Varietät mit der Hardy-Littlewoodschen Eigenschaft

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
An-Wen Deng
aus Taipei/Taiwan

Göttingen 1997

D7
Referent: **Prof. S.J.Patterson PhD**
Korreferent: **Prof. Dr. E. Maus**
Tag der mündlichen Prüfung: **22. 4. 1997**

Für die Menschen auf der Welt,
die friedlich gegen Totalitätsregime
mutig protestieren

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Herrn Professor S.J. Patterson bedanken, daß er mir dieses interessante Thema vorgeschlagen und jahrelange sehr nützliche Gespräche mit mir geführt hat. Ohne seine massive Unterstützung wäre es undenkbar, daß diese Arbeit zustandegekommen ist.
Ich danke Herrn Professor Dr. E. Maus für seine Übernahme des Korreferentes.
Mein Dank gilt auch Herrn Professor Dr. M. Borovoi, daß er während seines Besuches in Göttingen seine Arbeit über die Hardy-Littlewoodsche Varietät und den russischen Artikel von Minchev mir erklärt hat.
Ebenfalls gebürt mein Dank auch Herrn Herbert Göbert, Frau Doris Hoffmann und Frau Elke Stamm dafür, daß sie bei der Sprachverbesserung geholfen haben.
Meine Eltern Herr K.S. Deng und Frau F.S. Chang haben mich beim Aufenthalt in Deutschland moralisch unterstützt. Dafür bedanke ich mich. Ich danke ebenfalls Frau Susanne Schünhoff. Ohne ihre jahrelange Begleitung wäre die Fertigstellung dieser Arbeit kaum vorstellbar.
Während meiner Promotion wurde ich vom Sonderforschungsbereich 170 "Geometrie und Analysis", der Deutschen Forschungsgemeinschaft und der Stiftung Georg-August-Universität/Dr. Berliner finanziell unterstützt. Ihnen allen bin ich zu Dank verpflichtet.

Varietät mit der Hardy-Littlewoodschen Eigenschaft

An-Wen Deng
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft (H-L-E) für Varietät in bezug auf die Folge der adelischen kompakten Mengen definiert. Diese Definition verallgemeinert die Begriffe, die die lokal-globale Beziehung beschreiben. Ein Kriterium für diese Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft wird im Theorem (1) angegeben. Das Resultat von Birch [Bir62] wird in Theorem (2) verallgemeinert. Viele klassische Resultate lassen sich gut im Sinne dieser Definition erklären. Einige damit verbundene Themen werden in diesem Artikel ebenfalls behandelt: Z.B. die Manin-Vermutung für Fano-Varietäten, das Kriterium für die absolute Konvergenz des Tamagawa-Maßes, die starke Approximationen und die akkumulierten Punkte.

Abstract

In this thesis the Hardy-Littlewood property is defined for varieties with respect to series of adelical compact sets. This definition generalizes the concepts which describe the local-global relations. A criterion for this Hardy-Littlewood property will be stated in theorem (1). The result of Birch [Bir62] is generalized in theorem (2). Many classical results are well explained in the sense of this defintion. Some related topics are discussed also in this paper, e.g. the Manin conjecture for Fano varieties, the criterion for the absolute convergence of Tamagawa measure, the strong approximations, and the accumulated points.

Inhaltsverzeichnis

1 Varietäten mit vielen Punkten **8**

1.1 Beschreibung der Lösungen der Diophantischen Gleichungen 8

1.3 Abgeschlossene Punkte auf Varietäten 9

1.4 Höhenfunktionen und Zählfunktionen 11

1.5 Zetafunktion bzgl. Zählfunktion 12

1.6 Varietät ohne akkumulierte Punkte 13

1.7 Hardy-Littlewoodsches System und Manin-Vermutung 14

2 Adelische Geometrie und Approximationseigenschaften **16**

2.1 Adelraum, Weils Skalarrestriktion und Hasse-Prinzip 16

2.3 Starke Approximation 17

3 Tamagawa-Maß und singuläre Reihe **20**

3.1 Eichform und lokales Tamagawa-Maß 20

3.2 Integration auf Fasern und Leray-Form 20

3.3 Globales Tamagawa-Maß 22

3.4 Singuläre Reihe, Reduktion und Henselsches Lemma 22

3.5 Absolute Konvergenz für die singuläre Reihe 24

4 Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft **26**

4.1 Geschichtliche Anmerkung 26

4.2 Kreismethode und die Folge der adelischen Kompakta 27

4.3 Konstruktion der Folge der beschränkten reellen Mengen 29

4.4 Gute Folge der adelischen Mengen 32

5 Theorem (1) und Axiomatisierung der Kreismethode **33**

5.1 Kreismethode und rationale Approximation 33

5.2 Exponentialsumme und die affine Gruppe 34

5.3 Formulierung des Theorems (1) 36

6 Beweis zum Theorem (1) **38**

6.1 Herleitung von Theorem (1) aus Satz (A) 38

6.2 Rationale Approximation, major arcs und minor arcs 40

6.3 Integral auf major arcs 41

6.4 Singuläre Reihe, singuläres Integral und Tamagawa-Maß 46

7 Weylsche Ungleichung und Theorem (2) **49**

7.1 Weylsche Summe 49

7.2 Beweisskizze des Theorems (2) 52

8 Weitere Eigenschaften für die Varietät X mit der H-L-E **55**

8.1 Starke Approximation in die Varietät X 55

8.2 Hardy-Littlewoodsches System und die Manin-Vermutung (Teil 2) 57

9 Literaturverzeichnis **60**

10 Lebenslauf **63**

1 Varietäten mit vielen Punkten

1.1 Beschreibung der Lösungen der Diophantischen Gleichungen

Ein Ring ist in dieser Arbeit immer kommutativ und unitär. Sei R ein Ring, der beispielsweise $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ sein könnte. Sei $\{f_1, ..., f_r\} \subset R[x_1, ..., x_s]$ ein Polynomsystem. Eine Diophantische Frage lautet, wie die gemeinsame Nullstellenmenge von $\{f_1, ..., f_r\}$ beschrieben werden kann. Für diesen Zweck kommt die Sprachweise der Schemata in Betrachtung. Sei (X, O_X) das vom Polynomsystem definierte affine Schema, wobei $X := V(f_1, ..., f_r) := Spec(R[x_1, ..., x_s]/ < f_1, ..., f_r >)$ der topologische Raum und die O_X die Strukturgarbe sind. Die gemeinsame Nullstellenmenge des Polynomsystems $\{f_1, ..., f_r\}$ in R werde mit $X(R)$ bezeichnet. Wenn R ein algebraisch abgeschlossener Körper ist, dann ist $X(R)$ Varietät im klassischen Sinne. (vgl. [Har77, $S.78, prop.2.6.$]) Es ist bekannt (siehe beispielsweise bei [Mu69, $S.158$]):

Definition und Bemerkung 1.2 *Sei $X := Spec(\mathbb{Z}[T_1, ..., T_s]/ < f_1, .., f_r >)$ affines $\mathbb{Z}$-Schema. Sei der Ring R eine $\mathbb{Z}$-Algebra. Dann läßt sich $X(R)$, d.h. die Menge der R-wertigen Punkte auf X oder die Lösungsmenge der Diophantischen Gleichungen $f_1, ..., f_r$ im Ring R mit der Menge*

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}-Alg.}(\mathbb{Z}[T_1, ..., T_s]/ < f_1, ..., f_r >, R)$$

oder

$$\mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}-Sch.}(Spec(R), Spec(\mathbb{Z}[T_1, ..., T_s]/ < f_1, ..., f_r >))$$

identifizieren, indem die Bijektion $\phi : \mathbf{Hom}_{\mathbb{Z}-Alg.}(\mathbb{Z}[T_1, ..., T_s]/ < f_1, ..., f_r >, R) \to X(R)$ durch $\phi(\alpha) := (c_1, .., c_s)$ für $\alpha(T_i) = c_i \quad \forall i = 1, ..s$ betrachtet wird.

Diese Aussage läßt sich auf die allgemeinen Schemata übertragen. Beispiele sind $X(\mathbb{Z})$, $X(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, $X(\mathfrak{O})$, $X(\mathbb{Z}_p)$, wobei $\mathfrak{O}$ eine endliche Ringerweiterung von $\mathbb{Z}$ ist. Durch Basiswechsel bekommt man Schemata $X \otimes_{Spec(\mathbb{Z})} Spec(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, $X \otimes_{Spec(\mathbb{Z})} Spec(\mathfrak{O})$, $X \otimes_{Spec(\mathbb{Z})} Spec(\mathbb{Z}_p)$. Wenn X eine K-Varietät ist und L eine Körpererweiterung von K ist, kann $X(L)$, die Menge der L-rationalen Punkte, auch in einer ähnlichen Weise mit der Menge $\mathbf{Hom}_{K-Sch.}(X, Spec(L))$ identifiziert werden.

In dieser Arbeit wird eine Varietät X über einem Körper K oder kurz als K-Varietät so verstanden, daß X ein separables geometrisch reduziertes Schema vom endlichen Typ über K ist. In der Literatur wird ein Schema vom endlichen Typ über einem Körper manchmal als Schema vom geometrischen Typ bezeichnet. Sei R eine endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra. Ein R-Schema vom endlichen Typ wird manchmal auch als Schema vom arithmetischen Typ benannt.

Wie in der Definition (1.2) läßt sich der Adelraum der K-Varietät X definieren durch

$$X(\mathbb{A}) = \mathbf{Hom}_{K-Sch.}(Spec(\mathbb{A}), X), \tag{1}$$

wobei der Adelring $\mathbb{A} := \mathbb{A}_K$ als K-Algebra betrachtet wird (Weil hat $X(\mathbb{A})$ als eingeschränkes topologisches Produkt definiert, s. Kap.(2)).

Sei $\mathfrak{O}$ der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ im Zahlkörper K. Wenn X ein projektives $\mathfrak{O}$-Schema ist, so gilt $X(K) = X(\mathfrak{O})$. Die Menge der K-rationalen Punkte $X(K)$ ist nichts anderes als die Fixpunktmenge der klassischen Varietät $X(\overline{\mathbb{Q}})$ unter der Operation der Galois-Gruppe $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/K)$; dies ist eine Folgerung aus Hilbert 90. Die projektiven Schemata bzw. Varietäten werden oft sowohl von den Geometern als auch von den Zahlentheoretikern als zentrale Gegenstände betrachtet.

1.3 Abgeschlossene Punkte auf Varietäten

Sei R ein Bewertungsring in seinem Quotientenkörper K. Dabei ist K nicht immer ein algebraisch abgeschlossener Körper, sondern eher ein globaler Körper, ein $\wp$-adischer Körper, ein endlicher Körper oder sogar ein entsprechender Ring, beispielsweise $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_p$. Die Menge der R-wertigen Punkte auf einer K-Varietät ist ein zentrales Thema der Diophantischen Geometrie. Wenn R kein Körper ist, wird X als R-Schema vom arithmetischen Typ bezeichnet. J.P. Serre hat [Serre90, $S.121$] notiert,

daß eine irreduzible aber nicht geometrisch irreduzible Varietät $X_{/K}$ die folgende Eigenschaft besitzt: Es existiert eine echte Zariski-abgeschlossene Untervarietät $U \subset X$, so daß $X(K) = U(K)$ gilt. Wenn außerdem X normal ist, ist $X(K) = \emptyset$.

Deswegen wird zur Vereinfachung im folgenden angenommen, daß K-Varietäten geometrisch irreduzibel sind, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist. Falls X ein affines oder projektives $\mathbb{Z}$-Schema ist, können stufenweise die folgenden Fragen gestellt werden:

(1). Ist $X(\mathbb{Z})$ leer oder nicht?
(2). Ist $X(\mathbb{Z})$ unendlich oder endlich?
(3). Gibt es eine asymptotische Aussage über $X(\mathbb{Z})$? Und wenn ja, wie sieht sie aus?
(4). Sind die $\mathbb{Z}$-wertigen Punkte auf X in gewissem Sinne gleichmäßig verteilt?

Im Fall, daß X eine nicht-singuläre geometrisch integrale Kurve über $\mathbb{Z}$ ist, läßt sich die Tatsache zusammenfassen:

Sei X eine ebene nicht-singuläre Kurve des Grades $d \geq 2$ über $\mathbb{Z}$; d.h. X wird von einem absolut irreduziblem Polynom des Grades d über $\mathbb{Z}$ erzeugt. Sei $X(\mathbb{C})$ die entsprechende Riemannsche Fläche. Sei g das Geschlecht der projektiven Hülle von $X(\mathbb{C})$.
(1) *X ist projektiv. Sei $H(x)$ die Höhe von $x = [x_0 : x_1 : x_2] \in X(\mathbb{Z})$ definiert durch $H(x) := \frac{\max_i |x_i|}{ggT(x_0,x_1,x_2)}$. Sei $N := \#\{x \in X(\mathbb{Z}) | H(x) \leq T\}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} N &\ll T^{2/d} \text{ für } g = 0 \\ &\ll (\log T)^{r/2} \text{ für } g = 1 \text{ und } r := Rang X(\mathbb{Z}) \text{ (Néron; vgl. [Serre90, S.54, th.])} \\ &\ll 1 \text{ für } g \geq 2 \text{ (Faltings).} \end{aligned}$$

(2) *X ist affin. Sei $\overline{X}$ die projektive Hülle von X. Sei $X_\infty = \overline{X} \setminus X$. Sei $N := \#\{x \in X(\mathbb{Z}) | \max_{1=1,2} |x_i| \leq T\}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} N &\ll 1 \text{ für } g \geq 1 \text{ oder für } g = 0 \text{ mit } \#X_\infty(\mathbb{C}) \geq 3 \text{ (Siegel; vgl. [Serre90, S.94 - 107])} \\ &\ll \log T \text{ für } g = 0 \text{ mit } \#X_\infty(\mathbb{C}) = 2 \text{ (Pellsche Gleichung)} \\ &\ll T^{1/2} \text{ für } g = 0 \text{ mit } \#X_\infty(\mathbb{C}) = 1 \ . \end{aligned}$$

Wenn X nicht als nicht-singulär vorausgesetzt wird, kann mittels der Normalisierung auch die entsprechende Aussage herauskommen. Dieser Zusammenhang kann auch in der anderen Version, beispielsweise wie in [Serre90, S.5 - 6], dargestellt werden. Für die Einzelheiten sei auf den entsprechenden Literaturhinweis bei [Serre90] hingewiesen.

Dabei ist es wichtig anzumerken, daß für die kompakte Riemannsche Fläche $X(\mathbb{C}) \subset \mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ des Geschlechtes g und für den Divisor D, der aus mehr als 2-2g verschiedenen Punkten besteht, stets

die Riemannsche Fläche $X \setminus D$ hyperbolisch ist. Beispielsweise ist $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{3 \text{ Punkte}\}$ hyperbolisch. (vgl. [Lang87, $S.114, th(4.1)$] und [Lang87, $S.118$])

Die Situation der eindimensionalen Varietäten ist insofern bekannt. Hinsichtlich mehrdimensionaler Varietäten gibt es bezüglich der Fragestellung (2) eine Reihe von Vermutungen von S. Lang [Vo87, $S.46-51$]; eine davon besagt,

daß die hyperbolische Varietät $X_{/K}$ höchstens endlich viele K-rationale Punkte besitzen sollte, wobei K ein Zahlkörper ist.

Hier konzentrieren wir uns auf den Fall, daß die Varietäten unendlich viele ganzzahlige bzw. rationale Punkte besitzen. Anscheinend lassen sich viele solche Varietäten als die mehrdimensionale Verallgemeinerung der Kurve $X_{/\mathbb{Z}}$ mit $g = 0$ und $\#X_\infty(\mathbb{C}) < 3$ betrachten. Insofern ist der Grundkörper normalerweise als globaler Körper vorausgesetzt. Außerdem sind die asymptotischen Aussagen über die rationalen Punkte der Varietät über einem endlichen Körper bekannt. Sie sind verbunden mit der Weil-Vermutung und der Lefschetz-Spurfomel (siehe [FK87], [Del74] und [Hoo91]). Dabei ist die Lefschetz-Spurformel für das Schema $X/\mathbb{F}_q$:

$$\#X(\mathbb{F}_q) = \sum_{i=0}^{2\dim X} (-1)^i Tr(Frob_q | H_c^i(X \otimes_{Spec(\mathbb{F}_q)} Spec(\overline{\mathbb{F}_q}), \mathbb{Q}_l))$$

mit $ggT(l,q) = 1$. Wenn der Grundkörper K ein $\wp$-adischer Körper ist, können mit Hilfe des Henselschen Lemmas die obigen Fragen auch teilweise beantworten werden, indem dem nicht-singulären K-Unterschema ein Haar-Maß zugeordnet wird. Aber wenn der Grundkörper ein globaler Körper ist, sind viele Eigenschaften bisher nicht bekannt.

Sei K ein Zahlkörper. Sei $\mathfrak{O}$ der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in K. Wir stellen uns die Frage: Welche geometrische Eigenschaften führen dazu, daß die K-Varietäten eher viele Punkte besitzen? Zuerst ist es klar, daß die projektiven K-rationalen, projektiven K-unirationalen Varietäten und die projektiven Varietäten, die eine K-rationale Kurve tragen, unendlich viele K-rationale Punkte besitzen.

Ein konkretes Beispiel ist, daß die projektive Hyperfläche, durch eine K-quadratische Form erzeugt, mit einem K-rationalen Punkt stets K-rational ist und damit unendlich viele K-rationale Punkte besitzt. Die projektive Varietät $V_2 \subset \mathbf{P}^2$, die durch $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ erzeugt wird, ist nicht $\mathbb{Q}$-rational, denn es gilt $V_2(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Solche Varietäten werden und wurden von den Geometern intensiv untersucht. S. Mori hat bewiesen,

die nicht-singuläre Fano-Varietät wird durch $\overline{K}$-rationale Kurven überdeckt. [$CKM88, S.9-16$]

Es wird deswegen erwartet, daß die nicht-singuläre Fano-Varietät unendlich viele L-rationale Punkte besitzt, wobei L eine hinreichend große Körpererweiterung von K ist. Eine Aussage, die von der italienischen Schule von Predonzan nach der Methode von Morin bewiesen wurde, lautet,

daß die allgemeinen vollständigen Durchschnitte mit hinreichend vielen Variablen unirational sind. [$Roth55, S.44-46$]

Beispielsweise ist die nicht-singuläre projektive kubische Hyperfläche der Dimension ≥ 2, die durch eine K-kubische Form erzeugt wird und eine K-rationale Gerade als Untervarietät besitzt, stets

K-unirational.

Über nicht-singuläre Fano-Varietäten über einem Zahlkörper wird von Manin u.a. eine asymptotische Vermutung aufgestellt, die mit der Höhenfunktion bzgl. antikanonischem Divisor dargestellt wird. Die vollständigen Durchschnitte, deren Erzeugendensysteme von W. M. Schmidt Hardy-Littlewoodsche Systeme von [Sch85] genannt werden, stützen diese Vermutung. Das Hardy-Littlewoodsche System ist der Gegenstand, mit dem sich diese Arbeit beschäftigt. Bevor weiter darauf eingegangen werden kann, sollen einige Begriffe erklärt werden.

1.4 Höhenfunktionen und Zählfunktionen

Für unseren Zweck sind die Eigenschaften aus der Maschinerie der Höhenfunktionen und einige damit verbundene Begriffen im folgenden zusammengefaßt, deren Einzelheiten sich beispielsweise bei [Lang83, $Ch.4\&Ch.10$] oder bei [Sil86] finden lassen.

Auf der projektiven Varietät lassen sich die Höhenfunktionen definieren. Sei K ein globaler Körper. Sei S_K die Stellenmenge. Die v-Metriken $|.|_v$ für $v \in S_K$ seien so normalisiert, daß beispielsweise im Zahlkörperfall $|x|_v := |x|$ für $K_v = \mathbb{R}$, $|x|_v = |x|^2$ für $K_v = \mathbb{C}$ und $|x|_v = |N_{K_v/\mathbb{Q}_p}(x)|_p$ für $v|p$ gesetzt wird, und damit die Produktformel $\prod_{v \in S_K} |k|_v = 1$ für $k \in K^*$ gilt. Sei $X_{/K}$ eine normale projektive Varietät, d.h. $X \subset \mathbf{P}^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $P = [x_0 : .. : x_n] \in X(K)$ ist die kanonische Höhenfunktion auf $X(K)$ definiert durch

$$H(P) := \prod_{v \in S_K} \max_i |x_i|_v.$$

Im allgemeinen läßt sich die Höhenfunktion in bezug auf eine verschiedene projektive Einbettung definieren. Seien D ein (Cartier-)Divisor auf X und $[D]$ dessen Divisorenklasse. Sei $O(D)$ die D zugehörige invertierbare Garbe bzw. Geradenbündel. Wenn D genau ein sehr ampler (Cartier-) Divisor ist, dann ist der Morphismus $s := [s_0 : ... : s_N] : X \to \mathbf{P}^N$ eine Einbettung, wobei $s := \{s_0, ..., s_N\}$ eine Basis für $H^0(X, O(D))$ ist. In diesem Fall definiert sich die Höhenfunktion bzgl. der Einbettung s durch

$$H_s(P) := \prod_{v \in S_K} \max_i |s_i(P)|_v,$$

wobei $P \in X(K)$ ist. Sei s' eine andere Basis für $H^0(X, O(D))$. Es läßt sich zeigen, daß $H_s \ll\gg H_{s'}$ gilt. (vgl. [Lang83, $S.265, Th.4.3$.]) Daher ist es sinnvoll, $H_{O(D)} := H_{[D]} := H_D := H_s$ zu bezeichnen, wobei $H_{O(D)}$ bis auf $\exp(O(1))$ eindeutig definiert ist. Die so definierte Höhenfunktion wird auch Weil-Höhenfunktion genannt. Außerdem kann der Begriff der Höhenfunktionen mittels der metrisierten Geradenbündel definiert und verallgemeinert werden (siehe [Sil86, $S.161 - 163$]).

Definition 1.4.1 *Sei R ein abzählbarer Ring. Sei X ein R-Schema. Sei $\phi : X(R) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nicht-negativ reellwertige Funktion. ϕ heißt eine Zählfunktion (counting function) für $X(R)$, falls für T mit $0 \leq T < \infty$ stets $\#\{x \in X(R) | \phi(x) < T\} < \infty$ gilt.*

Es läßt sich zeigen, daß die Höhenfunktion H_D auf der projektiven Varietät für einen sehr amplen Divisor D stets eine Zählfunktion ist. (vgl. [Sil86, $S.155, Cor.3.4$.])

1.5 Zetafunktion bzgl. Zählfunktion

Im folgenden wird zunächst die Manin-Zetafunktion eingeführt (vgl. [FMT89]). Sei X eine projektive Varietät über einem Zahlkörper K. Sei $U \subset X$ eine Zariski-offene Untermenge. Sei L ein sehr ampler (Cartier-)Divisor auf X. Sei H_L eine Höhenfunktion bzgl. dem Divisor L. Die Manin-Zetafunktion ist definiert durch

$$Z(U, L, s) := \sum_{x \in U(K)} \frac{1}{H_L(x)^s}.$$

Sei $\beta_U := \inf\{r | Z(U, L, s) \text{ konvergent für } \mathfrak{Re}(s) \geq r\}$ deren Konvergenzabszisse. Insbesondere wenn $|U(K)| = O(1)$ ist, setzt man $\beta_U := -\infty$. Statt einer Höhenfunktion in bezug auf den sehr amplen Divisor wird eine Zählfunktion in Betracht gezogen. Sei R ein Ring. Sei X ein R-Schema. Sei $d : X(R) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Zählfunktion, d.h. für $0 \leq T < \infty$ gilt $|d^{-1}([0, T])| < \infty$. Analog zur Manin-Zetafunktion wird eine verallgemeinerte Zetafunktion bzgl. der Zählfunktion für die Zariski-offene Menge U definiert:

$$Z(U(R), d, s) := \sum_{x \in U(R) \setminus d^{-1}(0)} \frac{1}{d(x)^s}$$

Eine Aussage lautet:

Satz 1.5.1 *Sei d eine Zählfunktion auf $X(R)$. Sei U eine Zariski-offene Menge in X. Sei $\beta := \beta_U(d) := \inf\{r : Z(U(R), d, s)$ konvergent für $\mathfrak{Re}(s) \geq r\}$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$*

$$\beta = \limsup_{T \to \infty} \frac{\log N(U, d, T)}{log T}, \text{ d.h. } N(U, d, T) = O(T^{\beta+\varepsilon}) \text{ und } N(U, d, T) = \Omega(T^{\beta-\varepsilon}),$$

wobei $N(U, d, T) := \#\{x \in U(R) | d(x) \leq T\}$ ist. Insbesondere ist $|U(R)| < \infty$, dann ist $\beta = -\infty$.

(vgl. [BM90, $S.28 - 29$, (1.3)]. Der Beweis dafür ist standardmäßig; es sei beispielsweise auf [HR15, $S.6 - 7$] hingewiesen.)

Zwei Zählfunktionen f und g von $U(R) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißen äquivalent, wenn es Konstanten C_1 und C_2 aus $\mathbb{R}_{>0}$ gibt, so daß für jeden ganzzahligen Punkt $x \in U(R) \setminus (f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0))$ stets $C_1 f(x) \leq g(x) \leq C_2 f(x)$ gilt.

Bemerkung 1.5.2 Sei R ein Ring. Sei X ein R-Schema. Sei d eine Zählfunktion auf X. Normalerweise wird für d eine euklidische Norm angenommen, wenn X ein affines Schema ist.
Wenn R ein Körper ist und wenn X eine projektive Varietät über R ist, wird d als die Höhenfunktion H_D oder die logarithmische Höhenfunktion $h_D := \log H_D$ für einen sehr amplen Divisor genommen. Eine häufig auftretende asymptotische Formel für $X(R)$ ist

$$N(X(R), d, T) \sim C T^a (\log T)^b,$$

wobei a, b und $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sind. In diesem Fall gilt

$$\beta_X(d) = \limsup_{T \to \infty} \frac{\log N(X(R), d, T)}{\log T} = \lim_{T \to \infty} \frac{\log N(X(R), d, T)}{\log T}.$$

Im folgenden Korollar werden einige Eigenschaften dargestellt.

Korollar 1.5.3 *(1). $\beta(d^m) = \frac{\beta(d)}{m}$.*
(2). Aus $N(U(R), d, B) \sim C(\log B)^r$ folgt $N(U(R), \log d, B) \sim C' B^r$.

Wenn die Eigenschaften der Zetafunktion besser bekannt wären, könnte möglicherweise eine bessere asymptotische Aussage angegeben werden.

Beispiel 1.5.4 *(1). Sei $V := V(x_1^2 - Dx_2^2 - 1)$ das $\mathbb{Z}$-Schema durch die Pellsche Gleichung mit D quadratfrei erzeugt. Sei $d := \max_i |x_i|$. Dann gilt $N(V(\mathbb{Z}), d, B) \sim C \log B$. Sicherlich ist V auch $\mathbb{Q}$-rationale Kurve. Aber es gilt $\beta(d) = 0$.*

(2). Sei $V_3 := V(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2x_3)$ das $\mathbb{Z}$-Schema durch die Markoff-Gleichung erzeugt. Sei $d := \max_i |x_i|$. Dann gilt $N(V_3(\mathbb{Z}), d, B) \sim C_3(\log B)^2$.

(siehe [Sil95])

Beispiel 1.5.5 *Sei K ein Zahlkörper. Sei A eine abelsche Varietät mit der projektiven Einbettung $s : A \to \mathbf{P}^n$. Sei $d := \log H_s$. Dann gilt $N(A(K), d, B) \sim CB^{r/2}$, wobei $RangA(K) = r$. Daher gelten $\beta(H_s) = 0$ und $\beta(\log H_s) = r/2$.*

(s. [Serre90, $S.54, Th.$])

Bemerkung 1.5.6 Sei ϕ eine euklidische Norm. Sei X affin über $\mathbb{Z}$. Wenn es eine Einbettung $\pi : \mathbf{A}^1 \to X$ über $\mathbb{Z}$ gibt, dann ist $\beta_X(\phi) > 0$. Insofern ist auch klar, daß V_3 keine solche Einbettung trägt.

1.6 Varietät ohne akkumulierte Punkte

Für unseren Zweck ist die akkumulierte Menge wie folgt definiert.

Definition 1.6.1 *Sei R ein Ring. Sei X eine affine bzw. projektive Varietät über R. Sei d eine Zählfunktion auf X. Sei $U \subset X$ Zariski-offen. Man setze*

$$\beta(U, d) := \limsup_{T \to \infty} \frac{\log N(U(R), d, T)}{\log T}.$$

Wenn $\beta(U, d) < \beta(X, d)$ ist, heißt die Zariski-abgeschlossene Menge $V := X \setminus U$ als die d-akkumulierte Menge in X. Sei eine Kette der Zariski-offenen Mengen

$$X^{proj} =: U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots.$$

konstruiert, so daß $U_i \setminus U_{i+1}$ die minimale akkumulierte Menge in U_i ist. Dann heißt eine solche Kette der Zariski-offenen Mengen eine arithmetische Stratifikation bzgl. der Zählfunktion d.

Beispiel 1.6.2 (Serre) *Betrachtet werde die Aufblasung $X_{/\mathbb{Q}}$ von $\mathbf{P}^2_{\mathbb{Q}}$ an Punkt $O := [0:0:1]$ mit $\pi : X \to \mathbf{P}^2_{\mathbb{Q}}$. Sei H die Höhenfunktion in bezug auf den antikanonischen Divisor $-K_X$. Sei $U := X \setminus \pi^{-1}(O)$. Basierend auf Schaunels Resultat [Scha79] kann gezeigt werden, daß $N(U(\mathbb{Q}), H, T) \ll\gg T \log T$ und $N(X(\mathbb{Q}), H, T) \ll\gg T^2$ sind. Daher ist die exzeptionale Kurve $E := \pi^{-1}(O)$ eine d-akkumulierte Menge in X.*

(siehe [Serre90, *ch.*2])

1.7 Hardy-Littlewoodsches System und Manin-Vermutung

In [Sch85] wird das Hardy-Littlewoodsche System für ein Polynomsystem $P := \{f_1, ..., f_r\} \subset \mathbb{Z}[x_1, ..., x_s]$ definiert; im folgenden heißt das Polynomsystem P Hardy-Littlewoodsches System, wenn es die folgende asymptotische Eigenschaft erfüllt:

$$N(X(\mathbb{Z}), |.|, T) \sim \mathfrak{I}(X, T)\mathfrak{S}(X),$$

wobei $X := Spec(\mathbb{Z}[x_1, .., x_s]/ < f_1, ..., f_r >)$ das affine Schema, die euklidische Norm durch $|(x_1, .., x_s)| = \max_i |x_i|$ definiert, $\mathfrak{I}(X, T)$ ist das singuläre Integral und $\mathfrak{S}(X)$ die singuläre Reihe (das Produkt der lokalen Dichtigkeiten) ist. Zu unserem Zweck ist günstig, das singuläre Integral mit der Leray-Form zu definieren. Wenn das Verschwindungsideal $I(X) :=< f_1, ..., f_r >$ exakt von $r = s - \dim X$ Polynomen erzeugt ist, heißt X vollständiger Durchschnitt. Es wird beim Hardy-Littlewoodschen System $\{f_1, ..., f_r\}$ erwartet, daß für erzeugende homogene Polynome $f_1, .., f_r \in \mathbb{Z}[x_1, .., x_s]$ mit $\deg f_i = d_i$ die asymptotische Formel gilt:

$$N(X(\mathbb{Z}), |.|, T) \sim \mathfrak{I}(X, T)\mathfrak{S}(X) = CT^{s-\sum_{i=1}^r d_i}. \tag{2}$$

Wenn außerdem $C \neq 0$ ist, heißt P echtes (proper) Hardy-Littlewoodsches System.

Definition 1.7.1 *Sei $X = \bigcap_i V(f_i) \subset \mathbf{P}^{s-1}$ ein projektiver vollständiger Durchschnitt, wobei sich die geometrisch irreduziblen Hyperflächen $V(f_i)$ des Grades d_i in jedem abgeschlossenen nicht-singulären Punkt transversal schneiden; d.h., nach dem Bézout-Satz für projektive Räume [Har77, Ch.1, Th.7.7] gelte $\deg(X) = \prod_{i=1}^r \deg f_i$. Ferner darf wegen des Bertini-Satzes [Har77, S.179, Th.8.18] angenommen werden, daß jede Varietät Y mit $Y = \bigcap_{1 \le i_1 \le .. \le i_k \le r} V(f_{i_j})$ geometrisch irreduzibel sei. Dann heißt X vollständiger Durchschnitt des Multigrades $(d_1, .., d_r)$.*

Beispiel 1.7.2 *Sei $V_3 := V(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) \subset \mathbf{A}^4_{\mathbb{Z}}$. Sei die euklische Norm wie oben gegeben. Es ist klar $V_3(\mathbb{Z}) \supset \{x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\} = \mathbb{Z}^2$. Daher gilt*

$$N(V_3(\mathbb{Z}), |.|, T) \ll N(\mathbf{A}^2_{\mathbb{Z}}, |.|, T) \gg\ll T^2.$$

Sei Varietät V_d durch Diagonalform $\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^d = 0$ bestimmt, wobei $\epsilon_i = \pm 1$ und nicht alle gleich sind. Sei n eine gerade natürliche Zahl. Dann ist der $n/2$-dimensionale lineare Raum $H := \cap_{i=1}^{n/2} V(\epsilon_{2i-1}x_{2i-1} + \epsilon_{2i}x_{2i})$ ein Teilmenge von V_d. Dabei ist $N(H(\mathbb{Z}), |.|, T) \ll\gg T^{n/2}$. Daher ist V_d auf keinen Fall ein Hardy-Littlewoodsches System, falls $n < 2d$ ist, denn sonst wäre $N(V_d(\mathbb{Z}), |.|, T) \ll\gg T^{n-d} \gg T^{n/2}$. Wenn n ungerade ist, gilt auch eine ähnliche Aussage.

Wie vorher gesagt, stützt das Hardy-Littlewoodsche System die Manin-Vermutung. Die meines Erachtens raffinierteste Dartellung der Manin-Vermutung hat Peyre [Peyre95] angegeben. Zuerst wollen wir die Definition für die Fano-Varietät angeben.

Definition 1.7.3 *Sei X eine nicht-singuläre projektive Varietät. Sei $-K_X$ der zugehörige antikanonische Divisor. X heißt eine Fano-Varietät, falls der antikanonische Divisor $-K_X$ ampel ist.*

Aber hier wollen wir eine gröbere Darstellung der Manin-Vermutung geben:

Vermutung 1 (Manin) *Sei Y eine nicht-singuläre Fano-Varietät über dem Zahlkörper K mit dem sehr amplen antikanonischen Divisor $-K_Y$. Sei H eine Höhenfunktion in bezug auf den Divisor $-K_Y$. Sei $Pic(Y)$ die Picard-Gruppe. Sei U eine Zariski-offene Menge aus Y, die keine H-akkumulierte Menge enthält. Für hinreichend große Körpererweiterung L/K gilt*

$$N(U(L), H, T) \sim CT(\log T)^{Rang(PicY(\mathbb{C}))-1}, \tag{3}$$

wobei C eine Konstante ist, die nur von der projektiven Einbettung $\phi_{|-K_Y|}$ abhängt.

Satz 1.7.4 *Sei $Y/\mathbb{Q}$ eine nicht-singuläre Fano-Varietät der Dimension > 2, die gleichzeitig ein vollständiger Durchschnitt ist. Das Erzeugendensystem von Y sei ein Hardy-Littlewoodsches System. Sei H eine Höhenfunktion in bezug auf den Divisor $-K_Y$. Dann gilt*

$$N(Y(\mathbb{Q}), H, T) \sim CT.$$

Beweis. (s. Kap. (8))

Bemerkung 1.7.5 Wenn Y über dem Zahlkörper K definiert ist, dann wird statt Y die Skalarrestriktion $W := R_{K/Q}(Y)$ betrachtet; die Definition der Skalarrestriktion wird in einem späteren Paragraphen behandelt. Wenn darüber hinaus der Affinkegel für W auch ein Hardy-Littlewoodsches System ist, so läßt sich der Satz (1.7.4) verallgemeinern.

Peyres Version der Manin-Vermutung gibt eine explizite Formel für die Konstante C in bezug auf eine bestimmte projektive Einbettung und beschreibt, daß eine solche Zariski-offene Umgebung U keine "akkumulierten" Punkte habe. Ein vollständiger Beweis für die zu Satz (1.7.4) entsprechende Aussage benötigt noch viele prägnante Überlegungen und zusätzliche Voraussetzungen.

Bemerkung 1.7.6 Allein die Annahme, daß das Erzeugendensystem von Y ein Hardy-Littlewoodsches System sei, führt nicht zu der Behauptung, daß Y keine H-akkumulierte Menge hätte, was man wegen der Manin-Vermutung erwartet. Deswegen wird eine andere Überlegung anstelle des Hardy-Littlewoodschen Systems später vorgeführt.

2 Adelische Geometrie und Approximationseigenschaften

2.1 Adelraum, Weils Skalarrestriktion und Hasse-Prinzip

Sei K ein globaler Körper. Sei die Varietät X über K definiert. Mit $X(K)$ wird die Menge der K-rationalen Punkte auf X bezeichnet. Die gesamte Stellenmenge von K wird bezeichnet mit S_K, die Menge der archimedischen Stellen mit S_∞ und die Menge der nicht-archimedischen Stellen mit S_f. Die Definition für den Adelraum in Weils Stil wird folgendermaßen angegeben:

Definition und Bemerkung 2.2 (1) *Sei X K-Varietät. Ist X affin, definiert sich*

$$X_{\mathbb{A}(S)} := \prod_{v \in S} X(K_v) \cdot \prod_{v \neq S} X(\mathfrak{O}_v),$$

wobei S eine endliche Stellenmenge aller archimedischen Stellen enthält. Die Menge $X(\mathbb{A}_K) := \bigcup_S X_{\mathbb{A}(S)}$, wobei $S \supset S_\infty$ ist, heißt der Adelraum von X. Mit $X(\mathbb{A}(S))$ werde die Menge der Adelen ohne v-Komponente für $v \in S$ bezeichnet. Man setze $X(S) := \prod_{v \in S} X(K_v)$.

(2) *Die Definition des Adelraumes für eine beliebige Varietät braucht die affine Überdeckung und Quasikompaktheit, dann werden die Adelräume der affinen Umgebungen zusammengeklebt. Bemerkenswert ist, daß die Definition des Adelraumes unabhängig von der Wahl der affinen Überdeckung ist. (s. [Weil82, Ch.1])*

(3) *Es kann gezeigt werden, daß der Adelraum $X(\mathbb{A}_K)$ isomorph zu $\mathbf{Hom}_{K-Sch.}(Spec(\mathbb{A}_K), X)$ ist wie in (1) definiert. (siehe bei [Oe84])*

(4) *Die adelische Topologie ist dadurch definiert, daß $\mathfrak{B} \subset X(\mathbb{A}_K)$ offen ist, wenn gilt:*

$$\mathfrak{B} = \prod_{v \in S} \mathfrak{B}_v \times \prod_{v \notin S} X(\mathfrak{O}_v) \tag{4}$$

mit $S_\infty \subset S$ und $\mathfrak{B}_v$ offen in $X(K_v)$ im Sinne der v-metrischen Topologie.

Definition 2.2.1 (Weils Skalarrestriktion) *Sei A ein Ring. Sei A' eine endlich erzeugte A-Algebra. Sei X ein affines A'-Schema. Das A-Schema $R_{A'/A}(X)$ heißt die Skalarrestriktion von X, falls die folgende universale Eigenschaft gegeben ist: Für jedes A-Schema V existiert eine Bijektion*

$$\mathbf{Hom}_{A-Sch.}(V, R_{A'/A}(X)) \to \mathbf{Hom}_{A'-Sch.}(V \otimes_{Spec(A)} Spec(A'), X).$$

(s. [Oe84, *App.*2])

Bemerkung 2.2.2 (1) Die Definition von $R_{A'/A}(X)$ ist bis auf die A-Isomorphie eindeutig bestimmt.

(2) $R_{A'/A} : X \to R_{A'/A}(X)$ kann als ein Funktor betrachtet werden. Die Skalarrestriktion für die Schemata vom endlichen Typ läßt sich definieren. Bzgl. der Einzelheiten sei auf [Oe84, *App.*2] und [Weil82] hingewiesen.

(3) Für $V = Spec(A)$ ergibt sich, daß $R_{A'/A}(X)(A) \simeq X(A')$ ist.

(4) Sei $A' = \oplus_{i=1}^{n} A e_i$. Sei X das A'-Schema durch $f_1, ..., f_r$ erzeugt. Sei $x = (x_1, ..., x_s) = (\sum_i y_{1i}, ..., \sum_i y_{si} e_i)$. Sei $y = (y_{11}, ..., y_{sn})$. Die Skalarrestriktion $R_{A'/A}(X)$ läßt sich konkret konstruieren durch $R_{A'/A}(X) = Spec(A[y_{11}, ..., y_{sn}]/I)$, wobei $I :=< f_k^i >_{\substack{i=1,...,r \\ k=1,...,n}}$ und $f_i(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k^i(y) e_k$ mit $f_k^i \in A[y_{11}, ..., y_{sn}]$ sind.

Definition 2.2.3 (Hasse-Prinzip) *Sei $\mathfrak{C}$ eine Familie von Varietäten über einem globalen Körper K. Das Hasse-Prinzip bei $\mathfrak{C}$ ist erfüllt, wenn für $X \in \mathfrak{C}$ gilt*

$$X(K_v) \neq \emptyset \quad \forall v \in S_K \Rightarrow X(K) \neq \emptyset \tag{5}$$

Ähnlich ist das nicht-singuläre Hasse-Prinzip bei $\mathfrak{C}$ erfüllt, wenn für $X \in \mathfrak{C}$ gilt

$$X_{reg}(K_v) \neq \emptyset \quad \forall v \in S_K \Rightarrow X(K) \neq \emptyset. \tag{6}$$

Beispiel 2.2.4 (Cassels-Guy) *Betrachtet werde die projektive kubische Fläche $V_3 := \{[x_0 : : : x_3] : 5x_0^3 + 12x_1^3 + 9x_2^3 + 10x_3^3 = 0\}$. Sie ist K-rational für einen geeigneten Zahlkörper, aber nicht $\mathbb{Q}$-rational. Außerdem hat sie keine $\mathbb{Q}$-rationalen Punkte, obwohl für alle $v \in S_{\mathbb{Q}}$ $V_3(\mathbb{Q}_v) \neq \emptyset$ ist. Dabei ist das Hasse-Prinzip verletzt.*

(s. [Manin86, $S.280 - 283$] oder [CS66])

Es gibt noch viele interessante Eigenschaften in der adelischen Geometrie. Für wichtige Eigenschaften sei auf [Weil82] und [PR94] hingewiesen.

2.3 Starke Approximation

Im folgenden werden einige Aussagen über Approximationseigenschaften zusammengefaßt, insbesondere diejenigen von Minchev [Min89].

Definition 2.3.1 *Falls X(K) durch Einbettung dicht in dem Sinne der Adeltopologie in $X(\mathbb{A}(S))$ ist, ist bei X(K) die starke Approximation für S erfüllt. Falls X(K) durch die Einbettung in $X(S)$ bzgl. S dicht ist, ist die schwache Approximation für S erfüllt.*

Satz 2.3.2 *Starke und schwache Approximationseigenschaften besitzen die folgenden funktoriellen Eigenschaften:*
Sei S eine endliche Stellenmenge des Körpers K.
(1) *Sei K-biregulärer Morphimus $f : X \rightarrow Y$ von K-Varietäten X und Y. Dann haben entweder X und Y beide starke bzw. schwache Approximation bzgl. S oder keine der beiden.*
(2) *Sei $X = X_1 \times X_2$ über K. Dann genau hat X die starke bzw. schwache Approximation bzgl. S, wenn X_1 und X_2 sie gleichzeitig haben.*
(3)*Sei Y L-Varietät. Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung. Sei Skalarrestriktion $X = R_{L/K}(Y)$ im Sinne von Weil. Dann genau hat X bzgl. S die starke bzw. schwache Approximation, wenn Y sie bzgl. $\overline{S}$ hat, wobei $\overline{S}$ die Menge der Stellen, die Stellen aus S fortsetzt, ist.*

(siehe [PR94, $S.400$])

Eine sehr nützliche Aussage über die Approximationseigenschaft lautet:

Satz 2.3.3 *X hat genau dann die starke Approximation bzgl. einer endlichen Stellenmenge S, wenn bzgl. jeder endlichen Stellenmenge T mit $S \cup S_\infty \subset T$ stets die Menge der T-ganzzahligen Punkte $X(\mathfrak{O}(T))$ durch Diagonaleinbettung dicht in $X(T \setminus S)$ ist. Hat außerdem X die starke Approximation bzgl. S, hat X auch die schwache Approximation bzgl. jeder endlichen Stellenmenge aus $S_\infty \setminus S$. Insbesondere wenn X projektiv ist, folgt dann die starke Approximation für S daraus, daß die schwache Approximation für jede endliche Stellenmenge aus $S_\infty \setminus S$ stattfindet.*

(s. [PR94, $S.400-401$])

Satz 2.3.4 *Sei K globaler Körper. Sei $\overline{K}$ algebraischer Abschluß von K. Habe $X(K)$ starke Approximation für irgendeine endliche Stellenmenge S. Dann gelten:*
(1) $X(K)$ ist dicht im Sinne der Zariski-Topologie in $X(\overline{K})$,
(2) X ist geometrisch irreduzibel,
(3) falls X affin ist, ist $X(S)$ nicht kompakt und
(4) für jedes $v \notin S$ ist die Menge $X_{reg}(K_v)$ dicht in $X(K_v)$ bzgl. der K_v-Topologie.

Es folgen zwei Sätze von Minchev:

Satz 2.3.5 *Sei K ein Zahlkörper. Sei S eine endliche Stellenmenge mit $S_\infty \subset S$. Sei X eine geometrisch irreduzible Varietät über K. Außerdem sind $X_{reg}(K_v)$ in $X(K_v)$ bzgl. K_v-Topologie dicht für $v \notin S$. Sei dominanter K-regulärer Morphismus $f : Y \to X$, d.h. $f(Y)$ ist im Sinne der Zariski-Topologie dicht in X. Wenn Y die starke Approximation bzgl. S hat, dann hat X sie auch.*

Satz 2.3.6 *Sei K ein Zahlkörper. Sei S eine endliche Stellenmenge mit $S_\infty \subset S$. Seien X und Y geometrisch irreduzible Varietäten über K mit Y normal. Sei Normalisierung $f : Y \to X$. Außerdem sind $X_{reg}(K_v)$ und $Y_{reg}(K_v)$ in $X(K_v)$ bzw. $Y(K_v)$ dicht für alle $v \notin S$. Dann besitzt X genau bzgl. S die starke Approximation, wenn Y sie auch hat.*

Beispiel 2.3.7 *Sei C eine singuläre kubische Kurve gegeben durch $C := Spec(\mathbb{Q}[x,y]/(f(x,y)))$ mit $f(x,y) = y^2 - x^3$. Sei $|(x,y)|_p := \max(|x|_p, |y|_p)$ eine $|.|_p$ Metrik. Der Gradient von f ist $\bigtriangledown f = (-3x^2, 2y)$. Daher ist für $p \in S_f$ stets $Rang(\bigtriangledown f(1,1) \pmod p) = 1$. Wegen des Henselschen Lemmas gilt $X(\mathbb{Z}_p) \neq \emptyset$ für $p \in S_f$. Übrigens ist $(0,0)$ der einzige singuläre Punkt für $C(\mathbb{Q}_p)$. Aber es gelten $|(0,0) - (p^{2t}, p^{3t})|_p = \frac{1}{p^{2t}}$ und $(p^{2t}, p^{3t}) \in C(\mathbb{Z}_p)$. Daraus folgt, daß $X_{reg}(\mathbb{Q}_p)$ dicht in $X(\mathbb{Q}_p)_p$ ist. Wird die Normalierung $\pi : \mathbf{A}^1_{\mathbb{Q}} \to C$ mit $\pi(t) = (t^2, t^3)$ benutzt, dann ist nach dem Satz (2.3.6) stets die starke Approximation bzgl. S_∞ bei C erfüllt. Es ist leicht zu zeigen, daß π ein Homöomorphismus bzgl. euklidischer Topologie ist. Daher ist C topologisch einfach zusammenhängend, und nach dem Vergleichssatz [FK87, S.286, A.1.10] auch geometrisch (algebraisch) einfach zusammenhängend. Außerdem kann explizit ausgerechnet werden, daß $N(C(\mathbb{Z}), |.|, T) = 2[T^{1/3}] + 1$ ist.*

Der Hauptsatz in [Min89] behauptet:

Satz 2.3.8 (Minchev) *Sei K ein Zahlköper. Sei X eine normale Varietät über K. Sei S eine endliche Stellenmenge mit $S_\infty \subset S$. Hat X die starke Approximation bzgl. S, so ist X geometrisch einfach zusammenhängend. D.h. X hat keine nichttriviale étale Überlagerung über L, wobei L jede endliche Körpererweiterung von K ist.*

Bemerkung 2.3.9 Eigentlich hat Minchev mehr bewiesen. Eine schwächere Bedingung für diese Aussage ist ausreichend, nämlich, daß der adelische topologische Abschluß $\overline{X(\mathfrak{O}(S))}$ von $X(\mathfrak{O}(S))$ offen in $X(\mathbb{A}(S))$ sei, oder daß $X(\mathfrak{O}(S))$ dicht in $\prod_{v \notin S} X(\mathfrak{O}_v)$ sei. Dieser Satz verallgemeinert das Resultat von M. Kneser in [Kn65], wobei X eine algebraische lineare Gruppe ist.
Das Problem der starken Approximation in algebraischen Gruppen hat eine lange Geschichte. Bemerkenswert ist, daß hinreichende und notwendige Bedingungen für die starke Approximation in algebraischen Gruppen aufzustellen sind. Als genaue Formulierung sei auf [Kn66] und [PR94, *ch.*7.] verwiesen.

Ist im allgemeinen eine solche entsprechende Fragestellung für Varietät zu beweisen oder zu widerlegen? Einige notwendige Bedingungen für die starke Approximation in Varietät sind erwähnt. Es ergibt sich folgende Fragestellung:

Wann ist bei der affinen $\mathbb{Q}$-Varietät X mit $X(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \neq \emptyset$ die starke Approximation bzgl. S_∞ erfüllt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind?
(A). $X(\mathbb{Q})$ ist im Sinne der Zariski-Topologie dicht in $X(\mathbb{C})$.
(B). X ist geometrisch irreduzibel.
(C). $X(\mathbb{R})$ ist nicht kompakt.
(D). Für jedes $p \in S_f$ ist die Menge $X_{reg}(\mathbb{Q}_p)$ dicht in $X(\mathbb{Q}_p)$ im Sinne der $\wp$-adischen Topologie.

Ein konkretes Beispiel dafür ist die nicht-singuläre starke Hardy-Littlewoodsche Varietät, die nach dem Hauptsatz von Minchev stets geometrisch einfach zusammenhängend ist. (siehe [BoRu95])
Später (Kap. (8)) wird eine Verallgemeinerung dargestellt.

3 Tamagawa-Maß und singuläre Reihe

Um das Hardy-Littlewoodsche System bzw. die davon erzeugte affine Varietät genauer zu untersuchen, ist es erforderlich, die singuläre Reihe besser zu verstehen. In der adelischen Sprache läßt sich die singuläre Reihe als Tamagawa-Maß betrachten. Hiermit werden das Tamagawa-Maß und die globale singuläre Reihe definiert. Dabei werden auch einige damit verbundene Begriffe eingeführt.

3.1 Eichform und lokales Tamagawa-Maß

Sei K ein globaler Körper. Sei X eine n-dimensionale, rein-dimensionale (nicht notwendig irreduzible) K-Varietät. Mittels des Basiswechselns $X \otimes K_v$ für $v \in S_K$ wird ohne Verwirrung X auch als K_v-Varietät betrachtet. Sei X_{reg} oder $Reg(X)$ die Untervarietät, die aus allen reguären Punkten auf X besteht. Sei X_{sing} oder $Sing(X)$ die Untervarietät, die aus den singulären Punkten auf X besteht. Sei $x \in X_{reg}(K_v)$. Sei ω eine n-Differentialform, die an x K_v-rational ist mit $\omega(x) \neq 0$. Dann läßt sich wie in [Weil82, $Ch.2$.] in bezug auf die v-adische Topologie diese Differentialform ω lokal auf einer offenen Menge $W \subset X_{reg}(K_v)$ darstellen als

$$\omega = f(x)dx_1 \wedge ... \wedge dx_n,$$

wobei W ein lokales Koordinatensystem $(x_1, ..., x_n)$ hat, f eine K_v-analytische Funktion auf W ist mit $\omega(x) \neq 0 \forall \quad x \in W$. ω läßt sich auf der maximalen offenen Menge $U \subset X_{reg}(K_v)$ fortsetzen, so daß ω auf U analytisch ist und nirgendwo verschwindet.

Definition 3.1.1 *Sei Y eine rein-dimensionale nicht-singuläre K_v-Varietät. Sei $y \in Y(K_v)$. Sei ω eine Volumenform an y. Ist diese Volumenform ω k_v-analytisch fortsetzbar auf $Y(K_v)$ ohne Nullstellen und Polstellen, dann heißt ω eine Eichform auf $Y(K_v)$.*

Dann kann der Umgebung W um x ein Haar-Maß μ_v zugeordnet werden, indem $\mu_v(W, \omega) := \int_W |f(x)|_v |dx_1|_v ... |dx_n|_v$ gesetzt wird, wobei das Haar-Maß so normalisiert im folgenden lautet:

(a) $|x|_v = |x|$ und $|dx|_v = dax$ für K_v reell,
(b) $|x|_v = |x|^2$ und $|dx|_v = -idx \wedge d\overline{x} = 2\times$ Lebegues-Maß für K_v komplex,
(c) $|x|_v = |N_{K_v/\mathbb{Q}_p}(x)|_p$ und $\int_{\mathfrak{O}_v} |dx|_v = 1$ für $\wp_v | p$ und K ein Zahlkörper und
(d) für den Fall, daß K ein Funktionenkörper ist, ist das Haar-Maß ähnlich wie im Fall (c).

Sei $\varphi : X(K_v) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige Funktion mit dem kompakten Träger $Supp(\varphi) \cap X_{sing}(K_v) = \emptyset$. Mittels der Einheitsverteilung (partition of unity) ist die Volumenform $\varphi\omega$ integrierbar. Ist solches φ die Charakteristikfunktion einer beschränkten Borel-Menge $\mathfrak{B}_v$ mit dem kompakten Träger in $X_{reg}(K_v)$, so definiert das Integral $\int |\varphi\omega|_v$ das lokale Maß für $\mathfrak{B}_v$ bzgl. der Volumenform ω. Dieses Haar-Maß heißt lokales Tamagawa-Maß bzgl. der Volumenform ω.

3.2 Integration auf Fasern und Leray-Form

Eine Konstruktion für die Eichform und das zugehörige lokale Maß ist von J. P. Serre [Serre82] gemacht; sie wird folgendermaßen dargestellt:

Bemerkung 3.2.1 (Eichform auf Fasern) Sei K_v ein lokaler Körper. Seien Y und S K_v-Mannigfaltigkeiten. Es würden Eichformen ω_Y und ω_S auf den Mannigfaltigkeiten Y bzw. S existieren. Betrachtet werde eine surjektive Submersion $\pi : Y \to S$. Es existiert eine Differentialform η des Grades $\dim Y - \dim S$ mit $\omega_Y = \eta \wedge \pi^*(\omega_S)$. η heißt die "Division" von ω_Y durch ω_S. Sei $\omega_t := \eta|_{\pi^{-1}(t)}$; dies ist eine Eichform für die Faser $Y_t := \pi^{-1}(t)$. Daher gilt die folgende Gleichung:

$$\int_Y |\varphi(\pi(y))|_v |\phi(y)|_v |\omega_Y(y)|_v = \int_S |\varphi(t)|_v (\int_{Y_t} |\phi(x)|_v |\omega_t(x)|_v) \|\omega_S(t)|_v \,, \tag{7}$$

wobei ϕ und φ kompakte Träger $Supp\phi \subset Y$ bzw. $Supp\varphi \subset S$ besitzen und stückweise stetig für v archimedisch bzw. lokal konstant für v nicht-archimedisch sind.

Diese Konstruktion läßt sich auf die affinen vollständigen Durchschnitte verwenden. Betrachtet werde $X_{/K} := V(f_1, ..., f_r)$ ein affiner geometrisch irreduzibler vollständiger Durchschnitt mit den Polynomen $f_1, ..., f_r \in K[x_1, ..., x_s]$. Sei die kritische Menge $C_f(\overline{K}) := \{x \in \overline{K}^s | Rang(\partial f_i(x)/\partial x_j)_{i,j} < s - r = \dim X\}$, und C_f sei die entsprechende Varietät. In diesem Fall betrachten wir die surjektive Submersion $f := (f_1, ..., f_r) : \mathbf{A}^s \setminus C_f(\overline{K}) \to S(\overline{K})$, wobei $S \subset \mathbf{A}^s$ geometrisch irreduzibel ist. $S(\overline{K})$ ist außerdem eine Mannigfaltigkeit. Seien $dx_1 \wedge ... \wedge dx_s$ bzw. $dy_1 \wedge ... \wedge dy_r$ die Standardeichformen auf $\mathbf{A}^s$ bzw. $\mathbf{A}^r$. Dann existiert eine $(r-s)$-Differentialform η auf $\mathbf{A}^s \setminus C_f$, so daß

$$dx_1 \wedge ... \wedge dx_s = \eta \wedge df_1 \wedge ... \wedge df_r$$

gilt. Für die Faser $X_s := f^{-1}(s)$ für $s \in S$ ist die Eichform $\omega_s = \eta|_{X_s}$ definiert.

Definition 3.2.2 *Diese Eichform ω_s heißt eine Leray-Form für X_s.*

Bemerkung 3.2.3 Es ist zu bemerken, daß für V nicht-archimedisch gilt

$$\mu_v(X_{reg}(\mathfrak{O}_v), \omega_t) = \lim_{n \to \infty} \frac{|X_{reg}(\mathfrak{O}_v/\wp^n)|}{N(\wp)^{n \dim X_t}}$$

(Vgl. [Serre81, $S.586-589$] oder [BoRu95, $lemma(1.8.1)$]).
Für v nicht-archimedisch gilt

$$\mu_v(X(K_v) \cap \mathfrak{B}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mu_v(f^{-1}(t + \mathfrak{C}_\epsilon) \cap \mathfrak{B}, dx_1 \wedge ... \wedge dx_s)}{\mu_v(\mathfrak{C}_\epsilon, dy_1 \wedge ... \wedge dy_r)};$$

dabei sind $\mathfrak{B}$ relativ kompakt mit $\overline{\mathfrak{B}} \cap C_f(K) = \emptyset$ und $\mathfrak{C}_\epsilon := \{x \in K^r : \max_i |x_i|_v < \epsilon\}$. Das ist analog zu [BoRu95, $lemma(1.8.2)$].

Die Leray-Form läßt sich lokal explizit darstellen. Sei $X_{/K}$ wie oben. Sei $J := \{j_1, ..., j_r | 1 \le j_1 < ... < j_r \le s\}$. Sei $U_J(K) := \{x \in X(K) | \det(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j})_{1 \le i \le r, j \in J} \neq 0\}$. Eine Leray-Form ω auf $U_J(K)$ ist darstellbar als

$$\omega = \frac{1}{\det(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j})_{1 \le i \le r \atop j \in J}} \bigwedge_{k \in \{1,...,s\} \setminus J} dx_k$$

bis auf das Vorzeichen. Dabei ist zwar die Leray-Form nicht eindeutig bestimmt, aber die Leray-Form ist sozusagen bis auf eine zu $df_1 \wedge ... \wedge df_r$ orthogonale Volumenform bestimmt. D.h., wenn ω_1 und ω_2 beide Leray-Formen für X_{reg} sind, dann gilt $(\omega_1 - \omega_2) \wedge df_1 \wedge ... \wedge df_r = 0$. Daher gilt $\int \omega_1 = \int \omega_2$. Das lokale Tamagawa-Maß bzgl. der Leray-Form ist gut definiert.

Bemerkung 3.2.4 Bis jetzt können wir das lokale Tamagawa-Maß bzgl. der Leray-Form ω auf Mannigfaltigkeit X_{reg} definieren. Sei φ eine Schwarzfunktion auf K_v^s nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit dem kompakten Träger. Eine sehr intuitive Fragestellung lautet, ob das (uneigentliche) Integral $\int_{X(K_v)} |\varphi\omega|_v$ existiert, falls $Supp(\varphi) \cap X_{sing}(K_v) \neq \emptyset$ ist. Dieses Problem ist nicht einfach. Eine Möglichkeit,seiner Behandlung ist, es mit der komplexen Potenz in Verbindung zu bringen. (vgl. [BG69], [Denef84] und [Meu81]) Später werden wir mit der anderen Technik der Kreismethode dieses (uneigentliche) Integral behandeln.

3.3 Globales Tamagawa-Maß

Sei K ein globaler Körper. Sei $\mathfrak{O}_K$ der ganze Abschluß von $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{F}_q[t]$ in K. Sei $X_{/\mathfrak{O}_K} := V(f_1, .., f_r) \subset \mathbf{A}^s$ eine rein-dimensionale Varietät. Sei ω eine K-rationale Volumenform für X, die fast überall definiert ist. Sei $\mathfrak{B}$ eine offen relativ kompakte Menge im Adelraum $\mathbb{A}_K^s$. Dann hat $\mathfrak{B}$ die folgende Gestalt:

$$\mathfrak{B} = \prod_{v \in S} \mathfrak{B}_v \times \prod_{v \notin S} \mathfrak{O}_v^s,$$

wobei S endlich mit $S_\infty \subset S$ und $\mathfrak{B}_v$ offen relativ kompakt bzgl. K_v-Topologie sind. Ein Haar-Maß für die adelische Menge $\mathfrak{B} \cap X(\mathbb{A}_K)$ wird formalerweise definiert durch

$$\mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}, \omega) := \int_{X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}} |\omega|_{\mathbb{A}_K} := \mu_K^{-\dim X} \prod_{v \in S} \int_v (X(\mathfrak{O}_v \cap \mathfrak{B}_v, \omega) \times \prod_{v \notin S} \mu_v(X(\mathfrak{O}_v), \omega),$$

wobei μ_v wie oben definiert sind, und $\mu_K := \int_{\mathbb{A}_K/K} \prod_v dx_v = \sqrt{\Delta}$ für K Zahlkörper mit Diskriminant Δ und $\mu_K = q^{g-1}$ für $K = \mathbb{F}_q(C)$ Funktionenkörper der Kurve C und $g :=$ das Geschlecht ist.

Definition 3.3.1 *Wenn alle (uneigentlichen) Integale $\mu_v(X(K_v) \cap \mathfrak{B}_v, \omega)$ für $v \in S_K$ und für eine offen, relativ kompakte Menge $\mathfrak{B} \subset \mathbb{A}_K^s$ existieren und wenn $\mu(X(\mathbb{A}_K) \cap \mathfrak{B}, \omega)$ als Produkt absolut konvergiert, so heißt $\mu(., \omega)$ das Tamagawa-Maß bzgl. der Volumenform ω.*

Bemerkung 3.3.2 Wenn $\mu(X(\mathbb{A}_K) \cap \mathfrak{B}, \omega)$ nur bedingt konvergiert, dann kann das Tamagawa-Maß mit den Konvergenzfaktoren definiert werden. Diese Definition wird in dieser Arbeit nicht verwendet; es sei auf [Weil82] hingewiesen. Die Menge $\mathfrak{O}_K$ läßt sich durch die Diagonaleinbettung in $\prod_{v \in S_\infty} K_v$ im Sinne von Minkowski als Gitter betrachten. Der Faktor μ_K ist in diesem Sinne das Volumen für den Fundamentalbereich. Insofern bleibt das Tamagawa-Maß nach der Skalarrestriktion auch invariant. (siehe [Weil82, $Ch.2$])

Bemerkung 3.3.3 Peyre hat in [Peyre95, $ch.2$] für die nicht-singulären projektiven Fano-Varietäten eine Art vom Tamagawa-Maß definiert, indem er die Konvergenzfaktoren mittels der Artin-L-Funktion der zugehörigen Picard-Gruppe konstruiert hat. Im Gegensatz dazu beschränkt sich unsere Definition für das Tamagawa-Maß jedoch auf den Fall der affinen bzw. quasi-affinen Varietäten.

3.4 Singuläre Reihe, Reduktion und Henselsches Lemma

Sei K ein globaler Körper. Sei $X \subset \mathbb{A}^s$ eine K-Varietät. Besitze K-Varietät X die Leray-Form ω. Die Existenz des Tamagawa-Maßes μ bzgl. ω, das manchmal als "globale singuläre Reihe" zu

betrachten ist, hängt damit zusammen, ob die singuläre Reihe $\mathfrak{S}(X) := \prod_{s \not\in S_\infty} \mu_v(X(\mathfrak{O}_v))$ und das singuläre Integral $\mathfrak{I}(X) := \prod_{v \in S_\infty} \mu_v(X(K_v) \cap \mathfrak{B})$, wo $\mathfrak{B}$ relativ kompakt in $\mathbb{A}^s_{K_v}$ ist, konvergiert bzw. existiert. Die Berechnung des lokalen Maßes läßt sich nach der Bemerkung (3.2.3) mit Hilfe der Reduktionstheorie durchführen.

Sei $X := V(f_1, ..., f_r) \subset \mathbf{A}^s$ eine n-dimensionale Varietät. Dann existiert eine endliche Stellenmenge S mit $S_\infty \subset S$, so daß $f_1, ..., f_r$ über $\mathfrak{O}(S)$ definiert sind. Für $v \not\in S$ sei $\pi_{v,t} : X(\mathfrak{O}_v) \to X(\mathfrak{O}_v/\wp_v^t)$ die Reduktion. Sei $\partial f := (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j}$ die Jacobimatriz. Es gelten

$$\begin{aligned} x \in X_{reg} &\iff dim(T_x(X)) = s - Rang(\partial f(x)) = n \\ &\iff \exists (s-n) \times (s-n) - \text{Untermatriz } A \text{ von } \partial f \text{ mit } \det A(x) \neq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Die $(s-n) \times (s-n)$-Untermatriz A heißt an x bzgl. der Stelle v der Ordung m, falls $\det A(x) \in \wp_v^m$ aber $detA(x) \not\in \wp_v^{m+1}$, mit $ord_v(A(x)) = m$ bezeichnet. Definiert werde die Ordnung der Jacobimatriz ∂f an x als $ord_v(\partial f(x)) := \min\{ord_v(A(x)) : A \quad (s-n) \times (s-n)\text{-Untermatriz mit } \det A(x) \neq 0\}$, und man setzt $ord_v(\partial f) := \max_{x \in X_{reg}(\mathfrak{O}_v)} ord_v(\partial f(x))$. Eine Version des Henselschen Lemmas, das die Reduktion beschreibt, lautet:

Satz 3.4.1 (Henselsches Lemma) *Sei R_v ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit dem maximalen Ideal $\wp$. Sei $f := (f_1, ..., f_r) : R_v^s \to R_v^r$ mit $f_i \in R_v[x_1, ..., x_s]$. Wenn es $a \in R_v^s$ und $\delta > 0$ gibt, so daß*

$$f(x) \equiv 0 \pmod{\wp^{2\delta+1}}, \text{ nämlich } \quad (ord_v(f(a)) \geq 2\delta + 1$$

und die Jacobimatriz ∂f an x maximalen Rang r hat mit

$$ord_v(\partial f(x)) = \delta.$$

Dann existiert für $t \in \mathbb{N}$ $b \in R_v$, so daß gelten:

$$\begin{aligned} f(b) &\equiv 0 \pmod{\wp^{2\delta+1+t}}, \\ a &\equiv b \pmod{\wp^{\delta+t}} \\ \text{und} \quad ord_v(\partial f(b)) &= \delta. \end{aligned}$$

Außerdem hat die Menge von solchem b insgesamt $N(\wp)^{(s-r)t}$ Lösungen.

Bemerkung 3.4.2 R. Danset hat bei [Dan85, lemma (4.2)] mit einer sehr ähnlicher Argumentation wie bei [Gr69, ch. 5] gezeigt, daß die Behauptung im Fall $R_v = \mathbb{Z}_p$ richtig ist; im allgemeinen Fall ist die Beweisidee damit identisch.
Mit Hilfe der Bemerkung (3.2.3) folgt noch, daß für hinreichend großes t gilt $\mu_v(X_{reg}(\mathfrak{O}_v)) = \frac{|X_{reg}(\mathfrak{O}_v/\wp_v^t)|}{N(\wp_v)^{tn}}$. Wie groß ein solches t sein sollte, läßt sich möglicherweise mit Hilfe des Hensel-Lemmas herausfinden.
Die Annahme, daß die Jacobimatriz ∂f an x maximalen Rang r hat, bedeutet, daß die Varietät an x nicht-singulär und $(s-r)$-dimensional ist. Wenn diese Annahme für alle abgeschlossenen Punkte auf X gilt, ist X genau dann ein nicht-singulärer $(s-r)$-rein-dimensionaler vollständiger Durchschnitt.

Korollar 3.4.3 *Sei X ein $(s-r)$-rein-dimensionaler Durchschnitt Es gelten die folgenden Eigenschaften:*
(1). Existiert $x \in X_{reg}(\mathfrak{O}_v)$, so ist $\mu_v(X_{reg}(\mathfrak{O}_v)) > 0$
(2). Sei $m' := \max\{ord_v(\partial f(x)) : x \in \mathbf{A}^l_{O_K} \setminus C_f\}$. Dann ist genau $X_{reg}(\mathfrak{O}_v) \neq \emptyset$, wenn $X_{reg}(\mathfrak{O}_v/\wp^{2m'+1}) \neq \emptyset$ ist.

Bemerkung 3.4.4 $X_{sing} = X \setminus X_{reg}$ ist Zariski-abgeschlossen in X. Daher gilt $\dim X_{sing} < \dim X_{reg}$. Wird die Induktion nach Dimension der Varietät mittels des Henselschen Lemmas durchgeführt, dann läßt sich wie in [Gr67] zeigen, daß die Reduktion $X(\mathfrak{O}_v) \to X(\mathfrak{O}/\wp_v^t)$ für $t \geq t_0$ surjektiv ist, mit t_0 einer Konstante. Außerdem ist es sehr interessant zu erwähnen, daß die Poincaré-Reihen $\overline{P}(X_v, t) := \sum_{n=0}^{\infty} |X(\mathfrak{O}_v/\wp_v^n)|t^n$ und $P(X_v, t) := \sum_{n=0}^{\infty} |\pi_{v,n}(X(\mathfrak{O}_v))|t^n$ rationale Funktionen sind. Für den Beweis sei verwiesen auf [Meu81] und [Denef84]. Dabei werden Hironakas Auflösung in [Meu81] und mathematische Logik in [Denef84] verwendet.

3.5 Absolute Konvergenz für die singuläre Reihe

Ab jetzt wird angenommen, daß X geometrisch irreduzibel, affin und n-dimensional ist. Betrachtet werde die Reduktion $\pi_v := \pi_{v,1} : X(\mathfrak{O}_v) \mapsto X(\mathfrak{O}_v/\wp_v)$ für $v \notin S$. Die Einschränkung $\pi'_v := \pi_v|_{X_{reg}(\mathfrak{O}_v)}$ ist eine gute Reduktion für s außer einer endlichen Stellenmenge, etwa S'; dabei ist $ord_v(\partial f) = 0$ für $v \notin S'$ ist. Aus Korollar (3.4.3) folgt, daß $\mu_v(X_{reg}(\mathfrak{O}v)) = \frac{|X_{reg}(\mathfrak{O}_v/\wp_v)|}{N(\wp_v)^{\dim X}}$ für $v \notin S'$. Die singuläre Reihe $\mathfrak{S}(X)$ konvergiert und verschwindet nicht genau dann, wenn $\prod_{v|\infty} \frac{|X(\mathfrak{O}_v/\wp_v)|}{N(\wp_v)^{\dim X}}$ konvergiert und $X_{req}(\mathfrak{O}_v) \neq \emptyset \quad \forall v$. Ein Konvergenzkriterium für den affinen vollständigen Durchschnitt mit Singularitäten wird hiermit angegeben:

Sei v eine gute Stelle. Sei $q := N(\wp_v)$. Nach der bekannten Lang-Weil-Abschätzung ist $|X(\mathfrak{O}_v/\wp_v)| = q^{\dim X} + O(q^{\dim X - \frac{1}{2}})$. Daher ist $\mu_v(X(\mathfrak{O}_v/\wp)) = 1 + O(q^{-\frac{1}{2}})$. Das führt zu nichts, was für die Konvergenz brauchbar ist. Basierend auf der cohomologischen Eigenschaft kann eine sehr scharfe Abschätzung erreicht werden. Zwei Sätze werden zu diesem Zweck angewandt.

Satz 3.5.1 (Hooley-Katz) *Sei endlicher Körper $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$. Sei $X^{proj}/\mathbb{F}$ n-dimensionaler, geometrisch irreduzibler, projektiver vollständiger Durchschnitt des Multigrades $(d_1, ..., d_r)$ mit $d_i > 1$; dabei sei $D := -1$ für $Sing(X^{proj}) = \emptyset$ und sonst $D := \dim Sing(X^{proj})$. Dann gilt*

$$|X^{proj}(\mathbb{F})| = |\mathbf{P}(\mathbb{F})^n| + O(q^{\frac{n+1+D}{2}}).$$

Insbesondere ist X^{proj} regulär, so ist dies die Deligne-Weil-Abschätzung.

(siehe [Hoo91, $S.353, th.2$])

Ein Satz vom Bertini-Typ behauptet:

Satz 3.5.2 (Zak) *Sei K ein Körper. Sei $X^{proj}/K \subset \mathbf{P}^{n+r}$ ein n-dimensionaler, geometrisch irreduzibler, projektiver vollständiger Durchschnitt des Multigrades $(d_1, ..., d_r)$ mit $d_i > 1$; dabei ist $D := \dim Sing(X^{proj})$ für $Sing(X_{proj}) \neq \emptyset$, und sonst $D := -1$. Dann gilt für alle Hyperebenen $H \subset \mathbf{P}^{n+r}$ stets $\dim(H \cap X^{proj})_{sing} \leq D + 1$.*

(siehe [Hoo91, $S.358, th.2$; App. von N.M. Katz])

Sei der endliche Körper $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$. Sei $X/\mathbb{F} = V(f_1, .., f_r) \subset \mathbf{A}^{n+r}$ n-dimensional, geometrisch irreduzibel, affin und vollständig durchgeschnitten mit $\deg f_i > 1$. Wenn f_i Formen sind, wird X als Affinkegel der projektiver Varietät X^{proj} betrachtet. Aus (3.5.1) folgt $|X(\mathbb{F})| = q^n + O(q^{\frac{n+1+D}{2}})$, wobei $D := \dim Sing(X^{proj})$ ist. Aber wenn f_i keine Formen sind, dann läßt sich die Homogenisierung $\widehat{f_i} := x_0^{deg f_i} f_i(x_1/x_0, ..., x_{n+r}/x_0)$ betrachten. Indem $\widehat{X} = V^*(\widehat{f_1}, .., \widehat{f_r})$ gesetzt wird,

bekommt man projektive Varietät $\widehat{X}$. Sei $D := \dim \widehat{X}_{sing}$ für $\widehat{X}_{sing} \neq \emptyset$ und sonst $D := -1$. Sei Polynom $f_i = f_{i,1} + ... + f_{i,d_i}$ mit $f_{i,j}$ dem homogenen Teil des Grades j. Wenn die projektive Varietät $V^{proj}(f_{1,d_1}, .., f_{r,d_r})$ geometrisch irreduzibel ist, dann sind $\widehat{X} \cap \{x_0 = 0\}$ und $\widehat{X}$ auch geometrisch irreduzibel. Sei die Hyperebene $H := \{x_0 = 0\}$. Dann gilt $|X| = |\widehat{X}| - |\widehat{X} \cap H|$. Nach (3.5.1) gilt $|\widehat{X}(\mathbb{F})| = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + O(q^{\frac{n+D+1}{2}})$. Aber es ist nach (3.5.2) $\dim(\widehat{X} \cap H)_{sing} \leq D+1$. Daraus folgt $|\widehat{X} \cap H(\mathbb{F})| = \frac{q^n-1}{q-1} + O(q^{\frac{n+D+1}{2}})$. Damit ist die folgende Behauptung bewiesen:

Satz 3.5.3 *Sei X wie oben. Dann gilt $|X(\mathbb{F})| = q^n + O(q^{\frac{n+1+D}{2}})$.*□

Bemerkung 3.5.4 Hooley hat in [Hoo91, S.354] zwar eine Anwendung auf die affine Hyperfläche gemacht, aber das homogene Teil von f sollte als absolut irreduzibel vorausgesetzt sein; sonst ist die Behauptung nicht richtig. Ein einfaches Gegenbeispiel lautet, daß $f = x^2 - y^2 - 1 \in \mathbb{F}_q[x, y]$ mit $Char(\mathbb{F}_q) \neq 2$ ist. Dabei ist f absolut irreduzibel, aber $f_2 = x^2 - y^2$ der homogene Teil ist sogar reduzibel. Daß $\widehat{X} \cap \{x_0 = 0\}$ geometrisch irreduzibel bleibt, ist eine wichtige Annahme für eine solche Anwendung.

Satz 3.5.5 *Sei K ein Zahlkörper. Sei $X := V(f_1, .., f_r)$ ein n-dimensionaler, normaler, geometrisch irreduzibler, affiner vollständiger Durchschnitt des Multigrades $(d_1, .., d_r)$ mit $d_i > 1$. Ferner sei die projektive Varietät, die durch homogene Polynome $f_{1,d_1}, ..., f_{r,d_r}$ erzeugt ist, auch geometrisch irreduzibel. D sei definiert als Dimension der Singularitäten der projektiven Hülle $\widehat{X}$ durch Homogenisierung bzw. Dimension der Singulariät der projektiven Varietät, erzeugt durch dieselben homogenen Polynome; dabei ist $D := -1$, falls $\widehat{X}_{sing} = \emptyset$. Wenn $X_{reg}(\mathfrak{O}_v) \neq \emptyset \quad \forall v$ und $n > D+3$, dann konvergiert die singuläre Reihe $\mathfrak{S}(X)$ absolut und verschwindet nicht.*

Beweis. Sei K ein Zahlkörper. Es ist bekannt, daß für fast alle v stets $X_{reg}(\mathfrak{O}_v) \to X_{reg}(\mathbb{F}_{\wp_v})$ eine gute Reduktion ist. Insofern ist $X_{reg}(\mathbb{F})$ nicht-singulär. Nach [Weil82, th. 2.2.5] oder mit Hilfe des Henselschen Lemmas ergibt sich, daß für fast alle v gilt:

$$\mu_v(X_{reg}(\mathfrak{O}_v)) = \frac{|X_{reg}(\mathbb{F}_{\wp_v})|}{N(\wp_v)^n}.$$

Dann werden Satz (3.5.3) und Korollar (3.4.3) benutzt. Daher reicht es aus, das Produkt $\prod_v \frac{|X_{reg}(\mathbb{F}_{\wp_v})|}{N(\wp_v)^n}$ mit der Zetafunktion $\zeta_K(s) = \prod_{v \in S_f} \frac{1}{1-N(\wp_v)^{-s}}$ zu vergleichen.

Nach dem Resultat von der absoluten Irreduzibilität von E. Noether gilt, daß für fast alle v stets $X(\mathbb{F}_{\wp_v})$ auch geometrisch irreduzibel bleibt. Die Ausnahmenmenge für die Stellen, bei denen die obigen Eigenschaften nicht erfüllt sind, werde mit S bezeichnet. D.h., wenn $v \notin S$ ist, ist v genau dann eine gute Stelle. Da $X_{reg}(\mathbb{F}_{\wp_v}) = X(\mathbb{F}_{\wp_v}) \setminus X_{sing}(\mathbb{F}_{\wp_v})$ ist, ist $|X_{reg}(\mathbb{F}_{\wp_v})| = N(\wp_v)^n + O(N(\wp_v)^{\max(\frac{n+D+1}{2}, \dim X_{sing})})$. Falls $\max(\frac{n+D+1}{2}, \dim X_{sing}) < n-1$ ist, so ist die singuläre Reihe absolut konvergent. Ist X normal, ist $\dim X_{sing} < n-1$. Daher bekommt man eine hinreichende Bedingung $n > 3 + D$. □

Beispiel 3.5.6 *Sei Kurve $C := \{x^2+y^2 = 1\}$. Die Leray-Form auf C ist darstellbar als $-\frac{1}{2y}dx$ auf die Zariski-offene Menge $\{y \neq 0\}$ und $\frac{1}{2x}dy$ auf $\{x \neq 0\}$. Aber das Tamagawa-Maß dafür existiert nicht, weil*

$$|C(\mathbb{F}_p)| = \begin{cases} p-1 & : \quad p \equiv 1 \bmod 4 \\ p+1 & : \quad p \equiv 3 \bmod 4 \end{cases} \tag{9}$$

gilt.

4 Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft

4.1 Geschichtliche Anmerkung

Ursprünglich ist die Kreismethode von Hardy und Littlewood in den 20er Jahren für das Waring-Problem und andere additive zahlentheoretische Probleme verwendet worden. Im Gegensatz zu Hilberts Beweis der Waring-Vermutung liefert diese Kreismethode nicht nur eine existentielle Aussage, sondern auch eine asymptotische Aussage für die Anzahl der ganzzahligen Lösungen. Diese Asymptotik ergibt sich aus dem Produkt von singulärer Reihe und singulärem Integral. Viele berühmte Mathematiker haben dazu beigetragen. Es waren Hardy, Littlewood, Hua, Vinogradov, Siegel, Davenport u.a.

Diese analytische zahlentheoretische Methode läßt sich nicht nur auf das Waring-Problem und andere additive Probleme beschränken, sondern eignet sich auch gut für manche diophantische Probleme.

Später, Anfang der 60er Jahre, hat Birch [Bir62] die Kreismethode auf affine Varietäten angewandt, die durch homogene Polynome desselben Grades erzeugt sind und viele Variablen haben. Dabei erhielt er die asymptotische Formel für die Anzahl der ganzzahligen Lösungen innerhalb von Quadern. Er hat sogar gezeigt, daß sich das singuläre Integral mit der Leray-Form darstellen läßt. Mit Weils Skalarrestriktion hat er diese Überlegung auf die Varietäten über Zahlkörper übertragen.

In den 80er Jahren hat W. M. Schmidt in seinem Artikel [Sch85] das Hardy-Littlewoodsche System definiert. Seine Definition ist auf die Varietät, die über $\mathbb{Z}$ definiert ist, beschränkt. Seine Arbeit ist ein Versuch, zum einen solche Varietäten überhaupt systematisch zu untersuchen und zum anderen die Kreismethode zu "axiomatisieren".

In dieser Zeit ist die adelische Darstellung für die Kreismethode entstanden. Danset hat [Dan85] einen Beweis in der Adeldarstellung für Hardy-Littlewoodsche Probleme aufgestellt. Die Kreismethode hat J. P. Patterson [Patt85] in der Adelsprache begrifflich interpretiert; seine Idee basiert auf der adelischen Version der Poissonschen Summationsformel von Igusa, während in Igusas Arbeit hauptsächlich die von einer Form bzw. einem homogenen Polynom definierte Hyperfläche behandelt wird. Dabei ist der Begriff der globalen singulären Reihe insofern als Tamagawa-Maß bzgl. Leray-Form zu betrachten. Für die adelische Darstellung läßt sich viel Maschinerie aus der Algebraischen Geometrie heranziehen. Beispielsweise werden die Weil-Vermutung und Hironakas Auflösung in Igusas Arbeit [Igu78] benutzt.

Es gibt viele Beispiele für Hardy-Littlewoodsche Systeme, insbesondere affine homogene Räume [DRS93], wobei die dargestellte Methode nicht mehr die Kreismethode ist. Danach haben Borovoi und Rudnick [BoRu95] die (stark) Hardy-Littlewoodsche Varietät definiert, um solche Varietäten noch genauer beschreiben zu können.

Außer homogenen Räumen ist der projektive vollständige Durchschnitt, der gleichzeitig eine Fano-Varietät ist, auch möglicher Gegenstand für Hardy-Littlewoodsche Überlegungen. Im Artikel [FMT89] ist die Kreismethode als wichtige Unterstützung für die Manin-Vermutung dargestellt.

Die Entwicklung der Hardy-Littlewoodsche Probleme ist sehr umfangreich. Dadurch ist es erst möglich, überhaupt die arithmetische Eigenschaft der vielen Varietäten mit vielen rationalen bzw.

ganzzahligen Punkten systematisch in der Form der Asymptotik zu beschreiben.

4.2 Kreismethode und die Folge der adelischen Kompakta

Hiermit wird versucht, einen Begriff mit Hilfe der Folge der kompakten Menge im Adelraum einzuführen. Einige Beispiele werden ohne die Voraussetzung, daß sie homogene Räume sind, auch unter diesem Begriff interpretiert.

Die Definition des Hardy-Littlewoodschen Systemes und die der starken Hardy-Littlewoodschen Varietät sind nur auf die Varietät über $\mathbb{Z}$ beschränkt. Aber die Hardy-Littlewoodsche Kreismethode ist auch auf die Varietäten über einem globalen Körper übertragbar. In der adelischen Darstellung hat S. J. Patterson in [Patt85] die Kreismethode begrifflich interpretiert.

Sei K ein globaler Körper. Sei $X(K)$ die geometrisch reduzierte n-rein-dimensionale affine Varietät in $\mathbf{A}_K^s$ erzeugt durch das Polynomsystem $f := \{f_1, ..., f_r\}$. Sei C_f die kritische Menge von f. Angenommen sei $\varphi = \prod_{v \in S_K} \varphi_v$ die Charakteristikfunktion der adelischen offenen Menge $\mathfrak{B}$ in $\mathbb{A}_K^s$ mit $Supp\mathfrak{B} \cap C_f = \emptyset$. Es existiere eine Leray-Form ω auf $X_{reg}(\mathbb{A}_K)$. Betrachtet werde die folgende Gleichung

$$\sum_{x \in X(K)} \varphi(x) = \int_{X(\mathbb{A}_K)} \varphi(x) |\omega|_{\mathbb{A}_K} + R(\varphi) \tag{10}$$

mit der Voraussetzung, daß das Integral existiere. Ist $R(\varphi)$ mit dem Integral vergleichbar klein, so funktioniert die Hardy-Littlewoodsche Kreismethode. Insofern ist das nicht-singuläre Hasse-Prinzip bei $X_{/K}$ folglicherweise erfüllt. Einige Beispiele werden hier angegeben.

Beispiel 4.2.1 (Waringsches Problem) *Es sei $K = \mathbb{Q}$. Betrachtet werde das Waringsche Problem, nämlich die Familie der Varietäten X_C, erzeugt durch Polynom $X_1^n + X_2^n + ...+ X_s^n = C$, wobei C hinreichend groß und s hinreichend groß sind. Beispielsweise gilt die Asymptotik mit Huas Methode $s > 2^n$; dabei wird die Funktion φ ausgewählt als die Charakteristikfunktion der Menge $\mathfrak{B}_C$ mit*

$$\mathfrak{B}_C := \{(t_1, ..., t_s) | \max_i |t_i| \leq C\} \times \prod_{p \neq \infty} \mathbb{Z}_p^s. \tag{11}$$

Beispiel 4.2.2 (Striktes Waringsches Problem über Funktionenkörpern) *Sei $K = \mathbb{F}_q(t)$. Betrachtet werde das strikte Waringsche Problem, nämlich die Familie der Varietäten X_C, erzeugt durch das Polynom $X_1^n + X_2^n + ...+ X_s^n = C$ mit $n < Char(\mathbb{F}_q)$ und $X_1, ..., X_s, C \in \mathbb{F}_q(t)$. Die asymptotische Formel für die Anzahl der $\mathbb{F}_q[t]$-wertigen Punkte in X_C mit der Bedingung, daß $n(l-1) < degC \leq nl$ und $degX_i \leq l$ sind, ist durch die Kreismethode in [Kub74] und [Car94] gemacht bzw. verallgemeinert. Mit Huas Methode folgt der Schrank $s > 2^n$. In der adelischen Darstellung wird die Funktion φ gewählt als die Charakteristikfunktion der Menge $\mathfrak{B}_C$ mit*

$$\mathfrak{B}_C := \{(t_1, ..., t_s) | \max_i \deg |t_i| \leq l\} \times \prod_{\substack{P \in \mathbb{F}_q[t] \\ normiert \\ irreduzibel}} (\mathbb{F}_q[t])_P^s, \tag{12}$$

wobei $(\mathbb{F}_q[t])_P$ der vollständige Bewertungsring bzgl. des irreduziblen Polynomes P ist.

Dabei haben die Varietäten des Waringschen Problems über $\mathbb{Z}$ nur endlich viele ganzzahlige Punkte. Sie sind deswegen vom Hardy-Littlewoodschen System ausgeschlossen.

Bemerkung 4.2.3 Manchmal wird φ angenommen als eine Schwarzfunktion mit dem kompaktem Träger anstatt einer Charakteristikfunktion der adelischen kompakten Menge, um die von Igusa entwickelte Idee [Igu78] auf den adelischen Raum $X(\mathbb{A}_K)$ anzuwenden.

Definition 4.2.4 (Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft) *Sei $X \subset \mathbf{A}^s_K$ wie oben. Sei $X(K_v)$ nicht kompakt für jede Stelle $v \in S_K$. Sei eine kompakte Folge $\{\mathfrak{B}_T\}_T \subset \mathbb{A}^s_K$ mit $\mathfrak{B}_T \subset \mathfrak{B}_{T+1}$ und $\lim_{T\to\infty} \mu(\mathfrak{B}_T) = \infty$. $X(\mathbb{A}_K)$ hat bzgl. $\{\mathfrak{B}_T\}_T$ Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft, wenn es zwischen der Anzahl der Punkte und dem Tamagawa-Maß μ bzgl. der Leray-Form auf X_{reg} eine asymptotische Beziehung gibt, nämlich*

$$|X(K) \cap \mathfrak{B}_T| \sim \mu(X(\mathbb{A}_K) \cap \mathfrak{B}_T). \tag{13}$$

Diese Definition verallgemeinert den Begriff des Hardy-Littlewoodschen Systemes und der starken Hardy-Littlewoodschen Varietät. Die Definitionen der beiden sind auf $\mathbb{Q}$-Varietäten beschränkt. Außerdem variiert die Folge $\{\mathfrak{B}_T\}_T$ nur bei archimedischen Stellen. Die Folge der kompakten Menge läßt sich konkret dafür konstruieren.

Beispiel 4.2.5 *Sei P ein Polynomsystem. Sei X die von P erzeugte Varietät. Für das Hardy-Littlewoodsche System wird die Folge der kompakten Menge konstruiert durch*

$$\mathfrak{B}_T := \{(x_0, ..., x_s) : \max_i |x|_i \leq T\} \times \prod_{v\neq\infty} \mathbb{Z}^s_p. \tag{14}$$

Für die starke Hardy-Littlewoodsche Varietät wird das folgende Produkt betrachtet:

$$\mathfrak{B}_T := \mathfrak{C}_T^{\infty,|.|_{eu}} \times \mathfrak{B}^f \tag{15}$$

mit beliebigem $\mathfrak{B}^f$ offen kompakt in $\mathbb{A}^s_f$ und $\mathfrak{C}_l^{\infty,|.|_{eu}} := \{(x_0, ..., x_s) : |x|_{eu} \leq l\}$, wobei $|.|_{eu}$ eine euklidische Norm ist. P ist ein Hardy-Littlewoodsches System bzw. X ist eine stark Hardy-Littlewoodsche Varietät, wenn die asymptotische Formel für die entsprechenden Folge der kompakten Menge richtig ist.

Gewissermaßen kann diese Varietät mit Hardy-Littlewoodscher Eigenschaft als eine Verallgemeinerung des affinen Raumes $\mathbf{A}^s_K$ betrachtet werden, wobei der Chinesische Restsatz gilt. Sicherlich läßt sich auch eine Folge der kompakten Menge von $\mathbb{A}^s_K$ konstruieren, so daß die Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft bzgl. dieser Folge überhaupt nicht erfüllt wird. Daher ist es auch sinnvoll, sich auf die "gute" Folge der kompakten Mengen zu beschränken.

Definition 4.2.6 (Gute Folge der adelischen kompakten Menge) *Eine Folge der adelischen kompakten Menge $\{\mathfrak{B}_T\}_T \in \mathbb{A}^s_K$ heißt gut, wenn gilt*

$$|K^s \cap \mathfrak{B}_T| \sim \mu(\mathbb{A}^s_K \cap \mathfrak{B}_T). \tag{16}$$

Bemerkung 4.2.7 H. J. Bartels hat in seinem Artikel [Bar84] eine Folge der adelischen kompakten Menge für das nicht-euklidische Gitterpunkteproblem konstruiert. Im Gegensatz zur klassischen

Überlegung zum Hardy-Littlewoodsches Problem läßt sich diese Folge der adelischen Mengen auch bei nicht-archimedischen Stellen variieren. Aber bei den archimedischen Stellen sind die kompakten Mengen mit den hyperbolischen Kegeln konstruiert. Ohne Gruppenstruktur ist eine solche Konstruktion kaum übertragbar.

Um die gute Folge der adelischen kompakten Menge besser zu verstehen, ist es nötig, die Folge der beschränkten Menge bei reellen Stellen zu untersuchen. Ab jetzt besteht eine Beschränkung auf den Fall $K = \mathbb{Q}$ beschränkt, und es wird $\mathbb{A} := \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ bezeichnet.

4.3 Konstruktion der Folge der beschränkten reellen Mengen

Sei $\mathfrak{B} \subset \mathbb{R}^s$ eine beschränkte offene Menge. Man bezeichne $\mathfrak{B}(\mathbb{Z}) := \mathfrak{B} \cap \mathbb{Z}^s$. Sei $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine monoton zunehmende Folge mit $\lim_{l\to\infty} \phi(l) = \infty$. Eine Gitterpunktmenge $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ wird in dieser Arbeit so verstanden, daß $\Lambda = \Lambda_0 + c$ ist, wobei Λ_0 ein Gitter ist. Betrachtet werde eine Folge der beschränkten Menge $\{\mathfrak{B}_T^\infty\}_{T=1}^\infty$ mit den folgenden Eigenschaften:

($\mathbf{C_1}$) Der Durchmesser $d(\mathfrak{B}_T^\infty) := \sup_{x,y\in\mathfrak{B}_T^\infty} d(x,y)$ genügt der Bedingung $\phi(T) \ll d(\mathfrak{B}_T^\infty) \ll \phi(T)$.

($\mathbf{C_2}$) $\{\mathfrak{B}_T^\infty\}_{l=1}^\infty$ bzgl " $\subset$" ist eine aufsteigende Kette, nämlich $\mathfrak{B}_T^\infty \subset \mathfrak{B}_{T+1}^\infty$.

($\mathbf{C_3}$) $d(\mathfrak{B}_T^\infty)^s \ll Vol_s(\mathfrak{B}_T^\infty) \ll d(\mathfrak{B}_T^\infty)^s$.

($\mathbf{C_4}$) Jede Gitterpunktmenge $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ ist in $\mathfrak{B}_T^\infty$ gleichmäßig verteilt. D. h:

$$|\mathfrak{B}_T^\infty \cap \Lambda| = \frac{Vol_s(\mathfrak{B}_T^\infty)}{\det(\Lambda)} + O((\frac{Vol_s(\mathfrak{B}_T^\infty)}{\det(\Lambda)})^\Delta)$$

für $\Delta \in [0,1)$.

($\mathbf{C_5}$) Es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß sich jede reelle Gerade mit $\mathfrak{B}_T^\infty$ in höchstens C offenen Intervallen schneidet, wobei C eine von T unabhängige Konstante ist.

Bemerkung 4.3.1 Die Bedingung ($\mathbf{C_5}$) ist aus technischem Grund aufgestellt. Sie wird insbesondere unter Verwendung der Weylschen Ungleichung benötigt, wenn die Kreismethode durchgeführt wird.

Bemerkung 4.3.2 [Randbedingungen] Es folgt $Vol_s(\mathfrak{B}_T^\infty) \ll d(\mathfrak{B}_T^\infty)^s$ aus der isoperimetrischen Ungleichung . (s. [BZ88, $S.93, thm.11.2.1$]) Die Bedingungen (C_4) und (C_5) hängen eng zusammen mit dem Rand $\partial\mathfrak{B}_T^\infty$. Dieser Zusammenhang kann anschaulich interpretiert werden. Sei E Fundamentalbereich von $\mathbb{R}^s$ modulo Λ mit $E \subset \overline{\mathfrak{B}_T^\infty}$. Eine solche Menge E enthält genau einen Punkt $c \in \mathfrak{B}_T^\infty \cap \Lambda$, bezeichnet mit E_c. Es ist ersichtlich, daß solche Mengen E_c stets $\mathfrak{B}_T^\infty$ überdecken, $|\mathfrak{B}_T^\infty \cap \Lambda||Vol(E)| = Vol_s(\bigcup_{c\in\mathfrak{B}_T^\infty\cap\Lambda} E_c)$ und die Tatsache, daß die Mengen E_c mit $E_c \not\subset \overline{\mathfrak{B}_T^\infty}$ höchstens Volumen $O(Vol_s(\mathfrak{B}_T^\infty)^\Delta)$ ausmachen. Man bezeichne:

$$U_T := \bigcup_{c\in\mathfrak{B}_T^\infty\cap\Lambda} E_c, \partial^* U_T := \bigcup_{E_c\not\subset U_T} E_c, \partial^*\mathfrak{B}_T^\infty := \partial\mathfrak{B}_T^\infty + E. \tag{17}$$

Die folgenden Ungleichungen hängen mit dem Rand zusammen:

$$Vol_s(\mathfrak{B}_T^\infty)^\Delta \ll Vol_s(\partial^* U_T) \leq Vol_s(\partial^*\mathfrak{B}_T^\infty) \ll Vol_{s-1}(\partial\mathfrak{B}_T^\infty), \tag{18}$$

während $Vol_{s-1}(\partial\mathfrak{B}_T^\infty)$ existiert; dies kann als eine Folgerung aus der nachstehenden Tatsache aus der Maßtheorie beim Kombinieren mit der Voraussetzung $(\mathbf{C_5})$ betrachtet werden:

Seien A, B Borel-Mengen in $\mathbb{R}^s$. Dann gilt $\dim_H(A\cap B)\geq \dim_H A+\dim_H B-s$; *dabei bedeutet* $\dim_H A=$ *die Hausdorffsche Dimension der Menge A.*

(Bezüglich der Definition und der Einzelheiten wird auf [Fal90, S.103] verwiesen. Zum Beweis setzt man $A=\partial\mathfrak{B}_T^\infty$ und $B=$ eine reelle Gerade. Der Begriff für die Hausdorffsche Dimension verallgemeinert den Begriff für die Dimension im gewöhnlichen Sinne.)

Angenommen, daß $Vol_s(\partial\mathfrak{B})$ stückweise glatt ist, dann erhält man die isoperimetrische Ungleichung

$$Vol_{s-1}(\partial\mathfrak{B}_T^\infty)\geq c_s Vol_s(\mathfrak{B}_T^\infty)^{\frac{s-1}{s}}, \tag{19}$$

(s. [BZ88, S.69])
wobei c_s nur von s abhängt. Insofern ist $(\mathbf{C_4})$ erfüllt, falls $Vol_{s-1}(\partial\mathfrak{B}_T^\infty)\ll Vol_s(\mathfrak{B}_T^\infty)^{1-\varepsilon}$ ist. Insbesondere wenn $Vol_{s-1}(\partial\mathfrak{B}_T^\infty)=O(Vol_s(\mathfrak{B}_T^\infty)^{\frac{s-1}{s}})$ ist, spricht man davon, daß $\mathfrak{B}_T^\infty$ einen "guten Rand" hat.

Beispiel 4.3.3 *Man betrachte $\mathfrak{B}$ als eine beschränkte, offene, sternartige Menge bzgl. des Ursprungs mit einem beschränkten Rand $\partial\mathfrak{B}$. D. h. es gelten* $(\mathbf{A}.)$ $x\in\overline{\mathfrak{B}}\Longrightarrow tx\in\overline{\mathfrak{B}}$ $\forall 0\leq t\leq 1$.$(\mathbf{B}.)$ $Vol_s(\partial\mathfrak{B})\ll 1$. *Ferner schneide sich $\mathfrak{B}$ mit jeder Gerade in endlich vielen offenen Intervallen. Ein konkretes Beispiel dafür ist eine beschränkte konvexe Menge.*

Man definiere $\mathfrak{B}_1:=\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_T^\infty:=T\mathfrak{B}$. Die Bedingungen $(\mathbf{C_1}),\ldots,(\mathbf{C_5})$ bzgl. der Folge $\phi(T)=T$ sind erfüllt. Außerdem ist $\Delta\leq\frac{s-1}{s}$.

Beispiel 4.3.4 *Ein häufig auftretendes Beispiel ist eine Folge der Ausdehnungen der Mengen mit dem $(s-1)$-parametrisierbaren Rand. D.h: Sei eine relativ offene Menge $\mathfrak{B}\subset\mathbb{R}^s$. $\mathfrak{B}$ hat $(s-1)$-parametrisierbaren Rand, wenn es endlich viele reelle analytische Abbildungen $f_i:[0,1]^{s-1}\to\mathbb{R}^s$ gibt, so daß der Rand $\partial\mathfrak{B}$ durch die Bilder von f_i überdeckt wird, nämlich $\partial\mathfrak{B}\subset\bigcup_i f_i([0,1]^{s-1})$. Sei eine reelle Folge $\{a_T\}_T$ mit $\lim_{T\to\infty}a_T=\infty$. Es ist nicht schwer nachzuweisen, daß die Folge $\{\mathfrak{B}_T\}_T$ mit $\mathfrak{B}_T:=a_T\mathfrak{B}$ stets die Bedingungen $(\mathbf{C_1}),\ldots,(\mathbf{C_5})$ bzgl. der Folge $\{a_T\}_T$ erfüllt.*

Beispiel 4.3.5 *Sei $\{a_T\}_T$ eine positive monoton zunehmende Folge mit $\lim_{T\to\infty}a_t\to\infty$. Sei $\{\mathfrak{B}_T\}_T$ eine Folge der reellen offenen Mengen mit den Bedingungen $(\mathbf{C_1}),\ldots,(\mathbf{C_5})$ bzgl. $\{a_T\}_T$. Sei H die Gruppe, die durch die Elemente $M:=(m_{ij})_{ij}\in GL_s(\mathbb{Q})$ und $T_a:x\to x+a$ für $a\in\mathbb{Q}^s$ erzeugt wird; deren Elemente können geschrieben werden als $\tau_{M,a}(x)=Mx+a$. Diese Gruppe H heißt affine Gruppe, und deren Elemente affine Transformationen. Sei $|\tau_{M,a}|:=\max(|m_{ij}|,|a_l|)$. Dann erfüllt die Folge $\{\tau_{M,a}(\mathfrak{B}_T)\}_T$ mit $|\tau_{M,a}|=O(1)$ auch die Bedingungen $(\mathbf{C_1}),\ldots,(\mathbf{C_5})$ bzgl. $\{a_T\}_T$.*

Beweis. Die Bedingungen $(\mathbf{C_1}),(\mathbf{C_2}),(\mathbf{C_3})$ und $(\mathbf{C_5})$ sind leicht nachzuprüfen. Sei Λ eine Gitterpunktmenge. Sei $\tau_{M,a}$ mit $|\tau_{M,a}|=O(1)$. Es gilt $|\tau_{M,a}(\mathfrak{B}_T\cap\Lambda|=|\mathfrak{B}_T\cap\tau_{M,a}^{-1}(\Lambda)|$. Die Menge $\tau_{M,a}^{-1}(\Lambda)$ ist ein Gitter mit der Determinante $\frac{\det(\Lambda)}{\det(M)}$. Da die Folge $\{\mathfrak{B}_T\}_T$ vorausgesetzt $(\mathbf{C_4})$ erfüllt, kann man zusammenfassend zeigen, daß $(\mathbf{C_4})$ bei der neuen Folge auch erfüllt ist. □

Für die spätere Anwendung ist die folgende Behauptung formuliert:

Satz 4.3.6 *Sei $Y_{/\mathbb{R}} \subset \mathbf{A}^s$ eine reelle affine Varietät, die nicht notwendig reduziert und irreduzibel ist. Sei $\{a_T\}_T$ eine positive monoton zunehmende Folge mit $\lim_{T\to\infty} a_T = \infty$. Seien bei der Folge der offenen beschränkten Mengen $\{\mathfrak{B}_T^\infty\}_T$ die Bedingungen $(\mathbf{C_1}),...,(\mathbf{C_5})$ bzgl. $\{a_T\}_T$ erfüllt. Sei $\mathfrak{B}$ eine abgeschlossene konvexe Menge mit $0 \in \mathfrak{B}$. Sei die Folge $\{\mathfrak{B}'_T\}_T$ konstruiert durch $\mathfrak{B}'_T := \mathfrak{B}_T^\infty \setminus (Y + \mathfrak{B})$. Dann sind die Bedingungen $(\mathbf{C_1}),...,(\mathbf{C_5})$ bzgl. $\{a_T\}_T$ bei der Folge $\{\mathfrak{B}'_T\}_T$ auch erfüllt.*

Beweis. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß $a_T = T\ \forall T \in \mathbb{N}$ ist. Sicherlich sind die Bedingungen $(\mathbf{C_1})$ und $(\mathbf{C_2})$ erfüllt. Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ eine Gitterpunktmenge. Sei C so ausgewählt, daß $\{C\mathfrak{B} + c\}$ ($c \in \Lambda$ und C geeignete Konstante) eine Überdeckung für $\mathfrak{B}_T$ sind. Sei $\dim_{\mathbb{R}} Y(\mathbb{R}) \leq \dim Y := s' < s$. Es gibt folglicherweise $O(T^{s'})$ solche Mengen wie $C\mathfrak{B} + c$, die $Y(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{B}_T$ überdecken (vgl. [Bir62, $S.250, Lemma(3.1)$]). Daraus folgt, daß die Bedingungen $(\mathbf{C_3}), (\mathbf{C_4})$ erfüllt sind.

Bei der Bedingung $(\mathbf{C_5})$ ist die Überlegung folgendermaßen. Sei L eine reelle affine Gerade. Der Durchschnitt $L \cap Y$ ist entweder L oder eine 0-dimensionale reelle Varietät oder die leere Menge. Wenn $L \cap Y = L$ ist, ist $L(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{B}_T^\infty \setminus (Y(\mathbb{R}) + \mathfrak{B}) = \emptyset$; die Bedingung $(\mathbf{C_5})$ ist erfüllt. Sonst besteht $L \cap Y(\mathbb{R})$ höchstens aus endlich vielen reellen Punkten, etwa $x_1, ..., x_m$. Nach der Bedingung $(\mathbf{C_5})$ gilt, daß $L(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{B}_T^\infty = \bigcup_{i=1}^n I_i$ ist, wobei I_i offene Intervalle sind. Es gilt

$$\begin{aligned} L(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{B}'_T &= L(\mathbb{R}) \cap (\mathfrak{B}_T \setminus (Y(\mathbb{R}) + \mathfrak{B})) \\ &= L(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{B}_T \setminus ((L \cap Y(\mathbb{R})) + \mathfrak{B}) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} I_i \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} \mathfrak{B} + x_i) \end{aligned}$$

Daher ist die Bedingung $(\mathbf{C_5})$ bei $\mathfrak{B}'_T$ auch erfüllt. □

Bevor dieser Abschnitt abschließt, wird noch eine andere Überlegung von der Konstruktion der Folge der beschränkten reellen offenen Mengen dargestellt.

Definition 4.3.7 *Sei eine Folge $\{\mathfrak{B}_T\}_T$ der beschränkten reellen Mengen mit $\mathfrak{B}_T \subset \mathfrak{B}_{T+1}$ und $\lim_{T\to\infty} Vol_s(\mathfrak{B}_T) = \infty$. $\mathfrak{B}_T$ heißt gut gerundet (well rounded), wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Umgebung U um den Ursprung, so daß*

$$\frac{Vol_s(\partial\mathfrak{B}_T + U)}{Vol_s(\mathfrak{B}_T)} < \varepsilon$$

für $T \in \mathbb{N}$.

(vgl. [EM93, $S.183$])

In [EM93] wird die gut gerundete Folge verwendet. Aber in dieser Arbeit spielt die gut gerundete Folge nicht die Hauptrolle. Trotzdem wäre es doch denkbar, daß die Resultate aus späteren Paragraphen auf gut gerundete Folgen möglicherweise übertragen werden können. Mit folgendem Beispiel soll dieser Abschnitt enden.

Beispiel 4.3.8 *Sei $\mathfrak{B}_T \subset \mathbb{R}^2$ mit $\mathfrak{B}_T := (-T, T) \times (-T^2, T^2)$. Sie ist gut gerundet. Die Bedingung $(\mathbf{C_3})$ ist verletzt. Man kann den Rand $\partial\mathfrak{B}_T$ von $\mathfrak{B}_T$ sozusagen sägezahnartig machen, indem man beispielsweise die Transformationen $F_T : \partial\mathfrak{B}_T \to \partial\mathfrak{B}_T^*$ mit $F(x, y) := (x + \sin(x), y)$ betrachtet. Die Menge $\mathfrak{B}_T^*$ ist durch $\partial\mathfrak{B}_T^*$ umkreist. Die Bedingung $(\mathbf{C_5})$ bei $\mathfrak{B}_T^*$ ist verletzt, und die neue Folge bleibt gut gerundet.*

4.4 Gute Folge der adelischen Mengen

In diesem Abschnitt wird die Konstruktion für die gute Folge der adelischen Mengen diskutiert.

Satz 4.4.1 *Sei $\{a_T\}_T$ eine positive monoton zunehmende Folge mit $\lim_{T\to\infty} a_T = \infty$. Sei $\{\mathfrak{B}_T^\infty\}_T$ eine Folge der reellen offenen Mengen, so daß die Bedingungen $(\mathbf{C_1}),...,(\mathbf{C_4})$ bzgl. $\{a_T\}_T$ erfüllt sind. Sei $\mathfrak{B}^f \subset \mathbb{A}_f^s$ eine adelische offene kompakte Menge. Sei $\mathfrak{B}_T := \mathfrak{B}_T^\infty \times \mathfrak{B}^f$. Dann ist $\{\mathfrak{B}_T\}_T$ eine gute Folge.*

Beweis. (1). Falls $\mathfrak{B}^f \subset \widehat{\mathbb{Z}}^s$ ist, läßt sich die Menge $\mathfrak{B}^f$ zerlegen in eine disjunkte Vereinigung der Mengen $\bigcup U_f$ mit der Gestalt: $U_f := \prod_{p\in S\setminus\{\infty\}}(l_p + p^{e_p}\mathbb{Z}_p^s) \times \prod_{p\notin S} \mathbb{Z}_p^s$ mit $l_p \in \mathbb{Z}_p^s$, $\infty \in S$ und $|S| < \infty$. Insofern ist $\mu_f(U_f) = \frac{1}{\prod_{\substack{p\in S\\ p\neq\infty}} p^{se_p}} =: \frac{1}{m}$. Es reicht zu zeigen, daß $\mathfrak{B}_T^\infty \times U_f$ eine gute Folge ist. Man setzt $\mathfrak{B}^f = U_f$. Insofern gilt $\mathfrak{B}_T \cap \mathbb{Q}^s = \mathfrak{B}_T^\infty \cap \Lambda$, wobei $\Lambda \subset \mathbb{Z}^s$ eine Gitterpunktmenge mit der Determinante m ist. Aber es gilt $\mathfrak{B}_T^\infty(\mathbb{Z}) = \bigcup_{l=1}^m k_l + \Lambda$, wobei $k_l + \Lambda$ miteinander disjunkt für verschiedenes l ist. Es gilt $(m_l + \Lambda) \cap \mathfrak{B}_T^\infty = \frac{Vol(\mathfrak{B}_T^\infty)}{m} + O((\frac{Vol(\mathfrak{B}_T^\infty)}{m})^\Delta)$ mit $\Delta \in [0,1)$ wegen der Bedingung (C_4). Daraus folgt $|\mathbb{Q}^s \cap \mathfrak{B}_T| \sim \mu(\mathfrak{B}_T)$.

(2). Falls $\mathfrak{B}^f \not\subset \widehat{\mathbb{Z}}^s$ ist, existiert ein $q \in \mathbb{Z}$ wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{B}^f$, so daß $q\mathfrak{B}^f \subset \widehat{\mathbb{Z}}^s$ ist. Dann ersetzt man die Menge $\mathfrak{B}_T$ durch $q\mathfrak{B}_T$ und wiederholt die Argumentation von (1). Schließlich wird die Bedingung $\mu(q\mathfrak{B}_T) = \mu(\mathfrak{B}_T)$ benutzt, die aus der Produktformel folgt. □

Satz 4.4.2 *Sei $\mathfrak{B}^\infty$ eine reelle beschränkte offene Menge mit dem beschränkem Rand. Sei $\mathfrak{B}^f \subset \mathbb{A}_f^s$ offen kompakt. Sei $\{m_i\}_i^\infty$ eine monoton zunehmende Folge mit $m_i | m_{i+1}$ und $\lim_{i\to\infty} m_i = \infty$. Dann ist die Folge*

$$\mathfrak{B}_i := \mathfrak{B}^\infty \times \frac{1}{m_i}\mathfrak{B}^f \tag{20}$$

eine gute Folge.

Beweis. Nach der Definition der guten Folge ist zu zeigen, daß $\mu(\mathfrak{B}_i) \sim |\mathbb{Q}^s \cap \mathfrak{B}_i|$ ist. Sei $\mathfrak{B}_i' := m_i\mathfrak{B}^\infty \times \mathfrak{B}^f$ eine Folge, die nur bei der reellen Stelle variiert. Wenn gezeigt wird, daß die Tamagawa-Massen $\mu(\mathfrak{B}_i) = \mu(\mathfrak{B}_i')$ gleich sind, dann folgt die erwünschte Aussage wegen des Satzes (4.4.1). Mit der Hilfe der Produktformel gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(\mathfrak{B}_i') &= \mu_\infty(m_i\mathfrak{B}^\infty) \times \mu_f(\mathfrak{B}^f) \\
&= \prod_p |m_i|_p^{\dim X} \times \mu_\infty(\mathfrak{B}^\infty) \times \mu_f(\frac{1}{m_i}\mathfrak{B}^f) \\
&= 1 \times \mu_\infty(\mathfrak{B}^\infty) \times \mu_f(\frac{1}{m_i}\mathfrak{B}^f) \\
&= \mu(\mathfrak{B}_i).\square
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.4.3 Sei $X/\mathbb{Z} \subset \mathbf{A}^s$ eine affine Varietät. Sei $|.|_\infty$ die Norm auf $\mathbb{R}^s$ definiert durch $|x|_\infty := \max_i |x_i|$ für $x = (x_1, ..., x_s) \in \mathbb{R}^s$ Mit der Kreismethode gewinnt man meistens die asymptotische Aussage, die die Anzahl der Punkte in $X(\mathbb{Z})$ mit der beschränkten Norm $|.|_\infty$ beschreiben. Mit Hilfe der obigen zwei Sätze kann die klassische Aussage, die durch die Kreismethode gewonnen wird, auf einige "gute" adelische Folgen übertragen werden.

5 Theorem (1) und Axiomatisierung der Kreismethode

An dieser Stelle werden einige Notationen eingeführt. Sei $X_{/\mathbb{Z}} := V(f_1, .., f_r) \subset \mathbf{A}^s$ eine geometrisch integrale affine Varietät. Ferner sei X ein vollständiger Durchschnitt, nämlich $\dim X = r - s = n$. Zur Vereinfachung wird zusätzlich angenommen, daß alle Polynome f_i des Grades d und nicht notwendig homogen sind. Sei $e(\alpha) := e^{2\pi i\alpha}$. Sei $\mathfrak{C}_T^\infty := \{x \in \mathbb{R}^s : |x|_\infty < T\}$ mit $|x|_\infty := \max_i |x_i|$ für $x = (x_1, ..., x_s) \in \mathbb{R}^s$. Sei $\|.\| : \mathbb{R}^r \to [0, 1)$ die Abbildung gegeben durch $\|x\| := \max_i \min_{y\in\mathbb{Z}} |x_i - y|$ für $x = (x_1, ..., x_r) \in \mathbb{R}^r$.

5.1 Kreismethode und rationale Approximation

Für unseren Zweck wird das Teilresultat von W. M. Schmidt in folgendem Satz formuliert.

Satz 5.1.1 (W. M. Schmidt) *Seien $f_1, ..., f_r \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_s]$ homogene Polynome desselben Grades d. Sei $P := \{f_1, ..., f_r\}$ das Polynomsystem. Sei $X := V(f_1, ..., f_r)$ die affine Varietät. Sei $S(T, \alpha) := \sum_{x\in\mathfrak{C}_T^\infty(\mathbb{Z})} e(\sum_i \alpha_i f_i(x))$ mit $\alpha \in [0, 1)^r$. Die folgenden Annahmen über rationale Approximation seien erfüllt:*
Annahme (1).
Es existiere eine Konstante $\Omega > 0$ so, daß gilt:

$$\forall \quad 0 < \mu \qquad \begin{array}{lll} \textit{gilt entweder} & S(T,\alpha) \ll T^{s-\mu\Omega} \\ \textit{oder} & \exists q = q(\alpha) \in \mathbb{Z} \textit{ mit } q \le T^\mu \quad \& \quad a = a(\alpha) = (a_1, ..., a_r) \in \mathbb{Z}^r \\ \textit{mit} & 0 \le a_i < q \textit{ und } ggT(a_1, ..., a_s, q) = 1 : \end{array}$$
$$\|qa\| \le T^{-d+\mu}$$

mit $\|\alpha\| := \max_i \min_{a\in\mathbb{Z}} |\alpha_i - a|$ und
Annahme (2).
Die Konstante Ω erfülle die Bedingung:

$$\Omega > r + 1.$$

Dann ist P Hardy-Littlewoodsches System; d.h. es gilt:

$$|X(\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{C}_T^\infty| \sim \mathfrak{IS},$$

wobei
$\mathfrak{I} := \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathfrak{C}_T^\infty} e(\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i(x)) dx d\alpha$ *als das singuläre Integral und* $\mathfrak{S} := \prod_{p\neq\infty} \lim_{l\to\infty} \frac{|X(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})|}{p^{l \dim X}}$ *als die singuläre Reihe bezeichnet werden.*

(siehe [Sch85, *Sec.B.*])

Bemerkung 5.1.2 (1) Ist das Polynomsystem P nicht homogen, gibt es auch eine ähnliche Aussage; es sei auf [Sch85, *S.*259] hingewiesen.
(2) Die Aussage darüber, wenn deg f_i verschieden sind, ist ähnlich; es sei auf [Sch85, *S.*253] hingewiesen.
(3) Normalerweise wird die Gültigkeit der Annahme (1) und der Annahme (2) mit Hilfe der Weylschen Ungleichung gezeigt, wenn r, die Anzahl der Variablen, hinreichend groß ist. Falls zusätzlich

$f_1, ..., f_r$ vom additiven Typ sind, beispielsweise Diagonalformen, können doch mit Huas Lemma oder Vingradovs Methode viele Variablen "erspart" werden. Solche Überlegungen sind klassisch und es sei auf [Dav62], [Dav77] und [Vau81] hingewiesen.
(4) In [Sch85] wird nicht ausdrücklich erwähnt, daß die Varietät X ein vollständiger Durchschnitt und absolut irreduzibel und absolut reduziert sein sollte. Aber mit dieser geometrischen Voraussetzung werden viele komplizierte Situationen vermieden.
(5) Unter einer zusätzlichen Bedingung über Singularitäten kann gezeigt werden, daß das singuläre Integral bzw. die reelle Gauß-Transform $\int_{\mathbb{R}^r}\int_{\mathfrak{C}_T^\infty} e(\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i(x))dxd\alpha$ dargestellt werden kann als das lokale Tamagawa-Maß bei der reellen Stelle bzgl. der Leray-Form; dies läßt sich zeigen mit Hilfe der Fourier-Umkehrformel. (siehe beispielsweise [Dan85, $S.55-57$] oder [Bir62, $S.259, Lemma(6.3)$])
(6) Für $x \in \mathbb{Q}_p$ sei $[x]$ der ganzzahlige Teil von x, und $\{x\}$ der Bruchteil von x, d.h. $x = [x]+\{x\}$ mit: $[x] \in \mathbb{Z}_p$, $\{x\} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ und entweder $|\{x\}|_p = 0$ oder $|\{x\}|_p > 1$. Sei λ_p der Tate-Charakter gegeben durch $\lambda_p(x) = e(\{x\})$. Unter einer singulären Bedingung existiert die p-adische Gauß-Transform, die definiert ist durch $\int_{\mathbb{Q}_p^r}\int_{\mathbb{Z}_p^s} \lambda_p(\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i(x))dxd\alpha$; dabei ist das Haar-Maß so normalisiert, daß $\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1$ gilt. Diese nennt man die p-adische lokale Dichtigkeit. Wie bei der reellen Stelle kann auch theoretisch mit Hilfe der Fouriertransform gezeigt werden, daß die p-adische Dichtigkeit und das p-adische lokale Tamagawa-Maß bzgl. der Leray-Form gleich sind, wenn noch einige zusätzliche Bedingungen erfüllt sind.

Als konkretes Beispiel wird das berühmte Resultat von Birch auf folgende Weise dargestellt.

Satz 5.1.3 (Birch) *Seien P und X wie oben. Wenn $s-\dim C_f > (d-1)2^{d-1}r(r+1)$ ist, dann sind die Annahme (1) und Annahme (2) erfüllt. Dann ist P folglicherweise ein Hardy-Littlewoodsches System. Mit anderen Worten, die Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft bei X bzgl. der Folge $\{\mathfrak{C}_T^\infty \times \widehat{\mathbb{Z}}^s\}_T$ ist erfüllt.*

(siehe [Bir62])

Bevor wir eine Verallgemeinerung aufstellen, werden einige Notationen eingeführt.

5.2 Exponentialsumme und die affine Gruppe

Wie im Beispiel (4.3.5) sei $H/\mathbb{Q}$ die affine Gruppe, die auf $\mathbb{Q}^s$ operiert. Sei $\tau \in H$ mit $\tau = i_a \circ M$, wobei $M := (m_{ij})_{ij} \in GL_s(\mathbb{Q})$ und $i_a(x) = x + a$ mit $a \in \mathbb{Q}^s$ sind.

Lemma 5.2.1 *Sei $\Lambda \subset \mathbb{Q}^s$ eine Gitterpunktmenge in $\mathbb{R}^s$; d.h.: $\Lambda = \{b + \sum_{i=1}^s l_i x_i | l_i \in \mathbb{Z}\}$ mit $b \in \mathbb{Q}^s$ und $\{x_i\}_i$ ist eine Basis für den Vektorraum $\mathbb{Q}^s$. Dann existiert eine affine Transformation $\tau \in H$ so, daß $\tau(\Lambda) = \mathbb{Z}^s$ gilt.*

Beweis. Sei $X := (x_{ij})_{ij} \in GL_s(\mathbb{Q})$ mit $x_i = \sum_k x_{ik}e_k$, wobei $\{e_i\}_i$ die Standardbasis für $\mathbb{Q}^s$ ist. Dann ist $\tau := X^{-1} \circ i_{-b}$ die erwünschte affine Transformation. □

Definition 5.2.2 *Sei $\tau \in H$ eine affine Transformation mit $\tau(x) = M(x)+a$, wobei $M := (m_{ij})_{ij}$ mit $m_{ij} \in \mathbb{Q}$ und $a \in \mathbb{Q}^s$ sind. Seien $p_{ij}, q_{ij}, r_i, s_i \in \mathbb{N}$ so, daß $m_{ij} = \frac{p_{ij}}{q_{ij}}$ und $a_i = \frac{r_i}{s_i}$ mit $ggT(p_{ij}, q_{ij}) = 1$ und $ggT(r_i, s_i) = 1$ sind. Dann definiert sich die Höhe von τ als $H(\tau) := \max_{ij,k}(|p_{ij}|, |q_{ij}|, |r_k|, |s_k|)$.*

Sei $\{\mathfrak{B}_T^\infty\}_T$ eine Folge der offenen Mengen in $\mathbb{R}^s$ mit den Bedingungen $(\mathbf{C_1}), ...(\mathbf{C_5})$. Sei τ eine affine Transformation auf $\mathbb{Q}^s$ mit $H(\tau) \ll 1$. Sei $X_{/\mathbb{Z}} := V(f_1, ..., f_r) \in \mathbf{A}^s$ eine affine Varietät. Für $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_r) \in [0,1)^r$ sei $S(T, \alpha) := \sum_{x \in \mathfrak{B}_T^\infty(\mathbb{Z})} e(\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i(x))$ die Exponentialsumme bzgl. $\mathfrak{B}_T^\infty(\mathbb{Z})$. Sei τ eine affine Transformation auf $\mathbb{Q}^s$ mit $H(\tau) \ll 1$. Dann schreibt sich formalerweise

$$S(T, \tau; \alpha) := \sum_{x \in \mathfrak{B}_T^\infty(\mathbb{Z})} e(\sum_i \alpha_i f_i(\tau(x))).$$

Bemerkung 5.2.3 Das Polynomsystem $P := \{f_1 \circ \tau, ..., f_r \circ \tau\}$ ist nicht immer über $\mathbb{Z}$ definiert. Dewegen wird unter der Verwendung der Kreismethode stattdessen ein anderes Polynomsystem $P' := \{n_1 f_1 \circ \tau, ..., n_r f_r \circ \tau\}$, das über $\mathbb{Z}$ definiert ist, mit $n_i \ll 1$ betrachtet; sicherlich bestimmen die beiden Polynomsysteme P und P' die gleiche $\mathbb{Q}$-Varietät. In diesem Fall ist $S'(T, \tau; \alpha) = \sum_{x \in \mathfrak{B}_T^\infty(\mathbb{Z})} e(\sum_i n_i \alpha_i f_i(\tau(x)))$ zu betrachten. Obwohl die Definition von $S'(T, \tau; \alpha)$ von $(n_1, ..., n_r)$ abhängt, spielt dieser r-te Tuple $(n_1, ..., n_r)$ bei der Abschätzung der Exponentialsumme keine große Rolle, wenn α in "minor arcs" liegt. (Die Begriffe "major arcs" und "minor arcs" werden später (Kap. (6)) behandelt.)

Bemerkung 5.2.4 Die Menge $\mathbb{Z}^s$ ist ein Gitter in $\mathbb{R}^s$. Statt $\mathbb{Z}^s$ wird auch das andere Gitter betracht. Sei $\Lambda \in \mathbb{Q}^s$ ein anderes Gitter. Mit Hilfe des obigen Lemmas gibt es eine affine Transformation τ so, daß $\Lambda = \tau(\mathbb{Z}^s)$ gilt. Die Exponentialsumme

$$S(T, \Lambda; \alpha) := \sum_{x \in \mathfrak{B}_T^\infty \cap \Lambda} e(\sum_i \alpha_i f_i(x))$$

läßt sich umschreiben als

$$S(T, \Lambda; \alpha) = \sum_{x \in (\tau^{-1}(\mathfrak{B}_T^\infty))(\mathbb{Z})} e(\sum_i \alpha_i f_i(\tau(x))).$$

Es kann gezeigt werden, daß bei der neuen Folge $\{\tau(\mathfrak{B}_T^\infty)\}_T$ auch die Bedingungen $(\mathbf{C_1}), ..., (\mathbf{C_5})$ wie im Beispiel (4.3.5) erfüllt sind.

5.3 Formulierung des Theorems (1)

In diesem Abschnitt werden einige Aussagen formuliert, die prinzipiell als Verallgemeinerung der Resultate von W. M. Schmidt und von Birch betrachtet werden können. Eine Aussage mit der Annahme über rationale Approximation lautet:

Theorem 1 *Seien $f_1, ..., f_r \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_s]$ homogene Polynome desselben Grades d. Sei $X := V(f_1, ..., f_r) \subset \mathbf{A}^s$ eine Varietät und ein vollständiger Durchschnitt. Sei $\{a_T\}_T$ eine beliebige positive reelle monoton zunehmende Folge mit $\lim_{T\to\infty} a_T = \infty$. Sei $\{\mathfrak{B}_T^\infty\}_T$ eine beliebige Folge der offenen Mengen in $\mathbb{R}^s$ mit den Bedingungen $(\mathbf{C_1})$...$(\mathbf{C_5})$ bzgl. $\{a_T\}_T$. Sei $H' := \{\tau$ affine Transformation auf $\mathbb{Q}^s \mid H(\tau) \ll 1\}$. Sei $\tau \in H'$. Sei $(n_1, ..., n_r) \in \mathbb{Z}^r$ mit $n_i \ll 1$ so, daß das Polynomsystem $P' := \{n_1 f_1 \circ \tau, ..., n_r f_r \circ \tau\}$ über $\mathbb{Z}$ definiert ist. Sei $S'(T, \tau; \alpha) := \sum_{x \in \mathfrak{B}_T^\infty(\mathbb{Z})} e(\sum_i n_i \alpha_i f_i(\tau(x)))$ die entsprechende Exponentialsumme. Seien die folgenden Voraussetzungen der rationalen Approximation erfüllt:*
Annahme $(\mathbf{HL_1})$.
Es existiere Ω so, daß gilt: Für alle $0 < \mu$ gilt entweder

$$S'(T, \tau; \alpha) \ll a_T^{s - \mu\Omega} \tag{21}$$

oder

$$\exists q = q(\alpha) \leq T^\mu \quad \text{und} \quad a := a(\alpha) \in \mathbb{Z}^r \quad \text{mit} \quad 0 \leq a_i < q, ggT(a_1, ..., a_r, q) = 1 : \|qa\| \leq {a_T}^{-d+\mu}.$$

Annahme $(\mathbf{HL_2})$

$$\Omega > r + 1. \tag{22}$$

Ferner sei die Annahme der Singularität erfüllt :
Annahme $(\mathbf{HL_3})$

$$\mathrm{codim} C_f > rd \tag{23}$$

Dann besitzt X die Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft bzgl. der nachstehenden Folge der adelischen Mengen $\{\mathfrak{B}_T\}_T$. Dabei ist $\mathfrak{B}_T := \mathfrak{B}_T^\infty \times \mathfrak{B}_T^f$; $\{\mathfrak{B}_T^\infty\}_T$ ist eine beliebige Folge der offenen Mengen mit den Bedingungen $(\mathbf{C_1}), ..., (\mathbf{C_5})$ bzgl. $\{a_T\}_T$; $\mathfrak{B}_T^f \subset \mathbb{A}_f^s$ ist rekursiv definiert durch $\mathfrak{B}_{T+1}^f := \frac{1}{m_T}\mathfrak{B}_T^f$ mit $m_T \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung 5.3.1 **(1)** In dieser Formulierung werden die Folgen $\{a_T\}_T$, $\{\mathfrak{B}_T^\infty\}_T$ und $\{\mathfrak{B}_T\}_T$ nicht festgelegt.
(2) Die Annahme, daß alle Polynome f_i homogen sind, ist hier nötig.

Bevor dieses Theorem bewiesen wird, wird eine schwächere Aussage formuliert.

Satz (A) *Sei $X_{/\mathbb{Z}} := V(f_1, ..., f_r) \subset \mathbf{A}^s$ wie oben. Sei $\{a_T\}_T$ eine beliebige positive reelle monoton zunehmende Folge mit $\lim_{T\to\infty} a_T = \infty$. Sei $\{\mathfrak{B}_T^\infty\}_T$ eine beliebige Folge der offenen Mengen in $\mathbb{R}^s$ mit den Bedingungen $(\mathbf{C_1})$...$(\mathbf{C_5})$ bzgl. $\{a_T\}_T$. Sei H' wie oben. Sei $\tau \in H'$ eine beliebige affine Transformation. Sei $(n_1, ..., n_r) \in \mathbb{Z}^r$ mit $n_i \ll 1$ so, daß das Polynomsystem $P' := \{n_1 f_1 \circ \tau, ..., n_r f_r \circ \tau\}$ über $\mathbb{Z}$ definiert ist. Sei $S'(T, \tau; \alpha) := \sum_{x \in \mathfrak{B}_T^\infty(\mathbb{Z})} e(\sum_i n_i \alpha_i f_i(\tau(x)))$ die entsprechende Exponentialsumme. Seien die folgenden Voraussetzungen der rationalen Approximation erfüllt:*

Annahme $(\mathbf{HL_1})$.
Es existiere Ω *so, daß gilt: Für alle* $0 < \mu$ *gilt entweder*

$$S'(T,\tau;\alpha) \leq a_T^{\,s-\mu\Omega}$$

oder

$$\begin{aligned} \exists q = q(\alpha) \leq T^{\mu} \quad & \textit{und} \quad a := a(\alpha) \in \mathbb{Z}^r \\ & \textit{mit} \quad 0 \leq a_i < q, ggT(a_1,...,a_r,q) = 1 : \|qa\| \leq {a_T}^{-d+\mu}. \end{aligned}$$

Annahme $(\mathbf{HL_2})$

$$\Omega > r+1.$$

Annahme $(\mathbf{HL_3})$

$$\mathrm{codim} C_f > rd.$$

Die Varietäten X_τ $(\tau \in H)$ *besitzen die Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft bzgl.* $\{\mathfrak{B}_T^\infty \times \mathbb{Z}_p^s\}$. *D.h., es gilt:*

$$|X_\tau(\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{B}_T^\infty| \sim \mu_\infty(X_\tau(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{B}_T^\infty) \times \mu_f(X_\tau(\mathbb{Z}_p)),$$

wobei $\mathfrak{B}_T := \mathfrak{B}_T^\infty \times \widehat{\mathbb{Z}}^s$ *sind; dabei sind die Bedingungen* $(\mathbf{C_1}),...,(\mathbf{C_5})$ *bzgl.* $\{a_T\}_T$ *bei der Folge* $\{\mathfrak{B}_T^\infty\}_T$ *erfüllt.*
Wir werden zuerst Theorem (1) aus Satz (A) herleiten. Danach werden wir Satz (A) beweisen.

6 Beweis zum Theorem (1)

6.1 Herleitung von Theorem (1) aus Satz (A)

Sei X ein vollständiger Durchschnitt wie im Theorem (1) gegeben. Sei $\{\mathfrak{B}_T\}_T$ eine Folge der adelischen Mengen wie im Theorem (1) konstruiert: $\mathfrak{B}_T := \mathfrak{B}_T^\infty \times \mathfrak{B}_T^f$. X besitzt die Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft bzgl. $\{\mathfrak{B}_T\}_T$ genau dann, wenn es gilt:

$$|X(\mathbb{Q}) \cap (\mathfrak{B}_T^\infty \times \mathfrak{B}_T^f)| \sim \mu(X(\mathbb{A}) \cap (\mathfrak{B}_T^\infty \times \mathfrak{B}_T^f)).$$

Der Beweis wird in den folgenden Lemmata schrittweise formuliert.

Lemma 6.1.1 *Es reicht zu zeigen, daß mit der Annahme der Gültigkeit des Satzes (A) folgt:* $|X(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{B}_T'| \sim \mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}_T')$ *mit* $\mathfrak{B}_T' := \mathfrak{B}_T^\infty \times \mathfrak{B}^f$, *wobei* $\mathfrak{B}^f \subset \mathbb{A}_f^s$ *ist.*

Beweis. Sei $\mathfrak{B}_T = \mathfrak{B}_T^\infty \times \mathfrak{B}_T^f$. Nach der Definition ist $\mathfrak{B}_T^f = \frac{1}{m}\mathfrak{B}_1^f$ offen kompakt mit $m = \prod_{i=1}^{T-1} m_i$. Sei $\mathfrak{B}_T' := m\mathfrak{B}_T^\infty \times \mathfrak{B}_1^f$. Es reicht zu zeigen, daß sich die Folge $\{\mathfrak{B}_T\}_T$ durch die Folge $\{\mathfrak{B}_T'\}$ ersetzen läßt. Da f_i homogen sind, liefert die Abbildung $x \to mx$ eine bijektive Abbildung von $X(\mathbb{Q})$ auf sich selbst. Daher gilt

$$|X(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{B}_T| = |X(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{B}_T'|.$$

Außerdem gilt wegen der Produktformel stets

$$\mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}_T) = \mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}_T');$$

dabei sind die Bedingungen $(\mathbf{C_1}), ..., (\mathbf{C_5})$ bei $m\mathfrak{B}_T^\infty$ erfüllt. Es bleibt noch zu zeigen:

$$|X(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{B}_T'| \sim \mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}_T') \square$$

Lemma 6.1.2 *Es reicht zu zeigen, daß mit der Annahme der Gültigkeit des Satzes (A) folgt:* $|X(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{B}_T'| \sim \mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}_T')$ *mit* $\mathfrak{B}_T' := \mathfrak{B}_T^\infty \times \mathfrak{B}^f$, *wobei* $\mathfrak{B}^f \subset \widehat{\mathbb{Z}}^s$ *ist.*

Beweis. Da $\mathfrak{B}^f \subset \mathbb{A}^s$ kompakt ist, existiert $m \in \mathbb{Z}$ mit $m\mathfrak{B}^f \subset \widehat{\mathbb{Z}}^s$. Nutzt man die Argumentation wie im letzten Lemma aus, dann folgt die erwünschte Aussage. $\square$

Lemma 6.1.3 *Es reicht zu zeigen, daß mit Annahme der Gültigkeit des Satzes (A) folgt:* $|X(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{B}_T'| \sim \mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}_T')$ *mit* $\mathfrak{B}_T' := \mathfrak{B}_T^\infty \times \mathfrak{B}^f$, *wobei* $\mathfrak{B}^f = \prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} (l_p + p^{e_p}\mathbb{Z}_p^s) \times \prod_{s \notin S} \mathbb{Z}_p^s$ *für* $l_p \in \mathbb{Z}_p^s$, $|S| < \infty$ *und* $\infty \in S$.

Bemerkung 6.1.4 In diesem Fall ist das Problem der Herleitung auf das Gitterpunktproblem innerhalb einer beschränkten Menge reduziert, wobei solche Gitterpunkte die entsprechenden Kongruenzbedingungen erfüllen.

Beweis. Die kompakte offene adelische Menge $\mathfrak{B}^f \subset \widehat{\mathbb{Z}}^s$ läßt sich zerlegen in eine disjunkte Vereinigung der Mengen mit der Gestalt

$$\prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} (l_p + p^{e_p}\mathbb{Z}_p^s) \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p^s$$

mit $l_p \in \mathbb{Z}_p^s$, $|S| < \infty$ und $\infty \in S$.$\square$

Lemma 6.1.5 *Aus der Annahme der Gültigkeit des Satzes (A) folgt:*

$$|X(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{B}'_T| \sim \mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}'_T)$$

mit $\mathfrak{B}'_T := \mathfrak{B}^\infty_T \times \mathfrak{B}^f$, *wobei* $l_p \in \mathbb{Z}^s$, $\mathfrak{B}^f = \prod_{p \in S \setminus \{\infty\}} (l_p + p^{e_p}\mathbb{Z}^s_p) \times \prod_{s \notin S} \mathbb{Z}^s_p$ *für* $|S| < \infty$ *und* $\infty \in S$.

Beweis. Sei $\mathfrak{B}'_T = \mathfrak{B}^\infty_T \times \mathfrak{B}^f$ wie im Lemma angegeben. Sei $\Lambda := \{x \in \mathbb{Z}^s | x \equiv l_p (mod p^{e_p}) \forall p \in S\}$ das entsprechende Gitter. Es folgt $|X(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{B}'_T| = |X(\mathbb{Q}) \cap \Lambda \cap \mathfrak{B}^\infty_T|$. Wegen des Lemmas (4.3.5) existiert $\tau \in H$ so, daß $\tau(\mathbb{Z}^s) = \Lambda$ gilt. Es folgt $|X(\mathbb{Q}) \cap \Lambda \cap \mathfrak{B}^\infty_T| = |X_\tau(\mathbb{Z}) \cap \tau(\mathfrak{B})^\infty_T)|$; denn es gelten:

$$\begin{aligned}
& x \in X(\mathbb{Q}) \cap \Lambda \cap \mathfrak{B}^\infty_T \\
\iff \quad & f_i(x) = 0 \quad \forall i, x \in \Lambda, x \in\in \mathfrak{B}^\infty_T \\
\iff \quad & f_i(\tau(x)) = 0, x \in \mathbb{Z}^s, x \in \tau^{-1}(\mathfrak{B}^\infty_T) \\
\iff \quad & x \in X_\tau(\mathbb{Z}) \cap \tau^{-1}(\mathfrak{B}^\infty_T).
\end{aligned}$$

Die Definition der Differentialform ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten. Das Maß $\mu(X_\tau(\mathbb{A}) \cap (\tau^{-1}(\mathfrak{B}^\infty_T \times \widehat{\mathbb{Z}}^s))$ läßt sich nach der Transformation der Koordinaten $(x_1, ..., x_s) \to (\tau^{-1}(x_1), ..., \tau^{-1}(x_s))$ identifizieren mit dem Maß $\mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}'_T)$. Nach der Annahme der Gültigkeit des Satzes (A) gilt:

$$|X_\tau(\mathbb{Z}) \cap \tau^{-1}(\mathfrak{B}^\infty_T)| \sim \mu_\infty(X_\tau(\mathbb{R}) \cap \tau^{-1}(\mathfrak{B}^\infty_T)) \times \mu_f(X_\tau(\widehat{\mathbb{Z}})).$$

Zusammengefaßt folgt $|X(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{B}'_T| \sim \mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}'_T)$. □

6.2 Rationale Approximation, major arcs und minor arcs

Zur Vereinfachung sei die reelle mononton zunehmende Folge $\{a_T\}_T$ immer $a_T = T$. Sei $Y = X_\tau := V(f_1 \circ \tau, ..., f_r \circ \tau)$ ein vollständiger Durchschnitt. Ohne Einschränkung sei Y über $\mathbb{Z}$ definiert. Sei $S'(T,\alpha) = S(T,\tau;\alpha) := \sum_{x \in \mathfrak{B}_T^\infty(\mathbb{Z})} e(\sum_i \alpha_i f_i(\tau(x)))$ für $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_r) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r$. Seien $g_i := f_i \circ \tau$ und g_i^* der homogene Teil vom g_i für $i = 1, ..., r$. Den folgenden Satz möchten wir zunächst beweisen, der als eine Verallgemeinerung des Resultates von W. M. Schmidt betrachtet werden kann.

Satz 6.2.1 *Sei Y wie oben. Sei $S'(T,\alpha)$ wie oben. Zu jeder Folge $\{\mathfrak{B}_T^\infty\}_T$ in $\mathbb{R}^s$ mit den Bedingungen $(\mathbf{C_1}), ..., (\mathbf{C_5})$ gelten:*
$(\mathbf{HL_1}*)$ $\forall \mu > 0 \quad \exists \Omega$:
entweder $S(T,\alpha) \ll T^{s-\mu\Omega}$
oder $\exists q = q(\alpha) \leq T^\mu$ und $a := (a_1, ..., a_r) \in \mathbb{Z}^r$ mit $0 \leq a_i < q$, $ggT(a_1, ..., a_s, q) = 1$:

$$|a - q\alpha|_\infty \leq T^{-d+\mu}.$$

$(\mathbf{HL_2}*)$ $\exists \Omega : \Omega > r + 1$.
Dann gilt: $|Y(\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{B}_T^\infty| \sim \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{S}$, wobei $\mathfrak{J} := \int_{\mathbb{R}^s} \int_{x \in \mathfrak{B}_T(\mathbb{R})} e(\sum_i \alpha_i g_i(x)))dxd\alpha$ das singuläre Integral und $\mathfrak{S} := \prod_{p \neq \infty} \lim_{l \to \infty} \frac{|Y(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})|}{p^{l \dim Y}}$ die singuläre Reihe im klassischen Sinne sind.

Für q und $a := (a_1, ..., a_r) \in \mathbb{Z}^r$ definiere sich arc $\mathfrak{M}(q,a,\alpha) := \{\alpha \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r : \|a - q\alpha\| \leq T^{-d+\mu}\}$. Mit Hilfe des Dirichletschen Approximationssatzes kann gezeigt werden, daß jedes $\alpha \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r$ stets in einem arc $\mathfrak{M}(q,a,\alpha)$ liegt. Seien $\mathfrak{M}(\mu) := \bigcup_{\substack{a,q \\ q \leq T^\mu}} \mathfrak{M}(q,a,\alpha)$ die major arcs; mit anderen Worten ist $\mathfrak{M}(\mu)$ die Menge von α, das die zweite Alternative der Annahme $(\mathbf{HL_1}*)$ erfüllt. Seien $\mathfrak{m}(\mu) := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r \setminus \mathfrak{M}(\mu)$ die minor arcs. Zur Vereinfachung werden die major arcs durch größere arcs ersetzt, nämlich $\mathfrak{M}'(q,a,\alpha) := \{\alpha \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r : \|a/q - \alpha\| \leq T^{-d+\mu}\}$ für $q \leq T^\mu$. Sei $\mathfrak{M}'(\mu) := \bigcup_{\substack{a,q \\ q \leq T^\mu}} \mathfrak{M}'(q,a,\alpha)$. Dabei sind $\mathfrak{M}'(q,a,\mu)$ miteinander disjunkt, wenn μ hinreichend klein ist.
Aus der Tatsache $\int_0^1 e(ax)dx = \begin{cases} 1 : a = 0 \\ 0 : a \neq 0 \end{cases}$ folgt $|Y(\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{B}_T^\infty| = \int_{[0,1]^r} S'(T,\alpha)d\alpha$. Nach der Zerlegung in arcs gilt:

$$|Y(\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{B}_T^\infty| - \int_{\mathfrak{M}'(\mu)} S'(T,\alpha)d\alpha = (\int_{\mathfrak{M}(\mu)} + \int_{\mathfrak{m}(\mu)} - \int_{\mathfrak{M}'(\mu)}) S'(T,\alpha)d\alpha$$

Aus $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{m}$ folgt

$$|Y(\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{B}_T^\infty| - \int_{\mathfrak{M}'(\mu)} S'(\alpha)d\alpha \ll \int_{\mathfrak{m}(\mu)} |S'(T,\alpha)|d\alpha.$$

Eine Abschätzung für das Integral auf minor arcs lautet:

Lemma 6.2.2 *Seien Bedingungen $(\mathbf{HL_1}*)$ und $(\mathbf{HL_2}*)$ erfüllt. Dann gilt für $\mu > 0$*

$$\int_{\mathfrak{m}(\mu)} |S'(\alpha)|d\alpha \ll T^{s-rd-\delta} \tag{24}$$

für $\delta = \delta(\mu) > 0$.

Beweis. Die Beweisidee ist ähnlich zu [Sch85, *Lemma*5.1]. Sei $E \in \mathbb{R}$ mit $E\Omega > rd$. Seien $\mu = \mu_0 < .. < \mu_h = E$. Dabei definiere sich $\mathfrak{m}_i := \mathfrak{M}(\mu_i) \setminus \mathfrak{M}(\mu_{i-1})$. Es gilt

$$\mathfrak{m}(\mu) = ((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r \setminus \mathfrak{M}(1)) \cup \bigcup_i \mathfrak{m}_i. \tag{25}$$

Das Maß von $\mathfrak{m}_i$ ist $\ll T^{\mu_i(r+1)-rd}$. Nach der ersten Alternative der Bedingung (**HL₁***) bekommt man $\int_{\mathfrak{m}_i} S'(\alpha)d\alpha \ll T^{s-rd-\mu_{i-1}\Omega+\mu_i(r+1)}$. Dabei ist $\mu_{i-1}\Omega - \mu_i(r+1) > 0$, wenn $|\mu_i - \mu_{i-1}|$ hinreichend klein ist.□

Für den Zweck weiterer Abschätzungen wird μ als eine hinreichend kleine positive Zahl ausgewählt. Übrig bleibt zu zeigen, daß das Integral auf major arcs bzw. der Menge $\mathfrak{M}'(\mu)$ stets durch das Produkt $\mathfrak{S}\mathfrak{J}$ ersetzt werden kann.

6.3 Integral auf major arcs

Seien $g_i = f_i \circ \tau$ für $i = 1, ..., r$. Sei g_i^* der homogene Teil von g_i für $i = 1, ..., r$. Zur Vereinfachung setze man $\mathfrak{M}(q,a) := \mathfrak{M}'(q,a,\mu)$. Das Integral auf major arcs wird auf die folgende Weise zerlegt.

$$\int_{\mathfrak{M}(\mu)} S'(T,\alpha)d\alpha = \sum_{1\le q\le T^\mu} \sum_{\substack{0\le a_i<q \\ ggT(a_i,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}(q,a)} S'(T,\alpha)d\alpha$$

Dabei seien $\alpha = a/q + \beta$ für $a := (a_1, .., a_r) \in \mathbb{Z}^r$ und $\beta := (\beta_1, ..., \beta_r) \in [0,1)^r$,$e_q(\alpha) := e(\alpha/q), a \cdot g(z) := \sum_i a_i g_i(z), a \cdot g^*(z) := \sum_i a_i g_i^*(z), S(q,a) := \frac{1}{q^s}\sum_{1\le z_i\le q} e(a \cdot f(z)), S_q := \sum_{\substack{a_i<q \\ ggT(a_i,q)=1}} S(q,a)$ und $V(\beta, \mathfrak{B}_T^\infty) := \int_{\mathfrak{B}_T^\infty} e(\beta \cdot g(z))dz$. Insbesondere $V(\beta, \mathfrak{B}_T^\infty)$ heißt Gaußsche Transform. Sei $V^*(\beta, \mathfrak{B}) = \int_{\mathbb{R}^r}\int_{\mathfrak{B}} e(\sum_i \beta_i g_i^*(x))dxd\beta$ für $\beta \in \mathbb{R}^r$ und $\mathfrak{B} \subset \mathbb{R}^s$. Dann gelten:

$$\begin{aligned} S'(T,\alpha) &= S'(T, a/b + \beta) \\ &= \sum_{x\in\mathfrak{B}_T^\infty(\mathbb{Z})} e((a/q+\beta)\cdot g(x)) \\ &= \sum_{z \pmod q} e_q(a\cdot g(z) + qz\cdot b) \sum_{y:qy+z\in\mathfrak{B}_T^\infty(\mathbb{Z})} e(\beta\cdot g(qy+z)) \\ &= S(q,a)q^s \sum_{y:qy+z\in\mathfrak{B}(\mathbb{Z})} e(\beta\cdot g(qy+z)) \end{aligned}$$

Grob gesagt, wird die Summe $\sum_{y:qy+z\in\mathfrak{B}_T^\infty(\mathbb{Z})} e(\beta\cdot g(qy+z))$ durch das Integral $V(\beta, \frac{1}{q}(\mathfrak{B}-z))$ ersetzt. Dann läßt sich die Exponentialsumme $S'(\alpha)$ mit dem Produkt $S(q,a)V(\beta,\mathfrak{B}_T^\infty)$ bis auf einen Fehlerterm ausdrücken. Die folgenden zwei Lemmata besagen, wie groß die auftretenden Fehlerterme sein können.

Lemma 6.3.1 *Es gilt*

$$\sum_{y:qy+z\in\mathfrak{B}_T^\infty(\mathbb{Z})} e(\beta\cdot g(qy+z)) = \int_{qy+z\in\mathfrak{B}_T^\infty} e(\beta\cdot g(qy+z))dy + O((\sum_i|\beta_i|)qT^{d-1}(\frac{T}{q})^s + (\frac{T}{q})^{s\Delta}).$$

Beweis. Die Variation zwischen der Summe $\sum_{y:qy+z\in\mathfrak{B}_T^\infty(\mathbb{Z})} e(\beta\cdot g(qy+z))$ und dem Integral $\int_{qy+z\in\mathfrak{B}_T^\infty} e(\beta\cdot g(qy+z))dy$ wird abgeschätzt. Die Überlegung ist sehr klassisch. Die Gitterpunktmenge $\Lambda := \{qy+z | y \in \mathbb{Z}^s\}$ hat die Determinante q^s. Sei $U_0 := \{x \in \mathbb{R}^s | 1/2 < |x_i| \le 1/2\}$. Sei

$E_c := qU_0 + c$ mit $c \in \Lambda$. Jede dieser Mengen E_c ist ein Fundamentalbereich für Λ. Offensichtlich ist $\bigcup_{c \in \Lambda \cap \mathfrak{B}} E_c \supset \overline{\mathfrak{B}}$. Nach der Bedingung $(\mathbf{C_4})$ folgt, daß gilt

$$|\Lambda \cap \mathfrak{B}| = \frac{Vol_s(\mathfrak{B})}{q^s} + O((\frac{T}{q})^{s\Delta})$$

mit $\Delta < 1$. Daher existieren höchstens $O((\frac{T}{q})^{s\Delta})$ von diesen Mengen E_c mit $E_c \not\subset \overline{\mathfrak{B}}$. Außerdem gibt es $O((\frac{T}{q})^s)$ dieser E_c mit $E_c \subset \overline{\mathfrak{B}}$. Die Variation auf E_c wird abgeschätzt durch

$$\left| e(\beta \cdot g(c)) - \int_{qy+z \in E_c} e(\beta \cdot g(qy+z))dy \right| = \left| e(\beta \cdot g(qy+z)) - \int_{U_0} e(\beta \cdot g(qy+z))dy \right| \ll (\sum_i |\beta_i|) q T^{d-1}.$$

Daher ist die gesamte Variation auf $\mathfrak{B}_T^\infty$

$$\ll (\sum_i |\beta_i|) q T^{d-1} (\frac{T}{q})^s + (\frac{T}{q})^{s\Delta}. \square$$

Bemerkung 6.3.2 Die Abschätzung, die in dem letzten Lemma geliefert wird, hängt nur von dem homogenen Teil von g_i für $i = 1, .., r$ ab. Daher kann das Integral $\int_{qy+z \in \mathfrak{B}_T^\infty} e(\beta \cdot g(qy+z))dy$ in der Aussage stets durch $\int_{qy+z \in \mathfrak{B}_T^\infty} e(\beta \cdot g^*(qy+z))dy$ ersetzt werden. In der folgenden Aussage läßt sich immer das Polynomsystem $\{g_1, .., g_r\}$ in dem entsprechenden Integral durch $\{g_1^*, ..., g_r^*\}$ ersetzen, sogar in dem singulären Integral. Der Vorteil davon ist, daß die Homogenität ausgenutzt werden kann.

Lemma 6.3.3 *Es gelten*

$$S'(T, \alpha) = S(q, a) V(\beta, \mathfrak{B}_T^\infty) + O(q T^{s+\mu-1} + q^{s-s\Delta} T^{s\Delta})$$

und

$$S'(T, \alpha) = S(q, a) V^*(\beta, \mathfrak{B}_T^\infty) + O(q T^{s+\mu-1} + q^{s-s\Delta} T^{s\Delta}).$$

Beweis. Nach der Variablentransformation $x = qy + z$ bekommt man $1/(q)^s V(\beta, \mathfrak{B}_T^\infty) = V(\beta, \frac{1}{q}(\mathfrak{B}_T^\infty - z))$. Aus dem Lemma (6.3.1) folgt, daß das Hauptglied $S(q, a) V(\beta, \mathfrak{B}_T^\infty)$ ist. Das Fehlerglied wird abgeschätzt durch

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{z \pmod q} e_q(a \cdot g(z)) ((\sum_i |\beta_i|) q T^{d-1} (\frac{T}{q})^s + (\frac{T}{q})^{s\Delta}) \\ &\ll q T^{s+\mu-1} + q^{s-s\Delta} T^{s\Delta}, \end{aligned}$$

denn $\alpha = \frac{1}{q} a + \beta \in \mathfrak{M}(q, a)$ liegt in major arcs $\mathfrak{M}'(\mu)$ und folglicherweise $|\beta_i| \leq T^{\mu-d}. \square$

Definition 6.3.4 *Definiert werden*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(L) &:= \sum_{q \leq L} \sum_{\substack{0 \leq a_i < q \\ gg T(a_i, q) = 1}} S(q, a) \\ \mathfrak{J}(L) &:= \int_{|\beta_i| < L T^{-d}} V(\beta, \mathfrak{B}_T^\infty) d\beta \\ \textit{und } \mathfrak{J}^*(L) &:= \int_{|\beta_i| < L T^{-d}} V^*(\beta, \mathfrak{B}_T^\infty) d\beta. \end{aligned}$$

$\mathfrak{S} := \lim_{l \to \infty} \mathfrak{S}(L)$ *ist die singuläre Reihe, und* $\mathfrak{J} := \lim_{L \to \infty} \mathfrak{J}(L)$ *bzw.* $\mathfrak{J}^* := \lim_{L \to \infty} \mathfrak{J}^*(L)$ *das singuläre Integral, wenn diese drei überhaupt existieren.*

Lemma 6.3.5 *Es gelten*

$$\int_{\mathfrak{M}'(\mu)} S'(T,\alpha)d\alpha = \mathfrak{S}(T^\mu)\mathfrak{J}(T^\mu) + O(T^{s-rd-1+(2r+3)\mu} + T^{s\Delta-rd+\mu(r+s-s\Delta+1)})$$

und

$$\int_{\mathfrak{M}'(\mu)} S'(T,\alpha)d\alpha = \mathfrak{S}(T^\mu)\mathfrak{J}^*(T^\mu) + O(T^{s-rd-1+(2r+3)\mu} + T^{s\Delta-rd+\mu(r+s-s\Delta+1)}).$$

Beweis. Zuerst schätze man $\int_{\mathfrak{M}(q,a)} S'(T,\alpha)d\alpha$ ab. Nach dem Lemma (6.3.3) ist das Hauptglied $S'(q,a)\int_{|\beta_i|\le T^{\mu-d}} V(\beta,\mathfrak{B}_T^\infty)d\beta$; und das Fehlerglied ist wegen $Vol(\mathfrak{M}(q,a)) = Vol(\{\beta\in\mathbb{R}^r||\beta_i|\le T^{\mu-d}\}) = 2^r T^{r\mu-rd}$ abgeschätzt durch

$$\ll qT^{s-rd-1+(r+1)\mu} + (q)^{s-s\Delta}T^{s\Delta-rd+r\mu}.$$

Wie vorher erwähnt, gilt $\int_{\mathfrak{M}} S'(T,\alpha)d\alpha = \sum_{q\le T^\mu}\sum_{\substack{0\le a_i<q\\ ggT(a_i,q)=1}}\int_{\mathfrak{M}(q,a)} S'(T,\alpha)d\alpha$. Daher bekommt man das Hauptglied $\mathfrak{S}(T^\mu)\mathfrak{J}(T^\mu)$; die Abschätzung für das Fehlerglied ist folgende:

$$\begin{aligned}
&\ll \sum_{q\le T^\mu}\sum_{\substack{0<a_i\le q\\ ggT(a_i,q)=1}} (qT^{s-rd-1+(r+1)\mu} + (q)^{s-s\Delta}T^{s\Delta-rd+r\mu})\\
&\le \sum_{q\le T^\mu}\sum_{0<a_i\le q} (qT^{s-rd-1+(r+1)\mu} + (q)^{s-s\Delta}T^{s\Delta-rd+r\mu})\\
&\le \sum_{q\le T^\mu} q^{r+1}T^{s-rd-1+(r+1)\mu} + q^{s+r-s\Delta}T^{s\Delta-rd+r\mu}\\
&\ll T^{s-rd-1+(2r+3)\mu} + T^{s\Delta-rd+\mu(r+s-s\Delta+1)}.\square
\end{aligned}$$

Korollar 6.3.6 *Für hinreichend kleines $\mu>0$ gelten*

$$|Y(\mathbb{Z})\cap\mathfrak{B}_T^\infty| = \mathfrak{S}(T^\mu)\mathfrak{J}(T^\mu) + O(T^{s-rd-\delta})$$

und

$$|Y(\mathbb{Z})\cap\mathfrak{B}_T^\infty| = \mathfrak{S}(T^\mu)\mathfrak{J}^*(T^\mu) + O(T^{s-rd-\delta}).$$

Beweis. Das Fehlerglied, das die Abschätzung auf major arcs wie im Lemma (6.3.5) liefert, ist kleiner als das Fehlerglied auf minor arcs, wenn μ hinreichend klein ist.$\square$

Es bleibt noch, die Existenz der singulären Reihe und die des singulären Integrals zu zeigen. Zuerst wird die klassische Überlegung durchgeführt.

Für $\mathfrak{B}\subset\mathbb{R}^s$ und $\beta\in\mathbb{R}^r$ seien $V^*(\beta,\mathfrak{B}) = \int_{\mathfrak{B}} e(\beta\cdot g^*(x))dx$ und $V(\beta,\mathfrak{B}) = \int_{\mathfrak{B}} e(\beta\cdot g(x))dx$. Seien $\mathfrak{J}_0^*(L) := \int_{|\beta|\le L} V^*(\beta,\frac{1}{T}\mathfrak{B}_T^\infty)d\beta$ und $\mathfrak{J}_0(L) := \int_{|\beta|\le L} V(\beta,\frac{1}{T}\mathfrak{B}_T^\infty)d\beta$. Seien $\mathfrak{J}_0^* := \lim_{L\to\infty}\mathfrak{J}_0^*(L)$ und $\mathfrak{J}_0 := \lim_{L\to\infty}\mathfrak{J}_0(L)$ Mittels Variablentransformation gelten $\mathfrak{J}^*(L) = T^{s-rd}\mathfrak{J}_0^*(L)$ und $\mathfrak{J}(L) = T^{s-rd}\mathfrak{J}_0(L)$.

Lemma 6.3.7 *Sei die Annahme* (**HL$_1$***) *mit $\Omega > r$ erfüllt. Sei $\mu>0$ hinreichend klein. Dann gelten $|\mathfrak{J}_0^* - \mathfrak{J}_0^*(T^\mu)| \ll T^{-\delta}$ für $\delta=\delta(\mu)>0$ und*

$$\mathfrak{J}^* = \mathfrak{J}^*(T^\mu) + O(T^{s-rd-\delta}).$$

Es existiert nämlich in diesem Fall das singuläre Integral $\mathfrak{I}^*$. *Unter derselben Annahme gelten auch* $|\mathfrak{I}_0 - \mathfrak{I}_0(T^\mu)| \ll T^{-\delta}$ *für* $\delta = \delta(\mu) > 0$ *und*

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(T^\mu) + O(T^{s-rd-\delta}).$$

Beweis. Hier wird der Beweis für die Aussage über $\mathfrak{I}^*$ und $\mathfrak{I}_0^*$ durchgeführt. Dieselbe Beweisidee gilt auch für $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}_0$. Die Argumentation ist ähnlich zu dem von [Sch85, *lemma*(8.1)]. Die Grundidee besteht darin, das Integral $V^*(\beta, \mathfrak{B}_T^\infty)$ mit der Anwendung des Lemmas (6.3.3) auf eine neue konstruierte Folge der offenen Menge statt $\{\mathfrak{B}_T^\infty\}_T$ abzuschätzen, wobei die Bedingungen ($\mathbf{HL_1}*$) und $\Omega > r$ benötigt werden. Mit der Transformation $\alpha = \frac{\beta}{Q^d}$ und $y = \frac{x}{Q}$ bekommt man

$$\begin{aligned} V^*(\beta, \mathfrak{B}_T^\infty) &= \frac{1}{Q^s} \int_{Q\,\mathfrak{B}_T^\infty} e(\alpha \cdot g(y)) dy \\ &= \frac{1}{Q^s} V^*(\alpha, Q\mathfrak{B}_T^\infty) \\ &= (\frac{T^{s-rd}}{Q^s}) V^*(\alpha, \frac{Q}{T}\mathfrak{B}_T^\infty). \end{aligned}$$

Ab jetzt wird T festgelegt, und Q als Variable betrachtet. Die Folge $\{\mathfrak{D}_Q\}_Q$ mit $\mathfrak{D}_Q := \frac{Q}{T}\mathfrak{B}_T^\infty$ wird in Betracht gezogen. Sei ferner $\mu \leq \min(\frac{1}{\Omega+1}, \frac{s(1-\Delta)}{\Omega})$, so daß $|\beta|^{\frac{1}{\mu}} \in \mathbb{N}$ und die vergrößerten major arcs $\mathfrak{M}'(q, a, \mu)$ miteinander disjunkt sind. Dann gilt $|\beta| = Q^s$ und $|\alpha| = Q^{\mu-d}$. Sei die entsprechende Exponentialsumme $S^*(Q, \alpha) := \sum_{x \in \mathfrak{D}_Q(\mathbb{Z})} e(\sum_i \alpha_i g_i(x))$. Dabei sind sicherlich die Bedingungen ($\mathbf{C_1}$), .., ($\mathbf{C_5}$) bei $\{\mathfrak{D}_Q\}_Q$ erfüllt; und die Annahme ($\mathbf{HL_1}$) mit $\Omega > r$ bleibt auch. Außerdem liegt α am Rand von arc $\mathfrak{M}'(1, 0, \mu)$. Wegen $\mathfrak{M}'(1, 0, \mu) \subset \mathfrak{M}'(\mu)$ liegt α auch in minor arcs $\mathfrak{m}(\mu)$. Daher gelten nach der Annahme ($\mathbf{HL_1}$) mit $\Omega > r$ stets

$$S^*(Q, \alpha) \ll Q^{s-\Omega\mu} = Q^s |\beta|^{-\Omega} = Q^s |\beta|^{-r-\delta'}$$

mit $\Omega = r + \delta'$ und $\delta' > 0$. Aber auf der anderen Seite gelten nach dem Lemma (6.3.3) stets

$$\begin{aligned} S^*(Q, \alpha) - V^*(\alpha, \frac{Q}{T}\mathfrak{B}) &\ll Q^{s+\mu-1} + Q^{s\Delta} \\ &= Q^s(Q^{\mu-1} + Q^{s(\Delta-1)}) \\ &= Q^s(|\beta|^{1-1/\mu} + |\beta|^{\frac{s(\Delta-1)}{\mu}}) \\ &\ll Q^s |\beta|^{-\Omega} \\ &= Q^s |\beta|^{-r-\delta'}. \end{aligned}$$

Es folgt $V^*(\alpha, \mathfrak{D}_Q) \ll Q^s |\beta|^{-r-\delta'}$. Daher gilt $V^*(\beta, \frac{1}{T}\mathfrak{B}) \ll |\beta|^{-r-\delta'}$. Wegen $Vol_s(\mathfrak{D}_1) = O(1)$ ist deswegen $V^*(\beta, \mathfrak{D}_1) \ll \min(|\beta|^{-r-\delta'}, 1)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \int_{|\beta| \geq T^{\mu-d}} V^*(\beta, \mathfrak{B}_T^\infty) d\beta &= T^{s-rd} \int_{|\beta| \geq T^\mu} V^*(\beta, \mathfrak{D}_1) d\beta \\ &\ll T^{s-rd-\delta} \end{aligned}$$

für ein $\delta := \delta(\mu) > 0$. □

Bemerkung 6.3.8 Es kann gezeigt werden, daß $\mathfrak{I}_0(T^\mu) = \mathfrak{I}_0^*(T^\mu) + O(T^{-\delta})$ für hinreichend kleines $\mu > 0$ und $\delta = \delta(\mu) > 0$. Seien $g_i = g_i^* + h_i$ für i. Die Idee besteht darin, die folgende Asymptotik

auszunutzen:

$$e(\sum_i \frac{\alpha_i}{T^d}(g_i^*(Tx)+h_i(Tx))) = e(\sum_i \alpha_i g_i^*(x))(1+O(\frac{|\alpha_i|}{T}))$$

für $|\alpha|_\infty \leq T^\mu$ und $x \in \frac{1}{T}\mathfrak{B}_T^\infty$; denn es gelten

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_0(T^\mu) &= \frac{1}{T^{s-rd}}\mathfrak{I}(T^\mu)\\ &= \frac{1}{T^{s-rd}}\int_{|\beta|\leq T^{\mu-d}}\int_{\mathfrak{B}_T^\infty} e(\beta\cdot g(y))dyd\beta\\ &= \int_{|\alpha|\leq T^\mu}\int_{\frac{1}{T}\mathfrak{B}_T^\infty} e(\frac{\alpha}{T^d}\cdot g(Tx))dxd\alpha \quad (y=Tx, \beta=\frac{\alpha}{T^d}).\end{aligned}$$

Über die absolute Konvergenz der singulären Reihe wird das folgende Lemma formuliert.

Lemma 6.3.9 *Wenn die Annahme* ($\mathbf{HL_1}*$) *mit* $\Omega > r+1$ *erfüllt ist, dann konvergiert die singuläre Reihe* $\mathfrak{S}$ *absolut. Genau gesagt, es gilt* $\mathfrak{S}-\mathfrak{S}(T^\mu) \ll T^{-\delta}$ *für* $\delta > 0$.

Beweis. Die Beweisidee ist identisch mit dem bei [Sch85, S.257].□

Bemerkung 6.3.10 S_q ist multiplikativ. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^\infty S_q &= \prod_{p\neq\infty}\sum_{n=0}^\infty S_{p^n}\\ &= \prod_{p\neq\infty}\lim_{l\to\infty}\frac{|Y(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})|}{p^{l\dim Y}} = \mathfrak{S}.\end{aligned}$$

Der Beweis dafür ist routinemäßig.

Im Prinzip ist der Beweis zur asymptotischen Aussage für Satz (6.2.1) fertig. Aber wenn diese Asymptotik in der adelischen Sprache interpretiert werden sollte, muß man sich mehr mit dem singulären Integral und weiter mit der singulären Reihe beschäftigen, um zu zeigen, daß das Produkt $\mathfrak{I}^*\mathfrak{S}$ durch das Tamagawa-Maß bzgl. der Leray-Form ersetzt werden kann.

6.4 Singuläre Reihe, singuläres Integral und Tamagawa-Maß

Seien $g_i = \tau(f_i)$ für $i = 1, ..., r$. Im klassischen Sinne werden das singuläre Integral und die singuläre Reihe in folgende Weise dargestellt:

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(g_1, ..., g_r; \mathfrak{B}_T^\infty) := \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathfrak{B}_T^\infty} e(\sum_i \alpha_i g_i(x)) dx d\alpha$$

und

$$\mathfrak{S} = \prod_{p \neq \infty} \lim_{l \to \infty} \frac{|Y(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})|}{p^{l \dim Y}},$$

falls sie existieren. Dabei ist bemerkenswert, daß nach der Koordinatentransformation stets $\mathfrak{I}(g_1, ..., g_r, \mathfrak{B}_T^\infty) = \mathfrak{I}(f_1, ..., f_r, \tau\mathfrak{B}_T^\infty) \times$ Konstante gilt. Deswegen kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}(f_1, ..., f_r, \mathfrak{B}_T^\infty)$ ist. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{S}$ mit dem Tamagawa-Maß ausgedrückt werden können, falls noch eine zusätzliche singuläre Bedingung erfüllt. Eine Aussage lautet:

Satz 6.4.1 (Oesterlé) *Sei $p \neq \infty$ eine Primzahl. Sei X eine rein-dimensionale n-dimensionale Varietät über $\mathbb{Z}_p$. Dann gilt*

$$\lim_{l \to \infty} \frac{|X_{reg}(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})|}{p^{l \dim X}} = \lim_{l \to \infty} \frac{|X(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})|}{p^{l \dim X}}.$$

(siehe [Oe82, $S.326, th.2$])

Korollar 6.4.2 *Sei μ_p das lokale Tamagawa-Maß bzgl. der Leray-Form wie zuvor. Dann folgt* $\mu_p(X_{reg}(\mathbb{Z}_p)) = \lim_{l \to \infty} \frac{|X(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})|}{p^{l \dim X}}$.

Beweis. Man benutzt die Bemerkung (3.2.3). □

Bemerkung 6.4.3 Oesterlé hat bewiesen, daß die beiden Werte stets eine Art des Maßes für $X(\mathbb{Z}_p)$ darstellen. Diese Aussage wurde von J.P. Serre [Serre81, $S.588 - 589$] vermutet. Hinsichtlich der Einzelheiten sei auf [Oe82] und die dort zitierten Artikel hingewiesen.

Damit bekommt man die erwünschte Aussage:

$$\mathfrak{S} = \prod_{p \neq \infty} \mu_p(Y(\mathbb{Z}_p)).$$

Was nun noch übrig bleibt, ist das Problem, mit welcher Bedingung sich das singuläre Integral durch das reelle Tamagawa-Maß bzgl. der Leray-Form, ein (uneigentliches) Integral, ersetzen läßt. Die Grundidee geht auf [Bir62] und [Igu78] zurück. Genauer gesagt, wollen wir eine Bedingung aufstellen, so daß gilt:

$$\mathfrak{I} = \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathfrak{B}_T^\infty} e(\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i(x)) dx d\alpha = \int_{X(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{B}_T^\infty} \omega,$$

wobei ω eine Leray-Form für $X_{reg}(\mathbb{R})$ und analytisch fortsetzbar auf die Menge $X(\mathbb{R})$ ist. Nach der Definition der Leray-Form gilt:

$$\omega = \theta|_{(f)^{-1}(0)} : \theta \wedge df_1 \wedge ... \wedge df_r = dy_1 \wedge ... \wedge y_s$$

auf einer nicht-leeren, Zariski-offenen Menge in $\mathbf{A}^s$. Man betrachte $F : \alpha \rightarrow \int_{\mathfrak{B}_T^\infty \cap (f)^{-1}(\alpha)} \theta$ als eine Funktion in α, falls sie existiert. Sei die Fouriertransform $\widehat{F}$ definiert durch

$$\widehat{F}(s) := \int_{\mathbb{R}^r} F(\alpha) e(\alpha \cdot s) d\alpha$$

für $s \in \mathbb{R}^r$. Falls F und $\widehat{F}$ existieren und beschränkt integierbar sind, dann gelten:
(**1**) $\widehat{F}(s) = \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathfrak{B}_T^\infty} e(\sum_i \alpha_i (f_i(x) + s_i)) dx d\alpha$.
(**2**) Die Fourier-Umkehrungsformel findet statt, d.h. $\widehat{\widehat{F}}(s) = F(-s)$.
In diesem idealen Fall gilt

$$\int_{X(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{B}_T^\infty} \omega = F(0) = \widehat{\widehat{F}}(0) = \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathfrak{B}_T^\infty} e(\sum_i \alpha_i f_i(x)) dx d\alpha = \mathfrak{I}.$$

Es geht im ersten Schritt darum, die kritischen Punkte $C_f(\mathbb{R})$ zu entfernen. Eine Tatsache, die wir brauchen, besagt:

Lemma 6.4.4 *Sei $\mathfrak{B} \subset \mathbb{R}^s$ eine konvexe offene Menge mit $d(\mathfrak{B}) \ll 1$. Sei $V(\beta, \mathfrak{B}) = \int_{\mathfrak{B}} e(\sum_i \beta_i f_i(x)) dx$ für $\beta \in \mathbb{R}^s$. Sei $(\mathbf{HL_1}*)$ erfüllt. Dann folgt $V(\beta, \mathfrak{B}) \ll \min(1, |\beta|^{-\Omega})$.*

(vgl. Lemma (6.3.7))

Korollar 6.4.5 *Sei $\mathfrak{B}_K$ eine konvexe Menge mit $d(\mathfrak{B}_K) \ll 1/K$. Dann gilt $V(\beta, \frac{1}{K}\mathfrak{B}_K) \ll K^{-s} \min(1, K^{d\Omega} |\beta|^{-\Omega})$.*

Sei $\mathfrak{U} := \{x \in \mathbb{R}^s : |x_i| \leq 1/2\}$ Sei $\mathfrak{D}(K)_T := \mathfrak{B}_T^\infty \setminus (C_f(\mathbb{R}) + 1/K\mathfrak{U})$. Die Bedingungen $(\mathbf{C_1}), .., (\mathbf{C_5})$ sind bei $\{\mathfrak{D}(K)_T\}_T$ nach dem Satz (4.3.6) ebenfalls erfüllt.

Lemma 6.4.6 *Sei $K \geq 0$. Wenn die Annahme $(\mathbf{HL_1}*)$ mit $\Omega > r$ erfüllt ist und wenn $\mu > 0$ hinreichend klein ist, dann gilt:*

$$\mathfrak{I} - \int_{\mathbb{R}^r} V(\beta, \mathfrak{D}(K)_T) d\beta \ll T^{s'} K^{s-s'+rd}$$

für ein $\delta > 0$.

Beweis. Nach dem Lemma (6.3.7) existiert das Integral $\int_{\mathbb{R}^r} V(\beta, \mathfrak{D}(K)_T) d\beta$ für $K > 0$. Da $\dim_{\mathbb{R}} C_f(\mathbb{R}) \leq \dim C_f =: s'$ ist, existiert eine endliche Menge $I \subset \mathbb{R}^s$ mit:
(**1**) $\bigcup_{x \in I} x + \mathfrak{U}/K \supset (C_f(\mathbb{R}) + \mathfrak{U}/K) \cap \mathfrak{B}_T^\infty$.
(**2**) $|I| \ll (TK)^{s'}$.
Daher folgen:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{|\beta| \leq L} V(\beta, (C_f(\mathbb{R}) + \mathfrak{U}/K) \cap \mathfrak{B}_T^\infty) d\beta$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{x\in I}\lim_{L\to\infty}\int_{|\beta|\leq L} V(\beta, x+\mathfrak{U}/K)d\beta \\
&\ll T^{s'}K^{s'}\int_{\mathbb{R}^r} K^{-s}\min(1, K^{d\Omega}|\beta|^{-\Omega})d\beta \quad (\text{ wegen Kollolar (6.4.5)}) \\
&\ll T^{s'}K^{s'}\int_0^{\infty} K^{-s}\min(1, K^{d\Omega}R^{-\Omega})R^{r-1}dR \quad (R := |\beta| = \max_i|\beta_i|) \\
&= T^{s'}K^{s-s'}(\int_0^{K^d} R^{r-1}dR + \int_{K^d}^{\infty} K^{d\Omega}R^{-\Omega}R^{r-1}dR) \\
&\ll T^{s'}K^{s-s'+rd} \quad (\text{ denn: } \Omega > r).
\end{aligned}
$$

Außerdem gilt $\mathfrak{I} - \int_{\mathbb{R}^r} V(\beta, \mathfrak{D}(K)_T)d\beta \leq \int_{\mathbb{R}^r} V(\beta, (C_f(\mathbb{R})+\mathfrak{U}/K)\cap\mathfrak{B}_T^{\infty})d\beta$. Somit ist die Aussage bewiesen. □

Bemerkung 6.4.7 Seien $\mathfrak{I}_K := \int_{\mathbb{R}^r} V(\beta, \mathfrak{D}(K)_T)dxd\beta$ und $F_K(s) := \int_{(f)^{-1}(s)\cap\mathfrak{D}(K)_T}\theta$. Sei die Annahme (**HL$_3$**) erfüllt. Dann gilt $s - s' + rd < 0$. Sei T festgelegt, und K als eine Variable betrachtet. Daher gilt $\mathfrak{I} = \lim_{K\to\infty}\mathfrak{I}_K$. Unter Anwendung der Fourier-Umkehrungsformel gilt stets: $F_K(0) = \widehat{\widehat{F_K}}(0) = \mathfrak{I}_K$. Daher folgt $\mathfrak{I} = \lim_{K\to\infty} F_K(0)$. Damit ist die gesamte Überlegung über die Darstellung des Tamagawa-Maßes durchgeführt.
Bzgl. der anderen Formulierung sei auf [Bir62, $lemma(6.3)$] und [Dan85, $lemma(4.5)\&lemma(4.6)$] hingewiesen.

Damit ist der gesamte Beweis des Satzes (A) durchgeführt. Daher ist das Theorem (1) auch bewiesen.

7 Weylsche Ungleichung und Theorem (2)

Falls die Folge der beschränkten Menge $\{\mathfrak{B}_T\}_T$ keine Folge der Quader ist, kann man die klassische Formel für die Weylsche Ungleichung nicht anwenden, um die Exponentialsummme auf "minor arcs" abzuschätzen. Solange diese Voraussetzung, daß die beschränkten Mengen Quader sind, bleibt, stehen die verallgemeinerten Versionen der Weylschen Ungleichung schon zur Verfügung. Die sind bei dem Polynomensystem beispielsweise in Birchs und Schmidts Arbeit [Bir62], [Sch85] und [Sch84] gut gebraucht. Mit einigen Verbesserungen funktioniert diese Idee auch für die Folge der kompakten Mengen. Bevor man diese abstrakte Darstellung der Weylschen Ungleichung formuliert, braucht man einige neue Notationen und Begriffe.

7.1 Weylsche Summe

Definition 7.1.1 (Differenzenoperator) *Sei G eine abelsche Gruppe. Sei $\Phi : G \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Differenzenoperatoren seien rekursiv definiert durch*

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi(x); y) &:= \Delta_1(\Phi(x); y) := \Phi(x+y) - \Phi(x) \\ \text{und } \Delta_j(\Phi(x); y_1, ..., y_j) &:= \Delta(\Delta_{j+1}(\Phi(x); y_1, .., y_{j-1}); y_j). \end{aligned}$$

Sei A endliche Menge von G. Sei $A - \Xi := \{a - \Xi | a \in A\}$. Unter der Differenzenmenge versteht man $A^D := \bigcup_{\Xi \in A} A - \Xi$. Außerdem sei $A(\Xi_1, ..., \Xi_t) := \bigcap_{\epsilon_1=0}^{1} ... \bigcap_{\epsilon_t=0}^{1} (A - \epsilon_1\Xi_1 - ... - \epsilon_t\Xi_t)$.

Definition 7.1.2 (Symmetrische multilineare Form und die Bemerkung dazu) *Sei $\mathfrak{F} : G \to \mathbb{R}$ eine Form des Grades d. Die Form $\mathfrak{F}(x)$ läßt sich ausdrücken als*

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{1 \le 1, ..., j_d \le s)} a_{(j_1, ..., j_d)} x_{j_1} ... x_{j_d},$$

wobei $a_{(j_1,...,j_d)}$ symmetrische Funktionen in Variabeln $j_1, ..., j_d$ sind. Die kanonische symmetrische multilineare Form ist definiert durch

$$\mathfrak{F}_{kan.}(x^{(1)}|...|x^{(d)}) := \sum_{j_1=1}^{s} ... \sum_{j_d=1}^{s} a_{(j_1,...,j_d)} x_{j_1}^{(1)} ... x_{j_d}^{(d)}.$$

Nach Schmidts Notationen definiert sich die Funktion

$$\mathfrak{F}_k(\Xi_1|...|\Xi_k) := \sum_{\epsilon_1=0}^{1} ... \sum_{\epsilon_k=0}^{1} (-1)^{\epsilon_1+...+\epsilon_k} \mathfrak{F}(\epsilon_1\Xi_1 + ... + \epsilon_k\Xi_k).$$

Es ist leicht nachzuprüfen, daß $\mathfrak{F}_d$ eine symmetrische multilineare Form ist mit $\mathfrak{F}_d(x|..|x) = (-1)^d d! \mathfrak{F}(x)$. Daher ist $\mathfrak{F}_d(\Xi_1|...|\Xi_d) = (-1)^d \mathfrak{F}_{kan.}(\Xi_1|...|\Xi_d)$.

Eine verallgemeinerte Weylsche Ungleichung lautet:

Lemma 7.1.3 *Sei $\mathfrak{F} : G \to \mathbb{R}$ Sei A endliche Menge in G. Sei $S := \sum_{\Xi \in A} e(\mathfrak{F}(\Xi))$. Dann gilt für $d \ge 2$*

$$|S|^{2^{d-1}} \le |A^D|^{2^{d-1}-d} \sum_{\Xi_1 \in A^D} ... \sum_{\Xi_{d-1} \in A^D} \left| \sum_{\Xi_d \in A(\Xi_1, ..., \Xi_{d-1})} e(\Delta_{d-1}(\mathfrak{F}(\Xi_d); \Xi_{d-1}, ..., \Xi_1)) \right|.$$

(vgl. [Sch85, $S.263, lemma(11.1)$])

Beweis. Da die Weylsche Ungleichung häufig eine zentrale Rolle bei der Kreismethode spielt, wird der Beweis dafür durchgeführt.

Zuerst betrachte man den Fall $d = 2$. Quadriert man die Exponentialsumme S, dann erhält man

$$\begin{aligned} |S|^2 &= \sum_{y\in A}\sum_{x\in A} e(\mathfrak{F}(x)-\mathfrak{F}(y)) \\ &= \sum_{y\in A}\sum_{x+y\in A} e(\mathfrak{F}(x+y)-\mathfrak{F}(y)). \end{aligned}$$

Daher gilt

$$|S|^2 \le \sum_{x\in A^D}\left|\sum_{y\in A(x)} e(\Delta(\mathfrak{F}(y);x))\right|.$$

Bei der Induktionsannahme für $d = t$ erfordert es zu zeigen, daß diese Ungleichung für $d = t+1$ auch richtig ist. Wie beim Fall $s = 2$ quadriert man $|S|^{2^{t-1}}$; man betrachtet nämlich $|S|^{2^t}$. Dann rechnet man folgendermaßen, indem die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $(t-1)$ mal verwendet wird:

$$|S|^{2^t} \le |A^D|^{2^t-2t+t-1}\sum_{\Xi_1\in A^D}\cdots\sum_{\Xi_{t-1}\in A^D}\left|\sum_{\Xi_t\in A(\Xi_1,..,\Xi_{t-1})} e(\Delta_{t-1}(\mathfrak{F}(\Xi_t);\Xi_{t-1},...,\Xi_1))\right|^2. \qquad (26)$$

Man setze nun $S_t := \sum_{\Xi_t\in A(\Xi_1,..,\Xi_{t-1})} e(\Delta_{t-1}(\mathfrak{F}(\Xi_t);\Xi_{t-1},...,\Xi_1))$. Statt S wiederholt sich die Abschätzung für S_t wie beim Fall $t = 2$ mit Rücksicht auf $A(x_1,...,x_{t-1}) \subset A^D$. Daraus folgt

$$|S_t|^2 \le \sum_{x_t\in A^D}\left|\sum_{x_{t+1}\in A(x_1,...,x_d)} e(\Delta_t(\mathfrak{F}(x_{t+1});x_t,...,x_1))\right|.$$

Setzt man sie in die innere Summe von Ungleichung (26) ein, dann ist der Induktionsschritt durchgeführt. □

Korollar 7.1.4 *Mit obigen Notationen gilt die Version der Weylschen Ungleichung von W. M. Schmidt stets*

$$|S|^{2^{d-1}} \le |A^D|^{2^{d-1}-d}\sum_{\Xi_1\in A^D}\cdots\sum_{\Xi_{d-1}\in A^D}\left|\sum_{\Xi_d\in A(\Xi_1,..,\Xi_{d-1})} e(\mathfrak{F}_d(\Xi_1|,...,|\Xi_d)\right|.$$

Beweis.
(1) Wie in [Sch85, $S.263, lemma(11.1)$].

(2) Oder nach der Induktion erhält man

$$\begin{aligned} \Delta_{d-1}(\mathfrak{F}(\Xi_d);\Xi_{d-1},...,\Xi_1)) &- \Delta_{d-2}(\mathfrak{F}(\Xi_{d-1});\Xi_{d-2},...,\Xi_1))+.... \\ ..... &+ (-1)^{d-1}\Delta_1(\mathfrak{F}(\Xi_2);\Xi_1))+(-1)^d\mathfrak{F}(\Xi_1) \\ &= (-1)^d\mathfrak{F}_d(\Xi_1|...|\Xi_d). \end{aligned}$$

Kurz gesagt, es gilt

$(-1)^d \mathfrak{F}_d(\Xi_1|...|\Xi_d) = \Delta_{d-1}(\mathfrak{F})((\Xi_d);\Xi_{d-1},...,\Xi_1)) +$ ein Polynom, der nur Ξ_d als Faktor enthält .

Setzt man diese Formel in die innere Summe vom Lemma (7.1.3) ein, dann bekommt man diese erwünschte Abschätzung. □

Zu unserem Zweck werden die folgenden Notationen eingeführt: Für $x_1,...,x_k \in \mathfrak{B}_T(\mathbb{Z})$ definiert sich

$$\mathfrak{B}_T(x_1) := \mathfrak{B}_T \cap (\mathfrak{B}_T - x_1),$$

und sukzessiv

$$\mathfrak{B}_T(x_1,...,x_k) := \mathfrak{B}_T(x_1,...,x_{k-1}) \cap (\mathfrak{B}_T(x_1,...,x_{k-1}) - x_k).$$

Was uns hier interessiert, ist die Eigenschaft von $\mathfrak{B}_T(x_1,..,x_k)$; diese wird ohne Beweis in folgendem Lemma formuliert:

Lemma 7.1.5 *Sei die Folge $\{\mathfrak{B}_T\}$ gegeben mit $(\mathbf{C_1}),...,(\mathbf{C_5})$. Für $x_1,...,x_k \in \mathfrak{B}_T$ gilt: $\mathfrak{B}_T(x_1,...,x_k)$ besteht aus endlich vielen zusammenhängenden Komponenten $\mathfrak{K}_T(i)$ mit den Eigenschaften:*

(C_1^*) $d(\mathfrak{K}_T(i)) \ll \phi(T)$
(C_2^*) $\mathfrak{K}_T(i) \subset \mathfrak{K}_{T+1}(i)$.
(C_3^*) $Vol_s(\mathfrak{K}_T(i)) \ll \phi(T)^s$
(C_4^*) $|\mathfrak{K}_T(i)(\mathbb{Z})| \ll \phi(T)^s$
(C_5^*) *Jede Gerade schneidet sich mit $\mathfrak{K}_T(i)$ höchstens in $O(1)$ Intervallen.*

Die folgende Abschätzungsaussage ist eine Analogie zu [Sch85, $S.266, lemma(12.1)$].

Lemma 7.1.6 *Sei $\mathfrak{K}_T$ mit $(C_1^*),...,(C_5^*)$ wie im Lemma (7.1.5). Dann gilt*

$$\sum_{x \in \mathfrak{K}_T(\mathbb{Z})} e(\beta \cdot x) \ll \prod_{i=1}^{s} \min(\phi(T), \|\beta_i\|^{-1}).$$

Beweis. Man setze $K_T^* := \{y \in \mathbb{R}^{s-1} | \exists x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x,y) \in \mathfrak{K}_T\}$ und $C_T(y) := C(y) \cap K_T^*$, wobei die Gerade $C(y) := \{(x_1, x^*) \in \mathbb{R}^s | x^* = y\}$. Dabei besteht nach dem Lemma (7.1.5) $C_T(y)$ höchstens aus endlich vielen offenen Intervallen von Länge $O(\phi(T))$. Es gelten:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{x \in \mathfrak{K}_T(\mathbb{Z})} e(\beta \cdot x) \right| &\leq \left| \sum_{y \in K_T^*(\mathbb{Z})} e(\sum_{i \neq 1} \beta_i y_i) \right| \left| \sum_{x \in C_T(y)(\mathbb{Z})} e(\beta_1 \cdot x) \right| \\ &\ll \left| \sum_{x=1}^{T} e(\beta_1 \cdot x) \right| \ll \min(\phi(T), \|\beta_1\|^{-1}). \end{aligned}$$

Dabei erfüllt die Folge $\{\mathfrak{K}_T^*\}_T$ stets die Bedingungen $(\mathbf{C_1^*}),...,(\mathbf{C_5^*})$. Außerdem ist $\dim_{\mathbb{R}} K_T^* < s$. Mit der Induktion nach s ist die Aussage bewiesen. □.

Ab jetzt werden die folgenden Notationen festgelegt: Seien $f_i(x),...,f_r(x) \in \mathbb{Z}[x_1,...,x_s]$ desselben Grades d. Sei $\beta := (\beta_1,...,\beta_r) \in \mathbb{R}^r$. Sei die Funktion $\mathfrak{F} : \mathbb{Z}^s \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\mathfrak{F}(x) := \sum_{i=1}^{r} \beta_i f_i(x)$. Man schreibe

$$f_i(x) := \sum_{(J)} a_{(J)}^{(i)} x^{(J)} := \sum_{1 \leq j_1 \leq ... \leq j_d \leq s} a_{(j_1,...,j_d)}^{(i)} x_{j_1}...x_{j_d} + \text{ Monomen des Grades } < d.$$

Sei $\{e_1, ..., e_s\}$ Standardbasis für $\mathbb{Z}^s$.

Lemma 7.1.7 *Seien $f_1, ..., f_r \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_r]$ des Grades d. Sei $X_{/\mathbb{Z}} := V(f_1, ..., f_r) \subset \mathbf{A}^s$ ein Schema (nicht notwendig irreduzibel und reduziert). Sei Exponentialsumme $S(T, \beta) := \sum_{x \in \mathfrak{B}_T(\mathbb{Z})} e(\sum_{i=1}^r e(\beta_i f_i(x))$. Dann gilt*

$$|S(T,\beta)|^{2^{d-1}} \ll \phi(T)^{s(2^{d-1}-d)} \sum_{x^{(1)} \in \phi(T)\mathfrak{C}(\mathbb{Z})} \cdots \sum_{(x^{(d-1)} \in \phi(T)\mathfrak{C}(\mathbb{Z})} \prod_{k=1}^{s} \min(\phi(T), \frac{1}{\|\mathfrak{F}_d(\beta; x^{(1)}|...|x^{(d-1)}|e_k)\|}),$$

wobei sich die symmetrische multilineare Form $\mathfrak{F}_d(\beta; -)$ explizit darstellen läßt als

$$\mathfrak{F}_d(\beta; x^{(1)}|...|x^{(d-1)}|e_i) = (-1)^d \sum_{k=1}^{r} \beta_k \sum_{j_1=1}^{s} \cdots \sum_{j_{d-1}=1}^{s} a^{(k)}_{(j_1,...,j_{d-1},i)} x^{(1)}_{j_1} ... x^{(d-1)}_{j_{d-1}}.$$

(vgl. [Bir62, $S.247$, $Lemma(2.1)$] und [Sch84, $S.15$, $Lemma(3.B)$])

Beweis. Man benutzt das Lemma (7.1.4), das Lemma (7.1.6) und $\mathfrak{B}_T(\mathbb{Z}) \subset C\phi(T)\mathfrak{C}(\mathbb{Z})$ für geeignetes C aus. □

Bemerkung 7.1.8 Bis hierhin hat sich die Weylsche Ungleichung mit den Quadern ausdrücken lassen. Insofern kann man diese Abschätzung an die schon bekannten Lemmata, die von Birch bewiesen oder zitiert wurden, anschließen. Nach Birchs Argumentation von [Bir62, $S.248 - 250$], die sich sogar hierauf wörtlich übertragen läßt, bekommt man die Annahmen $(\mathbf{HL_1}), ..., (\mathbf{HL_3})$, wenn $s - \dim C_f > (d-1)2^{d-1}r(r+1)$ ist.

Aus der Behauptung des Theorems (1) und der obigen Bemerkung läßt sich das folgende Resultat ableiten:

Theorem 2 *Seien $f_1, ..., f_r \in \mathbb{Z}[x_1, .., x_s]$ homogene Polynome desselben Grades d. Ferner sei $X := V(f_1, .., f_r) \subset \mathbf{A}^s_{\mathbb{Q}}$ ein geometrisch irreduzibler und geometrisch reduzierter vollständiger Durchschnitt. Wenn $s - \dim C_f > (d-1)2^{d-1}r(r+1)$ ist, dann besitzt X in bezug auf jede Folge der adelischen kompakte Mengen wie im Theorem (1) konstruiert stets die Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft.*

7.2 Beweisskizze des Theorems (2)

Ein vollständiger Beweis zum Theorem (2) wird hier nicht angegeben; denn das Verfahren, das wir verwenden, ist nicht neu, und ist wiederholt in der Literatur ausgeführt worden, beispielsweise in [Bir62] ,[Sch84] und [Sch85]. Die Grundidee ist klassisch, und geht auf Birch und Davenport zurück. Mit diesem Verfahren wird im wesentlichen gezeigt, daß aus der Weylschen Ungleichung stets die Bedingung $(\mathbf{HL_1}*)$ und $(\mathbf{HL_2})$ folgt, und damit aufgrund des Theorems (1) zur Aussage des Theorems (2) führt. Die wesentlichen Punkte werden in folgenden Lemmata formuliert.

Zur Vereinfachung werde angenommen, daß die Folge $\{a_T\}_T = \{T\}_T$ ist. Seien

$$M(T^{\xi}, T^{-\eta}, \beta) := \{(x^{(1)}, ..., x^{(d-1)} \in (T\mathfrak{C}(\mathbb{Z}))^{d-1} : \|\mathfrak{F}_d(\beta; x^{(1)}|...|x^{(d-1)}|e_i)\| < T^{-\eta} \forall i = 1, ..., s\}$$

und $N(T^{\xi}, T^{-\eta}, \beta) := \#M(T^{\xi}, T^{-\eta}, \beta)$. Unter Anwendung der Weylschen Ungleichung folgt:

Lemma 7.2.1 *Wenn $S(T,\beta) > T^{s-k}$ ist, dann gilt*

$$\mathfrak{N}(T, T^{-1}, \beta) \gg T^{(d-1)s-2^{d-1}k-\varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

(vgl. [Bir62, $S.248, lemma(2.2)$] oder [Sch84, $S.17, lemma(3.c)$].)

Der Hilfssatz, der bei dieser Argumentation die zentrale Rolle spielt, und von W. M. Schmidt und Birch verwendet wurde, lautet:

Lemma 7.2.2 (Davenports Gitterpunktsatz) *Seien $\mathfrak{L}_i(x) = \lambda_{i1}x_1 + ... + \lambda_{is}x_s \quad (i = 1, ..., s)$ s Linearformen in s Variablen mit reellen Koeffizienten λ_{ij} mit symmetrischer Bedingung $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} \quad \forall i, j$. Sei $A > 1$ fest. Für $Z > 0$ sei*

$$\mathfrak{N}(Z) := \#\{x \in \mathbb{Z}^s : |x| := \max_i |x_i| < ZA; \|\mathfrak{L}_i(x)\| < ZA^{-1}\}.$$

Ist nun $0 < Z_1 \leq Z_2 \leq 1$, dann gilt

$$\mathfrak{N}(Z_1) \ll (\frac{Z_1}{Z_2})^s \mathfrak{N}(Z_2).$$

(siehe [Dav62, $S.105, Lemma(28)$])

Unter Verwendung des Gitterpunktsatzes von Davenport auf die symmetrischen Multilinearformen $\mathfrak{F}_d(\beta; x^{(1)}|...|x^{(d-1)}|e_i)$ für $i = 1, .., s$ wie in [Sch84, $S.76-79, 3.A.Lemma$] folgt die Aussage:

Lemma 7.2.3 *Ist $|S(T,\beta)| > T^{s-k}$, dann gilt*

$$\mathfrak{N}(T^\theta, T^{-d+(d-1)\eta}, \beta) \gg T^{(d-1)s\theta-2^{d-1}k-\varepsilon}$$

für $0 < \theta \leq 1$ und $\varepsilon > 0$.

Betrachtet werde die komplexe Varietät

$$M := \{(x^{(1)}, ..., x^{(d-1)}) \in \mathbb{C}^{s(d-1)} : \mathfrak{F}_d(\beta; x^{(1)}|...|x^{(d-1)}|e_i) = 0 \quad \forall i = 1, ..., s\}.$$

Unter Verwendung vom Lemma (7.2.3) wie bei [Bir62, $S.248-249, lemma(2.5)$] ergibt sich

Lemma 7.2.4 *Für θ mit $0 < \theta < 1$, $k > 0$ und $\beta \in [0,1]^r$ gilt entweder*
(A) $|S(T,\beta)| \ll T^{s-k}$
(B) oder

$$\exists q, a_1, .., a_r \in \mathbb{Z} \text{ mit: } |q\beta_i - a_i| \ll T^{-d+r(d-1)\eta} \text{ und } 1 \leq q \leq T^{r(d-1)\eta}$$

(C) oder $|M \cap T^\theta(\mathbb{Z})| \gg T^{\theta s(d-1)-2^{d-1}k-\varepsilon}; \forall \varepsilon > 0$.

Die komplexe Varietät $C_f(\mathbb{C})$ läßt sich mit der komplexen Varietät V identifizieren, wobei

$$V := M \cap \{(x^{(1)}, ..., x^{(d-1)}) \in \mathbb{C}^{s(d-1)} | x^{(1)} = ... = x^{(d-1)}\}.$$

Daher ist $\dim_{\mathbb{C}} C_f(\mathbb{C}) \leq \dim_{\mathbb{C}} M - s(d-2)$. Wie in [Sch85] ist die Zahl G definiert als die größte reelle Zahl, so daß gilt

$$|M \cap \mathfrak{C}_T^{\infty}(\mathbb{Z})| \ll T^{s(d-1)-G+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Es folgt: $\mathrm{Codim}_{\mathbb{C}} C_f \geq \mathrm{Codim}_{\mathbb{C}} M \geq G$. Nun wählen wir θ mit $\mu = r(d-1)\theta$ und k mit:
(1) $k = \Omega\mu$ für $\Omega > 0$
(2) $G > 2^{d-1}k/\theta - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Es gilt: $G > 2^{d-1}k/\theta - \varepsilon \iff s(d-1) - 2^{d-1}k/\theta - \varepsilon > s(d-1) - G$.
Daher ist mit dieser Bedingung die Möglichkeit des Auftritts der Alternativen (C) auszuschließen. Außerdem ist die Bedingung $(\mathbf{HL_1})$ insofern erfüllt. Drücken sich k und θ in Form von Ω und μ aus, dann folgt $G > 2^{d-1}\Omega r(d-1) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. Wann existiert Ω so, daß $\Omega > r+1$ nämlich $(\mathbf{HL_2})$ gilt? Ist $G > 2^{d-1}r(r+1)(d-1)$, so ist $\frac{G+\varepsilon}{2^{d-1}r(d-1)} > \Omega$. In diesem Fall kann Ω als $\Omega = \frac{G}{2^{d-1}r(d-1)}$ gewählt werden, und damit ist $\Omega > r+1$. Daher ist aufgrund des Theorems (1) das Theorem (2) gezeigt, und sogar mehr:

Satz 7.2.5 *Sei $X := V(f_1, \ldots f_r)$ ein vollständiger Durchschnitt, wobei f_i für $i = 1, .., r$ homogen und desselben Grades d. Sei G wie oben definiert. Ist $G > 2^{d-1}r(r+1)(d-1)$, dann besitzt X die Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft bzgl. der Folge der adelischen Mengen wie im Theorem (1) konstruiert.*

Bemerkung 7.2.6 Es ist zu zeigen, daß die Bedingung $(\mathbf{HL_3})$ erfüllt werden sollte. Die Bedingung $(\mathbf{HL_3})$ folgt aus den folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} G &> 2^{d-1}r(r+1)(d-1) \\ &\Rightarrow \mathrm{Codim} C_f > 2^{d-1}r(r+1)(d-1) \geq rd \end{aligned}$$

für $d > 1$ und $r \geq 1$.

8 Weitere Eigenschaften für die Varietät X mit der H-L-E

Sei $P := \{f_1, ..., f_r\} \subset \mathbb{Z}[x_1, ..., x_s]$ ein homogenes Polynomsystem desselben Grades d. Sei $X := V(f_1, ..., f_r) \subset \mathbf{A}^s$ eine $\mathbb{Q}$-Varietät. Ferner sei X ein vollständiger Durchschnitt. Sei $C_f(\mathbb{C})$ die kritische Menge von $f := (f_1, ..., f_r) : \mathbb{C}^s \to \mathbb{C}^r$, und C_f die entsprechende Varietät (nicht notwendig irreduzibel). Ist $s - \dim C_f > (d-1)2^{d-1}r(r+1)$, dann besitzt X nach dem Theorem (2) die Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft in bezug auf die entsprechende Folge der adelischen Menge.

Solche Varietät X ist ein Prototyp für die Hardy-Littlewoodsche Überlegungen und auch für die anderen. Welche Eigenschaften kann X besitzen? Einige Fragen werden wir uns stellen. Ist X K-unirational für eine hinreichend große Körpererweiterung? Existiert die starke Approximationseigenschaft bei X? Statt der affinen Varietät X wird die projektive Varietät $X^{proj} := \mathbf{P}(X) \subset \mathbf{P}^{s-1}$ betrachtet. Besitzt die Varietät X^{proj} keine akkumulierten Punkte? Wie kann man die Verteilung der Punkte auf X^{proj} noch feiner beschreiben? Ist die Varietät X geometrisch einfach zusammenhängend? Ist $X^{proj}(\mathbb{Q})$ dicht in $X^{proj}(\mathbb{R})$ im Sinne der euklidischen Topologie? Wir hoffen, daß diese Fragestellungen zu den weiteren Motivationen für weitere Überlegungen dienen.

8.1 Starke Approximation in die Varietät X

Eine Aussage lautet:

Satz 8.1.1 *Seien $f_1, ..., f_r \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_r]$ homogene Polynome. Sei $X_{/\mathbb{Z}} := V(f_1, ..., f_r) \subset \mathbf{A}^s_{\mathbb{Q}}$ eine Varietät und ein affiner vollständiger Durchschnitt. Sei $X^{proj} := \mathbf{P}(X)$ die projektive Varietät. Ferner seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*
(A). X besitzt bzgl. beliebiger $\mathfrak{B}_T$ Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft, wobei $\mathfrak{B}_T$ die folgende Gestalt hat:

$$\mathfrak{B}_T := \mathfrak{C}_T^{\infty} \times \prod_{p \in S} (l_p + p^{e_p}\mathbb{Z}_p^s) \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p^s,$$

wobei $l_p \in \mathbb{Z}_p^s, S_\infty \subset S$ und $|S| < \infty$ sind.
(B). X ist geometrisch irreduzibel.
(C). $X(\mathbb{R})$ ist nicht kompakt.
(D). Für jede Primzahl $p \neq \infty$ ist $X_{reg}(\mathbb{Z}_p)$ dicht in $X(\mathbb{Z}_p)$ im Sinne der p-adischer Topologie.
Dann ist X eine stark Hardy-Littlewoodsche Varietät und hat bzgl. S_∞ starke Approximation. Außerdem findet die starke Approximation bzgl. S_f bei X^{proj} auch statt.

Beweis. (1) Zum Beweis, daß X eine stark Hardy-Littlewoodsche Varietät ist:
Nach der Definition ist zu zeigen, daß die asymptotische Formel gilt

$$|X(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{B}_T| \sim \mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}_T)$$

mit $\mathfrak{B}_T := \mathfrak{C}_T^{\infty} \times \prod_{p \in S} \mathfrak{B}^p \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p^s$, wobei $\mathfrak{B}^p$ offen in $\mathbb{Q}_p^s$ im Sinne der p-adischer Topologie sind. Aber $\mathfrak{B}^p$ läßt sich zerlegen in die Vereinigung der disjunkten, offenen Mengen mit der Gestalt

$$l_p + p^{e_p}\mathbb{Z}_p^s,$$

wobei $l_p \in \mathbb{Q}_p^s$ und $e_p \in \mathbb{N}$ sind. Falls $l_p \in \mathbb{Z}_p^s$ für alle $p \in S$ sind, gilt nach Bedingung (A)stets $\mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}_T) \sim |X(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{B}_T|$. Sonst existiert $g \in \mathbb{Z}$ mit $gl_p \in \mathbb{Z}_p^s \quad \forall p \in S$. Es ist klar, daß

$X(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{B}_T$ bijektiv zu $X(\mathbb{Q}) \cap g\mathfrak{B}_T$ ist. Es bleibt nur noch zu zeigen

$$\mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}_T) = \mu(X(\mathbb{A}) \cap g\mathfrak{B}_T).$$

Nach der Produktformel gelten

$$\begin{aligned}
\mu(X(\mathbb{A}) \cap \mathfrak{B}_T) &= \prod_p \mu_p(X(\mathbb{Q}_p) \cap \mathfrak{B}^p) \\
&= \prod_p |g|_p \mu_p(X(\mathbb{Q}_p) \cap \mathfrak{B}^p) \\
&= \prod_p \mu_p(X(\mathbb{Q}_p) \cap) \cap g\mathfrak{B}^p) \\
&= \mu(X(\mathbb{A}) \cap g\mathfrak{B}_T).
\end{aligned}$$

(2) Zum Beweis, daß X bzgl. S_∞ starke Approximation hat:
Sei $a = (a_p)_p \in X(\mathbb{A})$. Da die erzeugenden Polynome homogen sind, gilt $ga \in X(\mathbb{A}) \quad \forall g \in \mathbb{N}$. Man wählt g so aus, daß gilt

$$ga \in X(\mathbb{R}) \times X(\widehat{\mathbb{Z}}).$$

Sei U adelische offen um ga in $\mathbb{A}^s$. Sicherlich enthält U eine offene Basis mit der Gestalt $\mathfrak{C}_T^\infty \times U_f$, wobei $U_f := \prod_{p \in S}(l_p + p^{e_p}\mathbb{Z}_p^s) \times \prod_{p \notin S} \mathbb{Z}_p^s$ ist. Es reicht zu zeigen $X(\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{C}_T^\infty \times U_f \neq \emptyset$. Falls $a \in X_{reg}(\mathbb{A})$ ist, ist auch ga. Sei $\mathfrak{B}_T$ mit $ga \in \mathfrak{B}_T$ und mit der obigen Gestalt. Es gilt $|X(\mathbb{Q}) \cap \mathfrak{B}_T| = |X(\mathbb{Q}) \cap \frac{1}{g}\mathfrak{B}_T|$. Wegen der Bedingung (B) kann man das Hensel-Lemma verwenden, und bekommt $\mu_f(U_f) > 0$. Nach (C) gilt $|X(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{C}_T^\infty| \to \infty$ für $T \to \infty$.
Falls $a \notin X_{reg}(\mathbb{A})$ ist, braucht man die Bedingung (D). Da die erzeugenden Polynome homogen sind, folgt aus (D) die Aussage:

(D'). Für jede Primzahl $p \neq \infty$ ist $X_{reg}(\mathbb{Q}_p)$ dicht in $X(\mathbb{Q}_p)$ im Sinne der p-adischer Topologie.

Daher existiert für jede nichtleere offene adelische Menge U um a stets $b \in X_{reg}(\mathbb{Q})$ mit $b \in U$. Dann ersetzt man a durch b, und argumentiert wie eben.□

Bemerkung 8.1.2 (1). Die starke Approximation bzgl. S_∞ führt nach dem Satz (2.3.4) zu den Bedingungen (B), (C) und (D'). Da die erzeugenden Polynome homogen sind, gilt $(D) \iff (D')$.
(2) In dem Artikel [BoRu95] ist die Varietät $X_{/\mathbb{Z}}$ vorausgesetzt als affin, nicht-singulär, geometrisch irreduzibel und $X(\mathbb{R})$ nicht kompakt. Daher hat die stark Hardy-Littlewoodsche Varietät mit solchen Bedingugen stets starke Approximation bzgl. S_∞. Es ist meines Wissens nicht bekannt, ob es die stark Hardy-Littlewoodschen Varietät X gibt mit den Bedingungen (B) und (C) aber ohne (D); die starke Approximation bzgl. S_∞ bei X ist nämlich verletzt.
(3). Man erwartet, daß die Bedingung (A) durch die Hardy-Littlewoodsche Kreismethode gezeigt wird.
(4). Wenn diese Hardy-Littlewoodsche Varietät X mit der starken Approximation zusätzlich noch normal ist, so ist sie nach dem Hauptsatz von Minchev geometrisch einfach zusammenhängend.

Beispiel 8.1.3 *Sei $X = V(f_1, ..., f_r)$ wie im Theorem (2). Sei X^{proj} die projektive Varietät, deren Affinkegel X ist. Ferner sei X^{proj} nicht-singulär. Sei $X(\mathbb{A}) \neq \emptyset$. In diesem Fall ist die Varietät X bzw. X^{proj} das konkrete Beispiel für Satz (8.1.1).*

Beispiel 8.1.4 *Sei $F := x_1^3 + ... + x_{16}^3 + x_{17}x_{18}^2$. Sei $X := V(F) \subset \mathbf{A}_{\mathbb{Q}}^{18}$ die affine $\mathbb{Q}$-Varietät. Sei X^{proj} die durch F erzeugte projektive Varietät. Dann ist X eine stark Hardy-Littlewoodsche Varietät; und die starke Approximation bzgl. S_∞ bei X und X^{proj} findet statt.*

Beweis. Daß X eine stark Hardy-Littlewoodsche Varietät ist, folgt aus Theorem (2). Es bleibt zu zeigen, daß es für jede Primstelle $p \in S_f$ und für $\varepsilon > 0$ und $x \in C_f(\mathbb{Z}) = X_{sing}(\mathbb{Z})$ stets einen Punkt $y \in X_{reg}(\mathbb{Z})$ gibt mit $|x-y|_p < \varepsilon$. Es gilt:

$$x \in X_{sing}(\mathbb{Z}_p) \iff x_1 = ... = x_{16} = x_{18} = 0.$$

Sei $x := (0,...,0,x_{17},0) \in X_{sing}(\mathbb{Z}_p)$. Dann ist beispielsweise $y^{(a)} := (-p^a, p^a, 0, .., 0, x_{17}, 0) \in X_{reg}(\mathbb{Z}_p)$. Es folgt $|y^{(a)} - x| = \frac{1}{p^{(a)}} \to 0$ für $a \to \infty$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

8.2 Hardy-Littlewoodsches System und die Manin-Vermutung (Teil 2)

Seien $f_1, ..., f_r \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_r]$ homogene Polynome des Grades d_1,...bzw. d_r. Sei $P := \{f_1, ..., f_r\}$ ein Polynomsystem. Sei $X_{/\mathbb{Z}} := V(f_1, ..., f_r) \subset \mathbf{A}^s_{\mathbb{Q}}$ eine Varietät und ein affiner vollständiger Durchschnitt. Sei $Y := \mathbf{P}(X)$ die projektive Varietät. Sei H die Standardhöhe auf $\mathbf{P}^{s-1}$, nämlich $H(P) = H([x_1 : ... : x_s]) = \max_i |x_i|$ für $P = [x_1 : ... : x_s] \in Y(\mathbb{Q})$ und $x_i \in \mathbb{Z} \forall \quad i = 1, .., s$ mit $ggT(x_1, ..., x_s) = 1$. Hiermit möchten wir den Beweis für Satz (1.7.4) vorführen. Bei dem ersten Schritt geht es um die folgende asymptotische Aussage für $Y(\mathbb{Q})$ mit beschränkter Höhe.

Satz 8.2.1 *Seien P, X und Y wie oben. Ist P ein Hardy-Littlewoodsches System, d.h.*

$$|X(\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{C}_T^\infty| \sim \mathfrak{IS}.$$

Dann folgt

$$\#\{x \in Y(\mathbb{Q}) \cap \{x \in \mathbf{P}^s(\mathbb{Q}) | H(x) < T\} \sim \frac{1}{\zeta(s - \sum_{i=1}^r d_i)} \mathfrak{SI}.$$

Beweis. Man setze die Notationen

$$N'(Y,T,a) := \# \left\{ x \in Y(\mathbb{Q}) \middle| \begin{array}{c} x = [x_1 : ... : x_s], x_i \in \mathbb{Z} \\ a | ggT(x_1, .., x_s) \\ \max_i |x_i| < aT \end{array} \right\} \tag{27}$$

und

$$N(Y,T,a) := \# \left\{ x \in Y(\mathbb{Q}) \middle| \begin{array}{c} x = [x_1 : ... : x_s], x_i \in \mathbb{Z} \\ a = ggT(x_1, .., x_s) \\ H(x) < T \end{array} \right\}. \tag{28}$$

Wenn $x = [x_1 : .. : x_s], x_i \in \mathbb{Z}$ mit $a = ggT(x_0, .., x_s)$, ist $H(x) = \frac{1}{a} \max_i |x_i|$. Daher gilt

$$N'(X^{proj}, T, a) = \sum_b N(X^{proj}, \frac{T}{b}, ab). \tag{29}$$

Es ist auch klar $N'(Y,T,a) = |X(a\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{C}_{aT}^\infty| - 1$. Man kann aber eine Bijektion zwischen Mengen $X(\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{C}_T^\infty$ und $X(a\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{C}_{aT}^\infty$ durch $x \to ax$ konstruieren, weil P homogen ist. Daraus folgt

$$N'(Y,T,a) = N'(X^{proj}, T, 1) = |X(\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{C}_T^\infty| - 1 \sim \mathfrak{SI} T^{s - \sum_i d_i}. \tag{30}$$

Sei μ die Möbius-Funktion. Verwendet man die Möbius-Umkehrungsformel auf die Gleichung (29), dann bekommt man

$$N(Y,T,a) \quad = \quad \sum_b \mu(b) N'(Y, \frac{T}{b}, ab) \tag{31}$$

$$= \sum_b \mu(b)(\mathfrak{S}\mathfrak{I}(\frac{T}{b})^{s-\sum_i d_i} + O((\frac{T}{b})^{s-\sum_i d_i-\delta}))) \tag{32}$$

$$= \mathfrak{S}\mathfrak{I}T^{s-\sum_i d_i}\sum_b \frac{\mu(b)}{b^{s-\sum_i d_i}} + O(\sum_b \frac{|\mu(b)|}{b^{s-\sum_i d_i-\delta}}T^{s-\sum_i d_i-\delta}) \tag{33}$$

$$= \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{I}}{\zeta(s-\sum_i d_i)}T^{s-\sum_i d_i} + O(T^{s-\sum_i d_i-\delta}) \tag{34}$$

(wegen $\sum_b \frac{|\mu(b)|}{b^n} = \zeta(n)/\zeta(2n)$ und $\sum_b \frac{\mu(b)}{b^n} = \zeta(n)^{-1}$) Damit ist die Aussage bewiesen. □

Ab jetzt nehmen wir an, daß Y nicht singulär ist.

Beweis zum Satz (1.7.4)
Es folgt nach [Har77, $S.188, Ex.8.4$] stets $O_Y(-K_Y) \simeq O_Y(s-\sum_i d_i)$. Das Polynomsystem von X und Y sei ein Hardy-Littlewoodsches System. Daher folgt $\#\{x \in X(\mathbb{Z}) | \max_i |x_i| \leq T\} \sim CT^{s-\sum_i d_i}$, wobei C eine Konstante ist. Insbesondere gilt $s-\sum_i d_i \in \mathbb{N}$ und damit ist ersichtlich, daß Y eine nicht-singuläre Fano-Varietät ist und sogar der antikanonische Divisor $-K_Y$ sehr ampel ist. Aus der Standardtheorie der Höhenfunktionen folgt:

Sei V eine projektive Varietät über dem Zahlkörper K. Sei H eine (exponentiale) Höhenfunktion. Sei h die logarithmische Höhenfunktion definiert durch $h := \log H$. Dann gibt es die eindeutig bestimmte Abbildung

$$\phi : Pic(V) \to \{ \textit{ reell wertige Funktionen auf } V(\overline{K}) \textit{ modolo beschränkte Funktionen}\}$$

mit $[L] \to h_L + O(1)$, wobei L ein Divisor auf V ist. Außerdem gilt, daß für L_1,L_2 Divisoren stets $h_{L_1+L_2} = h_{L_1} + h_{L_2} + O(1)$.
(siehe beispielsweise bei [Lang83, $S.265, Th.4.3$])

Daraus folgt $N(Y(L), -K_Y, T) \ll\gg T$. Außerdem gilt nach dem Lefschetz-Hyperebeneschnitt-Satz (vgl. [GH78, $S.156$]) stets $B_2(Y(\mathbb{C})) = 1$, wenn $\dim Y > 2$ ist. Es bleibt noch zu zeigen, daß $Rang(Pic(Y(\mathbb{C}))) = Rang(H^2(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z}))$ ist, falls der antikanonische Divisor $-K_Y$ ampel ist. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z} \to O_{Y(\mathbb{C})} \stackrel{\exp}{\to} O^*_{Y(\mathbb{C})} \to 0$$

liefert die lange exakte Sequenz

$$H^1(Y(\mathbb{C}), O_{Y(\mathbb{C})}) \to H^1(Y(\mathbb{C}), O^*_{Y(\mathbb{C})}) \to H^2(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \to H^2(Y(\mathbb{C}), O_{Y(\mathbb{C})}) \to \ldots\ldots \quad .$$

Unter Anwendung des Verschwindungssatzes von Kodaira (vgl. [GH78, $S.154$]) auf der amplen Garbe $O(-K_{Y(\mathbb{C})})$ verschwinden alle cohomologischen Gruppen $H^i(Y(\mathbb{C}), O_{Y(\mathbb{C})})$ für $i > 0$. Daher ist $H^2(Y(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq H^1(Y(\mathbb{C}), O^*_{Y(\mathbb{C})}) = Pic(Y(\mathbb{C}))$. □

Beispiel 8.2.2 *Sei X wie in Theorem (2). Sei Y die projektive Varietät, deren Affinkegel X ist. Ferner sei Y nicht-singulär. In diesem Fall ist Y ein konkretes Beispiel für die Manin-Vermutung.*

Eine feinere Version der Manin-Vermutung lautet:

Vermutung 2 (Manin) *Wenn Y eine Fano-Varietät ist, dann sollten gelten:*
(1). Die arithmetische Stratifikation ist endlich.
(2). Für das letzte Element U aus arithmetischer Stratifikation gilt für hinreichend große Körpererweiterung L/K stets

$$N(Y \otimes_K L, -K_{Y\otimes_K L}, T) \sim CT(\log T)^{Rang(Pic(Y(\mathbb{C})))-1}.$$

Wir haben im Satz (1.7.4) bewiesen, daß diese asymptotische Aussage für den geometrisch irreduziblen, nicht-singulären, projektiven vollständigen Durchschnitt Y der Dimension > 2, dessen erzeugendes System stets Hardy-Littlewoodsches System ist, richtig ist, wenn man $U = Y$ nimmt. Eigentlich kann in einigen speziellen Fälle auch gezeigt werden, daß Y keine akkumulierten Punkte hat. Ein konkretes Beispiel wird in dem folgenden Satz formuliert.

Satz 8.2.3 *Sei $P := \{f_1, ..., f_r\} \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_r]$ ein homogenes Polynomsystem des Grades d. Sei $X := V(f_1, ..., f_r)$ wie in Theorem (2). Sei $Y := \mathbf{P}(X) \subset \mathbf{P}^{s-1}$ eine nicht-singuläre Varietät mit $Y(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$. Dann hat Y keine akkumulierten Punkte bzgl. Standardhöhe H oder bzgl. H_{-K_Y}.*

Beweis. Wir zeigen, daß Y keine akkumulierte Menge bzgl. H hat. Angenommen, Y hätte eine akkumulierte Menge V. Sei $U := Y \setminus V$. Dann wären

$$\beta(Y, H) = s - rd > \beta(U, H).$$

Sei U^{aff} der Affinkegel für U. Es gelten aber

$$|U^{aff}(\mathbb{Z}) \cap \mathfrak{C}_T^\infty| = |X(\mathbb{Z}) \cap (\mathfrak{C}_T^\infty \setminus V(\mathbb{R})| \geq |X(\mathbb{Z}) \cap (\mathfrak{C}_T^\infty \setminus (V(\mathbb{R}) + \mathfrak{C}_\varepsilon^\infty)).$$

Die Folge $\{\mathfrak{C}_T^\infty \setminus (V(\mathbb{R}) + \mathfrak{C}_\varepsilon^\infty)\}_T$ erfüllt nach dem Satz (4.3.6) die Bedingungen $(\mathbf{C_1}), .., (\mathbf{C_5})$. Es folgt, daß die Hardy-Littlewoodsche Eigenschaft bzgl. $\{(\mathfrak{C}_T^\infty \setminus (V(\mathbb{R}) + \mathfrak{C}_\varepsilon^\infty) \times \widehat{\mathbb{Z}}_f^s\}_T$ auch stattfindet. Das führt zu $|U(\mathbb{Z}) \cap \{x \in \mathbf{P}^{s-1}(\mathbb{Q}) | H(x) < T\}| = C'T^{s-rd}$ mit $C' \neq 0$. Daraus folgt $\beta(U, H) = s - rd$. Daher ist V keine akkumulierte Menge. Das widerspricht der Annahme. □

Unter einer zusätzlichen Bedingung wird vermutet, daß bei den 3-dimensionalen nicht-singulären Fano-Varietäten mit $B_2 = 1$ keine akkumulierten Punkte auftreten sollten. Diese Vermutung ist auch eine Standardvermutung aus [Manin93].

Bemerkung 8.2.4 Bei der Manin-Vermutung handelt es sich um nicht-singuläre Fano-Varietäten. Es wäre auch interessant zu versuchen, eine Verallgemeinerung der Manin-Vermutung auf die projektive Varietät Y mit "milden" Singularitäten aufzustellen. Obwohl die Manin-Vermutung für viele Fälle bestätigt wird, ist sie leider nicht ganz richtig. Es findet sich ein Gegenbeispiel in [BT96].

9 Literaturverzeichnis

Literatur

[Bar84] H.J. Bartels, *Uniform distribution in linear algebraic groups and related Diophantine problems,* Can. Math. Soc. Conf. Proc. V. 4 (1984), 207-229.

[BG69] I.N. Berstein und S.I. Gel'fand *Meromorphic Property of the Function P^λ,* Functional Analysis and its Applications V 3 Nr. 1 (1969), 68-69.

[Bir62] B.J.Birch, *Forms in many variables,* Proc. Roy. Soc. Ser A 265 (1961/62), 245-263.

[BM90] V.V. Batyrev und Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques,* Math. Ann. 286 (1990), 27-43.

[BoRu95] M. Borovoi und Z. Rudnick, *Hardy-Littlewood Varieties and Semisimple Groups,* Invent. Math. 119, No. 1 (1995), 37-66.

[BT96] V.V. Batreyv und Yu Tschinkel, *Rational points on some Fano cubic bundels,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1, Math. 323, no. 1 (1996) , 41-46.

[BZ88] Y.D. Burago, V.A. Zalgaller, *Geometric Inequalities,* GMW 285, Springer-Verlag, 1988.

[Car94] M. Car, *Waring's problem in function fields,* Proc. London Math. Soc. (3) 68 (1994), 1-30.

[CKM88] H. Clemens, J. Kollár und S. Mori, *Higher dimensional complex geometry,* Astérisque 166 (1988).

[CS66] J.W. S. Cassels, M.J.T. Guy, *On the Hasse principle for cubic surface,* Mathematika, London 13, Part 2 (1966), 111-120.

[Dan85] R. Danset, *Méthode du cercle adélique et principe de Hasse fin,* L'Enseignement Math. 31 (1985), 1-66.

[Dav62] H. Davenport, *Analytic Methods for Diophantine Equations and Diophantine Inequalities,* Ann Arbor Publishers, Ann Arbor, Michigan, 1962.

[Dav77] H. Davenport, *the collected works of H. Davenport, Vol. 3,* Academic Press, 1977.

[Del74] P. Deligne, *la conjecture de Weil, 1.* Publ. Math. I.H.E.S. 43 (1974), 273-307.

[Denef84] J. Denef, *the rationality of the Poincaré series associated to the p-adic points on a variety,* Invent. Math. 77 (1984), 1-23.

[DRS93] W. Duke, Z. Rudnick und P. Sarnak, *Density of integer points on affine homogeous varieties,* Duke Math. J. 71 (1993), 143-179.

[EM93] A. Eskin, C. McMullen, *Mixing, Counting and Equidistribution in Lie group,* Duke Math. J. 71 (1993), 181-209.

[Fal90] K. Falconer, *Fractal Geometry,* mathem. Foundation a. App., John Wiley & Sons Ltd., 1990

[FK87] E. Freitag, R. Kiehl, *Etale Cohomology and the Weil Conjecture,* 3. Folge, Band 13, Springer-Verlag, 1987

[FMT89] J.Franke, Yu,Manin und Yu.Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties,* Invent. Math. Soc. 95(1989),613-623.

[GH78] P. Griffiths und J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry,* John Wiley & Sons, Inc, 1978.

[Gr69] M.J. Greenberg, *Lectures on forms in many variables,* W. A. Benjamin, Inc, 1969.

[Gr67] M.J. Greenberg, *Rational points in Henselian discrete valuation rings,* Publ. Math. I.H.E.S. 31 (1967), 59-64.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry,* Springer-Verlag, 1977

[HR15] G.H. Hardy, M. Riesz, *The general theory of Dirichlet's series,* Cambridge, 1915

[Hoo91] C. Hooley, *On the number of points on a complete intersection over finite fields,* J. Number Theory, 38 (1991), 338-358.

[Igu78] J.I. Igusa, *Lectures on forms of higher degree,* Tata Institute, Bombay/Springer (1978).

[Kn65] M. Kneser, *Starke Approximation in algebraischen Gruppen 1,* J. reine u. angew. 218 (1965), 190-203.

[Kn66] M. Kneser, *Strong Approximation,* Algebraic Groups and Discontinous Subgroup, Proc. Symp. Pure Math. No. 9, Amer. Math. Soc., Providence, 1966, 187-197.

[Kub74] R. M. Kubota, *Waring's problem for $\mathbb{F}_q[X]$,* Disser. Math. 117 (1974), 1-60.

[Lang83] S. Lang, *Fundamentals of diophantine geometry,* Springer (1983).

[Lang87] S. Lang, *Introduction to Complex Hyperbolic Spaces,* Springer-Verlag (1987).

[Manin86] Y. Manin, *Cubic forms,* North-Holland, 2. Aufl.,1986.

[Manin93] Y. Manin, *Notes on the arithmetic of Fano threefolds,* Compositio Math. 85 (1993), 37-55.

[Meu81] D. Meuser, *On the Rationality of Certain Generating Functions,* Math. Ann. 256 (1981), 303-310.

[Min89] Kh. P. Minchev, *Strong approximation for varieties over the field of algebraic numbers,* Doklady BSSR 33 (1989), 5-8.

[Mu69] D. Mumford, *Introduction to Algebraic Geometry: red book,* 1969.

[Oe82] J. Oesterlé, *Réduction modulo p^n des sous-ensembles analytiques fermés de $\mathbb{Z}_p^N$,* Invent. Math. 66 (1982), 325-341.

[Oe84] J. Oesterlé, *Nombres de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique p,* Invent. Math. 78 (1984), 13-88.

[Patt85] S. J. Patterson, *The Hardy-Littlewood method and diophantine analysis in the light of Igua's work,* Math. Gött. Schriftenreihe Geom. Anal. 11 (1985), 1-45.

[Peyre95] E. Peyre, *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano,* Duke Math. J.79, No.1 (1995), 101-218.

[PR94] V. Platonov und A. Rapinchuk, *Algebraic Groups and Number Theory,* Academic Press, 1994.

[Roth55] L. Roth, *Algebraic Threefolds,* Springer Verlag, 1955.

[Sch84] W.M. Schmidt, *Analytische Methoden für Diophantische Gleichungen,* DMV Seminar, 5, Birkhäuser (1984).

[Sch85] W.M. Schmidt, *The density of integer points on homogeneous varieties,* Acta. Math 154 (1985), 243-296.

[Scha79] S.J. Schanuel, *Heights in number fields,* Bull. Soc. math. France 107 (1979),433-449.

[Serre81] J. P. Serre, *Quelques Applications du théorème de densité de Chebotarev,* Publ. Math. I.H.E.S., n. 54 (1982), 123-201.

[Serre82] J.P. Serre, *Résumè des cours de 1981-1982,* Annuaire du Collège du France (1982), 81-89.

[Serre90] J.P. Serre, *Lecture on the Mordell-Weil Theorem* Vieweg, 2. Aufl. (1990).

[Sil86] J.H. Silverman, *The Theory of Height Functions, Arithmetic Geometry,* Springer Verlag (1986), 151-166.

[Sil95] J.H. Silverman, *Counting Integer and Rational Points on Varieties,* Astérisque 228 (1995), 223-236.

[Vau81] R.C. Vaughan, *the Hardy-Littlewood method,* Cambridge Univ. Press (1981).

[Vo87] P. Vojta, *Diophantine approximations and value distribution theory,* Springer Lecture Notes 1239, (1987).

[Weil82] A. Weil, *Adeles and Algebraic Groups,* Birkhäuser, Boston, 1982.

10 Lebenslauf

Persönliche Daten	
Name	Deng, An-Wen
Geburtsdatum u. -ort	07.Dez.1964 in Taipei, Taiwan
Familienstand	ledig
Adresse	Kurze Str. 15 Göttingen
Ausbildung in Taiwan	
Sept.1971-Juni 1983	Schulbildung in Taipei
Sept.1983-Juni 1987	Mathematical department of science college of national central university in Chunli
Abschluß	Bachelor degree in mathematics
Sept.1987-Juni 1989	Mathematical institute of national Tsing-Hua university in Hsinchu
Abschluß	Master degree in mathematics
Militärdienst	
Juli 1989-Mai 1991	Reserveoffizier-Leutnant in der taiwanesischen Armee
Berufl. Tätigkeiten in Taiwan	
Juni 1991-Nov.1991	Übersetzungen von engl. math. Bücher ins Chinesische u. Erstellungen von math. Lösungsheften für die Verlage Xiao-Yuan, Dong-Hua u. Quan-Hua in Taipei
Aufenthalt in Deutschland	
Dez.1991-März 1992	Deutschkurs am Goethe-Institut in Göttingen
März 1992	Zulassung der Universität Göttingen
Okt.1993	Zulassung zur Promotion d. math. Instituts d. Univ. Göttingen
Okt.1993-März 1994	Wissenschaftl. Hilfskraft
April 1994-Dez.1995	Wissenschaftl. Mitarbeiter am Sonderforschungsbererich 170 in Göttingen
Jan.1996-Dez.1996	Mitarbeit in einem DFG-Projekt in Göttingen
Seit Jan. 1997	Fortsetzung d. Anfertigung d. Dissertation m. d. Unterstützung d. Stiftung d. Georg-Augst-Universität/Dr. Berliner
1.Aug.1997-30.Sept.1997	Tätigkeit in d. Computerfirma Valtronic Technologie GmbH in Ahrensburg