachten $M_0^a \oplus M_p^b$ als Untermodul in $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$. Durch geeignetes Erweitern erhält man aus der kanonischen Injektion $M \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ eine Inklusion $M \to M_0^a \oplus M_p^b$.

Falls $a = 0$ oder $b = 0$ ist, zerfällt M offensichtlich in eine direkte Summe von Untermoduln vom Typ M_0 bzw. M_p.

Seien also $a, b \geq 1$. Wir wählen eine $\mathbb{Z}$-Basis

$$\binom{x^1}{y^1}, \binom{x^2}{y^2}, \ldots, \binom{x^{a+b}}{y^{a+b}}, \quad x^i \in M_0^a,\ y^i \in M_p^b.$$

Wir können sie so wählen, daß nur von x^1 die erste Koordinate x_1^1 ungleich 0 ist. (Nach dem Beweis dafür, daß ein Untermodul in einem freien Modul über einem Hauptidealring wieder frei ist, kann man die Basis sogar in unterer Dreiecksform wählen.)

Da $X\binom{x^1}{y^1} = \binom{0}{py^1}$ ein Element von M ist, muß py^1 eine ganzzahlige Linearkombination der $y^2, \ldots, y^{a+b}$ sein, d.h.

$$py^1 \in \langle y^2, \ldots, y^n \rangle.$$

Falls schon $y^1 \in \langle y^2, \ldots, y^{a+b} \rangle$, kann man $y^1 = 0$ erreichen. Dann zerfällt M in die direkte Summe der Untermoduln

$$M' = \langle \binom{x^1}{0} \rangle, \quad M'' = \langle \binom{x^2}{y^2}, \ldots, \binom{x^n}{y^n} \rangle$$

Der Modul M' ist ein Modul vom Typ M_0.

Wir nehmen nun an, daß $y^1 \notin \langle y^2, \ldots, y^{a+b} \rangle$. Sei $z^1, \ldots, z^b$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\langle y^2, \ldots, y^n \rangle$. Für jedes $k = 1, \ldots, n$ hat py^k eine eindeutige Darstellung

$$py^k = \sum_{i=1}^{b} \lambda_i^k z^i, \quad \lambda_i^k \in \mathbb{Z}.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein i, für das λ_i^1 nicht durch p teilbar ist. Sei etwa $i = 1$. Durch die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} x^k \\ y^k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^k \\ \lambda_1^k \end{pmatrix}$$

wird ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : M \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ definiert. Eine elementare Rechnung zeigt, daß er A-linear ist, wenn rechts A durch $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)$ operiert. Weiter läßt sich nachrechnen, daß $\mathrm{Bild}(\varphi) = \langle \binom{x_1^1}{\lambda_1^1}, \binom{0}{p} \rangle$ ist. Dieser Modul ist projektiv vom Rang 1. Die Surjektion $\varphi : M \to \mathrm{Bild}\,\varphi$ spaltet einen direkten projektiven Summanden von M ab. □

Anmerkung. Der Augenschein ist hier trügerisch. Der Beweis von Satz 2.10 ist zwar ganz elementar, aber die Aussage ist keineswegs trivial. Auf einem weniger elementaren Weg erhält man sie auch aus dem folgenden Ergebnis von Bass:

Proposition. Sei A ein kommutativer, noetherscher und reduzierter Ring der Krulldimension ≤ 1. Der ganze Abschluß C von A in dem vollen Quotientenring sei ein endlich erzeugter A-Modul. Dann hat ein endlich erzeugter reflexiver A-Modul $M \neq 0$ einen direkten projektiven Summanden oder ist ein Modul über einer echten Ringerweiterung von A in C.

Beweis. [Ba 63], Proposiotion 7.2. □

Der Ring $A(\mathbb{Z}/p)$ ist ein Gorensteinring ([Ba 63], Theorem 6.3). Daher sind alle endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-torsionsfreien Moduln reflexiv ([Ba 63], Theorem 6.2). Die einzige echte Ringerweiterung von $A(\mathbb{Z}/p)$ in $C(\mathbb{Z}/p)$ ist $C(\mathbb{Z}/p)$, weil der Index von $A(\mathbb{Z}/p)$ in $C(\mathbb{Z}/p)$ die Primzahl p ist. Jeder $C(\mathbb{Z}/p)$-Modul zerfällt in eine direkte Summe von Moduln $e_1 C(G)$ und $e_G C(G)$. Genau diese Eigenschaft des Ringes $A(\mathbb{Z}/p)$ wird in dem oben angegebenen Beweis explizit und elementar nachgewiesen.

Andererseits zeigen die Ergebnisse von Bass aber auch, daß die Modultheorie für Burnsideringe $A(\mathbb{Z}/p^n)$ für $n > 1$ grundlegend anders ist. Diese Ringe sind nicht Gorenstein. Es gibt daher nicht reflexive $\mathbb{Z}$-torsionsfreie Moduln. Außerdem gibt es echte Ringerweiterungen von $A(\mathbb{Z}/p^n)$ in $C(\mathbb{Z}/p^n)$, die nicht in eine direkte Summe von Idealen zerfallen. Ein ähnlicher Ansatz, wie in dem eben durchgeführten Beweis ist daher aussichtslos.

2.3 Das Klassifikationsproblem für p-Gruppen

Wir haben gesehen, daß nur relativ wenige Burnsideringe endlichen Darstellungstyp haben. Aber auch für diese Ringe ist Anzahl und Größe der unzerlegbaren Darstellungen zunächst unbekannt und die Klassifikation mehr als ein nur rechnerisches Problem. Noch viel mehr gilt das natürlich für Burnsideringe mit unendlichem Darstellungstyp.

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Darstellungstheorie von Burnsideringen von p-Gruppen mit einer Methode, die M.C.R. Butler für die Untersuchung der unzerlegbaren ganzzahligen Darstellungen von endlichen abelschen p-Gruppen entwickelt hat [Bu 74]. Als Resultat erhalten wir eine Klassifikation der unzerlegbaren Darstellungen

von $A(\mathbb{Z}/p^2)$ – im Vergleich zu einem ad hoc Ansatz sehr mühelos. Außerdem werden die Ergebnisse über den Darstellungstyp von Burnsideringen bestätigt und es zeigt sich, daß das Klassifikationsproblem für fast alle p-Gruppen hoffnungslos schwierig ist. Da die Situation für allgemeine Gruppen wohl kaum einfacher ist, kann man also nur in wenigen Ausnahmefällen damit rechnen, daß die unzerlegbaren $A(G)$-Darstellungen klassifizierbar sind.

2.3.1 Geschlechter von Moduln

Zwei Darstellungen M, N über einer R-Ordnung Λ heißen von gleichem Geschlecht, wenn für jedes maximale Ideal $P \subset R$ die Λ_P-Moduln M_P und N_P isomorph sind.

Bemerkung 2.11. *Sei G eine p-Gruppe und $A(G)_p$ der an dem Primideal $(p) \subset \mathbb{Z}$ lokalisierte Burnsidering. Zwei $A(G)$-Darstellungen M und N sind genau dann von gleichem Geschlecht, wenn M_p und N_p als $A(G)_p$-Moduln isomorph sind.*

Beweis. Die Isomorphie der Darstellungen muß man nur bei den maximalen Idealen in $\mathbb{Z}$ nachprüfen, für die die Lokalisierung der Ordnung $A(G)$ nicht gleich der Lokalisierung der maximale Ordnung $C(G)$ ist ([C,R 81] 31.2). Für den Burnsidering einer p-Gruppe ist das nur das Primideal (p). □

Satz 2.12. *Sei G eine p-Gruppe und M eine Darstellung von $A(G)$. Äquivalent sind:*

1. *M ist unzerlegbar.*
2. *M_p ist unzerlegbar.*

Beweis. Eine Zerlegung von M liefert eine Zerlegung von M_p. Daher impliziert die zweite Aussage die erste.

Sei M_p zerlegbar. Jede Darstellung von $A(G)_p$ ist die Lokalisierung eine Darstellung von $A(G)$ ([C,R 81] 23.14). Also gibt es Darstellungen N und L von $A(G)$ mit

$$M_p = N_p \oplus L_p.$$

Nach Bemerkung 2.11 sind M und $N \oplus L$ von gleichem Geschlecht. Daraus folgt, daß auch M zerlegbar ist ([C,R 81] 31.13). □

Um alle unzerlegbaren Darstellungen des Burnsideringes einer p-Gruppe zu finden, kann man also zunächst die unzerlegbaren $A(G)_p$-Darstellungen bestimmen und anschließend die Moduln in den jeweiligen Geschlechtern bestimmen.

2.3.2 Darstellungsäquivalenz von Kategorien

Für p-Gruppen steht die Kategorie der $A(G)_p$-Darstellungen in enger Beziehung zu einer Kategorie Syst(G) von gewissen Köcher-Darstellungen, die einfacher zu untersuchen ist als die ursprüngliche Kategorie. Genauer gibt es einen Funktor Δ, der eine Bijektion zwischen den unzerlegbaren $A(G)_p$-Darstellungen mit $\mathbb{Z}_p$-Rang größer als 1 und den unzerlegbaren Objekten in Syst(G) herstellt.

Wie bisher sei G eine endliche p-Gruppe. Bezeichne $R = \mathbb{Z}_p$ den Koeffizientenring der Ordnung $\Lambda = A(G)_p$. Seien $\bar{\Lambda} = C(G)_p$ und $e_1, \ldots, e_n$ die primitiven Idempotenten in $\bar{\Lambda}$. Zu einer Λ-Darstellung M bezeichne $\bar{M}$ den Modul $\bar{\Lambda} \otimes_\Lambda M$. Die kanonische Abbildung $M \to \bar{M}$ ist eine Injektion. Wir betrachten im weiteren M als Untermodul in $\bar{M}$. (Der Modul $\bar{M}$ hat im allgemeinen R-Torsion, ist also *keine* Darstellung.)

Sei $\mathrm{Rep}(G)$ die Kategorie der reduzierten Λ-Darstellungen, d.h. der Darstellungen, die keinen direkten Summanden $e_i\Lambda$ enthalten.

Sei $\mathrm{Syst}(G)$ die Kategorie der Systeme von endlich erzeugten Λ-Moduln

$$V_* = (V; V_1, \ldots, V_n) \quad \text{oder kurz} \quad V_* = (V; V_i)$$

mit den Eigenschaften

(a) Für $i = 1, \ldots, n$ ist $V_i \subset V$ ein Untermodul.

(b) $|G|\bar{\Lambda}V = 0$ (Man beachte, daß $|G|\bar{\Lambda} \subset \Lambda$ ist.)

(c) $\sum_{i \neq t} V_i = V$ für alle $t = 1, \ldots, n$

(d) Für $\lambda = \sum \lambda_i e_i \in \Lambda$ ist die Operation auf V_j durch Multiplikation mit der Koordinate λ_j gegeben.

Die Morphismen $f : V_* \to W_*$ in $\mathrm{Syst}(G)$ sind Λ-Modulmorphismen $f : V \to W$ mit $f(V_i) \subset W_i$.

Für jede Λ-Darstellung M ist das System $(\bar{M}/M; (M + e_iM)/M)$ ein Objekt in $\mathrm{Syst}(G)$: Weil $|G|\bar{\Lambda} \subset \Lambda$, ist $|G|\bar{\Lambda}\bar{M} = |G|\bar{\Lambda} \otimes_\Lambda M$ in M enthalten. Damit hat das System die Eigenschaft (b). Eigenschaft (c) gilt, weil

$$\sum_{i \neq t} (M + e_iM) = M + \sum_{i \neq t} e_iM = (\sum_{i=1}^{n} e_i)M + \sum_{i \neq t} e_iM = e_tM + \sum_{i \neq t} e_iM = \bar{M}.$$

Eigenschaft (d) ist erfüllt, weil $(M + e_iM)/M$ und $e_iM/(M \cap e_iM)$ als Λ-Moduln isomorph sind.

Wir definieren einen Funktor $\Delta : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Syst}(G)$ durch

$$\Delta(M) = (\bar{M}/M; (M + e_iM)/M),$$
$$\Delta(f : M \to N) = \bar{f} := 1 \otimes f : \bar{M} \to \bar{N}.$$

Der Funktor Δ ist additiv, d.h. die induzierten Abbildungen

$$\Delta_{M,N} : \mathrm{Mor}_{\mathrm{Rep}(G)}(M, N) \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Syst}(G)}(\Delta M, \Delta N)$$

sind Homomorphismen von Gruppen.

Die beiden Kategorien $\mathrm{Rep}(G)$ und $\mathrm{Syst}(G)$ sind additiv, so daß Unzerlegbarkeit von Objekten definiert ist.

Satz 2.13. *Der Funktor* $\Delta : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Syst}(G)$ *ist eine Darstellungsäquivalenz, d.h. er induziert jeweils Bijektionen der Mengen von Isomorphieklassen von Objekten und der Mengen von idempotenten Endomorphismen. Insbesondere entsprechen die Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte in* $\mathrm{Rep}(G)$ *vermöge* Δ *den Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte in* $\mathrm{Syst}(G)$.

Der Funktor Δ ist keine Äquivalenz von Kategorien. Er ist nicht treu, denn für jedes Λ-Gitter M ist $|G|\bar{M} \subset M$, also $\Delta_{M,M}(|G|\,\mathrm{id}_M) = 0$.

Der Beweis von Satz 2.13 ergibt sich aus den folgenden vier Lemmata.

Lemma 2.14. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Für je zwei Darstellungen* M *und* N *aus* $\mathrm{Rep}(G)$ *ist der von* Δ *induzierte Homomorphismus* $\Delta_{M,N} : \mathrm{Mor}_{\mathrm{Rep}(G)}(M,N) \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Syst}(G)}(\Delta M, \Delta N)$ *surjektiv.*

2. *Für eine* Λ*-Darstellung* M *mit der Eigenschaft*

$$e_i M \cap M \subset pe_i M \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

   ist $\mathrm{Kern}(\Delta_{M,M}) \subset \mathrm{Mor}_\Lambda(M,M)$ *ein quasi-reguläres Ideal (d.h. zu jedem Element* $\theta \in \mathrm{Kern}(\Delta_{M,M})$ *gibt es eine Zahl* m*, so daß* $1 - \theta^m$ *eine Einheit in* $\mathrm{Mor}_\Lambda(M,M)$ *ist).*

3. *Wenn die Bedingung aus 2. für zwei* Λ*-Darstellungen* M *und* N *gilt, so ist ein Homomorphismus* $\theta : M \to N$ *genau dann ein Isomorpismus, wenn* $\Delta\theta : \Delta M \to \Delta N$ *ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Der Beweis von [Bu 74] Prop.2.4 läßt sich auf die hier vorliegende Situation übertragen. □

Lemma 2.15. *Für eine* Λ*-Darstellung* M *sind äquivalent:*

1. $M \cap e_i M \subset pe_i M$

2. M *ist reduziert, d.h.* M *hat keinen direkten Summanden* $e_i\Lambda$ *für* $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. (Vergl. [Bu 74] 3.3 (a))
$2 \Rightarrow 1$: Für $M = e_i\Lambda$ ist $M \cap e_i M = e_i\Lambda \not\subset pe_i\Lambda = pe_i M$. Die Aussage überträgt sich auf Darstellungen mit einem direkten Summanden $e_i\Lambda$.

$1 \Rightarrow 2$: Für eine Λ-Darstellung M ist $e_i M$ als R-Modul gleich R^m und $\lambda \in \Lambda$ operiert durch Multiplikation mit der Koordinate λ_i. Es gibt eine R-Basis $b_1, \ldots, b_m$ von $e_i M$ und ein $r \leq m$, so daß $\alpha_1 b_1, \ldots, \alpha_r b_r$ für geeignete $\alpha_j \in R$ eine Basis von dem Untermodul $M \cap e_i M$ ist. Für $R = \mathbb{Z}_p$ sind die α_j bis auf Einheiten Potenzen von p. Teilt p alle α_j, so ist $M \cap e_i M$ in $pe_i M$ enthalten. Falls etwa $\alpha_1 = 1$ ist, so ist Λb_1 in M enthalten. Andererseits ist Λb_1 ein direkter Summand in $e_i M$ und damit auch in $\bar{M}$. Die Einschränkung auf M der Spaltung $\bar{M} \to \Lambda b_1$ ist eine Spaltung der Inklusion $\Lambda b_1 \subset M$. Also hat in diesem Fall M einen direkten Summanden $e_i\Lambda$. □

Lemma 2.16. *Zu jedem Objekt* $V_* = (V; V_i)$ *aus* $\mathrm{Syst}(G)$ *gibt es eine Darstellung* ∇V_* *aus* $\mathrm{Rep}(G)$*, so daß* $\Delta\nabla V_*$ *isomorph zu* V_* *ist.*

Beweis. (Vergl. [Bu 74] 3.2(a)) Für jedes V_i ist $|G|V_i = 0$ und $\lambda \in \Lambda$ operiert auf V_i durch Multiplikation mit der Koordinate λ_i. Daher ist V_i ein Quotient eines Λ-Moduls $(e_i\Lambda)^{d_i}$ der Form $V_i \cong R/p^{r_1} \times \cdots \times R/p^{r_{d_i}}$ für gewisse $r_1, \ldots, r_{d_i}$ mit $|G| \leq p^{r_k}$ für $k = 1, \ldots, d_i$. Sei $f_i : (e_i\Lambda)^{d_i} \to V_i$ eine entsprechende Projektion. Dann liegt $\mathrm{Kern}(f_i)$ in $p(e_i\Lambda)^{d_i}$. Sei $F = \bigoplus_{i=1}^{n} (e_i\Lambda)^{d_i}$. Die Summe der Projektionen $f : F \to V$ ist ein surjektiver Homomorphismus von Λ-Moduln. Offensichtlich ist $M := \mathrm{Kern}(f)$ eine Λ-Darstellung.

Wir zeigen, daß $M \cap e_iM \subset pe_iM$ ist. Dafür zeigen wir zunächst, daß $e_iM = e_iF$ ist: Die Inklusion $e_iM \subset e_iF$ ist offensichtlich. Für die andere Inklusion sei $x = e_ix \in e_iF$. Da V die Summe der V_j mit $j \neq i$ ist und die f_j jeweils surjektiv sind, gibt es Elemente $x_j \in V_j$, so daß

$$f(x) = \sum_{j \neq i} f_j(x_j) = \sum_{j \neq i} f(x_j).$$

Daher liegt $x - \sum_{j \neq i} x_j$ in $\mathrm{Kern}(f) = M$. Durch Multiplizieren mit e_i folgt, daß $e_ix = x$ in e_iM liegt.

Damit folgt nun: $M \cap e_iM = M \cap e_iF = \mathrm{Kern}(f_i) \subset pe_iF = pe_iM$. Nach Lemma 2.15 ist M also reduziert. Der Morphismus $f : \bar{M} = F \to V$ induziert einen Isomorphismus $\Delta M \to V_*$. Mit $\nabla V_* := M$ ist eine Darstellung mit den gewünschten Eigenschaften gefunden. □

Lemma 2.17. *Zu jedem idempotenten Element $\iota \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Syst}(G)}(\Delta M, \Delta M)$ gibt es ein idempotentes Element $\tau \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Rep}(G)}(M, M)$ mit $\Delta\tau = \iota$.*

Beweis. [Bu 74] 3.2 (b). □

Beweis von Satz 2.13. Die Lemmata 2.14 und 2.15 zeigen, daß der Funktor Δ eine Injektion der Isomorphieklassen von Objekten erzeugt. Nach Lemma 2.16 ist diese Abbildung auch surjektiv.

Ein idempotentes Element aus $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Rep}(G)}(M, M)$ ist nur dann quasi-regulär, wenn es trivial ist. Also ist nach Lemma 2.14 der von Δ auf den idempotenten Elementen erzeugte Homomorphismus injektiv; nach Lemma 2.17 ist er auch surjektiv. □

2.3.3 Unterkategorien von wildem Darstellungstyp

Die Kategorien $\mathrm{Syst}(G)$ sind im allgemeinen recht unübersichtlich. Aber sie enthalten gewisse Unterkategorien, über deren Darstellungen einiges bekannt ist:

Sei $\mathrm{D}(n)$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{Syst}(G)$ bestehend aus den Objekten $V_* = (V; V_1, \ldots, V_n)$ mit der Eigenschaft $pV = 0$. Für eine p-Gruppe G haben alle Bahnen außer den Fixpunkten eine durch p teilbare Anzahl von Elementen. Daher sind für ein $\lambda = \sum \lambda_i e_i \in \Lambda$ alle Koeffizienten λ_i in $\mathbb{F}_p$ gleich. Daraus folgt, daß die Λ-Operation auf V für ein Objekt $(V; V_i)$ von $D(n)$ eine Skalarmultiplikation ist und keine Zusatzstruktur liefert. Also ist $\mathrm{D}(n)$ die Kategorie der Systeme endlichdimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorräume $(V; V_1, \ldots, V_n)$ mit $\sum_{i \neq t} V_i = V$ für alle $t = 1, \ldots, n$.

Es ist bekannt, daß D(2) und D(3) endlichen Darstellungstyp haben. Dagegen hat D(4) unendlichen Darstellungstyp, aber ist so „zahm“, daß die unzerlegbaren Darstellungen noch klassifizierbar sind ([Br 74]). Für $n \geq 5$ ist D(n) von wildem Darstellungstyp: Für jede endlichdimensionale $\mathbb{F}_p$-Algebra E gibt es für unendlich viele Dimensionen d ein Objekt V_* aus D(n) mit $\dim V = d$ und $\mathrm{End}_{\mathrm{Syst}(G)}(V_*) = E$ ([Br 67]).

Damit kann man für p-Gruppen G mit mehr als fünf Konjugationsklassen von Untergruppen die $A(G)$-Darstellungen als nicht klassifizierbar betrachten. Das ist eine Verschärfung von Satz 2.4.

2.3.4 Unzerlegbare Objekte für p-Gruppen von endlichem Darstellungstyp

Für die einzigen beiden p-Gruppen $\mathbb{Z}/p$ und $\mathbb{Z}/p^2$, für die der Burnsidering endlichen Darstellungstyp hat, kann man mit Hilfe von Δ die unzerlegbaren $A(G)_p$-Darstellungen klassifizieren.

Die zyklische Gruppe der Ordnung p:
Für ein Objekt $(V; V_1, V_2)$ aus Syst($\mathbb{Z}/p$) ist wegen $p\bar{\Lambda}V = 0$ insbesondere $pV = 0$, also V ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. Wie im letzten Abschnitt beschrieben ist die Λ-Operation trivial und Syst($\mathbb{Z}/p$) ist die Kategorie der $\mathbb{F}_p$-Vektorraumsysteme $(V; V_1, V_2)$ mit $V = V_1 = V_2$. Offensichtlich gibt es bis auf Isomorphie genau ein unzerlegbares Objekt:

$$V_0 = (\mathbb{F}_p; \mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p).$$

Tatsächlich zeigt eine einfache Rechnung, daß $\Delta\Lambda = V_0$ ist. Damit haben wir erneut das Ergebnis aus 2.2.2 bewiesen: Die unzerlegbaren $A(\mathbb{Z}/p)$-Darstellungen sind die beiden Gitter $e_1 A(\mathbb{Z}/p), e_2 A(\mathbb{Z}/p)$ vom $\mathbb{Z}$-Rang 1 und die Gitter in dem Geschlecht von $A(\mathbb{Z}/p)$, d.h. die projektiven Moduln vom Rang 1.

Die zyklische Gruppe der Ordnung p^2:
In diesem Fall ist $\Lambda \subset \bar{\Lambda} = R^3$ erzeugt von $p^2 e_1$, $pe_1 + pe_2$ und $e_1 + e_2 + e_3$. Ein Λ-Modul V mit $p^2\bar{\Lambda}V = 0$ ist ein $\mathbb{Z}/p^2$-Modul. Der erste Erzeuger $p^2 e_1$ von Λ operiert durch Multiplikation mit 0. Der zweite Erzeuger $pe_1 + pe_2$ operiert durch ein $x \in \mathrm{End}_{\mathbb{Z}/p^2}(V)$ mit der Eigenschaft $x^2 = px$.

Sei nun $(V; V_1, V_2, V_3)$ ein Objekt aus Syst($\mathbb{Z}/p^2$). Dann operiert x auf V_1 und V_2 durch Multiplikation mit p, auf V_3 durch Multiplikation mit 0. Da aber andererseits $V = V_1 + V_2$ ist, operiert x auf ganz V durch Multiplikation mit p. Also ist $pV_3 = 0$.
Daher ist Syst($\mathbb{Z}/p^2$) die Kategorie der $\mathbb{Z}/p^2$-Modulsysteme $(V; V_1, V_2, V_3)$ mit den Eigenschaften

(a) V_1, V_2 und V_3 sind Untermoduln in V

(b) $V = V_i + V_j$ für $i \neq j$

(c) $pV_3 = 0$.

Gesucht sind alle unzerlegbaren Objekte in der Kategorie Syst($\mathbb{Z}/p^2$). Eine einfache Überlegung zeigt, daß die Systeme der folgenden Liste unzerlegbar sind:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \big(\,\mathbb{Z}/p\,;\ \mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p, 0\,\big)\\
S_2 &= \big(\,\mathbb{Z}/p\,;\ \mathbb{Z}/p, 0, \mathbb{Z}/p\,\big)\\
S_3 &= \big(\,\mathbb{Z}/p\,;\ 0, \mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p\,\big)\\
S_4 &= \big(\,\mathbb{Z}/p\,;\ \mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p\,\big)\\
S_5 &= \big(\,\mathbb{Z}/p\oplus\mathbb{Z}/p\,;\ \langle(1,0)\rangle, \langle(1,1)\rangle, \langle(0,1)\rangle\,\big)\\
S_6 &= \big(\,\mathbb{Z}/p^2\,;\ \mathbb{Z}/p^2, \mathbb{Z}/p^2, 0\,\big)\\
S_7 &= \big(\,\mathbb{Z}/p^2\,;\ \mathbb{Z}/p^2, \mathbb{Z}/p^2, \mathbb{Z}/p\,\big)\\
S_8 &= \big(\,\mathbb{Z}/p^2\oplus\mathbb{Z}/p\,;\ \langle(1,0)\rangle, \langle(1,1)\rangle, \langle(0,1)\rangle\,\big)\\
S_9 &= \big(\,\mathbb{Z}/p^2\oplus\mathbb{Z}/p\,;\ \langle(1,0)\rangle, \langle(1,1)\rangle, \langle(p,0),(0,1)\rangle\,\big)
\end{aligned}
$$

Wir zeigen, daß dies bis auf Isomorphie alle unzerlegbaren Objekte sind. Dazu betrachten wir zunächst die Objekte $(V; V_1, V_2, V_3)$ in denen $pV = 0$ ist, also V ein Vektorraum ist. Eine elementare Überlegung zeigt, daß die ersten fünf der oben angegebenen Systeme die Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte dieser Unterkategorie repräsentieren.

Ein weiterer einfacher Fall tritt auf, wenn V als $\mathbb{Z}/p^2$-Modul frei ist. Hier ist die Eigenschaft $pV_3 = 0$ besonders nützlich. Denn damit $V = V_1 + V_3 = V_2 + V_3$ gelten kann, muß $V = V_1 = V_2$ sein. Wählt man ein Erzeugendensystem $e_1, \ldots, e_n$ von V, so daß $pe_1, \ldots, pe_r$ ein Erzeugendensystem von V_3 ist, so sieht man sofort, daß das Objekt nur dann unzerlegbar sein kann, wenn $n = 1$ ist. Die beiden verbleibenden Möglichkeiten $r = 0$ oder $r = 1$ sind die unzerlegbaren Systeme S_6 bzw. S_7.

Es bleibt den Fall zu untersuchen, daß V einen freien und einen Torsionsanteil hat.

Satz 2.18. *Sei* $V = (\mathbb{Z}/p^2)^m \oplus (\mathbb{Z}/p)^n$ *mit* $m, n \geq 1$ *und* $(V; V_1, V_2, V_3)$ *ein unzerlegbares Objekt aus* Syst(G). *Dann ist* $m = n = 1$ *und das System isomorph zu einem der Systeme* S_8 *oder* S_9.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, daß $V_3 \neq 0$ ist, denn anderenfalls wäre $V = V_1 = V_2$ und das System zerlegbar.

Bezeichne $\bar{V}$ und V' die Untermoduln $(\mathbb{Z}/p^2)^m \oplus 0$ bzw. $0 \oplus (\mathbb{Z}/p)^n$ von V. Seien $b_1, \ldots, b_m$ fest gewählte Erzeuger von $\bar{V}$. Wir zeigen zunächst, daß V_1 die folgende Form hat:

$$V_1 = \langle b_1 + r_1, \ldots, b_m + r_m\rangle \oplus V_1' \quad \text{mit } r_1, \ldots, r_m \in V' \text{ und } V_1' \subset V'.$$

Da $V = V_1 + V_3$ ist, gibt es zu jedem Erzeuger b_i von $\bar{V}$ ein $r_i \in V_3$, so daß $b_i + r_i$ in V_1 liegt. Da $pV_3 = 0$ ist, folgt

$$p\bar{V} \subset V_1.$$

Wir können daher annehmen, daß r_i keinen Anteil in $p\bar{V}$ hat sondern in V' liegt. Damit hat man Erzeuger der geforderten Form gefunden. Genauso kann man ohne Einschränkung annehmen, daß Erzeuger der Ordnung p in V' liegen.

Mit der gleichen Begründung hat V_2 die Form

$$V_2 = \langle b_1 + u_1, \ldots, b_m + u_m\rangle \oplus V_2' \quad \text{mit } u_1, \ldots, u_m \in V' \text{ und } V_2' \subset V'.$$

Bezeichne V_3' die Projektion von V_3 auf V'. (V_1' und V_2' sind im allgemeinen *nicht* die Projektionen von V_1 oder V_2 auf V'.) Wir zeigen nun, daß V_1', V_2' und V_3' paarweise disjunkt sind:

Angenommen, es gäbe ein $y' \neq 0$ in $V_1' \cap V_3'$. Dann gibt es ein $\bar{y} \in p\bar{V}$, so daß $y = \bar{y} + y' \in V_3$. Da $p\bar{V} \subset V_1$, liegt mit y' auch y in V_1. Der von y erzeugte Untermodul $\langle y \rangle$ ist in V_1 ein direkter Summand der Ordnung p. Daher hat das System $(V; V_i)$ einen direkten Summanden

$$(\langle y \rangle; \langle y \rangle, \langle y \rangle, \langle y \rangle) \quad \text{oder} \quad (\langle y \rangle; \langle y \rangle, 0, \langle y \rangle),$$

je nachdem ob $\langle y \rangle$ in V_2 enthalten ist oder nicht. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, daß das System unzerlegbar ist. Genauso folgt, daß $V_2' \cap V_3' = 0$ ist.

Falls es ein Element $y \neq 0$ in $V_1' \cap V_2'$ gibt, so liegt y nach dem bereits gezeigten nicht in V_3', also auch nicht in V_3. In diesem Fall gibt es einen direkten Summanden

$$(\langle y \rangle; \langle y \rangle, \langle y \rangle, 0).$$

Wir nehmen nun an, daß V_3' in $V_1' \oplus V_2'$ enthalten ist. Wegen $V = V_1 + V_3$, kann man ein Element $v' \in V'$ schreiben als

$$v' = (\bar{v_1} + v_1') + (\bar{v_3} + v_3') \quad \text{mit} \quad (\bar{v_1} + v_1') \in V_1, \ (\bar{v_3} + v_3') \in V_3, \ \bar{v_i} \in \bar{V}, \ v_i' \in V'.$$

Da $v' \in V'$, ist $\bar{v_1} + \bar{v_3} = 0$, also $v' = v_1' + v_3'$. Falls $V_3' \subset V_1' \oplus V_2'$, ist also schon ganz V' in $V_1' \oplus V_2'$ enthalten. Insbesondere hat das Element $u_1 - r_1 \in V'$ eine Darstellung $u_1 - r_1 = v_1' + v_2'$ mit $v_i \in V_i'$. Das Element $x := (b_1 + r_1) + v_1' = (b_1 + u_1) - v_2'$ liegt in $V_1 \cap V_2$ und erzeugt in V_1 und V_2 jeweils einen direkten Summanden. Je nachdem, ob $px = pb_1$ in V_3 enthalten ist oder nicht, gibt es einen direkten Summanden

$$(\langle x \rangle; \langle x \rangle, \langle x \rangle, \langle px \rangle) \quad \text{oder} \quad (\langle x \rangle; \langle x \rangle, \langle x \rangle, 0).$$

Da das System unzerlegbar ist, gibt es also ein $y' \in V_3'$, das nicht in $V_1' \oplus V_2'$ enthalten ist. Weil V die Summe von V_1 und V_2 ist, ist $V' = \langle r_1 - u_1, \ldots, r_m - u_m \rangle + V_1' + V_2'$. Es gibt also ein Darstellung

$$y' = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (r_i - u_i) + v_1' + v_2'$$

mit $v_1' \in V_1'$, $v_2' \in V_2'$ und etwa $\lambda_1 \not\equiv 0 \mod p$. Weiter gibt es ein $\bar{y} \in p\bar{V}$, so daß $y := \bar{y} + y'$ in V_3 liegt. Sei

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{m} p\alpha_i b_i = \sum_{i=1}^{m} p\alpha_i (b_i + r_i).$$

Wir definieren ein Element $x \in V_1$ durch

$$x := \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + p\alpha_i)(b_i + r_i) + v_1' = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i + u_i) - v_2' + y.$$

Es erzeugt einen direkten Summanden in V_1, da $(\lambda_1 + p\alpha_1)$ eine Einheit in $\mathbb{Z}/p^2$ ist. Analog ist $\langle x - y\rangle$ in V_2 ein direkter Summand. Weiter ist $px \neq y$. Damit hat man in $(V; V_1, V_2, V_3)$ einen direkten Summanden

$$(\langle x, y\rangle; \langle x\rangle, \langle x - y\rangle, \langle px, y\rangle) \quad \text{oder} \quad (\langle x, y\rangle; \langle x\rangle, \langle x - y\rangle, \langle y\rangle),$$

je nachdem ob px in V_3 liegt oder nicht. Falls m oder $n > 1$ ist, ist der komplementäre direkte Summand $\neq 0$. Da das System unzerlegbar ist, muß also $m = n = 1$ sein. In diesem Fall ist der direkte Summand schon ganz $(V; V_1, V_2, V_3)$. Diese Systeme sind unzerlegbar und bis auf Isomorphie von der angegebenen Form. □

Wir können nun die Isomorphieklassen unzerlegbarer $A(\mathbb{Z}/p^2)_p$-Darstellungen angeben:

Korollar 2.19. *Die Isomorphieklassen unzerlegbarer $A(\mathbb{Z}/p^2)_p$-Moduln werden repräsentiert durch die Moduln der folgenden Liste:*

$$\begin{aligned}
& e_i A(\mathbb{Z}/p^2)_p, \quad \textit{für } i = 1, 2, 3 \\
M_1 =& \langle p^2 e_1 \,,\, pe_1 + pe_2 \rangle \\
M_2 =& \langle p^2 e_1 \,,\, e_1 + e_2 \rangle \\
M_3 =& \langle p^2 e_1 \,,\, pe_1 + e_3 \rangle \\
M_4 =& \langle pe_2 \,,\, e_2 + e_3 \rangle \\
M_5 =& \langle p^2 e_1 \,,\, pe_1 + pe_2 \,,\, e_1 + e_2 + e_3 \rangle \\
M_6 =& \langle p^2 e_1 \,,\, pe_1 + pe_2 \,,\, pe_1 + e_3 \rangle \\
M_7 =& \langle p^2 e_1 \,,\, e_1 + e_2 \,,\, pe_1 + e_3 \rangle \\
M_8 =& \langle p^2 e_1 \,,\, pe_2 \,,\, pe_1 + e_2 + e_3 \rangle \\
M_9 =& \langle p^2 e_1 \,,\, pe_1 + pe_2 \,,\, pe_1 + e_3 \,,\, e_1 + e_2 + e_3' \rangle
\end{aligned}$$

Der letzte Modul M_9 liegt in $C(\mathbb{Z}/p^2)_p \oplus e_3' C(\mathbb{Z}/p^2)_p$, wobei $e_3' C(\mathbb{Z}/p^2)_p$ eine weitere Kopie von $e_3 C(\mathbb{Z}/p^2)_p$ ist.

Beweis. Die folgenden Isomorphien sind einfach nachzurechnen:

$$\begin{aligned}
&\Delta M_1 \cong S_1, \quad \Delta M_2 \cong S_6, \quad \Delta M_3 \cong S_2, \quad \Delta M_4 \cong S_3, \\
&\Delta M_5 \cong S_8, \quad \Delta M_6 \cong S_4, \quad \Delta M_7 \cong S_7, \quad \Delta M_8 \cong S_5, \quad \Delta M_9 \cong S_9.
\end{aligned}$$

□

Bis auf die letzte Klasse sind alle Moduln Ideale in $A(\mathbb{Z}/p^2)_p$. Erstaunlicherweise ähnelt dieses Resultat dem entsprechenden Ergebnis für Gruppenringe ([C,R 81] Chap. 34).

Die Moduln der Liste in Korollar 2.19 sind jeweils Lokalisierungen von $A(\mathbb{Z}/p^2)$-Moduln mit den gleichen Erzeugern. Wir bezeichenen die entsprechenden Moduln über dem nicht lokalisierten Burnsidering ebenfalls mit $M_1, \ldots, M_9$.

2.3.5 Die Moduln in einem Geschlecht

Bevor wir uns der Untersuchung der verschiedenen Moduln in einem Geschlecht zuwenden, stellen wir einige sehr einfache aber nützliche Tatsachen zusammen:

Bemerkung 2.20. *Jede $A(G)$-Darstellung M läßt sich in eine $C(G)$-Darstellung $C(M)$ von gleichem $\mathbb{Z}$-Rang einbetten. Der Modul $C(M)$ hängt bis auf Isomorphie nur von $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ ab.*

Eine $C(G)$-Darstellung zerfällt in direkte Summanden der Form $e_H C(G)$ und ist dadurch in natürlicher Weise ein Ring. Ohne die Isomorphieklasse von M zu ändern, kann man die Einbettung $M \to C(M)$ so wählen, daß $MC(M) = C(M)$ ist. Eine solche Einbettung heißt nicht ausgeartet.

Beweis. Da $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} A(G) \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C(G)$, ist $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ ein $C(G)$-Modul. Als solcher zerfällt er in 1-dimensionale direkte Summanden der Form $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} e_H C(G)$. Sei $C(M)$ die direkte Summe der $e_H C(G)$. Vermöge der kanonischen Abbildung $C(M) \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C(M) \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ ist $C(M)$ eine Teilmenge von $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$. Die Inklusion $M \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ kann man durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl so abändern, daß das Bild in $C(M)$ liegt. Durch Kürzen in den einzelnen Koordinaten erreicht man für jedes Basiselement e_H von $C(M)$, daß der größte gemeinsame Teiler der e_H-Koordinaten aller Elemente aus M gleich 1 ist. Dieses Kürzen ist verträglich mit der Modulstruktur. Die so gefundene Einbettung ist nicht ausgeartet. □

Wir betrachten nun wieder Burnsideringe von p-Gruppen. Für die Darstellungen, die in $C(G)$ liegen, lassen sich die Moduln von gleichem Geschlecht relativ einfach bestimmen.

Lemma 2.21. *Sei G eine p-Gruppe und M eine $A(G)$-Darstellung mit $C(M) \subset C(G)$. Dann kann man annehmen, daß eine Teilmenge der e_H, $(H) \in \Phi(G)$, eine Basis von $C(M)$ bildet. Wenn M nicht ausgeartet in $C(M)$ eingebettet ist, dann ist der Kokern der Inklusion eine p-Gruppe.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt direkt aus der Konstruktion von $C(M)$. Es gibt eine Zahl k, so daß $p^k e_H$ für jedes $(H) \in \Phi(G)$ in $A(G)$ liegt. Jeder Erzeuger e_H von $C(M)$ hat eine Darstellung $e_H = \sum_i m_i x^i$ für geeignete $m_i \in M$ und $x^i = \sum x^i_H e_H \in C(M)$. Damit kann man $p^k e_H$ folgendermaßen darstellen:

$$p^k e_H = p^k e_H e_H = \sum_i (p^k e_H m_i) x^i_H.$$

Das ist eine Linearkombination von Elementen aus M mit ganzzahligen Koeffizienten x^i_H. Also ist $p^k C(M)$ in M enthalten. Daher kann man $C(M)/M$ als einen Quotienten von $C(M)/p^k C(M)$ darstellen und es folgt, daß $C(M)/M$ eine p-Gruppe ist. □

Satz 2.22. *Sei G eine p-Gruppe und M eine $A(G)$-Darstellung, so daß $C(M) \subset C(G)$ ein direkter Summand wie in Lemma 2.21 ist. Die Einbettung von M in $C(M)$ sei nicht ausgeartet. Dann sind die Moduln in dem Geschlecht von M bis auf Isomorphie genau die Moduln der Form*

$$\varphi^{-1} M = \{x \in C(G) \mid \varphi(x) \in M\},$$

wobei $\varphi : C(M) \to C(M)$ eine $A(G)$-lineare Abbildung ist, die in p-Lokalisierung ein Automorphismus ist. Ein Modul N, der nicht ausgeartet in $C(M)$ eingebettet ist, ist genau dann isomorph zu M, wenn $M = \phi(N)$ ist für einen $A(G)$-linearen Automorphismus ϕ von $C(M)$.

Beweis. Es ist offensichtlich, daß jeder Modul der Form $\varphi^{-1}M$ in dem Geschlecht von M liegt: Ein Isomorphismus in p-Lokalisierung ist durch φ gegeben.

Sei N aus dem Geschlecht von M. Nach der Vorbemerkung können wir annehmen, daß N in $C := C(M)$ nicht ausgeartet eingebettet ist. Sei $\varphi : N_p \to M_p$ ein Isomorphismus. Er induziert einen Isomorphismus $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N_p \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M_p$ und mittels der Isomorphismen $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N_p \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C_p$, $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M_p \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C_p$, die durch die Einbettungen gegeben sind, einen Automorphismus von $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C_p$. Diesen Automorphismus nennen wir auch φ.

Durch die kanonische Abbildung $C_p \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C_p$ ist C_p eine Teilmenge von $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C_p$. Die Abbildung φ ist $A(G)$-linear, also auch $C(G)$-linear und insbesondere C-linear. Da die Einbettung von N in C nicht ausgeartet ist, kann man jedes $x \in C_p$ als eine Linearkombination $x = \sum x_i n_i$ von $x_i \in C_p$ und $n_i \in N_p$ schreiben. Also liegt $\varphi(x) = \sum x_i \varphi(n_i)$ in C_p. Dasselbe Argument gilt für die Umkehrabbildung von φ. Damit ist gezeigt, daß φ ein Automorphismus von C_p ist. Durch Multiplikation von φ mit einer Einheit aus $\mathbb{Z}_p$ kann man erreichen, daß $\varphi(C)$ in C liegt.

Nach Wahl der Einbettungen und Lemma 2.21 ist C/M eine p-Gruppe. Für eine Zahl s, die prim zu p ist, liegt daher ein $x \in C$ genau dann in M, wenn sx in M liegt. Daraus folgt, daß $M_p \cap C = M$ ist. Analog folgt, daß $N_p \cap C = N$ ist. Hieraus ergibt sich, daß $\varphi(N)$ in M und $\varphi^{-1}(M) \cap C(G)$ in N liegt.

Ist $\phi : N \to M$ ein Isomorphismus, so zeigen dieselben Überlegungen, daß sich ϕ zu einem Automorphismus von C fortsetzt. □

Die Moduln in dem Geschlecht des Burnsiderings $A(G)$ sind genau die projektiven Moduln vom Rang 1. Die Isomorphieklassen dieser Moduln bilden mit dem Tensorprodukt als Verknüpfung die Picardgruppe $\operatorname{Pic} A(G)$.

Ist M eine $A(G)$-Darstellung und P projektiv vom Rang 1, so ist $P \otimes_{A(G)} M$ eine Darstellung von gleichem Geschlecht wie M. Hierdurch ist eine Operation der Picardgruppe $\operatorname{Pic} A(G)$ auf jedem Geschlecht von Darstellungen gegeben.

Korollar 2.23. *Sei G eine p-Gruppe und $M \subset C(G)$ eine $A(G)$-Darstellung. Dann operiert* $\operatorname{Pic} A(G)$ *auf dem Geschlecht von M transitiv.*

Beweis. Sei $C(M)$ ein direkter Summand von $C(G)$ wie in Lemma 2.21 und M in $C(M)$ nicht ausgeartet eingebettet. Sei N aus dem Geschlecht von M. Nach dem eben bewiesenen Satz ist N isomorph zu einem Modul $\varphi^{-1}M$ für einen $A(G)$-linearen Endomorphismus φ von $C(M)$, der in p-Lokalisierung ein Automorphismus ist. Wir erweitern φ durch die Identität zu einem Endomorphismus von $C(G)$.

Sei $P = \varphi^{-1}A(G)$. Das ist ein projektiver Modul vom Rang 1. Durch koordinatenweise Multiplikation ist ein Homomorphismus

$$P \otimes_{A(G)} M \longrightarrow N \subset C(G)$$

gegeben. Wir konstruieren eine Umkehrabbildung: Bezüglich der Standardbasis ist φ durch eine Diagonalmatrix D mit Einträgen prim zu p beschrieben. Sei $\bar{D}$ eine Diagonalmatrix, so daß $D\bar{D} = 1 + |G|^2 R$ ist für eine weitere Diagonalmatrix R. Für ein $x \in N$ und jedes $r \in \bar{D}^{-1}A(G)$ liegt $rx = (D\bar{D} - |G|^2 R)rx = Dx\,\bar{D}r - |G|^2 Rrx$ in M. Da $P\bar{D}^{-1}A(G) = A(G)$ ist, gibt es eine Darstellung $1 = \sum_i t_i r_i$ für geeignete $t_i \in P$ und $r_i \in \bar{D}^{-1}A(G)$. Die gesuchte Umkehrabbildung ist gegeben durch die Zuordnung $x \mapsto \sum_i t_i \otimes r_i x$. □

Damit sind insbesondere alle Moduln in den Geschlechtern der Moduln $M_1, \ldots, M_8$ aus Satz 2.19 bekannt. Mit Hilfe von Satz 2.22 kann man auch leicht die Isomorphieklassen innerhalb der Geschlechter bestimmen.

Zur vollständigen Klassifikation der unzerlegbaren Darstellungen von $A(\mathbb{Z}/p^2)$ sind noch die Moduln in dem Geschlecht von M_9 zu bestimmen. Jeder Modul in diesem Geschlecht ist ein Untermodul von vollem Rang in $C(M_9) = C(\mathbb{Z}/p^2) \oplus e_3' C(\mathbb{Z}/p^2)$. Wir zeigen, daß man die Einbettung in einer besonders einfachen Form wählen kann:

Lemma 2.24. *Jeden Untermodul von vollem Rang in $C(M_9)$ ist bis auf Isomorphie nicht ausgeartet und von der Form*

$$\langle\, p^n e_1,\, p^m(ye_1 + e_2),\, z_1e_1 + z_2e_2 + e_3,\, v_1e_1 + v_2e_2 + e_3' \,\rangle$$

für ganze Zahlen y, z_1, z_2, v_1, v_2 und $0 \le n \le 2, 0 \le m \le 1$.

Beweis. Für einen Untermodul von vollem Rang in $C(M_9)$ kann man eine Basis der Form

$$xe_1,\ y_1e_1 + y_2e_2,\ z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3,\ v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 + v_4e_3'$$

mit $x, y_2, z_3, v_4 \neq 0$ wählen. Als $A(\mathbb{Z}/p^2)$ ist dieser Modul isomorph zu dem Modul mit der Basis

$$xe_1,\ y_1e_1 + y_2e_2,\ z_1e_1 + z_2e_2 + e_3,\ v_1e_1 + v_2e_2 + e_3'.$$

Durch Kürzen in jeder Koordinate kann man erreichen, daß die Einbettung nicht ausgeartet ist. Die Bedingungen an x, y_1, y_2 folgen dann daraus, daß der Modul abgeschlossen ist bezüglich der Operation von p^2e_1 und $p(e_1 + e_2) \in A(\mathbb{Z}/p^2)$. □

Analog zu Satz 2.22 gilt:

Satz 2.25. *Jede $A(\mathbb{Z}/p^2)$-Darstellung in dem Geschecht von M_9 ist isomorph zu einem Modul der Form*

$$\varphi^{-1}M_9 = \{\, x \in C(M_9) \mid \varphi(x) \in M_9 \,\},$$

wobei φ ein $A(\mathbb{Z}/p^2)$-linearer Endomorphismus von $C(M_9)$ ist, der in p-Lokalisierung ein Automorphismus ist. Sind N und $\bar{N}$ wie in dem eben angeggebenen Lemma in $C(M_9)$ eingebettet, so ist N genau dann isomorph zu $\bar{N}$, wenn $N = \phi(\bar{N})$ ist für einen $A(\mathbb{Z}/p^2)$-linearen Automorphismus von $C(M_9)$.

Beweis. Wir können zunächst wie in dem Beweis von Satz 2.22 vorgehen: Bezeichne $M := M_9$. Sei N aus dem Geschlecht von M und wie in dem Lemma oben in $C := C(M)$ eingebettet. Sei $\varphi : N_p \to M_p$ ein Isomorphismus. Bezeichne φ ebenfalls den induzierten Automorphismus von $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C_p$.

Ähnlich wie in dem Beweis von Satz 2.22 folgt, daß $\varphi(C_p)$ in C_p liegt. Allerdings ist das Argument ein anderes: Weil $p^2 e_1$ und $p^2 e_2 \in A(\mathbb{Z}/p^2)$ durch Multiplikation mit den entsprechenden Elementen aus C operiert, folgt, daß φ mit der Multiplikation von e_1 und e_2 in C vertauscht. Da N in C nicht ausgrartet eingebettet ist, gibt es Zahlen $x_i \in \mathbb{Z}$ und Elemente $n_i \in N$ mit $e_1 = \sum_i x_i e_1\, n_i$. Daraus folgt, daß $\varphi(e_1) = \sum_i x_i e_1 \varphi(n_i)$ in C_p liegt. Ebenso folgt, daß $\varphi(e_2)$ in C_p liegt. Nach Wahl der Einbettung von N in C gibt es Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ und ein $n \in N$ mit $e_3 = n + ae_1 + be_2$. Also liegt auch $\varphi(e_3)$ in C_p. Ein entsprechendes Argument gilt für e_3'.

Der Rest des Beweises folgt wie in dem Beweis zu Satz 2.22. □

Mit Hilfe dieses Satzes kann man nun die Darstellungen in dem Geschlecht von M_9 bestimmen. Die $A(\mathbb{Z}/p^2)$-linearen Endomorphismen von $C(M_9)$, die in p-Lokalisierung Automorphismen sind, haben bezüglich der Standardbasis die Form

$$\begin{pmatrix} s & & & \\ & t & & \\ & & x & y \\ & & z & v \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad s,\, t,\, (xy - zv) \not\equiv 0 \mod p.$$

Durch explizite Rechnungen läßt sich zeigen, daß die Moduln der Form $\varphi^{-1} M_9$ bis auf Isomorphie genau die folgenden Untermoduln in $C(M_9)$ sind:

$$M_9(a,b) := \langle\, p^2 e_1,\, p(ae_1 + e_2),\, pe_1 + e_3,\, abe_1 + be_2 + e_3' \,\rangle \quad \text{mit } a, b \not\equiv 0 \mod p.$$

Ein solcher Modul hängt offensichtlich von a nur modulo p^2, von b nur modulo p ab. Zwei Moduln $M_9(a,b)$ und $M_9(\bar{a}, \bar{b})$ sind nach Satz 2.25 genau dann isomorph, wenn $a \equiv \pm\bar{a} \mod p^2$ und $b \equiv \pm\bar{b} \mod p$ ist. Damit sind die Moduln in dem Geschlecht von M_9 bis auf Isomorphie klassifiziert.

2.4 Burnsideringe von Gruppen mit quadratfreier Ordnung

Die Burnsideringe von Gruppen mit quadratfreier Ordnung sind genau die, in deren Spektrum höchstens Doppelpunkte auftreten. Einige der schönen Eigenschaften von $A(\mathbb{Z}/p)$ gelten für alle diese Ringe.

Satz 2.26. *Gibt es in* Spec $A(G)$ *höchstens Doppelpunkte, so gilt:*

(1) Jede unzerlegbare Darstellung von $A(G)$ ist isomorph zu einem Ideal in $A(G)$.

(2) Jede unzerlegbare $A(G)$-Darstellung ist ein projektiver Modul über einer Ringerweiterung $A(G) \subset \Lambda \subset C(G)$. Der Rang ist auf einer Komponente von Spec Λ *gleich* 1 *und sonst* 0.

(3) Die Picardgruppe $\operatorname{Pic} A(G)$ *operiert auf jedem unzerlegbaren Geschlecht transitiv.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß jede Ringerweiterung $A(G) \subset \Lambda \subset C(G)$ ein Gorensteinring ist. Wir müssen die Gorenstein-Eigenschaft nur lokal nachweisen. Für einen regulären Punkt $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \Lambda$ ist $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ regulär, insbesondere Gorenstein.

Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \Lambda$ ein Doppelpunkt. Das Ideal $\mathfrak{p}$ ist von der Form

$$\mathfrak{p} = pe_iC(G) \cap \Lambda = pe_jC(G) \cap \Lambda \quad \text{für primitive Idempotente } e_i \neq e_j \text{ in } C(G).$$

Für $k \neq i, j$ ist nach Voraussetzung $pe_kC(G) \cap \Lambda \neq \mathfrak{p}$. Daher gibt es in Λ ein Element

$$le_k + ne_i + me_j + r \quad \text{mit} \quad l \equiv 0(p),\ n, m \not\equiv 0(p) \text{ und } r \in \sum_{t \neq i,j,k} e_tC(G).$$

Indem wir gegebenenfalls dieses Element mehrmals mit sich selber und einer Zahl prim zu p multiplizieren, können wir erreichen, daß der Koeffizient l von e_k ein Vielfaches der Gruppenordnung $|G|$ ist. Da $|G|C(G)$ in $A(G)$ enthalten ist, können wir sogar annehmen, daß $l = 0$ ist. Multipliziert man die so erhaltenen Elemente für alle $k \neq i, j$, so erhält man ein $x \in \Lambda \cap (e_i + e_j)C(G)$, das nicht in $\mathfrak{p}$ liegt. Mit diesem Element x folgt für jedes $\lambda = \sum_t \lambda_t e_t \in \Lambda$ in der Lokalisierung $\Lambda_{\mathfrak{p}}$:

$$\frac{\lambda}{1} = \frac{\lambda x}{x} = \frac{(\lambda_i e_i + \lambda_j e_j)x}{x} = \frac{\lambda_i e_i + \lambda_j e_j}{1}.$$

Daher ist $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ von höchstens zwei Elementen erzeugt. Das Bild von $p \in A(G)$ liegt in $\mathfrak{p}\Lambda_{\mathfrak{p}}$ und ist ein Nichtnullteiler. Nach einem Kriterium von Bass ([Ba 63], 6.4.) folgt hieraus, daß $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ ein Gorensteinring ist.

Aus [Ba 63], 7.3. folgt nun direkt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt aus dem eben bewiesenen und Bass' Proposition, die in der Anmerkung nach Satz 2.10 zitiert wird. Die Aussage über den Rang folgt aus der Unzerlegbarkeit und dem Analogon von Satz 2.2 für jede Ringerweiterung Λ von $A(G)$ in $C(G)$.

Sei M eine unzerlegbare $A(G)$-Darstellung und über einer Ringerweiterung Λ von $A(G)$ in $C(G)$ projektiv. Dann operiert $\operatorname{Pic} \Lambda$ transitiv auf dem Geschlecht von M. Die Inklusion $A(G) \subset \Lambda$ induziert eine Surjektion

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Pic} A(G) & \longrightarrow & \operatorname{Pic} \Lambda \\ N & \longmapsto & \Lambda \otimes_{A(G)} N \end{array}$$

([C,R 87] 49.25 und 55.26). Daraus folgt die dritte Behauptung. □

Kapitel 3

Topologisch realisierte Moduln

Diese Kapitel leitet den topologischen Teil der vorliegenden Arbeit ein.

Zahlreiche wichtige Invarianten von Transformationsgruppen sind Moduln über dem Burnsidering der operierenden Gruppe. Dabei entsteht die $A(G)$-Modulstruktur üblicherweise durch eine Struktur als Mackeyfunktor. Der erste Abschnitt dieses Kapitels ist eine kurze Zusammenfassung der Beziehung zwischen Mackeyfunktoren und Moduln über Burnsideringen.

Ein zentrales Beispiel für $A(G)$-Moduln, die in der Topologie auftreten, sind stabile äquivariante Homotopiegruppen. Der zweite Teil dieser Arbeit befaßt sich grob gesagt mit der Frage, welche $A(G)$-Moduln in diesem Sinne topologisch realisiert sind. Der zweite Abschnitt dieses Kapitels enthält die Definition und einige relevante Eigenschaften stabiler Homotopiegruppen.

3.1 Mackey-Funktoren

Ein Bifunktor M besteht aus einem kovarianten Funktor M_* und einem kontravarianten Funktor M^*, die auf Objekten übereinstimmen. Ein Bifunktor M auf der Kategorie der endlichen G-Mengen in die Kategorie der $\mathbb{Z}$-Moduln

$$M = (M_*, M^*) : G\text{-Set} \longrightarrow \mathbb{Z}\text{-Mod}$$

ist ein Mackeyfunktor für G, wenn er die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

1. Für jedes Pullback von endlichen G-Mengen

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & S \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ T & \xrightarrow{f} & V \end{array} \qquad \text{kommutiert das Diagramm} \qquad \begin{array}{ccc} M(U) & \xrightarrow{M_*(F)} & M(S) \\ {\scriptstyle M^*(H)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle M^*(h)} \\ M(T) & \xrightarrow{M_*(f)} & M(V). \end{array}$$

2. Für jede disjunkte Vereinigung $S+T$ von endlichen G-Mengen definieren die beiden Einbettungen $S \to S+T \leftarrow T$ einen Isomorphismus $M^*(S+T) \cong M^*(S) \oplus M^*(T)$.

Aus der zweiten Eigenschaft folgt, daß ein Mackeyfunktor im wesentlichen durch seine Werte auf transitiven G-Mengen G/H bestimmt ist. Diese G-Mengen bilden in

G-Set eine volle Unterkategorie, die Orbitkategorie $\mathrm{Or}(G)$. Es gibt eine äquivalente Definition von Mackeyfunktoren auf $\mathrm{Or}(G)$.

Wichtige Beispiele für Mackeyfunktoren sind alle äquivarianten stabilen Homologie- und Kohomologietheorien, Gruppenkohomologie und Darstellungsringe. Mehr zu Mackeyfunktoren in der Topologie findet sich in [tD 87] II.9.

Das für uns wichtigste Beispiel eines Mackeyfunktors ist das folgende: Sei S eine endliche G-Menge. Eine endliche G-Menge über S ist eine Abbildung $\varphi : T \to S$ von endlichen G-Mengen. Zwei solche Objekte $\varphi : T \to S$ und $\varphi' : T' \to S$ sind isomorph, wenn es eine Bijektion von G-Mengen $\phi : T \to T'$ gibt, so daß $\varphi'\phi = \varphi$ ist. Bezeichne $A_G(S)$ die Menge der Isomorphieklassen von endlichen G-Mengen über S. Durch die disjunkte Vereinigung als Addition ist das eine abelsche Gruppe.

Ist $f : S \to S'$ eine G-Abbildung, so ist durch Komposition mit f ein Homomorphismus $A_{G*}(f) : A_G(S) \to A_G(S')$ und durch Pullback ein Homomorphismus $A^*_G(f) : A_G(S') \to A_G(S)$ gegeben. Es ist leicht zu sehen, daß dieser Bifunktor die Axiome eines Mackeyfunktors erfüllt.

Jede der Gruppen $A_G(S)$ trägt durch das Produkt von G-Mengen zusätzlich eine Ringstruktur, die mit den ko- und kontravarianten Funktoren A_{G*}, A^*_G verträglich ist. Funktoren mit dieser Eigenschaft heißen Greenfunktoren und sind gewissermaßen die Ringe unter den Mackeyfunktoren. Der Funktor A_G hängt eng mit Burnsideringen zusammen. Eine einfache Überlegung zeigt, daß für jede Untergruppe $H \subset G$ die Ringe $A_G(G/H)$ und $A(H)$ isomorph sind.

Ein Mackeyfunktor M ist ein Modul über einem Greenfunktor U, wenn für jede endliche G-Menge S die Gruppe $M(S)$ ein $U(S)$-Modul ist und diese Modulstrukturen mit den ko- und kontravarianten Anteilen von M und S verträglich sind.

Die große Bedeutung von Burnsideringen besteht darin, daß jeder Mackeyfunktor M für G ein Modul über A_G ist. Ist nämlich $\varphi : T \to S$ eine endliche G-Menge über S, so ist $M_*(f)M^*(f)$ ein Gruppenhomomorphismus auf $M(S)$. Dadurch ist eine natürliche $A_G(S)$-Modulstruktur auf $M(S)$ gegeben. Insbesondere ist also für jede Untergruppe $H \subset G$ die Gruppe $M(G/H)$ ein Modul über dem Burnsidering $A(H)$.

Es gilt aber auch umgekehrt:

Satz 3.1. *Zu jedem $A(G)$-Modul W gibt es einen Mackeyfunktor M, so daß $M(G/G)$ isomorph zu W ist.*

Beweis. Diese Aussage ist ein unveröffentlichtes Resultat von G. Lewis.

Mackeyfunktoren lassen sich allgemeiner als wir es bisher getan haben mit Werten in der Kategorie der R-Moduln für einen beliebigen kommutativen Ring R definieren. Wenn M ein solcher Mackeyfunktor und W ein R-Modul ist, dann ist durch das Tensorprodukt über R mit W an jeder Stelle ein neuer Mackeyfunktor $M \otimes_R W$ gegeben. Das sieht man am einfachsten, wenn man den Mackeyfunktor M als eine Familie von R-Moduln $M(G/H)$ für $H \subset G$ mit Strukturabbildungen $\mathrm{res}^K_H : M(G/K) \to M(G/H)$ und $\mathrm{ind}^K_H : M(G/H) \to M(G/K)$ für $H \subset K$ und $c_g : M(G/H) \to M(G/gHg^{-1})$ für $g \in G$ beschreibt.

Sei M ein Mackeyfunktor mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen. Dann ist jeder Wert $M(G/H)$ ein Modul über $A_G(G/H)$ und durch die Restriktionsabbildung $A_G(G/G) \to A_G(G/H)$ auch ein $A(G)$-Modul. Für eine transitive G-Menge G/L ist diese Operation auf $M(G/H)$ explizit gegeben durch

$$\sum_{H\backslash G/L} \mathrm{ind}^H_{H\cap gLg^{-1}} \mathrm{res}^H_{H\cap gLg^{-1}} : M(G/H) \longrightarrow M(G/H),$$

wobei über ein Repräsentantensystem für die Doppelnebenklassen in $H\backslash G/L$ summiert wird. Diese Abbildung ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.

Die so gegebenen $A(G)$-Modulstrukturen sind mit den Strukturabbildungen von M verträglich. Das folgt ohne prinzipielle Schwierigkeiten aus den Eigenschaften der Strukturabbildungen. Folglich kann man M als Mackeyfunktor mit Werten in der Kategorie der $A(G)$-Moduln auffassen.

Wir wenden diese Überlegungen auf den Mackeyfunktor A_G an. Der Mackeyfunktor $A_G \otimes_{A(G)} W$ hat auf G/G den Wert $A_G(G/G) \otimes_{A(G)} W \cong W$. Das ist ein Isomorphismus von $A(G)$-Moduln, weil die $A(G)$-Modulstruktur auf $A_G(G/G)$, die man durch die Struktur als Mackeyfunktor erhält, die eines freien Moduls vom Rang 1 ist. □

3.2 Äquivariante stabile Homotopiegruppen

Für punktierte G-Räume X, Y ist die äquivariante stabile Homotopiegruppe definiert als der direkte Limes über die komplexen Darstellungen V von G

$$\omega^\circ_G(X,Y) := \lim_V [S^V \wedge X, S^V \wedge Y]^\circ_G.$$

Wenn $\dim_{\mathbb{R}} V^G \geq 2$ ist, hat eine Homotopiemenge $[S^V \wedge X, Z]^\circ_G$ wie im nicht äquivarianten Fall eine natürliche Struktur als abelsche Gruppe. Dadurch wird $\omega^\circ_G(X,Y)$ eine abelsche Gruppe. Genaueres zu der Definition findet sich in [tD 87], Kapitel II.6.

Stabile Homotopiegruppen $\omega^\circ_G(X,Y)$ definieren eine stabile äquivariante Kohomologietheorie in X und eine stabile äquivariante Homologietheorie in Y ([tD 87], Kapitel II.6). Für je zwei Räume X, Y bilden sie durch

$$G/H \mapsto \omega^\circ_H(X,Y)$$

einen Mackeyfunktor. Insbesondere ist jede stabile Homotopiegruppe $\omega^\circ_G(X,Y)$ ein Modul über dem Burnsidering $A(G)$.

Für eine endliche Gruppe G und einen endlichen G-CW-Komplex X ist der Grenzwert $\omega^\circ_G(X,Y)$ schon nach endlich vielen Einhängungen erreicht, denn für jede hinreichend große Darstellung V ist die kanonische Inklusion

$$[S^V \wedge X, S^V \wedge Y]^\circ_G \to \omega^\circ_G(X,Y)$$

ein Isomorphismus. Es genügt, wenn für jede Untergruppe H von G gilt:

$$\begin{array}{ll} (a) & \dim X^H \leq \dim V^H - 2 \\ (b) & \dim X^H \leq \dim V^K - \dim V^H - 2 \qquad \text{für alle } K \subsetneq H. \end{array}$$

Das folgt aus einer äquivarianten Version des Freudenthalschen Einhängungssatzes, der auf Hauschild [H 77] zurückgeht und in [G, M 95] formuliert ist.

Eine sehr wichtige Beobachtung ist, daß die äquivariante stabile Homotopiegruppe $\omega_G^\circ := \omega_G^\circ(\text{Punkt}, \text{Punkt})$ isomorph zu dem Burnsidering $A(G)$ ist ([Se 70]). Diese Isomorphie war ein erster Hinweis auf die Bedeutung von Burnsideringen in der äquivarianten Topologie.

Die Beschreibung von $A(G)$ als stabile Homotopiegruppe ω_G° hat den Vorteil, daß man die Operation auf einer stabilen Homotopiegruppe explizit angeben kann. Sie ist gegeben durch Einhängung von Repräsentanten

$$\begin{array}{ccc} \omega_G^\circ \times \omega_G^\circ(X,Y) & \longrightarrow & \omega_G^\circ(X,Y) \\ [f],[g] & \longmapsto & [f \wedge g] \end{array}$$

Nach Ergebnissen von tom Dieck und Petrie läßt sich jeder projektive $A(G)$-Modul vom Rang 1 als stabile Homotopiegruppe beschreiben. Bezeichne V_G die Grothendieckgruppe der G-Homotopiedarstellungen. Der Verbund $X * Y$ zweier Homotopiedarstellungen ist wieder eine Homotopiedarstellung. Dadurch hat V_G zusätzlich eine multiplikative Struktur. Sei v_G der Kern der Dimensionsfunktion $\text{Dim} : V_G \to C(G)$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} v_G & \longrightarrow & \text{Pic}\, A(G) \\ [X]-[Y] & \longmapsto & \omega_G^\circ(\sigma X, \sigma Y) \end{array}$$

ein Isomorphismus von Gruppen ([tD, P 78] und [tD, P 83]). Insbesondere gilt für jede Homotopiedarstellung X, daß $\omega_G^\circ(X,X)$ isomorph zu dem Burnsidering ist, und für Paare von Homotopiedarstellungen X, Y und $\bar{X}, \bar{Y}$ mit jeweils gleichen Dimensionsfunktionen gilt

$$\omega_G^\circ(\sigma X \wedge \sigma \bar{X},\, \sigma Y \wedge \sigma \bar{Y}) \cong \omega_G^\circ(\sigma X, \sigma Y) \otimes_{A(G)} \omega_G^\circ(\sigma \bar{X}, \sigma \bar{Y}).$$

Anmerkung. In der Literatur treten neben den punktierten stabilen Homotopiegruppen, die wir betrachten, auch stabile Homotopiegruppen $\omega_G(X,Y)$ für Räume X, Y ohne Grundpunkt auf ([tD, P 83]). Unpunktierte stabile Homotopiegruppen lassen sich durch punktierte ausdrücken: Die nicht reduzierte Einhängung σX macht aus einem unpunktierten Raum X einen punktierten, wenn man z.B. die Klasse von $0 \times X$ als Grundpunkt festlegt. Für G-CW-Komplexe X, Y läßt sich mit Standardmethoden der Topologie zeigen, daß Vergessen des Grundpunktes einen Isomorphismus $\omega_G^\circ(\sigma X, \sigma Y) \cong \omega_G(X,Y)$ liefert.

Gewisse algebraische Konstruktionen mit Moduln lassen sich für stabile Homotopiegruppen durch geometrische Konstruktionen erzeugen.

Aus den Mayer-Vietoris-Sequenzen der Kohomologietheorie in X bzw. der Homologietheorie in Y zu $\omega_G^\circ(X,Y)$ folgen die Isomorphismen

$$\omega_G^\circ(X,Y) \oplus \omega_G^\circ(\bar{X},Y) \cong \omega_G^\circ(X \vee \bar{X},\, Y)$$
$$\omega_G^\circ(X,Y) \oplus \omega_G^\circ(X,\bar{Y}) \cong \omega_G^\circ(X,\, Y \vee \bar{Y}).$$

Eine einfache Konsequenz ist:

Bemerkung 3.2. *Jeder projektive $A(G)$-Modul von konstantem Rang ist isomorph zu einer stabilen Homotopiegruppe.*

Beweis. Nach Satz 2.2 ist ein projektiver $A(G)$-Modul von konstantem Rang isomorph zu einem Modul der Form $Q \oplus A(G)^n$ für einen projektiven Modul Q vom Rang 1. Der Modul Q ist isomorph zu einer stabilen Homotopiegruppe $\omega_G^\circ(\sigma X, \sigma Y)$ von Homotopiedarstellungen X, Y. Es gibt eine Homotopiedarstellung Z, so daß $Y * Z$ homotopieäquivalent zu einer Darstellungssphäre SV ist ([tD, P 83], Satz 8.24). Damit erhält man Homotopieäquivalenzen

$$\sigma Y \wedge \sigma Z \simeq \sigma(Y * Z) \simeq \sigma(SV) \simeq S^V.$$

Also ist Q isomorph zu $\omega_G^\circ(\sigma(X * Z),\, S^V)$. Da $A(G)$ isomorph zu $\omega_G^\circ(S^V,\, S^V)$ ist, folgt

$$Q \oplus A(G)^n \cong \omega_G^\circ(\sigma(X * Z) \vee \underbrace{S^V \vee \ldots \vee S^V}_{n},\; S^V).$$

□

Auch das Tensorprodukt mit einem projektiven Modul vom Rang 1 ist durch eine geometrische Konstruktion gegeben:

Satz 3.3. *Seien Z_1 und Z_2 Homotopiedarstellungen mit gleicher Dimensionsfunktion. Dann induziert die Einhängung von Abbildungen*

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \omega_G^\circ(X,Y) \otimes_{A(G)} \omega_G^\circ(\sigma Z_1, \sigma Z_2) & \longrightarrow & \omega_G^\circ(X \wedge \sigma Z_1,\, Y \wedge \sigma Z_2) \\ & [f] \otimes [g] & \longmapsto & [f \wedge g] \end{array}$$

eine natürliche Äquivalenz von stabilen Homologietheorien.

Beweis. Zunächst beweisen wir die Aussage in dem Spezialfall, daß $Z_1 = Z_2 =: Z$ ist. In diesem Fall ist $\omega_G^\circ(Z_1, Z_2)$ isomorph zu dem Burnsidering $A(G)$. Es ist zu zeigen, daß die Einhängung mit der Identität einen Isomorphismus

$$\omega_G^\circ(X,Y) \longrightarrow \omega_G^\circ(X \wedge \sigma Z,\, Y \wedge \sigma Z)$$

induziert. Für Darstellungssphären gilt diese Aussage nach Definition von stabilen Homotopiegruppen. Das Problem läßt sich auf diesen Fall zurückführen. Es gibt eine Homotopiedarstellung K, so daß $Z * K$ homotopieäquivalent zu einer Darstellungssphäre SV ist ([tD, P 83], Satz 8.24). Daraus folgt eine Homotopiäquivalenz

$$\sigma Z \wedge \sigma K \simeq S^V.$$

Durch Einhängen mit σK erhält man daher einen Homomorphismus in umgekehrter Richtung

$$\omega_G^\circ(X \wedge \sigma Z, Y \wedge \sigma Z) \longrightarrow \omega_G^\circ(X \wedge \sigma Z \wedge \sigma K,\ Y \wedge \sigma Z \wedge \sigma K) \cong \omega_G^\circ(X, Y).$$

Wir behaupten, daß dieses die Umkehrabbildung zu der Einhängungsabbildung oben ist. Es ist offensichtlich, daß sie ein Linksinverses ist. Das Bild eines Elements $[g] \in \omega_G^\circ(x \wedge \sigma Z, Y \wedge \sigma Z)$ ist das Element $[\bar{g}] \in \omega_G^\circ(X, Y)$ mit der Eigenschaft

$$[g \wedge 1] = [\bar{g} \wedge 1 \wedge 1] \in \omega_G^\circ(X \wedge \sigma Z \wedge \sigma K, Y \wedge \sigma Z \wedge \sigma K).$$

Durch Einhängen mit der Identität auf σZ folgt aus dieser Identität, daß $[\bar{g} \wedge 1] = [g]$ ist. Also ist diese Abbildung auch rechtsinvers zu der Einhängungsabbildung oben.

Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall zu. Aus der Definition der $A(G)$-Modulstruktur auf stabilen Homotopiegruppen folgt unmittelbar, daß die Einhängung eine wohldefinierte Abbildung μ auf dem Tensorprodukt über $A(G)$ induziert. Die beiden Moduln $\omega_G^\circ(\sigma Z_1, \sigma Z_2)$ und $\omega_G^\circ(\sigma Z_2, \sigma Z_1)$ sind als Elemente der Picardgruppe zueinander invers, d.h. die Einhängung induziert einen Isomorphismus

$$\omega_G^\circ(\sigma Z_1, \sigma Z_2) \otimes_{A(G)} \omega_G^\circ(\sigma Z_2, \sigma Z_1) \cong A(G).$$

Daher gibt es Elemente $[a_i] \in \omega_G^\circ(\sigma Z_1, \sigma Z_2)$ und $[b_i] \in \omega_G^\circ(\sigma Z_2, \sigma Z_1)$, die eine Darstellung der Eins in dem Burnsidering

$$1 = \sum_i [a_i \wedge b_i]$$

ergeben. Sei $[g] \in \omega_G^\circ(X \wedge \sigma Z_1, Y \wedge \sigma Z_2)$. Durch den Isomorphismus

$$\omega_G^\circ(X \wedge \sigma Z_1 \wedge \sigma Z_2,\ Y \wedge \sigma Z_2 \wedge \sigma Z_1) \cong \omega_G^\circ(X, Y)$$

aus dem ersten Teil des Beweises kann man die Klasse $[g \wedge b_i]$ mit einem Element $[g_i] \in \omega_G^\circ(X, Y)$ identifizieren. Damit läßt sich ein Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \omega_G^\circ(X \wedge \sigma Z_1,\ Y \wedge \sigma Z_2) & \longrightarrow & \omega_G^\circ(X, Y) \otimes_{A(G)} \omega_G^\circ(\sigma Z_1, \sigma Z_2) \\ [g] & \longmapsto & \sum_i [g_i] \otimes [a_i] \end{array}$$

definieren. Dieses ist die Umkehrabbildung von μ.

Die Isomorphismen μ sind natürliche Transformationen, die mit den Einhängungsabbildungen der Homologie- bzw. der Kohomologietheorie kommutieren. □

Unter den Voraussetzungen des Satzes von Hopf, der im nächsten Kapitel behandelt wird, ist eine stabile Homotopiegruppe $\omega_G^\circ(X, Y)$ über $\mathbb{Z}$ torsionsfrei, also eine $A(G)$-Dartsellung. Satz 3.3 beschreibt die Operation der Picardgruppe $\mathrm{Pic}\, A(G)$ auf dem Geschlecht von $\omega_G^\circ(X, Y)$ als geometrische Konstruktion.

Kapitel 4

Der äquivariante Satz von Hopf

Der äquivariante Satz von Hopf gibt Kriterien dafür an, daß Homotopieklassen von äquivarianten Abbildungen $f : X \to Y$ durch ihre Abbildungsgrade charakterisiert sind. Durch die Abbildungsgrade ist dann eine Injektion der Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $[X, Y]_G$ in einen $C(G)$-Modul gegeben, deren Bild durch ein Kongruenzensystem beschrieben wird. Diese Kongruenzen haben eine bestimmte Form und verallgemeinern die Kongruenzen für den Burnsidering.

Insbesondere erhält man Kriterien dafür, daß eine äquivariante stabile Homotopiegruppe torsionsfrei, d.h. eine $A(G)$-Darstellung ist.

Der äquivariante Satz von Hopf für CW-Komplexe ist ein Resultat von tom Dieck. Wir führen diesen Satz mit Beweis an, um die Analogie zu dem Satz von Hopf für Kettenkomplexe deutlich zu machen.

In einem zweiten Abschnitt wird der Satz für Kettenkomplexe formuliert und bewiesen. Der hier gegebene Beweis beruht auf den gleichen Methoden, wie für den ursprünglichen Satz. Um nicht mehr Aufwand als nötig zu treiben, ist allerdings nicht erst eine Hindernistheorie ausgearbeitet (was durchaus möglich wäre), sondern es werden direkt Abbildungsgrade als Erweiterungshindernisse eingesetzt.

Diese Version des Satzes wird im nächsten Kapitel verwendet, um gewisse Darstellungen als Homotopiegruppen von Kettenkomplexen zu realisieren.

4.1 Der äquivariante Satz von Hopf für CW-Komplexe

Der hier angegebene Satz weicht etwas von tom Diecks ursprünglicher Version [tD 87], II.4.11 ab. Die Voraussetzungen sind so abgeändert, daß die Homotopiegruppe $[X, Y]_G$ beliebigen $\mathbb{Z}$-Rang haben kann.

Koeffizienten von Homologie und Kohomologie sind üblicherweise in $\mathbb{Z}$, wenn nicht explizit andere Koeffizienten angegeben sind.

Voraussetzungen 4.1. Sei G eine endliche Gruppe und X und Y G-CW-Komplexe mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $X = \Sigma A$ für einen punktierten endlichdimensionalen G-CW-Komplex A. Jede Untergruppe von G tritt als Standgruppe von X auf.

(ii) Für jede Untergruppe $H \subset G$ ist $n(H) := \dim X^H > 1$. Die Fixpunktmenge Y^H ist $(n(H)-1)$-zusammenhängend.

Bezeichne $\Phi(G,Y)$ die Menge der Konjugationsklassen von Untergruppen (H), für die $\pi_{n(H)}(Y^H) \neq 0$ ist. Für jede Konjugationsklasse $(H) \in \Phi(G,Y)$ gelte:

(iii) $\dim X^{>H} \leq n(H) - 2$

(iv) Als Gruppe ist $\pi_{n(H)}(Y^H)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$. Zusammen mit Voraussetzung (ii) folgt dann, daß $H^{n(H)}(Y^H) \cong \mathbb{Z}$ ist.

Sei $\epsilon_H : WH \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$ die WH-Operation auf $\pi_{n(H)}(Y^H)$.

(v) Die Kohomologiegruppe $H^{n(H)}(X^H)$ ist frei abelsch vom Rang $r(H) \geq 1$ und die WH-Operation ist gegeben durch Multiplikation mit ϵ_H. Es sind für $H^{n(H)}(X^H)$ und $H^{n(H)}(Y^H)$ Erzeuger fest gewählt.

Unter diesen Voraussetzungen hat eine G-Abbildung $f : X \to Y$ für jede Konjugationsklasse $(H) \in \Phi(G,Y)$ einen (verallgemeinerten) Abbildungsgrad $d(f^H) \in \mathbb{Z}^{r(H)}$ mit der üblichen kohomologischen Definition.

Die Bedingungen, daß $H^{n(H)}(X^H)$ frei abelsch ist und Y^H $(n(H)-1)$-zusammenhängend mit $H^{n(H)}(Y^H) = \mathbb{Z}$ (oder $= 0$), entsprechen genau den Voraussetzungen für den klassischen Satz von Hopf. Die Bedingungen an die WH-Modulstruktur sind notwendig, damit es nichttriviale äquivariante Abbildungen $X \to Y$ geben kann. Die Bedingung (iii) tritt als typisches Phänomen der äquivarianten Topologie auf. Eine entsprechende Bedingung gibt es bei äquivarianten Einhängungssätzen. Die übrigen Bedingungen sind etwas stärker als für Satz 4.2 notwendig, halten aber die technischen Details in Grenzen. Sie sind in einer stabilen Situation immer erfüllt.

Bezeichne

$$C(G,X,Y) := \prod_{(H)\in\Phi(G,Y)} \mathbb{Z}^{r(H)}.$$

Wir interpretieren $C(G,X,Y)$ im folgenden entweder als die Gruppe der Abbildungen auf $\Phi(G,Y)$, die einer Konjugationklasse (H) ein Element aus $\mathbb{Z}^{r(H)}$ zuordnen (wie z.B. einen Abbildungsgrad $d(f^H)$), oder als die Gruppe der $\mathbb{Z}$-wertigen Abbildungen auf der Menge, die von jeder Konjugationsklasse $(H) \in \Phi(G,Y)$ genau $r(H)$ Kopien enthält. Wir bezeichnen die Elemente dieser Menge mit

$$(H_i) \qquad \text{für } (H) \in \Phi(G,Y) \text{ und } i = 1, \ldots, r(H).$$

Sei $\mathfrak{F}$ eine Familie von Untergruppen in G, d.h. eine Menge von Untergruppen, die unter Konjugation abgeschlossen ist. Zu einem G-Raum X kann man dann den G-Raum

$$X(\mathfrak{F}) = \{x \in X \mid G_x \in \mathfrak{F}\}$$

bilden. Dieser Raum ist die Vereinigung der Orbitbündel $X_{(H)}$ für $H \in \mathfrak{F}$.

Damit können wir nun den äquivarianten Satz von Hopf formulieren:

Satz 4.2 (Satz von Hopf). *Unter den Voraussetzungen 4.1 gilt:*

1. Sei H eine Untergruppe von G und $\mathfrak{F} = \{K \mid (K) > (H)\}$. Dann hat jede G-Abbildung $f : X(\mathfrak{F}) \to Y$ eine Fortsetzung auf X.

2. Sei $(H) \in \Phi(G,Y)$. Sind zwei G-Abbildungen $f, g : X \to Y$ eingeschränkt auf $X^{>H}$ als WH-Abbildungen homotop, so ist $d(f^H)_i \equiv d(g^H)_i \mod |WH|$ für $i = 1, \ldots, r(H)$.

3. Sei $(H) \in \Phi(G,Y)$ und $f : X \to Y$ eine G-Abbildung. Zu jedem Tupel $d \in \mathbb{Z}^{r(H)}$ mit $d \equiv d(f^H) \mod |WH|$ gibt es eine G-Abbildung $g : X \to Y$ mit Abbildungsgrad $d(g^H) = d$, die auf $X^{>H}$ mit f übereinstimmt.

4. Zwei G-Abbildungen $f, g : X \to Y$ sind genau dann homotop, wenn $d(f^H) = d(g^H)$ für alle Konjugationsklassen $(H) \in \Phi(G,Y)$.

Beweis. Im wesentlichen läßt sich der Beweis von tom Dieck übernehmen. Wir fassen daher nur die Beweisstruktur zusammen und verweisen mit den notwendigen Änderungen auf die jeweiligen Sätze in [tD 87].

Aus der äquivarianten Hindernistheorie [tD 87] II.3. folgt unter den Voraussetzungen 4.1 für jede Untergruppe H in G:

(1) Jede WH-Abbildung $f : X^{>H} \to Y^H$ ist auf X^H erweiterbar. Je zwei Erweiterungen sind auf dem $(n(H)-1)$-Gerüst $X^H_{n(H)-1}$ relativ $X^{>H}$ homotop.

(2) Sei $k : f_0 \simeq f_1 : X^{>H} \to Y^H$ eine Homotopie und F_0, F_1 Erweiterungen von f_0, f_1 auf X^H. Dann gibt es eine Erweiterung von k auf $X^H_{n(H)-1}$ zu einer Homotopie zwischen $F_0|_{X^H_{n(H)-1}}$ und $F_1|_{X^H_{n(H)-1}}$.

(3) Sei $f : X^H \to Y^H$ eine WH-Abbildung und $[X^H, Y^H]^f_{WH}$ die Menge der WH-Homotopieklassen relativ $X^{>H}$ von Abbildungen, die eingeschränkt auf $X^{>H}$ mit f übereinstimmen. Dann ist durch das Hindernis gegen Erweiterungen von Homotopien eine Bijektion

$$\gamma(f_0) : [X^H, Y^H]^f_{WH} \to \mathfrak{H}^{n(H)}_{WH}(X^H, X^{>H}; \pi_{n(H)} Y^H)$$

zu einer äquivarianten Kohomologiegruppe gegeben.

Damit können wir die erste Behauptung beweisen: Sei $\mathfrak{F}' = \{K \mid (K) \geq (H)\}$. Die G-Erweiterungen von $f : X(\mathfrak{F}) \to Y$ auf $X(\mathfrak{F}')$ entsprechen den WH-Erweiterungen von $f|_{X^{>H}}$ auf X^H ([tD 87] I.7.4). Nach (1) gibt es eine solche Erweiterung. Durch induktiven Erweiterungen über Orbitbündel erhält man schließlich eine Abbildung auf ganz X.

Für $(H) \in \Phi(G,Y)$ stellt die Voraussetzung (v) sicher, daß jeder Homomorphismus $H_{n(H)}(X^H) \to \pi_{n(H)}(Y^H)$ äquivariant ist. Daher läßt sich der Beweis von [tD 87], II.4.9 übertragen und es gilt:

(4) Die Vergißabbildung

$$t : \mathfrak{H}^{n(H)}_{WH}(X^H, X^{>H}; \pi_{n(H)} Y^H) \to H^{n(H)}(X^H, X^{>H}; \pi_{n(H)} Y^H)$$

ist injektiv und das Bild ist $|WH| \cdot H^{n(H)}(X^H, X^{>H}; \pi_{n(H)} Y^H)$.

(5) $\mathfrak{H}^{n(H)}_{WH}(X^H, X^{>H}; \pi_{n(H)}Y^H) \cong H^{n(H)}(X^H, X^{>H}; \pi_{n(H)}Y^H) \cong \mathbb{Z}^{r(H)}$

Hieraus folgen die zweite und dritte Behauptung (vergl. [tD 87], II.4.11 (ii)).
Für den Beweis des vierten Teils des Satzes zeigen wir zunächst, daß die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} [X,Y]_G & \to & \prod_{(H)\in\Phi(G,Y)}[X^H, Y^H] \\ f & \mapsto & (f^H)_{(H)} \end{array}$$

injektiv ist. Dafür ist zu zeigen, daß es zwischen G-Abbildungen $f, g : X \to Y$ mit $f^H \simeq g^H$ für alle Konjugationsklassen $(H) \in \Phi(G,Y)$ eine G-Homotopie gibt. Diese Homotopie wird induktiv über Orbitbündel konstruiert. Es tritt nur für $(H) \in \Phi(G,Y)$ ein Hindernis

$$\gamma = \gamma(f^H, g^H) \in \mathfrak{H}^{n(H)}_{WH}(X^H, X^{>H}; \pi_{n(H)}Y^H)$$

gegen eine Erweiterung der Homotopie auf. Das Bild

$$t(\gamma) \in H^{n(H)}(X^H, X^{>H}; \pi_{n(H)}Y^H)$$

ist das Hindernis gegen eine nicht äquivariante Erweiterung der Homotopie. Sei

$$j^* : H^{n(H)}(X^H, X^{>H}; \pi_{n(H)}Y^H) \to H^{n(H)}(X^H; \pi_{n(H)}Y^H)$$

von der Inklusion induziert und $\iota(Y^H) \in H^{n(H)}(Y^H; \pi_{n(H)}Y^H)$ die charakteristische Klasse von Y^H. Dann gilt ([tD 87], II.3.19 bzw. [Wh 78] , V.6.14)

$$j^*t(\gamma) = \pm((f^H)^* - (g^H)^*)\iota(Y^H).$$

Da f^H und g^H nach Voraussetzung homotop sind, ist $j^*t(\gamma) = 0$. Aus Dimensionsgründen (Voraussetzung (iii)) ist j^* injektiv und nach (4) ist t injektiv. Also ist das Hindernis $\gamma = 0$. (Vergleiche hierzu den Beweis [tD 87], II.4.11.(iv).)

Für die Homotopiemengen $[X^H, Y^H]$ folgt aus dem nicht äquivarianten Klassifikationssatz von Hopf-Whitney, daß durch die (verallgemeinerten) Abbildungsgrade eine Bijektion

$$[X^H, Y^H] \xrightarrow{\cong} H^{n(H)}(X^H; \pi_{n(H)}Y^H)$$

gegeben. Damit ist bewiesen, daß eine G-Abbildungen $X \to Y$ bis auf Homotopie durch ihre (verallgemeinerten) Abbildungsgrade auf allen Fixpunktmengen bestimmt ist. □

Sei φ die durch die Abbildungsgrade gegebene Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & [X,Y]^\circ_G & \to & C(G,X,Y) \\ & f & \mapsto & (d(f^H))_{(H)}. \end{array}$$

Das Bild von φ ist wesentlich komplizierter als in einer nicht äquivarianten Situation.

Satz 4.3. *Unter den Voraussetzungen 4.1 ist φ ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Das Bild von φ wird durch ein Kongruenzensystem beschrieben:*
Es gibt ganze Zahlen

$$\begin{aligned} & n(H_i, K_j) \quad \text{für } (H) \leq (K) \in \Phi(G,Y) \\ & \qquad\qquad\quad i = 1, \ldots, r(H), \\ & \qquad\qquad\quad j = 1, \ldots, r(K) \\ \text{mit} \qquad & n(H_i, H_j) = \delta_{i,j}, \end{aligned}$$

so daß ein $z \in C(G,X,Y)$ genau dann im Bild von φ liegt, wenn für alle Konjugationsklassen $(H) \in \Phi(G,Y)$ und $i = 1, \ldots, r(H)$ die folgenden Kongruenzen gelten:

$$\sum_{\substack{(K)\in\Phi(G,Y)\\(K)\geq(H)}} \sum_{j=1}^{r(K)} n(H_i, K_j)\, z(K_j) \equiv 0 \mod |WH|.$$

Beweis. Der Beweis ist völlig analog zu dem Beweis von [tD 87], II.4.19. Zunächst stellen wir fest, daß $[X,Y]^\circ_G$ unter den Voraussetzungen 4.1 eine natürliche Gruppenstruktur hat und φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Nach Satz 4.2 ist φ injektiv. Die Abbildung $[X,Y]^\circ_G \to [X,Y]_G$, die den Grundpunkt vergißt, ist eine Bijektion ([tD 87], II.4.15). Daher werden wir im weiteren den Grundpunkt nicht beachten.

In Analogie zu [tD 87] II.4.18 folgt aus Satz 4.2, daß die Ordnung des Kokerns von φ gleich $\prod_{(H)\in\Phi(G,Y)} |WH|^{r(H)}$ ist.

Wir beweisen die Behauptung über das Bild von φ durch Induktion über die Ordnung der Gruppe G. Für $G = 1$ ist die Aussage trivial. Sei die Behauptung für alle Gruppen einer Ordnung kleiner als n schon bewiesen und G ein Gruppe der Ordnung n.

Eine Beschreibung des Bildes von φ durch Kongruenzen der angegebenen Form ist äquivalent dazu, daß es für das Bild von φ eine Basis

$$e(H_i), \qquad (H) \in \Phi(G,X,Y),\ i = 1, \ldots, r(H)$$

gibt mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} e(H_i)(K_j) &\equiv 0 \mod |WH| && \text{für alle } (K), i, j \\ e(H_i)(K_j) &= 0 && \text{für } (K) \not\leq (H) \\ e(H_i)(H_j) &= \delta_{i,j}|WH|. \end{aligned}$$

Sei $(H) \in \Phi(G,Y)$ und $1 \leq i \leq r(H)$. Wir konstruieren induktiv über das Orbitbündel ein G-Abbildung $f : X \to Y$, deren Abbildungsgrade die für $e(H_i)$ geforderten Eigenschaften haben:

Sei eine WL-Abbildung $h : X^{>L} \to Y^L$ schon so konstruiert, daß für jede Gruppe K mit $L \subsetneq K \subset NL$ und $j = 1, \ldots, r(K)$ gilt:

$$\begin{aligned} d(h^K)_j &\equiv 0 \mod |WH| \text{ für } (K) \leq (H) \\ d(h^K)_j &= \begin{cases} 0 & \text{für } (K) \not\leq (H) \\ \delta_{i,j}|WH| & \text{für } (K) = (H) \end{cases} \end{aligned}$$

Gesucht ist eine Erweiterung $\bar{h}$ von h auf X^L, deren Abbildungsgrad $d(\bar{h}^L)$ die richtige Eigenschaft hat.

1. Fall: Wenn (L) nicht in $\Phi(G,Y)$ enthalten ist, dann gibt es keine Bedingung an den Abbildungsgrad. Es gibt weder Erweiterungs- noch Homotopieerweiterungshindernisse. Es gibt also bis auf Homotopie genau eine Erweiterung auf X^L.

2. Fall: Wenn $(L) \in \Phi(G,Y), (L) \not\leq (H)$, dann ist auch $(K) \not\leq (H)$ für jede Gruppe K mit $L \subsetneq K \subset NL$. Also ist jeweils das Tupel $d(h^K) = 0$. Damit ist h auf $X^{>L}$ homotop zur konstanten Abbildung und kann bis auf Homotopie durch die konstante Abbildung auf X^L fortgesetzt werden. Wie gefordert ist der Abbildungsgrad gleich $0 \in \mathbb{Z}^{r(L)}$.

3. Fall: Wenn $(L) = (H)$ ist, dann ist keine der Konjugationklassen (K) mit $L \subsetneq K \subset NL$ in (H) enthalten. Also ist das Tupel $d(h^K) = 0$. Daher ist h auf $X^{>L}$ homotop zur konstanten Abbildung. Nach Satz 4.2 gibt es eine Fortsetzung $\bar{h}$ von h mit Abbildungsgrad $d(\bar{h}^L)_j = \delta_{i,j}|WH|$.

4. Fall: Für $(L) \in \Phi(G,Y)$ mit $(L) < (H)$, müssen wir ein Erweiterung $\bar{h}$ finden, so daß $d(\bar{h}^L) \equiv 0 \mod |WH|$ ist. Nach Voraussetzung gilt für jede Gruppe K mit $L \subsetneq K \subset NL$ die Kongruenz

$$d(h^K)_j \equiv 0 \mod |WH| \quad \text{für } j = 1, \ldots, r(K).$$

Falls $|WL| < n$ ist, kann man für die Gruppe WL die Induktionsvoraussetzung anwenden: Das Bild der Injektion

$$\varphi^L : [X^L, Y^L]^\circ_{WL} \to C(WL, X^L, Y^L)$$

ist die Lösungsmenge eines Kongruenzensystems

$$\sum_{\substack{(K/L)\in\Phi(WL,Y^L)\\(K/L)\geq(U/L)}} \sum_{j=1}^{r(K)} n(U_i, K_j)\, z(K_j) \equiv 0 \mod |W_{WL}(U/L)|.$$

Die Koordinate $z(L_j)$ tritt nur in der Kongruenz mit $U = L_j$ auf, und zwar mit dem Faktor 1. Eine Lösung des Kongruenzensystems ist offensichtlich gegeben durch

$$\begin{aligned}
z(K_j) &= d(h^K)_j \quad \text{für } K \supsetneq L.\\
z(L_1) &= -\sum_{(K)} \sum_j n(L_1, K_j)\, d(h^K)_j\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
z(L_{r(L)}) &= -\sum_{(K)} \sum_j n(L_{r(L)}, K_j)\, d(h^K)_j.
\end{aligned}$$

Also gibt es eine Erweiterung $\bar{h}$ von h auf X^L mit den Abbildungsgraden $d(\bar{h}^L)_i = z(L_i)$ für $i = 1, \ldots, r(L)$. Da für $K \supsetneq L$ die Abbildungsgrade $d(h^K)$ durch $|WH|$ teilbar sind, gilt das auch für $z(L_1), \ldots, z(L_{r(L)})$.

In dem Fall, daß $|WL| = n$, ist $WL = G$ und $L = 1$. Die Abbildungsgrade jeder Erweiterung von h liegen nach Satz 4.2 in genau einer Konjugationsklasse $(a_1, \ldots, a_{r(1)})$ modulo der Ordnung von G. Wir zeigen, daß alle a_j durch $|WH|$ teilbar sind:

Wenn $WH = G$ ist, dann ist $H = K = 1$. Dieser Fall ist schon oben im dritten Fall abgehandelt. Wir können also annehmen, daß die Ordnung der Gruppe WH kleiner als n ist. Jede p-Sylowgruppe von WH ist konjugiert zu einer Gruppe HP/H, wobei P eine p-Sylowgruppe von NH ist. Daher gibt es eine Untergruppe U_p von G der gleichen Ordnung, wie eine p-Sylowgruppe von WH. Betrachtet man eine G-Erweiterung von h als U_p-Abbildung, so folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß alle a_j durch die Ordnung von U_p teilbar ist. Da das für alle Primteiler von $|WH|$ gilt, folgt, daß alle a_j durch $|WH|$ teilbar sind.

Die so konstruierten Elemente $e(H_i)$ in dem Bild von φ sind offensichtlich linear unabhängig. Sie erzeugen einen Untermodul von gleichem Index wie die Ordnung von $\operatorname{Koker}\varphi$ und daher das ganze Bild von φ. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Wenn CW-Komplexe X und Y die Voraussetzungen 4.1 erfüllen, dann haben auch $S^V \wedge X$ und $S^V \wedge Y$ für jede Darstellung V diese Eigenschaft. Da sich die Abbildungsgrade bei Einhängung mit der Identität auf S^V nicht ändern, läßt sich die Injektion $\varphi : [X, Y]^\circ_G \to C(G, X, Y)$ zu einem Homomorphismus auf der stabilen Homotopiegruppe $\omega^\circ_G(X, Y)$ erweitern. Tatsächlich gilt:

Bemerkung 4.4. *Unter den Voraussetzungen 4.1 ist $[X, Y]^\circ_G$ isomorph zu der stabilen äquivarianten Homotopiegruppe $\omega^\circ_G(X, Y)$.*

Beweis. Sei eine Darstellung V so gewählt, daß $\omega^\circ_G(X, Y) \cong [S^V \wedge X, S^V \wedge Y]^\circ_G$. Durch die Abbildungsgrade ist eine Injektion $\varphi' : [S^V \wedge X, S^V \wedge Y]^\circ_G \to C(G, X, Y)$ gegeben. Die Einhängung mit der Identität auf S^V induziert einen Homomorphismus

$$\sigma : [X, Y]^\circ_G \to [S^V \wedge X, S^V \wedge Y]^\circ_G,$$

der folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} [X, Y]^\circ_G & \xrightarrow{\varphi} & C(G, X, Y) \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{=} \\ [S^V \wedge X, S^V \wedge Y]^\circ_G & \xrightarrow{\varphi'} & C(G, X, Y) \end{array}$$

Daher ist σ injektiv. Weil die Kokerne von φ und φ' gleiche Ordnung haben, ist σ auch surjektiv. □

4.2 Der Satz von Hopf für Kettenkomplexe

Wie bei der entsprechenden Aussage für CW-Komplexe beruht der Beweis des Satzes von Hopf für Kettenkomplexe darauf, daß man Erweiterungen von Abbildungen und Homotopien versteht.

Wir untersuchen zunächst das Erweiterungsproblem für Paare von $\mathbb{Z}G$-Kettenkomplexen $A \subset C$, deren Quotient C/A frei ist.

Das homologische Gegenstück zu einem G-CW-Komplex ist ein Kettenkomplex über der Orbitkategorie. Auf Erweiterungsprobleme in dieser Kategorie ist die Methode der Induktion über Orbitbündel übertragbar. In einem zweiten Abschnitt führen wir den Induktionsschritt der Erweiterung über benachbarte Familien von Untergruppen auf ein Erweiterungsproblem wie im ersten Abschnitt zurück.

Im dritten Abschnitt wird der Satz von Hopf für Kettenkomplexe formuliert und bewiesen.

4.2.1 Erweiterungsprobleme für Kettenkomplexe

Wir betrachten Kettenkomplexe und Kettenabbildungen in der Kategorie der $\mathbb{Z}G$-Moduln. Alle Kettengruppen seien über $\mathbb{Z}$ frei und endlich erzeugt. Kettenkomplexe werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, die Randabbildungen mit den entsprechenden kleinen Buchstaben.

Ein Unterkettenkomplex $A \subset C$ ist eine Familie von Untermoduln $A_n \subset C_n$, auf die sich die Randabbildungen einschränken lassen, d.h. $c_n(A_n) \subset A_{n-1}$ für alle n. Zu einem Unterkettenkomplex $A \subset C$ ist C/A mit den von c induzierten Randabbildungen wieder ein Kettenkomplex.

Das Ausgangsproblem dieses Abschnitts ist das folgende: Gegeben sei eine Kettenabbildung $h : A \to D$ auf einem Unterkettenkomplex $A \subset C$. Gesucht ist eine Erweiterung auf C. Dieses Problem wird auch auf Kettenhomotopien übertragen. Wir werden üblicherweise die folgenden Bedingungen stellen:

$(*)$ Der Kettenkomplex C/A ist frei. Der Kettenkomplex C ist endlich und für $n = \dim C$ ist $H_1 D = H_2 D = \ldots = H_{n-1} D = 0$.

$(**)$ $H_n C$ und $H_n D$ sind als $\mathbb{Z}G$-Moduln isomorph und als Gruppen frei abelsch vom Rang 1. Es seien Erzeuger fest gewählt.

Unter der Bedingung $(**)$ hat jeder Homomorphismus $f_n : C_n \to D_n$, der $\mathrm{Kern}(c_n)$ nach $\mathrm{Kern}(d_n)$ abbildet, einen Abbildungsgrad $d(f_n)$ mit der üblichen homologischen Definition. Für $\dim C = n$ und eine Kettenabbildung $f : C \to D$ bezeichnen wir diesen Abbildungsgrad mit $d(f)$.

Um eine Erweiterung einer Kettenabbildung $h : A \to D$ zu konstruieren, kann man wie bei CW-Komplexen induktiv über die Dimensionen vorgehen: Angenommen, es sei schon eine Erweiterung f bis zur Dimension m konstruiert. Gesucht ist eine Fortsetzung auf C_{m+1}.

In dem Fall, daß C/A frei ist, läßt sich dieses Problem leicht lösen. Dann ist nämlich $C_{m+1} = A_{m+1} \oplus M$ mit einem freien $\mathbb{Z}G$-Modul M. Die gesuchte Erweiterung ist auf A_{m+1} durch h schon festgelegt. Gesucht ist ein Homomorphismus $g : M \to D_{m+1}$ mit $d_{m+1} g = f_m c_{m+1}$. Da M frei ist, existiert ein solcher Homomorphismus g genau dann, wenn

$$\mathrm{Bild}(f_m c_{m+1}) \subset \mathrm{Bild}(d_{m+1}).$$

Weil f eine Kettenabbildung ist, liegt $\mathrm{Bild}(f_m c_{m+1})$ in $\mathrm{Kern}(d_m)$. Falls $H_m D = 0$ ist, existiert also sogar für *jedes* f eine Erweiterung auf C_{m+1}.

Anders als bei zusammenhängenden CW-Komplexen können bei Kettenkomplexen auch in der Dimension 1 Erweiterungshindernisse auftreten. Das wird durch die Bedingung $A_1 = C_1$ ausgeschlossen.

Satz 4.5. *Seien $A \subset C$ und D Kettenkomplexe, die die Voraussetzungen $(*)$ erfüllen. Ist zusätzlich $A_1 = C_1$, so hat jede Kettenabbildung $f : A \to C$ eine Erweiterung auf C.*

Beweis. Nach den Voraussetzungen liegt $\mathrm{Bild}(f_1 c_0)$ in $\mathrm{Kern}(d_1) = \mathrm{Bild}(d_0)$. Daher kann man eine Erweiterung in Dimension 0 so wählen, daß sie mit der in Dimension 1 vorgegebenen Abbildung verträglich ist. In den Dimensionen $1 \leq m \leq n-1$ läßt sich f nach der Überlegung oben auf C_{m+1} fortsetzen. □

Auch die folgenden drei Sätze sind im Grunde Aussagen der Hindernistheorie. Sie zeigen, daß es unter hinreichend guten Voraussetzungen genau ein Hindernis gegen die Erweiterung einer Homotopie $s : f|_A \simeq g|_A$ auf C gibt. Dieses Hindernis ist die Differenz der Abbildungsgrade $d(f) - d(g)$. Es liegt in $|G|\mathbb{Z}$ und kann jeden möglichen Wert dieser Menge annehmen.

Wie in der Geometrie ist eine Homotopie von Kettenabbildungen $f, g : C \to D$ eine Kettenabbildungen auf einem erweiterten Kettenkomplex C^+. Der Kettenkomplex C^+ ist definiert durch

$$\begin{aligned} C_n^+ &= C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1} \\ c_n^+(x, y, z) &= (z + c_n x,\ z + c_n y,\ -c_{n-1} z). \end{aligned}$$

Bemerkung 4.6. *Die Homotopien von Kettenabbildungen $C \to D$ entsprechen genau den Kettenabbildungen $C^+ \to D$.*

Beweis. Falls $s : f \simeq g : C \to D$ eine Kettenhomotopie ist, so rechnet man leicht nach, daß durch

$$\begin{array}{rccc} (f, -g, s)_n : & C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1} & \longrightarrow & D_n \\ & (x, y, z) & \longmapsto & f_n(x) - g_n(y) + s_{n-1}(z) \end{array}$$

eine Kettenabbildung $(f, -g, s) : C^+ \to D$ gegeben ist. Umgekehrt hat jede Kettenabbildung $C^+ \to D$ die Form $(f, -g, s)$ für Familien von Abbildungen $f_m : C_m \to D_m$, $g_m : C_m \to D_m$ und $s_m : C_m \to D_{m+1}$. Aus den Kommutativitätseigenschaften der Kettenabbildung folgt, daß f und g Kettenabbildungen sind und daß s eine Homotopie von f nach g ist. □

Zu einem Unterkettenkomplex $A \subset C$ sei A^+ der Unterkettenkomplex in C^+ mit den Kettengruppen

$$A_n^+ = C_n \oplus C_n \oplus A_{n-1}.$$

Dieser Unterkettenkomplex ist so gewählt, daß Kettenabbildungen $f, g : C \to D$ und Homotopien $s : f|_A \simeq g|_A$ genau den Kettenabbildungen auf A^+ entsprechen.

Wir wollen nun aus einer Homotopie $s : f|_A \simeq g|_A$ eine Kongruenz zwischen den Abbildungsgraden von f und g ableiten. Das folgende Lemma wird im Beweis von Satz 4.8 verwendet.

Lemma 4.7. *Sei M ein freier $\mathbb{Z}G$-Modul und $K_1 \subset M$ ein Untermodul, der als Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Sei $\psi : M \to K_2$ ein $\mathbb{Z}G$-Homomorphismus in einen Modul K_2, der ebenfalls als Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Dann ist die Einschränkung von ψ auf K_1 die Multiplikation mit einer Zahl $d \in |G|\mathbb{Z}$.*

Beweis. Falls ψ die Nullabbildung ist, ist die Behauptung sicher richtig. Wir können daher annehmen, daß ψ nicht trivial ist.

Wir betrachten die Normabbildung N: $\mathrm{Hom}(M, K_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(M, K_2)$. (Für die Definition und Eigenschaften von N siehe [tD 87] II.4.) Da M frei ist, ist N surjektiv. Es gibt also einen (nicht äquivarianten) Homomorphismus $\varphi : M \to K_2$ mit $N(\varphi) = \psi$. Weil es einen nichttrivialen $\mathbb{Z}G$-Homomorphismus $\psi|_{K_1} : K_1 \to K_2$ gibt, sind K_1 und K_2 als $\mathbb{Z}G$-Moduln isomorph und jeder Homomorphismus $K_1 \to K_2$ ist äquivariant. Sei $i : K_1 \to M$ die Inklusion. Damit folgt

$$\psi i = N(\varphi)i = N(\varphi i) = N(\mathrm{id})\varphi i = |G|\varphi i.$$

□

Satz 4.8. *Seien $A \subset C$ und D Kettenkomplexe, die die Voraussetzungen $(*)$ und $(**)$ erfüllen. Weiter sei $A_0 = C_0$ und $\dim A < \dim C$. Dann gilt für Kettenabbildungen $f, g : C \to D$, deren Einschränkungen auf A homotop sind, die Kongruenz*

$$d(f) \equiv d(g) \mod |G|.$$

Beweis. Sei $s : f|_A \simeq g|_A$ eine Homotopie. Wir versuchen, die Abbildung $(f, -g, s)$ von A^+ nach C^+ zu erweitern. Da C^+/A^+ frei ist, läßt sich das oben angegebene Verfahren anwenden: Wegen $C_0 = A_0$ sind in den Dimensionen 0 und 1 keine Erweiterungen notwendig. Da die Homologiegruppen von D in den Dimensionen 1 bis $n-1$ verschwinden, läßt sich die Abbildung $(f, -g, s)$ bis zur Dimension n erweitern. Damit ist aber erst eine Homotopie von f und g bis zur Dimension $n-1$ konstruiert. Es gilt

$$(\Diamond) \qquad f_{n-1} - g_{n-1} = d_n s_{n-1} + s_{n-2} c_{n-1}.$$

Sei $\phi := f_n - g_n - s_{n-1}c_n$. Diese Abbildung induziert auf H_nC die gleiche Abbildung wie $f - g$ und hat daher einen Abbildungsgrad $d(\phi) = d(f) - d(g)$. Mit der Gleichung $(\Diamond)$ folgt:

$$\begin{aligned} d_n\phi &= d_n f_n - d_n g_n - d_n s_{n-1} c_n \\ &= f_{n-1}c_n - g_{n-1}c_n - d_n s_{n-1} c_n \\ &= s_{n-2}c_{n-1}c_n = 0. \end{aligned}$$

Also ist $\mathrm{Bild}(\phi)$ in $\mathrm{Kern}(d_n)$ enthalten.

Wir können das Lemma für $\psi : C_n \xrightarrow{\phi} \mathrm{Kern}(d_n) \to H_nD$ und $K_1 = \mathrm{Kern}(c_n)$ anwenden. Es folgt die behauptete Kongruenz. □

Wir haben gesehen, daß Abbildungsgrade von Kettenabbildungen, die auf einem geeigneten Unterkettenkomplex homotop sind, in einer Kongruenzklasse modulo $|G|$ liegen. Der nächste Satz besagt, daß tatsächlich die ganze Kongruenzklasse ausgeschöpft wird.

Satz 4.9. *Seien $A \subset C$ und D Kettenkomplexe, die die Voraussetzungen $(*)$ und $(**)$ erfüllen. Weiter sei $\dim A \leq n-1$. Zu jeder Kettenabbildung $f : C \to D$ und jeder Zahl d mit $d \equiv d(f) \mod |G|$ gibt es dann eine Kettenabbildung $g : C \to D$, die auf A mit f übereinstimmt und den Abbildungsgrad $d(g) = d$ hat.*

Beweis. Sei $m \in \mathbb{Z}$, so daß $d(f) = d - m|G|$. Falls $m \neq 0$ ist, ändern wir die Kettenabbildung f folgendermaßen ab: Bezeichne i die Inklusion von $\mathrm{Kern}(c_n)$ in C_n. Die kurze exakte Sequenz $\mathrm{Kern}(c_n) \xrightarrow{i} C_n \xrightarrow{c_n} \mathrm{Bild}(c_n)$ spaltet über $\mathbb{Z}$, weil $\mathrm{Bild}(c_n)$ frei abelsch ist. Daher hat die Inklusion i ein (nicht äquivariantes) Linksinverses $\tau : C_n \to \mathrm{Kern}(c_n)$. Bezeichne $m : \mathrm{Kern}(c_n) = H_n C \to H_n D$ die Multiplikation mit der Zahl m bezüglich der fest gewählten Erzeuger. Sie ist äquivariant, da $H_n C$ und $H_n D$ als $\mathbb{Z}G$-Moduln isomorph sind. Sei $N : \mathrm{Hom}(C_n, \mathrm{Kern} c_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_n, \mathrm{Kern} c_n)$ die Normabbildung und $\pi : \mathrm{Kern}(d_n) \to H_n D$ die kanonische Projektion. Da C_n ein freier $\mathbb{Z}G$-Modul ist, gibt es in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{N(\tau)} & \mathrm{Kern}(c_n) \\ {\scriptstyle\mu}\,\vdots & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ \mathrm{Kern}(d_n) & \xrightarrow{\pi} & H_n D \end{array}$$

eine Hochhebung μ. Nach Konstruktion gilt

$$(\diamondsuit) \qquad \pi\mu i = mN(\tau)i = mN(\tau i) = mN(\mathrm{id}) = m|G|.$$

Wir setzten $g_m = f_m$ für $m \neq n$ und $g_n = f_n + \mu$. Das definiert eine Kettenabbildung, die eingeschränkt auf A mit f übereinstimmt. Aus der Gleichung $(\diamondsuit)$ folgt, daß der Abbildungsgrad von g gleich $d(f) + m|G|$ ist. □

Der nächste Satz zeigt, daß die Differenz $d(f) - d(g)$ das Hindernis gegen die Erweiterung einer Homotopie $s : f|_A \simeq g|_A$ ist. Im Beweis wird folgendes Lemma verwendet:

Lemma 4.10. *Seien $c : M \to M'$ und $F : M \to Z$ Homomorphismen von $\mathbb{Z}G$-Moduln. Es gelte:*

1. *M ist ein freier $\mathbb{Z}G$-Modul*
2. *Die $\mathbb{Z}G$-Moduln $\mathrm{Kern}(c)$ und Z sind isomorph und als Gruppen isomorph zu $\mathbb{Z}$.*
3. $\mathrm{Kern}(c) \subset \mathrm{Kern}(F)$
4. $\mathrm{Bild}(c)$ *ist in M' ein direkter Summand.*

Dann gibt es einen $\mathbb{Z}G$-Homomorphismus $h : M' \to Z$ mit $F = hc$.

Beweis. Der Normhomomorphismus $N : \mathrm{Hom}(M, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(M, Z)$ ist surjektiv, weil M frei ist. Es gibt also einen Homomorphismus $\varphi : M \to Z$ mit $N(\varphi) = F$. Wegen der zweiten Bedingung ist jeder Homomorphismus $\mathrm{Kern}(c) \to Z$ äquivariant. Mit der Inklusion $i : \mathrm{Kern}(c) \to M$ folgt daher:

$$0 = Fi = N(\varphi)i = N(\varphi i) = |G|\varphi i.$$

Also enthält auch $\mathrm{Kern}(\varphi)$ den Kern von c. Das nicht äquivariante Faktorisierungsproblem $\varphi = \kappa c$ läßt sich ohne weiteres lösen: Wir definieren κ auf $\mathrm{Bild}(c)$ durch $\kappa c = \varphi$ und auf dem direkten Komplement beliebig. Für $h = N(\kappa)$ gilt dann:

$$hc = N(\kappa)c = N(\kappa c) = N(\varphi) = F.$$

□

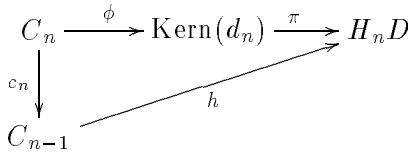
Satz 4.11. *Seien $A \subset C$ und D Kettenkomplexe, die die Voraussetzungen $(*)$ und $(**)$ erfüllen. Weiter sei $A_0 = C_0$, $\dim A \leq n-2$ und $H_{n-1}C$ frei über $\mathbb{Z}$. Dann gilt:*
Eine Homotopie von Kettenabbildungen $f, g : C \to D$ auf A läßt sich genau dann zu einer Homotopie von f und g fortsetzen, wenn die Abbildungsgrade von f und g gleich sind.

Beweis. Wenn f und g homotop sind, induzieren sie in Homologie den gleichen Homomorphismus. Daher ist die eine Implikation des Satzes offensichtlich.

Wie in dem Beweis von Satz 4.8 können wir eine Homotopie s von f und g bis zur Dimension $n-1$ konstruieren, die die schon vorhandene Homotopie auf A fortsetzt. Es gilt also

$$(\Diamond) \qquad f_{n-1} - g_{n-1} = d_n s_{n-1} + s_{n-2} c_{n-1}.$$

Sei $\phi = f_n - g_n - s_{n-1}c_n$. Aus der Gleichung oben folgt, daß $\mathrm{Bild}\,\phi$ in $\mathrm{Kern}(d_n)$ enthalten ist. Weil die Abbildungsgrade von f und g gleich sind, liegt $\mathrm{Kern}(c_n)$ in $\mathrm{Kern}\,\phi$. Das Bild von c_n ist in C_{n-1} ein direkter Summand, weil $H_{n-1}C$ frei abelsch ist. Sei $\pi : \mathrm{Kern}(d_n) \to H_nD$ die kanonische Projektion. Das Lemma angewandt auf $c_n : C_n \to C_{n-1}$ und $F : C_n \xrightarrow{\phi} \mathrm{Kern}(d_n) \xrightarrow{\pi} H_nD$ zeigt, daß es einen äquivarianten Homomorphismus $h : C_{n-1} \to H_nD$ gibt, so daß das Diagramm



kommutiert. Nach der Dimensionsbedingung ist C_{n-1} frei und es gibt eine Hochhebung $k : C_{n-1} \to \mathrm{Kern}(d_n)$ von h über π. Wir ersetzten nun s_{n-1} durch $s_{n-1} + k$. Dann gilt die Gleichung $(\Diamond)$ unverändert. Außerdem gilt

$$\pi(f_n - g_n - (s_{n-1} + k)c_n) = \pi\phi - \pi k c_n = 0.$$

Also liegt $\mathrm{Bild}(f_n - g_n - (s_{n-1} + k)c_n)$ in dem Bild von d_{n+1}. Da C_n frei ist, gibt es einen Homomorphismus $s_n : C_n \to D_{n+1}$ mit

$$f_n - g_n = d_{n+1}s_n + (s_{n-1} + k)c_n.$$

Das ist die gesuchte Erweiterung der Homotopie. □

4.2.2 Erweiterungen über Familien von Untergruppen

Die Orbitkategorie Or(G) besteht aus den homogenen Räumen G/H als Objekten und allen G-Abbildungen als Morphismen. Eine G-Abbildung $G/H \to G/K$ hat immer die Form $gH \mapsto guK$ für ein Element $u \in G$ mit $H \subset uKu^{-1}$. Wir bezeichnen sie entsprechend mit u_H^K oder auch einfach mit u, wenn die Gruppen H und K aus dem Zusammenhang hervorgehen. Insbesondere bezeichnet e_H^K für $H \subset K$ die Projektion $G/H \to G/K$. Die Gruppe $\mathrm{Mor}(G/H, G/H)$ ist durch einen Antihomomorphismus isomorph zu WH.

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Ein (rechts-)R-Modul über der Orbitkategorie ist ein kontravarianter Funktor von der Orbitkategorie in die Kategorie der R-Moduln

$$M : \mathrm{Or}(G) \longrightarrow R\text{-Mod}.$$

In dieser Arbeit ist der Koeffizientenring immer $\mathbb{Z}$ und wir bezeichnen die entsprechenden Moduln kurz als Or(G)-Moduln. Beispiele für $\mathrm{Or}(G)$-Moduln sind die zellulären Kettengruppen eines G-CW-Komplexes. In Anlehnung daran bezeichnen wir den Wert eines $\mathrm{Or}(G)$-Moduls M auf G/H mit M^H. Durch die Operation von $\mathrm{Mor}(G/H, G/H)$ ist M^H ein (links-)WH-Modul.

Ein Morphismus von Moduln über der Orbitkategorie ist eine natürliche Transformation $f : M \to N$ von Funktoren. Wir bezeichnen die einzelnen Homomorphismen einer solchen Transformation mit $f^H : M^H \to N^H$. Aus der Natürlichkeit folgt, daß f^H ein Homomorphismus von WH-Moduln ist.

Ein $\mathrm{Or}(G)$-Kettenkomplex C ist ein Kettenkomplex in der Kategorie der $\mathrm{Or}(G)$-Moduln. Er besteht aus einer Familie von Kettenkomplexen $C^H, H \subset G$, die durch Kettenabbildungen $C^K \to C^H$ für $(H) \leq (K)$ verbunden sind.

Wir konstruieren in dem Beweis des Satzes von Hopf Kettenabbildungen von $\mathrm{Or}(G)$-Kettenkomplexen. Dazu werden schon vorhandene Kettenabbildungen auf Komplexen C^K zu Abbildungen auf Komplexen C^H mit $(H) \leq (K)$ fortgesetzt. Wir zeigen nun, wie man diesen Induktionsschritt auf ein Erweiterungsproblem zurückführen kann, wie es im letzten Abschnitt untersucht wurde. Wir benötigen noch weitere Bezeichnungen:

Eine abgeschlossene Familie $\mathfrak{F}$ von Untergruppen in G ist eine Menge von Untergruppen mit der Eigenschaft:

$$H \in \mathfrak{F}, \quad (H) \leq (K) \quad \Rightarrow \quad K \in \mathfrak{F}.$$

Aus einem $\mathrm{Or}(G)$-Modul M erhält man durch Einschränken auf $\mathfrak{F}$ einen neuen $\mathrm{Or}(G)$-Modul $M^{\mathfrak{F}}$, definiert durch

$$\begin{array}{rrcl} M^{\mathfrak{F}}: & \mathrm{Or}(G) & \to & \mathbb{Z}-\mathrm{Mod} \\ & G/H & \mapsto & \begin{cases} M^H & \text{für } H \in \mathfrak{F} \\ 0 & \text{für } H \notin \mathfrak{F} \end{cases} \\ & u_H^K & \mapsto & \begin{cases} M(u_H^K) & \text{für } H \in \mathfrak{F} \\ 0 & \text{für } H \notin \mathfrak{F}. \end{cases} \end{array}$$

Jeder $\mathrm{Or}(G)$-Morphismus $f : M \to N$ läßt sich einschränken zu einem $\mathrm{Or}(G)$-Morphismus $f^{\mathfrak{F}} : M^{\mathfrak{F}} \to N^{\mathfrak{F}}$.

Zu einem $\mathrm{Or}(G)$-Modul M und einer Untergruppe $H \subset G$ sei $M^{>H}$ definiert als

$$M^{>H} := \bigcup_{K \supsetneq H} \text{Bild } M(e_H^K).$$

Eine einfache Überlegung zeigt, daß $M^{>H}$ in M^H ein WH-Untermodul ist und daß sich für jede $\mathrm{Or}(G)$-Abbildung $f : M \to N$ der Homomorphismus f^H zu einer WH-Abbildung $M^{>H} \to N^{>H}$ einschränken läßt.

Satz 4.12. *Sei $H \subset G$ eine Untergruppe und M ein $\mathrm{Or}(G)$-Modul mit den folgenden Eigenschaften*

(i) Für jedes $K \supsetneq H$ ist $M(e_H^K)$ injektiv.

(ii) Falls $M(e_H^K)(x) = M(e_H^U)(y)$, so gibt es eine Untergruppe $R \subset G$, die K und U enthält, und ein $z \in M^R$ mit $M(e_K^R)(z) = x, M(e_U^R)(z) = y$.

Sei $\mathfrak{F}$ die Familie $\mathfrak{F} = \{K \subset G | (K) > (H)\}$. Dann gibt es zu jeder $\mathrm{Or}(G)$-Abbildung $f : M^{\mathfrak{F}} \to N^{\mathfrak{F}}$ genau eine WH-Abbildung $\tilde{f} : M^{>H} \to N^{>H}$, so daß für jedes $K \supsetneq H$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M^K & \xrightarrow{f^K} & N^K \\ {\scriptstyle M(e_H^K)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N(e_H^K)} \\ M^{>H} & \xrightarrow{\tilde{f}} & N^{>H} \end{array}$$

Sei $\mathfrak{F}'$ die Familie $\{K \subset G | (K) \geq (H)\}$. Dann entsprechen die $\mathrm{Or}(G)$-Erweiterungen von $f : M^{\mathfrak{F}} \to N^{\mathfrak{F}}$ auf $M^{\mathfrak{F}'}$ genau den WH-Erweiterungen von $\tilde{f}$ auf M^H.

Beweis. Nach Definition von $M^{>H}$ ist eine Abbildung $\tilde{f}$ durch die geforderte Eigenschaft eindeutig festgelegt. Es ist also nur die Existenz zu zeigen:

Sei für $K \supsetneq H$ ein Homomorphismus $f_K : \text{Bild } M(e_H^K) \to \text{Bild } N(e_H^K)$ durch das folgende Diagramm definiert:

$$\begin{array}{ccc} M^K & \xrightarrow{f^K} & N^K \\ {\scriptstyle M(e_H^K)}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & \downarrow{\scriptstyle N(e_H^K)} \\ \text{Bild } M(e_H^K) & \xrightarrow{f_K} & \text{Bild } N(e_H^K) \end{array}$$

Falls $M(e_H^K)(x) = M(e_H^U)(y)$ ist, dann gibt es nach Voraussetzung eine Gruppe $R \subset G$ und ein $z \in M^R$ mit $x = M(e_K^R)(z)$ und $y = M(e_U^R)(z)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} N(e_H^K)\ f^K(x) &= N(e_H^K)\ f^K\ M(e_K^R)(z) \\ &= N(e_H^K)\ N(e_K^R)\ f^R(z) \\ &= N(e_H^R)\ f^R(z). \end{aligned}$$

Eine entsprechende Rechnung zeigt, daß $N(e_H^U)\ f^U(y) = N(e_H^R)\ f^R(z)$ ist. Also ist $N(e_H^K)\ f^K(x) = N(e_H^U)\ f^U(y)$ und die f_K definieren zusammen einen wohldefinierten Homomorphismus $\tilde{f} : M^{>H} \to N^{>H}$. Daß $\tilde{f}$ WH-äquivariant ist, ist eine einfache aber etwas unübersichtliche Rechnung.

Nach Definition von $\tilde{f}$ ist eine WH-Abbildung $\tilde{F} : M^H \to N^H$ genau dann eine Erweiterungen von $\tilde{f}$, wenn für alle $K \supsetneq H$ die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} M^K & \xrightarrow{f^K} & N^K \\ {\scriptstyle M(e_H^K)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N(e_H^K)} \\ M^H & \xrightarrow{\tilde{F}} & N^H \end{array}$$

kommutieren. Jede $\mathrm{Or}(G)$-Erweiterung F von f auf $M^{\mathfrak{F}'}$ liefert durch Einschränkung eine solche WH-Abbildung $\tilde{F} = F^H$.

Sei nun umgekehrt eine WH-Abbildung $\tilde{F}$ mit dieser Eigenschaft gegeben. Wir zeigen, daß dadurch eine Erweiterung von f gegeben ist. Eine Erweiterung von f auf $M^{\mathfrak{F}'}$ besteht aus einer Familie von Homomorphismen $F^U : M^U \to N^U$ mit U konjugiert zu H, so daß für jede G-Abbildung $u = u_U^K : G/U \to G/K$ gilt:

$$F^U\ M(u) = \begin{cases} N(u)\ F^K & \text{für } (H) = (U) = (K), \\ N(u)\ f^K & \text{für } (H) = (U) < (K). \end{cases}$$

Sei $H = rUr^{-1}$. Dann ist durch die Multiplikation mit r ein Isomorphismus von G-Mengen $r = r_H^U : G/H \to G/U$ gegeben. Wir definieren eine Abbildung F^U durch

$$F^U := N(r)^{-1}\ \tilde{F}\ M(r).$$

Diese Definition ist unabhängig von r, denn für $H = rUr^{-1} = kUk^{-1}$ liegt kr^{-1} in dem Normalisator von H. Mit der WH-Äquivarianz von $\tilde{F}$ folgt

$$\begin{aligned} N(k)^{-1}\ \tilde{F}\ M(k) =& N(r)^{-1}\ N(kr^{-1})^{-1}\ \tilde{F}\ M(kr^{-1})\ M(r) \\ =& N(r)^{-1}\ \tilde{F}\ M(r). \end{aligned}$$

Sei $(H) = (U) < (K)$ und $u = u_U^K$ eine G-Abbildung $G/U \to G/K$. Für $H = rUr^{-1}$ ist dann $H \subset ruK(ru)^{-1}$ und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G/H & \xrightarrow{r} & G/U \\ {\scriptstyle e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ G/ruK(ru)^{-1} & \xrightarrow{ru} & G/K \end{array}$$

kommutiert. Es folgt:

$$\begin{aligned} F^U\ M(u) =& \ N(r)^{-1}\ \tilde{F}\ M(r)\ M(u) \\ =& \ N(r)^{-1}\ \tilde{F}\ M(e)\ M(ru) \\ =& \ N(r)^{-1}\ N(e)\ f^{ruK(ru)^{-1}}\ M(ru) \\ =& \ N(r)^{-1}\ N(e)\ N(ru)\ f^K \\ =& \ N(u)\ f^K. \end{aligned}$$

Analog folgt die gewünschte Gleichung in dem Fall $(H) = (U) = (K)$. □

Dieser Erweiterungssatz überträgt sich direkt auf Erweiterungen von Kettenabbildungen:

Zu einem $\mathrm{Or}(G)$-Kettenkomplex C und einer Familie $\mathfrak{F}$ ist durch $(C^{\mathfrak{F}})_n = C_n^{\mathfrak{F}}$ wieder ein Kettenkomplex gegeben. Zu einer Untergruppe $H \subset G$ ist $(C^{>H})_n = C_n^{>H}$ ein WH-Kettenkomlex $C^{>H}$. Erfüllen alle Kettengruppen C_n die Voraussetzungen von Satz 4.12, so existieren zu einer Kettenabbildung $f : C \to D$ für alle n die WH-Abbildung $\tilde{f}_n$. Dadurch ist eine Kettenabbildung $\tilde{f} : C^{>H} \to D^{>H}$ von WH-Kettenkomlexen gegeben. Wie oben erhält man eine Bijektion zwischen WH-Erweiterungen von $\tilde{f}$ auf den Kettenkomplex C^H und $\mathrm{Or}(G)$-Erweiterungen von f auf $C^{\mathfrak{F}'}$, denn die zu $\tilde{f}$ existierenden Erweiterungen F_n bilden zusammen eine Kettenabbildung von $\mathrm{Or}(G)$-Kettenkomplexen.

4.2.3 Der Satz von Hopf

Der Satz ist hier für die Situation formuliert, für die wir ihn im nächsten Kapitel verwenden - für Kettenkomplexe C und D, für die die Homotopiegruppe $[C, D]_G$ in $C(G)$ eine Untergruppe von maximalem Rang ist. Die Anzahl der Voraussetzungen und die Komplexität der Aussage würden sich in der allgemeinsten Form des Satzes erheblich vergrößern. Sie scheint daher nicht zweckmäßig.

In dem Abschnitt über Erweiterungsprobleme haben wir gesehen, daß es i.a. in den untersten Dimensionen Erweiterungshindernisse gibt. Daher stellen wir an die betrachteten Kettenkomplexe und Kettenabbildungen eine zusätzliche Bedingung:

Ein $\mathrm{Or}(G)$-Kettenkomplex C heißt punktiert, falls $C_1 = 0$ und $C_0 = \mathbb{Z}$ ist. (Genauer heißt das: Für alle Untergruppen H in G ist $C_0^H \cong \mathbb{Z}$ und für $(K) \leq (H)$ ist $C_0^H \to C_0^K$ die Identität auf $\mathbb{Z}$.)

Eine Kettenabbildung $f : C \to D$ von punktierten Kettenkomplexen heißt punktiert, wenn $f_0 = id_{\mathbb{Z}}$ ist. Falls f punktiert ist und g homotop zu f, dann ist auch g punktiert. Wenn es überhaupt Kettenabbildungen zwischen den punktierten Kettenkomplexen C und D gibt, dann gibt es auch punktierte, denn die Abbildung in der Dimension 0 kann man beliebig abändern.

Voraussetzungen 4.13. Seien C und D Kettenkomplexe über der Orbitkategorie mit den folgenden Eigenschaften:

(i) C und D sind punktiert.

(ii) Alle Kettengruppen C_n^H sind über $\mathbb{Z}$ frei und endlich erzeugt.

(iii) $\dim C^G > 1$

Für jede Untergruppe $H \subset G$ gelte:

(iv) Für $K \supsetneq H$ und für alle n ist $C_n(e_H^K) : C_n^K \to C_n^H$ injektiv.
Falls $C_n(e_H^K)(x) = C_n(e_H^U)(y)$, so gibt es eine Untergruppe $R \subset G$, die K und U enthält, und ein Element $z \in C_n^R$ mit $C_n(e_K^R)(z) = x$ und $C_n(e_U^R)(z) = y$.

(v) Der Quotient $C^H/C^{>H}$ ist ein freier WH-Kettenkompex.

(vi) $\dim C^{>H} \leq \dim C^H - 2$

Bezeichne $n : \phi(G) \to \mathbb{N}$ die Dimensionsfunktion $n(H) = \dim C^H$ von C. Für alle Untergruppen $H \subset G$ gelte:

(vii) $n(H) < \infty$ und $H_1(D^H) = \ldots = H_{n(H)-1}(D^H) = 0$.

(viii) $H_{n(H)-1}(C^H)$ ist als Gruppe frei abelsch.

(ix) Die WH-Moduln $H_{n(H)}(C^H)$ und $H_{n(H)}(D^H)$ sind isomorph und als Gruppen isomorph zu $\mathbb{Z}$. Es seien Erzeuger fest gewählt.

Damit sind für eine Kettenabbildung $f : C \to D$ für alle $(H) \in \phi(G)$ Abbildungsgrade $d(f^H)$ definiert.

Beispiele für Kettenkomplexe mit den Eigenschaften (ii), (iv) und (v) sind zelluläre Kettenkomplexe von G-Komplexen oder allgemeiner Kettenkomplexe deren Kettengruppen Permutationsmoduln $C_n^H = \mathbb{Z}(X_n^H)$ für endliche G-Mengen X_n sind.

Satz 4.14 (Satz von Hopf für Kettenkomplexe). *Sei $H \subset G$ eine Untergruppe und $\mathfrak{F}$ die Familie $\{K \mid (K) > (H)\}$. Für $\mathrm{Or}(G)$-Kettenkomplexe C, D mit den Eigenschaften (i) – (ix) gilt:*

1. Jede Kettenabbildung $C^{\mathfrak{F}} \to D$ hat ein Fortsetzung auf C.

2. Sind zwei Kettenabbildungen $f, g : C \to D$ eingeschränkt auf $C^{>H}$ als WH-Abbildungen homotop, so ist $d(f^H) \equiv d(g^H) \mod |WH|$.

3. Sei $f : C \to D$ eine Kettenabbildung. Zu jedem $d \in \mathbb{Z}$ mit $d \equiv d(f^H) \mod |WH|$ gibt es eine Kettenabbildung $g : C \to D$ mit Abbildungsgrad $d(g^H) = d$, die auf $C^{\mathfrak{F}}$ mit f übereinstimmt. Falls f punktiert ist, kann man auch g punktiert wählen.

4. Zwei punktierte Kettenabbildungen $f, g : C \to D$ sind genau dann homotop, wenn $d(f^K) = d(g^K)$ für alle Untergruppen $K \subset G$.

Beweis. Sei $\mathfrak{F}' = \{K \mid (K) \geq (H)\}$. Nach Satz 4.12 und der Voraussetzung (iv) entsprechen die Erweiterungen einer Kettenabbildung $f : C^{\mathfrak{F}} \to D^{\mathfrak{F}}$ auf $C^{\mathfrak{F}'}$, genau den WH-Erweiterungen von $\tilde{f}$ auf C^H. Nach Satz 4.5 und den Voraussetzungen (i), (v) und (vii) gibt es eine solche Erweiterung von $\tilde{f}$. Mit Hilfe der Erweiterungen von diesem Typ kann man induktiv Erweiterungen auf ganz C konstruieren, beginnend mit einer Erweiterung für die größte nicht in der vorgegebenen Familie enthaltenen Untergruppe. Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Die zweite Aussage ist Satz 4.8 angewandt auf C^H und den Unterkettenkomplex $C^{>H}$.

Sei $f : C \to D$ eine Kettenabbildung und $d \equiv d(f^H) \mod |WH|$. Nach Satz 4.9 gibt es eine WH-Kettenabbildung $\tilde{g} : C^H \to D^H$, die auf $C^{>H}$ mit $f^H : C^H \to D^H$ übereinstimmt und den Abbildungsgrad $d(\tilde{g}) = d$ hat. Da $\tilde{g}$ eine WH-Erweiterung von $f^H|_{C^{>H}} : C^{>H} \to D^{>H}$ ist, gibt es nach Satz 4.12 eine $\mathrm{Or}(G)$-Erweiterung g von $f|_{C^{\mathfrak{F}}}$ auf $C^{\mathfrak{F}'}$ mit $g^H = \tilde{g}$. Insbesondere ist $d(g^H) = d(\tilde{g}) = d$. Wie oben läßt sich g auf C fortsetzen. Die Aussage über die Punktierung ist offensichtlich.

Eine $\mathrm{Or}(G)$-Kettenhomotopie induziert für jede Untergruppe $K \subset G$ eine Homotopie $f^K \simeq g^K$. Insbesondere ist dann $d(f^K) = d(g^K)$.

Sei umgekehrt $d(f^K) = d(g^K)$ für alle Untergruppen $K \subset G$. Wir konstruieren induktiv eine Homotopie von f nach g: Zunächst kann man zu dem $\mathrm{Or}(G)$-Kettenkomplex C durch die gleiche formale Konstruktion wie bei gewöhnlichen Kettenkomplexen einen $\mathrm{Or}(G)$-Kettenkomplex C^+ bilden, so daß Kettenhomotopien auf C genau Kettenabbildungen auf C^+ entsprechen. Sei $\mathfrak{F} = \{K \,|\, (K) > (H)\}$, $\mathfrak{F}' = \{K \,|\, (K) \geq (H)\}$ und auf $C^{\mathfrak{F}}$ schon eine Homotopie von f nach g konstruiert. Die entsprechende Kettenabbildung auf $(C^{\mathfrak{F}})^+$ liefert eine Kettenabbildung auf $(C^{>H})^+$. Weil $d(f^H) = d(g^H)$ ist, gibt es nach Satz 4.11 eine Erweiterung davon auf $(C^H)^+$, die einer Homotopie $f|_{C^H} \simeq g|_{C^H}$ entspricht. Diese Erweiterung wiederum liefert eine Erweiterung der $\mathrm{Or}(G)$-Kettenabbildung nach $(C^{\mathfrak{F}'})^+ = (C^+)^{\mathfrak{F}'}$. (Auch C^+ hat die Eigenschaft (iv).) Damit ist eine Erweiterung der bisherigen Homotopie nach $C^{\mathfrak{F}'}$ gefunden. Wie im ersten Teil des Beweises, kann man mit Erweiterungen von diesem Typ induktiv eine Homotopie auf ganz C konstruieren. □

Seien C, D punktierte Kettenkompexe. Auf der Menge der punktierten $\mathrm{Or}(G)$-Kettenabbildungen kann man eine Addition definieren:

$$(f+g)_n(x) = \begin{cases} f_n(x) + g_n(x), & n > 1 \\ f_0(x) = g_0(x) = x, & n = 0 \end{cases}$$

Offensichtlich ist das wieder eine punktierte Kettenabbildung. Diese Addition ist verträglich mit Homotopien. Dadurch wird die Menge $[C, D]^0_G$ der Homotopieklassen punktierter Kettenabbildungen eine abelsche Gruppe.

Lemma 4.15. *Seien C und D Kettenkomplexe über der Orbitkategorie, für die der Satz von Hopf gilt. Dann ist durch die Abbildungsgrade ein injektiver Gruppenhomomorphismus*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & [C,D]^0_G & \longrightarrow & \prod_{(H)\in\phi(G)} \mathbb{Z} \\ & f & \mapsto & (d(f^H))_{(H)} \end{array}$$

gegeben, dessen Kokern die Ordnung $\prod_{(H)\in\phi(G)} |WH|$ hat.

Beweis. Das ist eine Folgerung aus dem Satz von Hopf, wie bei [tD 87] II.(4.18) nachzulesen ist. □

Wir erhalten eine genauere Beschreibung der Gesamtmenge der Abbildungsgrade in der Situation von Satz 4.14 als Untergruppe in $C(G)$.

Satz 4.16. *Seien C und D Kettenkomplexe über der Orbitkategorie, für die der Satz von Hopf gilt. Sei φ der Homomorphismus aus Lemma 4.15. Dann gibt es für alle Konjugationsklassen $(H) \leq (K)$ in G ganze Zahlen $n(H,K)$ mit $n(H,H) = 1$, so daß gilt: Ein $z \in C(G)$ liegt genau dann in dem Bild von φ, wenn es für jede Konjugationsklasse $(H) \in \Phi(G)$ die Kongruenz*

$$\sum_{(K)\geq(H)} n(H,K)\, z_K \equiv 0 \mod |WH|$$

löst.

Beweis. Der Beweis der entsprechenden geometrischen Aussage [tD 87] II.(4.19) läßt sich direkt übertragen. Siehe auch den Beweis von Satz 4.3. □

Es stellt sich die Frage, ob es weitere Bedingungen an die Kongruenzen gibt, die das Bild einer Abbildung $\varphi : [C, D]^\circ_G \to C(G)$ beschreiben. Beispielsweise treten zusätzliche Bedingungen auf, wenn C und D Kettenkomplexe von Darstellungssphären mit gleicher Dimensionsfunktion sind. Hier kann man die Kongruenzen so wählen, daß nur Koeffizienten $n(H, K)$ auftreten, für die K/H eine zyklische Gruppe ist ([tD 87] II.5).

Eine allgemeine Bedingung erhält man aus folgender Überlegung: Eine G-Abbildung $f : C \to D$ liefert für jede Untergruppe H von G eine NH-Abbildung $f^H : C^H \to D^H$. Gilt für C und D der Satz von Hopf, so folgt durch Einschränken der Operation auf eine Untergruppe $U \subset NH$, daß der Abbildungsgrad $d(f^H)$ modulo der Ordnung von U/H nur von den Abbildungsgraden $d(f^K)$ mit $H \subset K \subset U$ abhängt.

Diese Eigenschaft ist sehr schwach und kaum in eine konkrete Bedingung an die Koeffizienten des Kongruenzensystems umzuformen. In dem für das nächste Kapitel relevanten Fall einer abelschen Gruppe G ist diese Bedingung immer erfüllt, wenn die Lösungsmenge des Kongruenzensystems die zusätzliche Struktur eines $A(G)$-Moduls hat.

Bemerkung 4.17. *Sei G eine abelsche Gruppe. Die Lösungsmenge $M \subset C(G)$ eines Kongruenzensysyems der Form wie in Satz 4.16*

$$x_H \equiv \sum_{H \subsetneq K} n(H, K)\, x_K \mod |G/H|, \qquad H \subset G$$

ist genau dann ein Modul über dem Burnsidering $A(G)$, wenn für jedes $(x_H) \in M$ und alle Paare von Untergruppen $H \subset U \subset G$ gilt:

$$x_H \equiv \sum_{H \subsetneq K \subset U} n(H, K)\, x_K \mod |U/H|.$$

Beweis. Die Isomorphieklassen der homogenen Räume G/H bilden eine additive Basis des Burnsiderings $A(G)$. Daher ist M genau dann ein Modul über $A(G)$, wenn mit jedem Element $(x_K) \in M$ auch alle Tupel $(|(G/H)^K|\, x_K)$ in M liegen. In dem Fall, daß die Gruppe G abelsch ist, läßt sich die Ordnung von $(G/H)^K$ besonders leicht berechnen:

$$|(G/H)^K| = \begin{cases} |G/H| & \text{für } K \subset H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für jedes $(x_K) \in M$ muß also für jedes Paar von Untergruppen $H \subset U \subset G$ gelten:

$$|G/U|\, x_H \equiv \sum_{H \subsetneq K \subset U} |G/U|\, n(H, K)\, x_K \mod |G/H|.$$

□

Kapitel 5

Realisierungen von Moduln

Wir haben in dem letzten Kapitel gesehen, daß eine stabile äquivariante Homotopiegruppe in der Situation des Satzes von Hopf als Teilmenge eines $C(G)$-Moduls eine bestimmte Form hat: Sie ist die Lösungsmenge eines Kongruenzensytems mit gewissen Eigenschaften und ein Modul über dem Burnsidering. Moduln, die diese formalen Eigenschaften haben, nennen wir Hopfmoduln.

In diesem Kapitel geht es nun umgekehrt um das Problem, Hopfmoduln als stabile Homotopiegruppen darzustellen. Dahinter steht die geometrische Frage, welche Abbildungsgrade die äquivariante Geometrie zuläßt.

Es gibt zwei Arten von Problemen bei der Realisierung eines Moduls als stabile Homotopiegruppe. Existieren G-CW-Komplexe, deren stabile Homotopiegruppe ein bestimmter Hopfmodul ist, dann sind alle homologischen Eigenschaften einschließlich der Existenz bestimmter Abbildungsgrade Eigenschaften der entsprechenden zellulären Kettenkomplexe. Es muß also Kettenkomplexe über der Orbitkategorie mit diesen Eigenschaften geben. Solche Kettenkomplexe hängen auf eine außerordentlich komplexe Weise mit der Struktur der Gruppe G zusammen. Es ist z.B. leicht einzusehen, daß die Kohomologie der Gruppe relevant ist. Ist die Kohomologie so einfach wie möglich, d.h. periodisch, dann gibt es freie $\mathbb{Z}G$-Moduln $M_0, \ldots, M_n$ mit einer exakten Sequenz

$$\mathbb{Z} \to M_n \to M_{n-1} \to \ldots \to M_0 \to \mathbb{Z}.$$

Eine solche Sequenz ist ein guter Baustein für Kettenkomplexe der gesuchten Art. Ist die Gruppenkohomologie komplizierter, so sind $\mathbb{Z}G$-Kettenkomplexe wesentlich sperriger und unflexibler.

Aber selbst wenn es geeignete Kettenkomplexe gibt, muß es nicht notwendig topologische Räume mit dieser stabilen Homotopiegruppe geben. Der naive Ansatz, zu den gegebenen Kettenkomplexen CW-Komplexe zusammenzubauen, ist nur für ganz spezielle Kettenkomplexe durchführbar. Das Problem besteht grob gesagt darin, daß man im allgemeinen keinerlei Informationen darüber hat, ob eine charakteristische Abbildung, wie sie die Homologie des Kettenkomplexes vorschreibt, tatsächlich in der Homotopie existiert.

Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf das kombinatorische Problem, Kettenkomplexe zu Hopfmoduln zu konstruieren. Wir schränken auch die betrachteten Gruppen auf die homologisch einfachsten, nämlich zyklische p-Gruppen ein.

5.1 Hopfmoduln für Burnsideringe zyklischer p-Gruppen

Um Hopfmoduln in $C(G)$ übersichtlich beschreiben zu können, führen wir die folgende Konvention ein:

Sei eine Basis $e_1, \ldots, e_n$ in $C(G)$ festgelegt. Für eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{Z})$ und ein $m \in \mathbb{Z}^n$ bezeichnet das Symbol $[A \parallel m]$ die Lösungsmenge des Kongruenzensystems $Ax \equiv 0 \mod m$ bezüglich der festgelegten Basis.

Für eine zyklische p-Gruppe $G = \mathbb{Z}/p^n$ legen wir als Basis die primitiven Idempotenten in der Reihenfolge

$$e_i = e_{\mathbb{Z}/p^{i-1}}, \qquad i = 1, \ldots, n+1$$

fest. Hopfmoduln in $C(G)$ haben dann die Form $[A \parallel m]$ für eine obere Dreiecksmatrix A mit Einsen auf der Diagonalen und $m = (p^n, p^{n-1} \ldots, p, 1)$. Wir untersuchen nun, unter welchen Bedingungen an die Koeffizienten der Matrix A ein Modul über dem Burnsidering vorliegt.

Satz 5.1. *Eine Untergruppe in $C(\mathbb{Z}/p^n)$ der Form*

$$M = \left[\begin{array}{ccccc|||c} 1 & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & a_{1,n+1} & & p^n \\ & 1 & \ldots & a_{2,n} & a_{2,n+1} & & p^{n-1} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & a_{n,n+1} & & p \\ & & & & 1 & & 1 \end{array}\right]$$

ist genau dann ein $A(\mathbb{Z}/p^n)$-Modul, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(a) Die Untergruppe in $C(\mathbb{Z}/p^{n-1})$

$$M' = \left[\begin{array}{ccccc|||c} 1 & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} & a_{2,n+1} & & p^{n-1} \\ & 1 & \ldots & a_{3,n} & a_{3,n+1} & & p^{n-2} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & a_{n,n+1} & & p \\ & & & & 1 & & 1 \end{array}\right]$$

ist ein Modul über dem Burnsidering $A(\mathbb{Z}/p^{n-1})$.

(b) Für jede Zahl $j \in \{3, \ldots, n+1\}$ mit $2j \geq n+4$ gilt die Kongruenz

$$a_{1,j} \equiv 0 \mod p^{2j-n-3}.$$

(c) Für jede Zahl $j \in \{3, \ldots, n+1\}$ mit $2j \geq n+5$ und jede Zahl $k \in \{n-j+4, \ldots, j-1\}$ gilt die Kongruenz

$$a_{1,k} \det \left[\begin{array}{ccccc} a_{k,k+1} & a_{k,k+2} & \ldots & a_{k,j-1} & a_{k,j} \\ 1 & a_{k+1,k+2} & \ldots & a_{k+1,j-1} & a_{k+1,j} \\ & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & a_{j-1,j} \end{array}\right] \equiv 0 \mod p^{k+j-n-3}.$$

Beweis. Sei $B = (b_{i,j})$ die Inverse der Matrix $(a_{i,j})$. Die Matrix B ist wieder eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Aus den Spalten b_j von B entsteht eine additive Basis von M:

$$p^n b_1,\ \ p^{n-1} b_2,\ \ldots,\ p b_n,\ \ b_{n+1}.$$

Bezeichne $s_k = e_1 + \ldots + e_k$ die Summe der k ersten Standartbasiselemente in $C(\mathbb{Z}/p^n)$. Eine additive Basis des Burnsiderings $A(\mathbb{Z}/p^n)$ ist gegeben durch

$$p^n s_1,\ \ p^{n-1} s_2,\ \ldots,\ p s_n,\ s_{n+1}.$$

(Siehe die Beschreibung von $A(\mathbb{Z}/p^n)$ in dem ersten Kapitel.) Die Gruppe M ist genau dann ein Modul über dem Burnsidering, wenn für $k = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, n+1$ alle Produkte

$$p^{k+n+1-j}\, s_{n+1-k}\, b_j$$

in M enthalten sind. Für $k \geq j-1$ oder $k \leq n+1-j$ ist diese Bedingung erfüllt – im ersten Fall weil $p^n C(G)$ ganz in M liegt, im zweiten Fall, weil dann $s_{n+1-k} b_j = b_j$ ist. Insbesondere gilt sie für $j = 1, 2$ für jedes k. Für die j mit $n+2-j \leq j-2$ ist zu zeigen, daß die oben angegebenen Produkte die Kongruenzen für M lösen.

Durch Streichen der ersten Koordinate erhält man eine Projektion $C(\mathbb{Z}/p^n) \to C(\mathbb{Z}/p^{n-1})$. Sie bildet den Burnsidering $A(\mathbb{Z}/p^n)$ surjektiv auf $A(\mathbb{Z}/p^{n-1})$ und die Untergruppe M surjektiv auf M' ab. Die Bedingung (a) ist daher äquivalent dazu, daß die oben angegebenen Produkte die zweite bis n-te Kongruenz von M lösen.

Als nächstes zeigen wir: Die Bedingungen (b) und (c) sind zusammen äquivalent dazu, daß $p^{k+n+1-j}\, s_{n+1-k}\, b_j$ für jedes $j \in \{3, \ldots, n+1\}$ mit $2j \geq n+4$ und jedes $k \in \{n+2-j, \ldots, j-2\}$ die erste Kongruenz löst.
Sei j fest. Da $p^{n+1-j}\, b_j$ in M liegt, gilt für dieses Element die erste Kongruenz

$$b_{1,j} + a_{1,2} b_{2,j} + \ldots + a_{1,j-1} b_{j-1,j} + a_{1,j} \equiv 0 \mod p^{j-1}.$$

Für $p^{k+n+1-j}\, s_{n+1-k}\, b_j$ mit $n+2-j \leq k \leq j-2$ gilt die erste Kongruenz daher genau dann, wenn

$$a_{1,n+2-k} b_{n+2-k,j} + \ldots + a_{1,j-1} b_{j-1,j} + a_{1,j} \equiv 0 \mod p^{j-k-1}.$$

Insgesamt erhält man ein Kongruenzensystem

$$\begin{array}{rrrrl}
 & & & a_{1,j} \equiv 0 & \mod p^{2j-n-3} \\
 & & a_{1,j-1} b_{j-1,j} + & a_{1,j} \equiv 0 & \mod p^{2j-n-4} \\
 & a_{1,j-2} b_{j-2,j} + & a_{1,j-1} b_{j-1,j} + & a_{1,j} \equiv 0 & \mod p^{2j-n-5} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \\
a_{1,n-j+4} b_{n-j+4,j} + & \ldots & \ldots & a_{1,j} \equiv 0 & \mod p.
\end{array}$$

Dieses Kongruenzensystem ist offensichtlich äquivalent zu den Bedingungen

$$a_{1,j} \equiv 0 \mod p^{2j-n-3}$$

und

$$a_{1,k}\, b_{k,j} \equiv 0 \mod p^{k+j-n-3} \quad \text{für } k = n-j+4, \ldots, j-1.$$

Die erste Bedingung ist (b), die zweite (c), wobei $b_{k,j}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel als Determinante beschrieben ist. □

Folgerung 5.2. *Wenn für M die Bedingungen (a) und (b) gelten und*

$$\bar{M} = \left[\begin{array}{ccccc|||c} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} & & p^{n-1} \\ & 1 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} & & p^{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & a_{n-1,n} & & p \\ & & & & 1 & & 1 \end{array}\right]$$

ein Modul über dem Burnsidering $A(\mathbb{Z}/p^{n-1})$ ist, dann ist M ein $A(\mathbb{Z}/p^n)$-Modul.

Beweis. Wir müssen für $j \in \{3, \dots, n+1\}$ mit $2j \geq n+5$ und $k = n-j+4, \dots, j-1$ nachweisen, daß die Kongruenz $a_{1,k}\, b_{k,j} \equiv 0 \mod p^{k+j-n-3}$ gilt.
Die Spalten b_j der zu $(a_{i,j})$ inversen Matrix lassen sich rekursiv durch

$$b_j = e_j - \sum_{r=1}^{j-1} a_{r,j} b_r$$

berechnen. Die zu der Koeffizientenmatrix von $\bar{M}$ inverse Matrix hat entsprechend für $j \leq n$ die Einträge $\bar{b}_{i,j} = b_{i,j}$.

Für $j \leq n$ folgt daher die geforderte Kongruenz aus den entsprechenden Kongruenzen für den $A(\mathbb{Z}/p^{n-1})$-Modul $\bar{M}$:

$$(\diamondsuit) \qquad a_{1,k}\, b_{k,r} \equiv 0 \mod p^{k+r-n-2} \quad \text{für } r \leq n.$$

Aus der Formel für die Spalten b_j folgt für $k = 3, \dots, n$:

$$a_{1,k}\, b_{k,n+1} = -\sum_{r=k}^{n} a_{1,k}\, a_{r,n+1}\, b_{k,r}.$$

Nach Voraussetzung (b) ist $a_{1,n+1} \equiv 0 \mod p^{n-1}$. Nach Voraussetzung (a) ist M' ein $A(\mathbb{Z}/p^{n-1})$-Modul und hat entsprechende Eigenschaften (a) und (b). Induktiv folgt, daß $a_{r,n+1} \equiv 0 \mod p^{n-r}$ für $r = 2, \dots, n$. Zusammen mit den Kongruenzen $(\diamondsuit)$ erhält man die gewünschten Kongruenzen für $j = n+1$. □

Leider sind die Bedingung an M in der Folgerung für $n \geq 3$ nicht notwendig. Ein Beispiel hierfür ist der $A(\mathbb{Z}/p^3)$-Modul

$$\left[\begin{array}{cccc|||c} 1 & 0 & 1 & 0 & & p^3 \\ & 1 & 0 & 0 & & p^2 \\ & & 1 & 0 & & p \\ & & & 1 & & 1 \end{array}\right].$$

Die folgenden Beispiele illustrieren, in welchem Maße die Modulbedingungen mit wachsendem n komplizierter werden.

Beispiele für Hopfmoduln zyklischer p-Gruppen.

$n = 1$: Für $A(\mathbb{Z}/p)$ ist jede Gruppe der Form $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a_{1,2} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \middle\| \begin{smallmatrix} p \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ ein Hopfmodul.

$n = 2$: Die Hopfmoduln in $C(\mathbb{Z}/p^2)$ sind die Gruppen der Form

$$\left[\begin{array}{ccc|||c} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & p^2 \\ 0 & 1 & a_{2,3} & p \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \text{mit} \quad a_{1,3} \equiv 0 \mod p.$$

$n = 3$: Hopfmoduln in $C(\mathbb{Z}/p^3)$ sind genau die Gruppen der Form

$$\left[\begin{array}{cccc|||c} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & p^3 \\ 0 & 1 & a_{2,3} & a_{2,4} & p^2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{3,4} & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{rl} a_{1,4} \equiv 0 & \mod p^2 \\ a_{2,4} \equiv 0 & \mod p \\ a_{1,3}\, a_{3,4} \equiv 0 & \mod p. \end{array}$$

$n = 4$: Hopfmoduln in $C(\mathbb{Z}/p^4)$ sind genau die Gruppen der Form

$$\left[\begin{array}{ccccc|||c} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & p^4 \\ & 1 & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & p^3 \\ & & 1 & a_{3,4} & a_{3,5} & p^2 \\ & & & 1 & a_{4,5} & p \\ & & & & 1 & 1 \end{array}\right]$$

mit

$$\begin{array}{rl} a_{1,5} \equiv 0 & \mod p^3 \\ a_{2,5} \equiv 0 & \mod p^2 \\ a_{3,5} \equiv 0 & \mod p \end{array} \qquad \begin{array}{rl} a_{1,4} \equiv 0 & \mod p \\ a_{1,4}\, a_{4,5} \equiv 0 & \mod p^2 \\ a_{2,4}\, a_{4,5} \equiv 0 & \mod p \\ a_{1,3}\, a_{3,4}\, a_{4,5} \equiv 0 & \mod p. \end{array}$$

$n = 5$: Die Hopfmoduln in $C(\mathbb{Z}/p^5)$ sind genau die Gruppen der Form

$$\left[\begin{array}{cccccc|||c} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & p^5 \\ & 1 & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & p^4 \\ & & 1 & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} & p^3 \\ & & & 1 & a_{4,5} & a_{4,6} & p^2 \\ & & & & 1 & a_{5,6} & p \\ & & & & & 1 & 1 \end{array}\right]$$

mit

$$\begin{array}{rl} a_{1,6} \equiv 0 & \mod p^4 \\ a_{2,6} \equiv 0 & \mod p^3 \\ a_{3,6} \equiv 0 & \mod p^2 \\ a_{4,6} \equiv 0 & \mod p \end{array} \qquad \begin{array}{rl} a_{1,5} \equiv 0 & \mod p^2 \\ a_{2,5} \equiv 0 & \mod p \\ a_{1,5}\, a_{5,6} \equiv 0 & \mod p^3 \\ a_{2,5}\, a_{5,6} \equiv 0 & \mod p^2 \\ a_{3,5}\, a_{5,6} \equiv 0 & \mod p \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} a_{1,4}\, a_{4,5} \equiv 0 & \mod p \\ a_{2,4}\, a_{4,5}\, a_{5,6} \equiv 0 & \mod p \end{array} \qquad \begin{array}{rl} a_{1,4}(a_{4,5}\, a_{5,6} - a_{4,6}) \equiv 0 & \mod p^2 \\ a_{1,3}\, a_{3,4}\, a_{4,5}\, a_{5,6} \equiv 0 & \mod p. \end{array}$$

Als Spezialfall der Folgerung 5.2 definieren wir induktiv die folgenden Klassen von Moduln: Sei $\mathcal{M}(1)$ die Menge aller Untergruppen in $C(\mathbb{Z}/p)$ der Form $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a_{1,2} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \middle\| \begin{smallmatrix} p \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Für $n \geq 1$ sei $\mathcal{M}(n)$ die Menge der Untergruppen in $C(\mathbb{Z}/p^n)$ der Form

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n+1} & p^n \\ & 1 & \dots & a_{2,n} & a_{2,n+1} & p^{n-1} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & a_{n,n+1} & p \\ & & & & 1 & 1 \end{array}\right]$$

mit den Eigenschaften (a) und (b) aus Satz 5.1 und der Eigenschaft, daß

$$\left[\begin{array}{ccccc||c} 1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & & p^{n-1} \\ & 1 & \dots & a_{2,n} & & p^{n-2} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & 1 & a_{n-1,n} & p \\ & & & & 1 & 1 \end{array}\right]$$

in $\mathcal{M}(n-1)$ enthalten ist. Nach der Folgerung sind alle Elemente in $\mathcal{M}(n)$ Moduln über dem Burnsidering $A(\mathbb{Z}/p^n)$. Sie haben die Form

$$\left[\begin{array}{ccccccc||c} 1 & a_{1,2} & pa_{1,3} & p^2a_{1,4} & \dots & p^{n-1}a_{1,n+1} & & p^n \\ & 1 & a_{2,3} & pa_{2,4} & \dots & p^{n-2}a_{2,n+1} & & p^{n-1} \\ & & 1 & a_{3,4} & \dots & p^{n-3}a_{3,n+1} & & p^{n-2} \\ & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & 1 & a_{n,n+1} & & p \\ & & & & & 1 & & 1 \end{array}\right],$$

ohne weitere Bedingungen an die Koeffizienten $a_{i,j}$.

5.2 Realisierungen von Hopfmoduln

Das zentrale Ergebnis dieses Kapitels ist der folgende Satz :

Satz 5.3. *Sei $G = \mathbb{Z}/p^n$ eine zyklische p-Gruppe. Zu jedem $A(G)$-Modul der Form*

$$M = \left[\begin{array}{ccccccc||c} 1 & a_{1,2} & pa_{1,3} & p^2a_{1,4} & \dots & p^{n-1}a_{1,n+1} & & p^n \\ & 1 & a_{2,3} & pa_{2,4} & \dots & p^{n-2}a_{2,n+1} & & p^{n-1} \\ & & 1 & a_{3,4} & \dots & p^{n-3}a_{3,n+1} & & p^{n-2} \\ & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & 1 & a_{n,n+1} & & p \\ & & & & & 1 & & 1 \end{array}\right]$$

gibt es Kettenkomplexe C und D über der Orbitkategorie, so daß durch die Abbildungsgrade ein Isomorphismus $\varphi : [C, D]^\circ_G \to M$ gegeben ist.

Der Beweis besteht aus einer expliziten Konstruktion, die den restlichen Teil dieses Kapitels in Anspruch nimmt.

Die Kettengruppen der zu konstruierenden Komplexe sind sogenannte Permutationsmoduln, d.h. Moduln über der Orbitkategorie der Form

$$G/H \mapsto \mathbb{Z}(S^H)$$

für eine endliche G-Menge S. Natürlich auftretende Beispiele für Permutationsmoduln sind zelluläre Kettengruppen von G-CW-Komplexen. Da eine G-Menge eine disjunkte Vereinigung von Bahnen ist, zerfällt ein Permutationsmodul in eine direkte Summe von Untermoduln, die jeweils von transitiven G-Mengen erzeugt werden. Für die zyklische p-Gruppe $G = \mathbb{Z}/p^n$ bestehen die zu konstruierenden Kettenkomplexe also aus Moduln der Form

$$\mathbb{Z}(G/H) = \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^m), \qquad 1 \subset H \subset G, \quad n \geq m \geq 0.$$

Die Randabbildungen der Kettenkomplexe sind aus vier Typen von Abbildungen zusammengesetzt. Für die Definition legen wir die folgenden Bezeichnungen fest:
Sei $\xi \in G$ ein fest gewählter Erzeuger. Für jede Untergruppe $K \subset G$ ist das Bild von ξ unter der kanonischen Projektion $G \to G/K$ ein Erzeuger der Gruppe G/K. Dieser Erzeuger heiße ebenfalls ξ. Weiter seien $\sigma, \tau \in \mathbb{Z}(G/K)$ die ausgezeichneten Elemente

$$\sigma = 1 - \xi \qquad \text{und} \qquad \tau = \sum_{x \in G/K} x.$$

Für Untergruppen $H \subset K \subset G$ ist die Gruppe $\mathbb{Z}(G/K)$ ein $\mathbb{Z}(G/H)$-Modul vermöge der Projektion $\mathbb{Z}(G/H) \to \mathbb{Z}(G/K)$.

Für beliebige Untergruppen $H \subset K \subset G$ und beliebige natürliche Zahlen a, b definieren wir die folgenden Homomorphismen:

$$\begin{array}{lrcl}
I: & [\mathbb{Z}(G/H)]^a & \longrightarrow & [\mathbb{Z}(G/K)]^b \\
 & (x_1, \ldots, x_a) & \longmapsto & (x_1\sigma, \ldots, x_1\sigma) \\
 & & & \\
II: & [\mathbb{Z}(G/H)]^a & \longrightarrow & [\mathbb{Z}(G/K)]^b \\
 & (x_1, \ldots, x_a) & \longmapsto & (\sum_i x_i\sigma, 0, \ldots, 0) \\
 & & & \\
III: & [\mathbb{Z}(G/H)]^a & \longrightarrow & [\mathbb{Z}(G/K)]^b \\
 & (x_1, \ldots, x_a) & \longmapsto & (x_1\tau, \ldots, x_1\tau) \\
 & & & \\
IV: & [\mathbb{Z}(G/H)]^a & \longrightarrow & [\mathbb{Z}(G/K)]^b \\
 & (x_1, \ldots, x_a) & \longmapsto & (\sum_i x_i\tau, 0, \ldots, 0)
\end{array}$$

Weil $\sigma\tau = 0$ ist, ist jede mögliche Verknüpfung der Abbildungen vom Typ *I* oder *II* mit Abbildungen vom Typ *III* oder *IV* die Nullabbildung. Für $a = 1$ und $H = K$ wird der Kern einer Abbildung vom Typ *I* von τ erzeugt, ist also frei abelsch vom Rang 1. Aufgrund dieser Eigenschaften sind diese Abbildungen gut als Bausteine für die gesuchten Kettenkomplexe geeignet.

Der Kettenkomplex C wird am einfachsten durch eine induktive Konstruktion beschrieben. Wir verwenden zunächst unbestimmte natürliche Zahlen $b_{i,j}$, von denen wir später zeigen, daß sie geeignet für das gegebene Kongruenzensystem mit Koeffizienten $a_{i,j}$ wählbar sind.

Konstruktionsanfang:

$$C_2 = \mathbb{Z}, \quad C_1 = 0, \quad C_0 = \mathbb{Z}.$$

Die Randabbildungen sind die einzig möglichen.

r-ter Konstruktionsschritt: Sei der Kettenkomplex schon bis zur Dimension $2r$ konstruiert. Wir addieren zu den bisher vorhandenen Kettengruppen in den Dimensionen $2r+2, 2r+1, 2r, \ldots, r+2$ folgende direkte Summanden:

$$\begin{array}{llll} \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^r), & [\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^r)]^{b_{r,1}}, & [\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^r)]^{b_{r,2}}, & [\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^r)]^{b_{r,3}}, \\ & & [\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{r-1})]^{b_{r,4}}, & [\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{r-1})]^{b_{r,5}}, \\ & & [\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{r-2})]^{b_{r,6}}, & [\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{r-2})]^{b_{r,7}}, \\ & & [\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{r-3})]^{b_{r,8}}, & \ldots \\ & & \vdots & \vdots \end{array}$$

Die Randabbildungen bilden neue Summanden nichttrivial nur in Summanden aus diesem und dem letzten Konstruktionsschritt ab. Sie sind aus den Abbildungen vom Typ *I* und *II* bzw. vom Typ *III* und *IV* zusammengesetzt, je nachdem ob die Dimension gerade oder ungerade ist. Genauer entstehen sie nach folgendem Schema:

Dimension	$2k$ $\quad$ $2k-1$	$2k+1$ $\quad$ $2k$
Summanden des $(r-1)$ten Konstruktionsschritts	M_{2k-1}	M_{2k}
	$\overset{II}{\nearrow}$	$\overset{IV}{\nearrow}$
Summanden des r-ten Konstruktionsschritts	$N_{2k} \xrightarrow{I} N_{2k-1}$	$N_{2k+1} \xrightarrow{III} N_{2k}$

Nach dem n-ten Konstruktionsschritt ist der Kettenkomplex C vollständig. Für $H = \mathbb{Z}/p^{n-r}$ besteht der Kettenkomplex C^H genau aus den Summanden $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^m)$ mit $m \leq r$. Die Dimension von C^H ist

$$n(H) = 2(n-r+1).$$

Sei D der Kettenkomplex

$$D_{2n+2} \qquad D_{2n+1} \qquad D_{2n} \qquad D_{2n-1} \qquad \cdots$$

$$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^n) \xrightarrow{I} \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^n) \xrightarrow{III} \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{n-1}) \xrightarrow{I} \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{n-1}) \xrightarrow{III} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{III} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Er ist unabhängig von dem gegebenen Kongruenzensystem und hat die gleiche Dimensionsfunktion wie C.
Auf Seite 65 sind die Kettenkomplexe C und D für $n = 6$ angegeben.

Die Kettenkomplexe C und D erfüllen die Vorausetzungen 4.13 für den Satz von Hopf. Bis auf die homologischen Bedingungen folgt das aus Eigenschaften von Permutationsmoduln und der Wahl der Dimensionsfunktion.

Lemma 5.4. *Für jede Untergruppe H von G gilt*

$$H_{n(H)}(C^H) = H_{n(H)}(D^H) \cong \mathbb{Z} \quad \textit{und} \quad H_{n(H)-1}(C^H) \textit{ ist torsionsfrei.}$$

Beweis. Wir führen den Beweis nur für den Kettenkomplex C^H durch. Der Kettenkomplex D^H ist im Grunde ein Spezialfall.

Die oberste Randabbildung $\partial : C^H_{n(H)} \to C^H_{n(H)-1}$ von C^H ist eine Abbildung vom Typ *I*. Ihr Kern wird von $\tau \in \mathbb{Z}(G/H) = C^H_{n(H)}$ erzeugt, ist also isomorph zu $\mathbb{Z}$. Außerdem folgt, daß die Elemente $\partial(\xi^i), 1 \neq \xi^i \in G/H$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von Bild(∂) bilden. Diese Elemente lassen sich leicht zu einer Basis von $C^H_{n(H)-1} = [\mathbb{Z}(G/H)]^{b_{r,1}}$ ergänzen. Also ist Bild(∂) über $\mathbb{Z}$ ein direkter Summand von $C^H_{n(H)-1}$. Daraus folgt, daß die Homologie von C^H in der Dimension $(n(H)-1)$ torsionsfrei ist. □

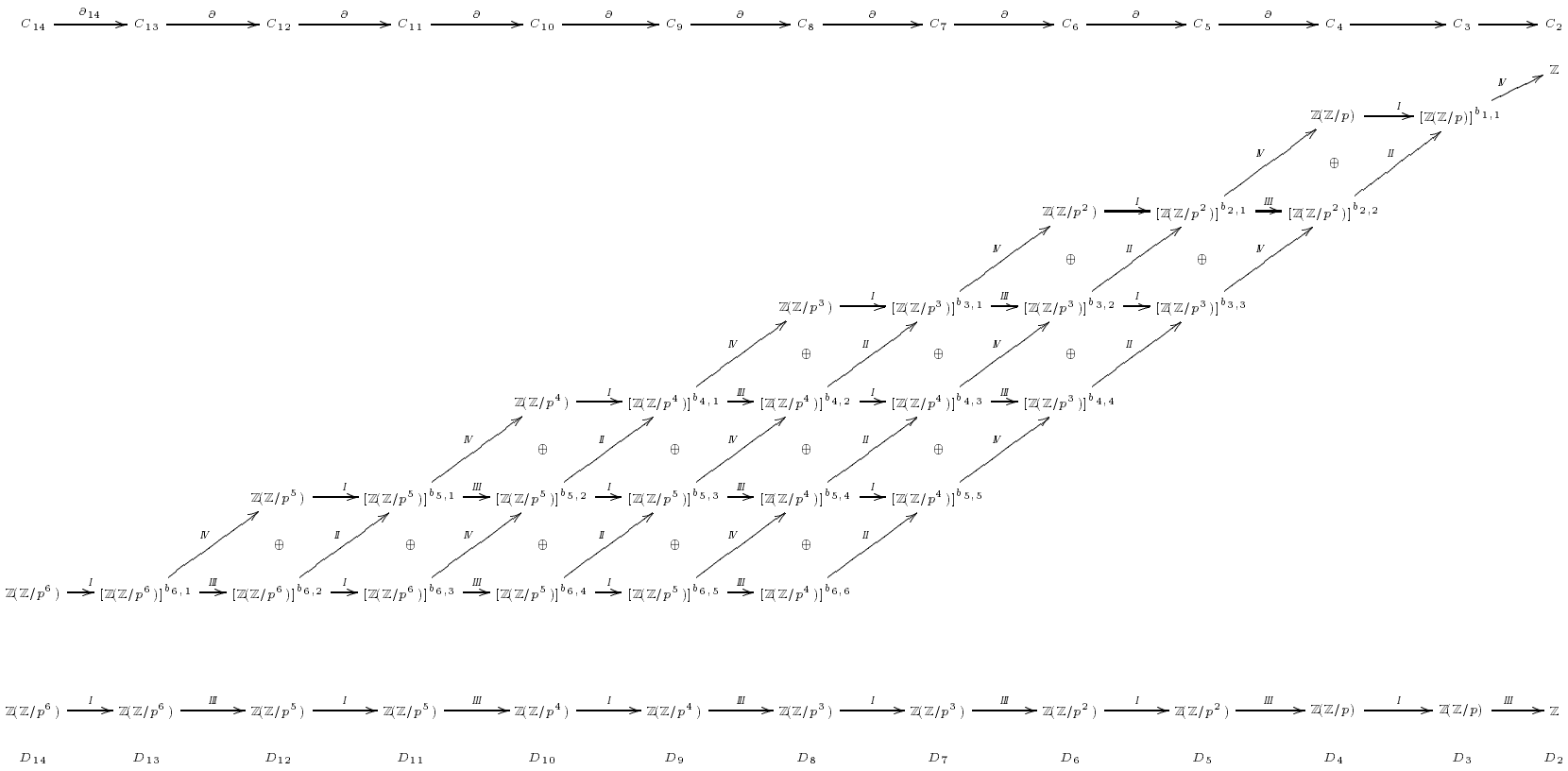
Als wesentlicher Teil des Beweises bleibt zu zeigen, daß die Zahlen $b_{i,j}$ so gewählt werden können, daß alle Abbildungsgrade von Kettenabbildungen $C \to D$ die Kongruenzen für M aus Satz 5.3 erfüllen. Da der Index von M in $C(G)$ gleich der Ordnung des Kokerns von $\varphi : [C, D]^\circ_G \to C(G)$ ist, folgt daraus schon, daß Bild $\varphi = M$ ist.

Für Untergruppen $K \subset H \subset G$ ist eine $\mathbb{Z}G$-Abbildung $f : [\mathbb{Z}(G/H)]^a \to \mathbb{Z}(G/K)$ durch die Bilder der Erzeuger ξ_ν der verschiedenen Bahnen $\nu = 1, 2, \ldots, a$ vollständig beschrieben. Ganz explizit ist $f(\xi_\nu)$ von der Form

$$f(\xi_\nu) = \sum_{\zeta \in G/K} n_{\zeta,\nu}\, \zeta, \quad \text{mit Zahlen } n_{\zeta,\nu} \in \mathbb{Z}.$$

Da die Erzeuger ξ_ν fest gewählt sind, bestimmen die Zahlen $n_{\zeta,\nu}$ die Abbildung f. Bezeichne

$$s_\nu(f) = \sum_{\zeta \in G/K} n_{\zeta,\nu} \qquad \text{und} \qquad s(f) = \sum_{\nu=1}^{a} s_\nu(f) = \sum_{\zeta,\nu} n_{\zeta,\nu}.$$


C_{14} ∂_{14} C_{13} ∂ C_{12} ∂ C_{11} ∂ C_{10} ∂ C_9 ∂ C_8 ∂ C_7 ∂ C_6 ∂ C_5 ∂ C_4 C_3 C_2
$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^6)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^5)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^4)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^3)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^2)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p)$ $\mathbb{Z}$
$[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^6)]^{b_{6,1}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^6)]^{b_{6,2}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^6)]^{b_{6,3}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^5)]^{b_{6,4}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^5)]^{b_{6,5}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^4)]^{b_{6,6}}$
$[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^5)]^{b_{5,1}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^5)]^{b_{5,2}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^5)]^{b_{5,3}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^4)]^{b_{5,4}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^4)]^{b_{5,5}}$
$[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^4)]^{b_{4,1}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^4)]^{b_{4,2}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^4)]^{b_{4,3}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^3)]^{b_{4,4}}$
$[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^3)]^{b_{3,1}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^3)]^{b_{3,2}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^3)]^{b_{3,3}}$
$[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^2)]^{b_{2,1}}$ $[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^2)]^{b_{2,2}}$
$[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p)]^{b_{1,1}}$
I II III IV
$\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^6)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^6)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^5)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^5)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^4)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^4)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^3)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^3)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^2)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^2)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p)$ $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p)$ $\mathbb{Z}$
D_{14} D_{13} D_{12} D_{11} D_{10} D_9 D_8 D_7 D_6 D_5 D_4 D_3 D_2

Sei $f : C \to D$ eine Kettenabbildung. Wir bezeichnen ihre Einschränkung auf den direkten Summanden der Kettengruppe C_m, der bei der induktiven Konstruktion als i-ter Summand dazugekommen ist, mit f_m^i. Mit dieser Bezeichnung ist $f^1_{n(H)} : C^H_{n(H)} \to D^H_{n(H)}$ die Einschränkung auf $C^H_{n(H)}$. Eine elementare Rechnung zeigt, daß $f^1_{n(H)}(\tau) = s(f^1_{n(H)})\tau$ ist. Da $H_{n(H)}(C^H)$ und $H_{n(H)}(D^H)$ von $\tau \in \mathbb{Z}(G/H)$ erzeugt werden, folgt

$$d(f^H) = s(f^1_{n(H)}).$$

Damit lautet die zu beweisende Aussage:

($\star$) *Zu gegebenen Koeffizienten $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ lassen sich Zahlen $b_{i,j} \in \mathbb{N}$ wählen, so daß für alle Kettenabbildungen $f : C \to D$ die folgenden Kongruenzen erfüllt sind:*

$$\begin{aligned}
s(f^1_{2n+2}) + a_{1,2}\, s(f^1_{2n}) + p\, a_{1,3}\, s(f^1_{2n-2}) + \ldots + p^{n-1} a_{1,n+1}\, s(f^1_2) &\equiv 0 \mod p^n \\
s(f^1_{2n}) + a_{2,3}\, s(f^1_{2n-2}) + \ldots + p^{n-2} a_{2,n+1}\, s(f^1_2) &\equiv 0 \mod p^{n-1} \\
\ddots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\
s(f^1_4) + a_{n,n+1}\, s(f^1_2) &\equiv 0 \mod p
\end{aligned}$$

In dieser Form werden wir die Aussage beweisen.

Die Kongruenzen für die Abbildungsgrade entstehen durch die Kommutativitätsbedingungen für Kettenabbildungen. Das folgenden Lemma ist das Fundament des Beweises.

Lemma 5.5. *Sei $G = \mathbb{Z}/p^n$. Für Zahlen $m \le n$ und $r = m$ oder $m-1$ gilt:*

(i) Wenn das Diagramm von $\mathbb{Z}G$-Moduln

$$\begin{array}{ccc}
[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^m)]^a & \xrightarrow{I} & [\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^m)]^b \\
\downarrow f & & \downarrow g \\
\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^r) & \xrightarrow{I} & \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^r)
\end{array}$$

kommutiert, dann gilt: $s_\nu(f) \equiv \delta_{1,\nu}\, s(g) \mod p^r$ *für* $\nu = 1, \ldots, a$.

(ii) Wenn das Diagramm von $\mathbb{Z}G$-Moduln

$$\begin{array}{ccc}
[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^m)]^a & \xrightarrow{II} & [\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^r)]^b \\
\downarrow f & & \downarrow g \\
\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{m-1}) & \xrightarrow{I} & \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{m-1})
\end{array}$$

kommutiert, dann gilt: $s_\nu(f) \equiv s_1(g) \mod p^{m-1}$ *für* $\nu = 1, \ldots, a$.

(iii) Wenn das Diagramm von $\mathbb{Z}G$-Moduln

$$\begin{array}{ccc}
[\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^m)]^a & \xrightarrow{III} & [\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^r)]^b \\
\downarrow f & & \downarrow g \\
\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{r-1}) & \xrightarrow{III} & \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{r-1})
\end{array}$$

kommutiert, dann gilt: $\quad s_\nu(f) = \delta_{1,\nu}\, p\, s(g) \quad$ *für* $\nu = 1, \ldots, a.$

(iv) Wenn das Diagramm von $\mathbb{Z}G$-Moduln

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{Z}(p^m)]^a & \xrightarrow{IV} & [\mathbb{Z}(p^{m-1})]^b \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^r) & \xrightarrow{III} & \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{r-1}) \end{array}$$

kommutiert, dann gilt: $\quad s_\nu(f) = s_1(g) p^{m-r} \quad$ *für* $\nu = 1, \ldots, a.$

Beweis. Ein koordinatenfreier Beweis scheint leider nicht möglich zu sein. Wir führen den Beweis nur für den Teil (i) durch, da sich die Beweismethode in den anderen Fällen wiederholt.

Die Homomorphismen f und g sind gegeben durch Darstellungen

$$f : \xi_\nu \mapsto \sum_{\zeta \in \mathbb{Z}/p^r} r_{\zeta,\nu}\zeta, \qquad g : \xi_\nu \mapsto \sum_{\zeta \in \mathbb{Z}/p^r} m_{\zeta,\nu}\zeta.$$

Durch Auswerten der Abbildungen auf den Erzeugern ξ_ν folgt, daß das Diagramm genau dann kommutiert, wenn für jedes ν und jedes ζ gilt:

$$r_{\zeta,\nu} - r_{\xi^{-1}\zeta,\nu} = [\delta_{1,\nu}](\sum_\mu m_{\zeta,\mu} - \sum_\mu m_{\xi^{-1}\zeta,\mu}).$$

Für $\nu \neq 1$ ist daher $r_{\zeta,\nu}$ unabhängig von $\zeta \in \mathbb{Z}/p^r$. Für $\nu = 1$ folgt, daß $r_{\zeta,1} - \sum_\mu m_{\zeta,\mu}$ unabhängig von $\zeta \in \mathbb{Z}/p^r$ ist. Durch Aufsummieren über $\zeta \in \mathbb{Z}/p^r$ folgt in beiden Fällen die Behauptung. □

Beweis der Behauptung $(\star)$. Die Abbildungsgrade $s(f_2^1), \ldots, s(f_{2r+2}^1)$ einer Kettenabbildung $f : C \to D$ hängen nur von dem bis zum r-ten Konstruktionsschritt gebildeten Unterkettenkomplex von C ab. Wir beweisen durch Induktion, daß die Zahlen $b_{r,1}, \ldots, b_{r,r}$ in dem r-ten Konstruktionsschritt so wählbar sind, daß für jede Kettenabbildung $f : C \to D$ die $(n+1-r)$-te Kongruenz gilt, d.h. mit $m := n+1-r$ gilt:

$$s(f_{2r+2}^1) + a_{m,m+1}\, s(f_{2r}^1) + p\, a_{m,m+2}\, s(f_{2r-2}^1) + \ldots + p^{r-1} a_{m,n+1}\, s(f_2^1) \equiv 0 \mod p^r.$$

Sei $r = 1$. Für ein kommutatives Diagramm

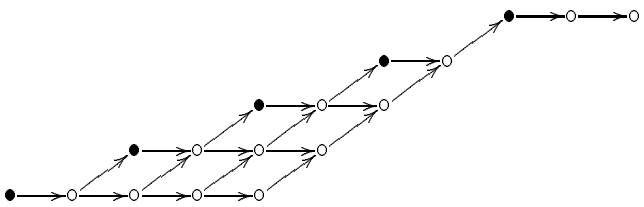
$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{I} & [\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p)]^{b_{1,1}} & \xrightarrow{IV} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow f_4^1 & & \downarrow f_3^1 & & \downarrow f_2^1 & & \downarrow & & \downarrow f_0^1 \\ \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{I} & \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{III} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

gelten nach Lemma 5.5 die Kongruenzen

$$s(f_4^1) \equiv s(f_3^1) \mod p, \qquad s_\nu(f_3^1) = s(f_2^1) \quad \text{für } \nu = 1, \ldots, b_{1,1}.$$

Wählt man also $b_{1,1} \in \mathbb{N}$ mit $b_{1,1} \equiv -a_{n,n+1} \mod p$, so ist die n-te Kongruenz erfüllt.

Sei $r > 1$. Wir fassen den bis zum r-ten Konstruktionsschritt gebildeten Kettenkomplex als gerichteten Graphen auf: Die Ecken sind die direkten Summanden der Kettengruppen, die jeweils in einem Konstruktionsschritt dazukommen; die Kanten sind die Abbildungen vom Typ $I - IV$. Die Ecken, die den Summanden $C^H_{n(H)}$ entsprechen, sind ausgezeichnet und werden als Randpunkte bezeichnet. Für $r = 4$ hat der Graph die folgende Form, wobei Randpunkte als ausgefüllte Punkten $\bullet$ angegeben sind:



Bezeichne Ω_k für $k = 1, \ldots, r$ die Menge der Kantenzüge, die nach dem Startpunkt in Dimension $2r+2$ als ersten Randpunkt den in Dimension $2k$ durchlaufen.

Wir betrachten nun einen einzelnen Kantenzug $\omega \in \Omega_k$ genauer. Durch eine Kettenabbildung f entsteht ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^r) & \xrightarrow{I} & [\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^r)]^{b_{r,1}} & \xrightarrow{III} & [\ldots] & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{IV} & \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{k-1}) \\
\downarrow{\scriptstyle f^1_{2r+2}} & & \downarrow{\scriptstyle f^1_{2r+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{2r}} & & & & \downarrow{\scriptstyle f^1_{2k}} \\
\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^r) & \xrightarrow{I} & \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^r) & \xrightarrow{III} & \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{r-1}) & \xrightarrow{I} & \cdots & \xrightarrow{III} & \mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{k-1})
\end{array}$$

Die Kommutativitätsbedingungen der einzelnen Kästchen liefern nach Lemma 5.5 Relationen

$$\begin{aligned}
s(f^1_{2r+2}) &\equiv s(f^1_{2r+1}) \mod p^r \\
s(f^1_{2r+1}) &= \begin{cases} b_{r,1}\, s(f^1_{2r}) & k = r \\ p\ s(f^2_{2r}) & k < r \end{cases} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Jede durchlaufene Abbildung vom Typ *III* liefert einen Faktor p. Ebenso jede Abbildung vom Typ *IV*, für die die Standgruppen in D echt größer als in C sind. Das sind alle Abbildungen vom Typ *IV*, bis auf die letzte, die nach $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{k-1})$ abbildet. Der Kantenzug ω enthält bis zu dem Randpunkt $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/p^{k-1})$ genau $(r-k)$ Kanten von diesem Typ. Insgesamt entsteht aus dem Diagramm eine Kongruenz der Form

$$s(f^1_{2r+2}) \equiv p^{r-k}\ \gamma_\omega\ s(f^1_{2k}) \mod p^r$$

mit einer Zahl γ_ω, die von dem Kantenzug ω abhängt.

Das gesamte kommutative Diagramm einer Kettenabbildung $f : C \to D$ ergibt die Kongruenz

$$s(f^1_{2r+1}) \equiv \sum_{k=1}^{r} p^{r-k} \Big(\sum_{\omega \in \Omega_k} \gamma_\omega \Big)\ s(f^1_{2k}) \mod p^r.$$

Es bleibt zu zeigen, daß die Zahlen $b_{r,1}, \ldots, b_{r,r}$ so gewählt werden können, daß die Kongruenzen

$$\sum_{\omega \in \Omega_k} \gamma_\omega \equiv -a_{m,n-k+2} \mod p^k$$

für $k = 1, \ldots, r$ gelten.

Für $k > 1$ bilden die Kantenzüge aus Ω_k - betrachtet nur bis zu dem Randpunkt in Dimension $2k$ - einen kleineren Graphen der gleichen Gestalt. Die Induktionsvoraussetzung läßt sich nicht unmittelbar anwenden, weil die Ecken dieses Graphen als $\mathbb{Z}G$-Moduln kleinere Standgruppen haben als in der Induktionsannahme. Allerdings hängen die Koeffizienten der Kongruenzen nach Lemma 5.5 nur von den Quotienten der Standgruppen in C und D ab. Außerdem sind die Ideale der Kongruenzen durch die Standgruppen in D bestimmt. Mit dieser zusätzlichen Überlegung folgt aus der Induktionsvoraussetzung, daß die Zahlen $b_{r,1}, \ldots, b_{r,r-1}$ so gewählt werden können, daß die Kongruenzen für $k = 2, \ldots, r$ gelten.

In Ω_1 ist der Kantenzug ω ausgezeichnet, der die rechte untere Ecke des Graphen (in einer Darstellung wie auf Seite 65) durchläuft, also immer so weit unten wie möglich verläuft. Dieser Kantenzug liefert einen Summanden $\gamma_\omega = b_{r,r}$. Durch geeignete Wahl von $b_{r,r}$ kann man erreichen, daß $\sum_{\omega \in \Omega_1} \gamma_\omega \equiv -a_{m,n+1} \mod p$ ist. □

Damit ist Satz 5.3 bewiesen. Für jede zyklische p-Gruppe $\mathbb{Z}/p^n$ sind also die Hopfmoduln der Menge $\mathcal{M}(n)$ als Homotopiegruppen von Kettenabbildungen realisiert. Für $n = 1$ und $n = 2$ sind das alle Hopfmoduln. Für $n \geq 3$ gibt es Hopfmoduln, die hiervon nicht erfaßt sind.

Literaturverzeichnis

[Ba 63] H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z. 82 (1963), 8 – 28

[Br 67] S. Brenner, Endomorphism algebras of vector spaces with distinguished sets of subspaces, J. Algebra 6 (1967), 100 – 114

[Br 74] S. Brenner, On four subspaces of a vector space, J. Algebra 29 (1974), 587 – 599

[Bu 74] M.C.R. Butler, On the classification of local integral representations of finite abelian p-groups, A. Dold and B. Eckmann (ed.), International Conference on Representations of Algebras, Ottawa 1974, Springer Lecture Notes in Mathematics 488, 1975, 54-71

[C,R 81] C. Curtis, I. Reiner, Methods of representation theory, Volume I, Wiley-Interscience, 1981

[C,R 87] C. Curtis, I. Reiner, Methods of representation theory, Volume II, Wiley-Interscience, 1987

[Da 63] E.C. Dade, Some indecomposable group representations, Ann. of Math. 77 no. 2, (1963), 406 – 412

[tD, P 78] T. tom Dieck, T. Petrie, Geometric modules over the Burnside ring, Invent. Math. 47 (1978), 273 – 283

[tD 79] T. tom Dieck, Transformation Groups and Representation Theory, Springer Lecture Notes in Mathematics 766, 1979

[tD, P 83] T. tom Dieck, T. Petrie, Homotopy representations of finite groups, Publ. math. I.H.E.S. 56 (1983), 129 – 169

[tD 85] T. tom Dieck, The Picard group of the Burnside ring, Journal für die reine und angewandte Mathematik 361 (1985), 174 – 200

[tD 87] T. tom Dieck, Transformation groups, de Gruyter, 1987

[Dr 69] A. Dress, A characterisation of solvable groups, Math. Z. 111 (1969), 213 – 217

[G, M 95] J.P.C. Greenlees, P. May, Equivariant stable homotopy theory, Handbook of Algebraic Topology, I.M. James (ed.), North Holland, 1995, 277 – 323

[H 77] H. Hauschild, Äquivariante Homotopie I, Arch. Math. 29 (1977), 158 – 165

[K 79] E. Kunz, Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie, Vieweg, 1979

[L,M,St 80] L.G. Lewis, J.P. May, M. Steinberger, Equivariant stable homotopy theory, Springer Lecture Notes in Mathematics 1213, 1980

[R-C 90] A. Raggi-Cardenas, Burnside rings of finite representation type, Bull. Austral. Math. Soc. 42 (1990), 247 – 251

[Se 70] G.B. Segal, Equivariant stable homotopy theory, Actes Congrès intern. Math. Tome 2 (1970), 59 – 63

[So 67] Louis Solomon, The Burnside algebra of a finite group, J. of Comb. Theory 2 (1967), 603 – 615

[Wh 78] G.W. Whitehead, Elements of Homotopy Theory, Springer Verlag, 1978

Lebenslauf:

27.8.1967 Geburt in Minneapolis, USA

Besuchte Schulen:

1973 – 77	Grundschulen in Freiburg und Wolfenbüttel
1977 – 79	Orientierungsstufe in Wolfenbüttel
1979 – 86	Gymnasium Große Schule in Wolfenbüttel
3. Juni 1986	Abitur

Studium:

Seit WS 86/87	an der Georg–August–Universität Göttingen
31. Oktober 1988	Vordiplom Mathematik
27. April 1992	Diplom Mathematik

Juni 1992 – Mai 1994 wissenschaftliche Mitarbeiterin am SFB 170.
Seit Juni 1994 wissenschaftliche Mitarbeiterin am Mathematischen Institut in Göttingen.

Göttingen, 10.3.1997 Ulrike Reichenbach