# Die Streuung zeitharmonischer elektromagnetischer Wellen an chiralen Medien

**Dissertation**
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Thomas Gerlach
aus
Bleicherode

Göttingen 1999

D 7
Referent: Prof. Dr. R. Kreß
Korreferent: Prof. Dr. G. Lube
Tag der mündlichen Prüfung: 29. April 1999

# Inhaltsverzeichnis

**Inhaltsverzeichnis** i

**Einleitung** iv

**I Direktes Problem** 1

**1 Problemstellung** 1

1.1 Chirale Medien . . . . . 1

1.2 Dreidimensionales Randwertproblem . . . . . 2

1.3 Zweidimensionales Randwertproblem . . . . . 3

**2 Bohrensche Zerlegung und Darstellung der Lösung** 7

2.1 Zerlegung für den dreidimensionalen Fall . . . . . 7

2.2 Zerlegung für den zweidimensionalen Fall . . . . . 9

**3 Eindeutigkeit** 10

3.1 Eindeutigkeit für das dreidimensionale Problem . . . . . 11

3.2 Eindeutigkeit für das zweidimensionale Problem . . . . . 13

**4 Existenz** 15

4.1 Existenz einer Lösung für das dreidimensionale Problem . . . . . 15

4.2 Existenz einer Lösung für das zweidimensionale Problem . . . . . 24

**5 Formulierung als Streuproblem** **30**

5.1 Dreidimensionales Streuproblem . . . . . 30

5.2 Zweidimensionales Streuproblem . . . . . 31

**6 Das Fernfeld** **33**

6.1 Reziprozität im dreidimensionalen Fall . . . . . 34

6.2 Reziprozität im zweidimensionalen Fall . . . . . 38

6.3 Fréchet-Ableitung des Fernfeldes nach dem Rand im $\mathbb{R}^2$ . . . . . 39

**7 Numerische Behandlung für das zweidimensionale Problem** **49**

7.1 Parametrisierung der Integraloperatoren . . . . . 49

7.2 Nyström-Methode . . . . . 53

7.3 Diskussion der Konvergenz . . . . . 54

7.4 Numerische Testbeispiele . . . . . 55

**II Inverses Streuproblem** **60**

**8 Eindeutigkeit des inversen Streuproblems** **60**

8.1 Hilfssätze . . . . . 61

8.2 Eindeutigkeit beim zweidimensionalen Problem . . . . . 62

**9 Numerische Ergebnisse für das inverse Problem im $\mathbb{R}^2$** **70**

9.1 Newtonverfahren und Regularisierung . . . . . 70

9.2 Modifikation in der Regularisierung . . . . . 73

9.3 Die rechte Seite und der hypersinguläre Operator $T$ . . . . . 74

9.4 Rekonstruktionen . . . . . 78

**A Anhang** **84**

A.1 Beweis zu Satz 6.8 . . . . . 84

A.2 Ein Alternativ-Beweis zu Satz 8.4 . . . . . 89

A.3 Fréchet-Ableitung . . . . . 90

A.3.1 Allgemeines zur Fréchet-Differenzierbarkeit . . . . . 90

A.3.2 Ein Differentiationssatz . . . . . 92

A.3.3 Behandlung des zweidimensionalen Falles . . . . . 92

**Literaturverzeichnis** **96**

# Einleitung

*As far as the laws of mathematics refer to reality,*
*they are not certain,*
*and as far as they are certain,*
*they do not refer to reality.*

*Albert Einstein*

Das Phänomen der optischen Aktivität in bestimmten organischen und anorganischen Substanzen wurde um 1810 entdeckt. Ein chirales Medium [29] weist in der Mikrostruktur eine Links- beziehungsweise Rechtshändigkeit auf, die zu unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten für links- und rechts-zirkular polarisierte elektromagnetische Wellen führt, oder anders gesagt, die Polarisationsebene erfährt eine Drehung.

In der Optik sind chirale Medien schon seit langer Zeit bekannt, eine Behandlung im Rahmen der elektromagnetischen Feldtheorie erfolgt aber erst in den letzten Jahren. Im Mikrowellenbereich läßt sich dieser Effekt nur bei künstlich hergestellten Werkstoffen beobachten, die durch das Einbetten von chiralen 3D-Objekten in ein Trägermedium erzeugt werden. Ein praktisches Verfahren zur Herstellung solcher Materialien wird von S. A. Kuehl, S. S. Grové und E. Kuehl in [39, S. 317ff] beschrieben. Derzeit ist dies aber noch nicht mit technischen Anwendungen verbunden, da momentan keine Fertigung im industriellen Maßstab möglich ist. Wie S. Bolioli in [39, S. 33ff] ausführt, sind hier aber durchaus in näherer Zukunft weitere Fortschritte zu erwarten, die auch das in den letzten Jahren zugenommene Interesse an der Thematik begründen.

Diese Arbeit soll einen Teil dazu beitragen, die gewonnenen Einsichten zu erweitern, indem hier mittels Integralgleichungsmethoden und einem klassischen Lösungsbegriff ein Teilproblem aus diesem Themenkreis bearbeitet wird, wenngleich dies auch fern von tatsächlichen praktischen Anwendungen geschieht.

Für die mathematische Beschreibung der optischen Aktivität werden statt der „gewöhnlichen“ Materialgleichungen $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ zur Beschreibung der Abhängigkeit der dielektrischen Verschiebung beziehungsweise magnetischen Induktion

vom elektrischen und magnetischen Feld die Drude-Born-Fedorov-Materialgleichungen

$$\mathbf{D} = \varepsilon[\mathbf{E} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{E}], \qquad \mathbf{B} = \mu[\mathbf{H} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{H}]$$

in die Maxwellschen Gleichungen eingesetzt, wobei die Chiralitätskonstante $\beta$ neben der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon$ und der Permeabilität $\mu$ eine neue Materialgröße ist. Mit der Charakterisierung in [30, Table 1.1] handelt es sich hierbei um sogenannte Pasteur-Medien, im weiteren soll aber immer von chiralen Medien gesprochen werden.

Im zeitharmonischen Fall mit verschwindender Leitfähigkeit können zwei der Feldgrößen – $\mathbf{D}$ und $\mathbf{B}$ – eliminiert werden und für die verbleibenden Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ ergibt sich ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem.

Ziel dieser Arbeit ist es, Randwert- und Streuprobleme zu untersuchen, bei denen ein homogenes chirales Medium von einem nichtchiralen umgeben ist. Dazu wird neben der dreidimensionalen auch eine zweidimensionale Aufgabe modelliert und untersucht. Eine numerische Behandlung erfolgt nur für dieses zweidimensionale Modell. Die Betrachtungen für das drei- und zweidimensionale Problem werden meist jeweils direkt im Anschluß aneinander durchgeführt, es finden sich dabei häufig ähnliche Schlüsse und Vorgehensweisen, es sind jedoch auch Unterschiede zu berücksichtigen, die eine getrennte Behandlung rechtfertigen.

Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile, der erste widmet sich dem direkten Problem und der zweite inversen Fragestellungen. Weiterhin sind einige Resultate in einem Anhang angefügt, um ein flüssigeres Lesen der Arbeit zu gewährleisten.

Der Teil I ist in sieben Kapitel unterteilt. Zunächst wird die Aufgabenstellung in vektorieller Schreibweise ausgehend von den Maxwellschen Gleichungen und den Materialgleichungen im zeitharmonischen Fall modelliert und ein zugehöriges Randwertproblem formuliert. Die auftretenden Differentialgleichungen für die inneren Felder $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{H}_0$ sind gekoppelt und haben die Gestalt $\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 - i\kappa \mathbf{H}_0 = \lambda \mathbf{E}_0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 + i\kappa \mathbf{E}_0 = \lambda \mathbf{H}_0$ mit durch die inneren physikalischen Parameter $\varepsilon_0$, $\mu_0$ und $\beta$ bestimmten Konstanten $\kappa$ und $\lambda$. Im Außenraum gelten die zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen $\operatorname{rot} \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = 0$ zur Wellenzahl $k$ und die Silver-Müller-Bedingungen als Abklingverhalten im Unendlichen. Am Rand müssen stetige Übergangsbedingungen für die Tangentialkomponenten der elektrischen beziehungsweise magnetischen Felder erfüllt sein.

Für den Fall eines unendlich langen zylindrischen Körpers wird hieraus eine zweidimensionale Problemstellung für skalare Felder $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{h}_0$ abgeleitet. Diese entsprechen jeweils der Komponente der Vektorfelder $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}_0$ beziehungsweise $\mathbf{H}_0$ in Ausbreitungsrichtung des Zylinders. Wie im dreidimensionalen Fall weisen die Differentialgleichungen der Form $(\triangle + \eta^2)\, \mathbf{e}_0 = -i\varrho\, \mathbf{h}_0$, $(\triangle + \eta^2)\, \mathbf{h}_0 = i\varrho\, \mathbf{e}_0$ für die inneren Größen mit durch $\varepsilon_0$, $\mu_0$, $\beta$ bestimmten Konstanten $\eta$, $\varrho$ eine Kopplung auf, im Außengebiet

werden die Helmholtzgleichung und die Sommerfeldsche Ausstrahlungbedingung für $\mathbf{e}$ und $\mathbf{h}$ verlangt. Auf dem Rand sind Übergangsbedingungen für die Dirichlet- und Neumann-Daten zu fordern, die sich aus denen für den dreidimensionalen Fall ergeben.

Im zweiten Kapitel wird eine äquivalente Formulierung der Probleme gegeben, die auf Bohren [1] zurückgeht und einen Zugang mit Integralgleichungsmethoden deutlich vereinfacht. Dabei wird durch eine geeignete Definition neuer Größen erreicht, daß die zunächst vorhandene Kopplung der Unbekannten durch die Differentialgleichungen beseitigt wird. So führt dies im dreidimensionalen Fall für die neuen Vektorfelder $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$ auf die Gleichungen für kraftfreie Felder $\operatorname{rot}\mathbf{A} = k\mathbf{A}$, $\operatorname{rot}\mathbf{B} = -k\mathbf{B}$, $\operatorname{rot}\mathbf{A}_0 = \alpha_{\mathbf{A}}\mathbf{A}_0$, $\operatorname{rot}\mathbf{B}_0 = -\alpha_{\mathbf{B}}\mathbf{B}_0$ und im zweidimensionalen auf Helmholtzgleichungen zu unterschiedlichen Wellenzahlen. Dies geschieht auf Kosten von zusätzlichen Kopplungen in den Randbedingungen, bei der Behandlung der zweidimensionalen Aufgabe kann durch eine geschickte Wahl dieser neuen Größen jedoch erreicht werden, daß diese Kopplung nur bei den Dirichlet-Daten auftritt.

Auf recht einfache Weise gelingt es in der vorliegenden Arbeit, aus den Stratton-Chu-Formeln für elektromagnetische Felder Darstellungsformeln für die Lösung des hier betrachteten dreidimensionalen Problems zu gewinnen. Bei der zweidimensionalen Aufgabe lassen sich die Resultate über die Darstellung der Lösung zur Helmholtzgleichung unmittelbar übertragen.

Im dritten Kapitel wird die Eindeutigkeit des drei- und zweidimensionalen Problems unter geeigneten Voraussetzungen gezeigt. Für die Nachweise werden das Ausstrahlungsverhalten der Lösung im Unendlichen und die in Kapitel 2 gewonnenen Darstellungen herangezogen.

Das vierte Kapitel widmet sich der Existenz von Lösungen. Für das dreidimensionale Problem wird ein Potentialansatz mit Vektorpotentialen gewählt. Unter Ausnutzung der Sprungbeziehungen werden Randintegralgleichungen zweiter Art für die in diesem Ansatz auftretenden vektoriellen Dichten abgeleitet und deren Lösbarkeit in geeigneten Hölder-Räumen diskutiert. Dabei tritt das Problem auf, daß die eindeutige Lösbarkeit des homogenen Integralgleichungssystems nicht allgemein gezeigt werden kann, um daraus mittels der Riesz-Theorie auch auf die Existenz einer Lösung der inhomogenen Aufgabe zu schließen. Es läßt sich aber das entsprechende Eindeutigkeitsresultat für eine spezielle Parameterwahl erzielen und mittels analytischer Fredholmtheorie bis auf gewisse Ausnahmen auf den allgemeinen Fall ausweiten. Ähnliche Untersuchungen hat Ola [36] in Sobolev-Räumen durchgeführt.

Bei der zweidimensionalen Aufgabe führen gemischte Einfach- und Doppelschichtpotentiale auf ein Integralgleichungssytem, dessen eindeutige Lösbarkeit in diesem Fall direkt aus der eindeutigen Lösbarkeit geeigneter Transmissionsprobleme abgeleitet werden kann. Zudem wird neben der Betrachtung in Hölder-Räumen auch ein modifizier-

tes Wohlgestelltheitsresultat unter Ausnutzung von $L^2$-Normen hergeleitet, das für den Eindeutigkeitsnachweis des inversen Problems benötigt wird.

Im fünften Kapitel werden zu den Randwertaufgaben zugehörige Streuprobleme formuliert, in denen die physikalisch relevante Frage nach den transmittierten und gestreuten Feldern bei gegebenen einfallenden ebenen elektromagnetischen Wellen aufgeworfen wird. Bei der zweidimensionalen Behandlung sind dabei je nach Polarisation der einfallenden Wellen das transversalmagnetische Problem, auch elektrisches Problem genannt, und das transversalelektrische, das auch als magnetisches Problem bezeichnet wird, zu unterscheiden.

Das sechste Kapitel beschäftigt sich mit Eigenschaften des Fernfeldes, welches das asymptotische Verhalten der gestreuten Felder beschreibt. Es werden Darstellungen angegeben und Reziprozitätseigenschaften nachgewiesen. Insbesondere wird für das zweidimensionale Problem gezeigt, daß der Fernfeldoperator, der bei gegebenen einfallenden Wellen dem Rand das zugehörige Fernfeld zuordnet, Fréchet-differenzierbar nach dem Rand ist. Die Fréchet-Ableitung wird durch ein Randwertproblem charakterisiert, mit dessen Hilfe sie sich auch berechnen läßt.

Im siebten Kapitel findet sich die Beschreibung des Nyström-Verfahrens zur numerischen Lösung des zweidimensionalen Randwert- und Streuproblems. Die Ergebnisse des entsprechend implementierten Algorithmus werden an einigen Testbeispielen demonstriert, weiterhin werden einige Ausführungen zur Konvergenz gemacht. In zwei neueren Aufsätzen [5], [6] werden numerische Verfahren basierend auf Darstellungen der Lösung als Oberflächenintegrale sowohl für das drei - als auch das zweidimensionale direkte Problem vorgestellt, allerdings fehlt dort eine entsprechende Existenz- und Eindeutigkeitsanalysis.

Zu Beginn von Teil II wird zunächst die betrachtete inverse Fragestellung nach der Gestalt des Streugebietes bei bekannten Fernfelddaten erläutert.

Das achte Kapitel geht auf Eindeutigkeitsresultate ein. Ziel war es, zu zeigen, daß bei Kenntnis der Fernfelder zu allen Einfallsrichtungen ebener Wellen und fester äußerer Wellenzahl die Gestalt des Streukörpers eindeutig bestimmt ist. Dabei gelingt es leider nur, den Nachweis für den zweidimensionalen Fall zu führen. Bei der Behandlung des dreidimensionalen Problems konnte eine Lücke nicht geschlossen werden. Erforderlich wäre ein Resultat, das für ein inneres elektromagnetisches Problem mit Chiralität die elektrischen und magnetischen Randdaten in geeignete Beziehungen setzt, ähnlich wie man es im zweidimensionalen Fall für die Dirichlet- und Neumann-Daten hat.

Im neunten Kapitel wird aufbauend auf den Resultaten zur Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators ein numerisches Verfahren zur Gebietsrekonstruktion einschließlich dazugehöriger Experimente dargestellt. Ausführlich wird beschrieben, wie man die nötigen Randdaten zur Berechnung der Fréchet-Ableitung numerisch gewinnt. Es kann

anhand der Testbeispiele belegt werden, daß das Newton-Verfahren, den Erwartungen aus der Behandlung anderer Aufgaben entsprechend, prinzipiell auch bei diesem Problem geeignet ist. Es wird aber auch auf Schwierigkeiten und mögliche Lösungsansätze hingewiesen.

An dieser Stelle bedanke ich mich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Rainer Kreß für die Anregung zu dieser Arbeit und seine wertvollen Hinweise und Diskussionen während ihrer Entstehung. Herrn Prof. Dr. Gert Lube danke ich für die Übernahme des Korreferats. Außerdem möchte ich meinen Dank auch allen Mitgliedern unserer Arbeitsgruppe „Inverse Probleme und Integralgleichungen“ sowie den sonstigen Mitarbeitern des Instituts für Numerische und Angewandte Mathematik für die mir entgegengebrachte Unterstützung aussprechen. Der Studienstiftung des deutschen Volkes danke ich für ihre finanzielle und ideelle Förderung.

# Teil I Direktes Problem

# 1 Problemstellung

Zunächst erfolgt ausgehend von den Maxwellschen Gleichungen und den Materialgleichungen für chirale Medien eine Ableitung der Feldgleichungen. Anschließend wird ein Randwertproblem für ein beschränktes Gebiet im dreidimensionalen Raum formuliert. Unter der Annahme eines unbeschränkten zylinderförmigen Gebietes wird hieraus eine zweidimensionale Aufgabe modelliert.

## 1.1 Chirale Medien

Die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen ohne freie Ladungen oder Ströme und mit verschwindender Leitfähigkeit lauten

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathcal{D} &= 0, & \operatorname{div}\mathcal{B} &= 0, \\ \operatorname{rot}\mathcal{E} + \tfrac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} &= 0, & \operatorname{rot}\mathcal{H} - \tfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Hier soll angenommen werden, daß die Felder zeitharmonisch sind und sich in der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \operatorname{Re}\{\varepsilon^{-1/2}\mathbf{E}\, e^{-i\omega t}\}, & \mathcal{D} &= \operatorname{Re}\{\varepsilon^{-1/2}\mathbf{D}\, e^{-i\omega t}\}, \\ \mathcal{H} &= \operatorname{Re}\{\mu^{-1/2}\mathbf{H}\, e^{-i\omega t}\}, & \mathcal{B} &= \operatorname{Re}\{\mu^{-1/2}\mathbf{B}\, e^{-i\omega t}\} \end{aligned}$$

mit Frequenz $\omega > 0$, Dielektrizität $\varepsilon > 0$ und Permeabilität $\mu > 0$ darstellen lassen. Dieser Ansatz führt auf die zeitharmonischen Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{D} &= 0, & \operatorname{rot}\mathbf{E} - i\omega(\varepsilon/\mu)^{1/2}\mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot}\mathbf{H} + i\omega(\mu/\varepsilon)^{1/2}\mathbf{D} &= 0. \end{aligned}$$

Zusammen mit den Materialgleichungen für chirale Medien

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{E} + \beta \operatorname{rot}\mathbf{E}), \qquad \mathbf{B} = \mu(\mathbf{H} + \beta \operatorname{rot}\mathbf{H}) \tag{1.1}$$

mit der Chiralität $\beta \geqslant 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \kappa^2\gamma^2\beta\mathbf{E} + i\kappa\gamma^2\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \kappa^2\gamma^2\beta\mathbf{H} - i\kappa\gamma^2\mathbf{E}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

wobei zur Abkürzung

$$\kappa^2 = \omega^2\varepsilon\mu, \quad \gamma^2 = (1-\kappa^2\beta^2)^{-1},$$

gesetzt wurde. Hieraus oder auch direkt aus (1.1) und $\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ folgt mit der Identität $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$ die Divergenzfreiheit von $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$.

Im Falle verschwindender Chiralität $\beta = 0$, d. h. $\gamma^2 = 1$, nehmen die Gleichungen (1.2) die wohlbekannte Gestalt der zeitharmonischen Maxwellschen Gleichungen[1]

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} - i\kappa\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} + i\kappa\mathbf{E} = 0 \tag{1.3}$$

an. Anwendung des Rotationsoperators und der obigen Beziehungen ergibt

$$\begin{aligned} -\triangle\mathbf{E} &= (-\triangle + \operatorname{grad}\operatorname{div})\mathbf{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \kappa^2\gamma^2\beta\operatorname{rot}\mathbf{E} + i\kappa\gamma^2\operatorname{rot}\mathbf{H} \\ &= \kappa^2\gamma^2\beta\operatorname{rot}\mathbf{E} + i\kappa\gamma^2(-i\omega(\mu/\varepsilon)^{1/2}\mathbf{D}) = \kappa^2\gamma^2\beta\operatorname{rot}\mathbf{E} + \kappa^2\gamma^2(\mathbf{E} + \beta\operatorname{rot}\mathbf{E}). \end{aligned}$$

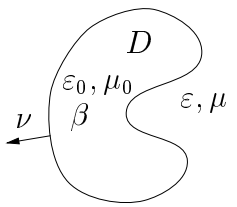
Mit einer analogen Rechnung für $\mathbf{H}$ gilt

$$\triangle\mathbf{E} + \kappa^2\gamma^2\mathbf{E} = -2\kappa^2\gamma^2\beta\operatorname{rot}\mathbf{E}, \qquad \triangle\mathbf{H} + \kappa^2\gamma^2\mathbf{H} = -2\kappa^2\gamma^2\beta\operatorname{rot}\mathbf{H}.$$

Im Falle verschwindender Chiralität sind die Felder divergenzfreie Lösungen der vektoriellen Helmholtzgleichung zur Wellenzahl $\kappa$.

## 1.2 Dreidimensionales Randwertproblem

Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet mit $C^2$-glattem, zusammenhängendem Rand $\partial D$. In $D$ sei $\beta$ die konstante Chiralität, $\mu_0$ die Permeabilität und $\varepsilon_0$ die Dielektrizität. Es bezeichne $\nu$ die äußere Normale an $\partial D$. Außerhalb habe das umgebende Medium $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ konstante Permeabilität $\mu$ und Dielektrizität $\varepsilon$ sowie verschwindende Chiralität.




Zur Abkürzung wird

$$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu, \qquad k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0, \qquad \gamma^2 = (1-k_0^2\beta^2)^{-1} \tag{1.4}$$

gesetzt, wobei $k$ und $k_0$ positiv gewählt seien. Weiter gelte, daß $1 - k_0^2\beta^2$ positiv ist, was für physikalische Anwendungen tatsächlich der Fall ist.[2]

[1] Vergleiche [3, (6.1)].
[2] Vergleiche [41].

Es sind dann Felder $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0 \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ und $\mathbf{E}$, $\mathbf{H} \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ so zu bestimmen, daß sie den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} - ik\mathbf{H} &= 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, && (1.5\,\text{a}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} + ik\mathbf{E} &= 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, && (1.5\,\text{b}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 - ik_0\gamma^2\mathbf{H}_0 &= k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{E}_0 \ \text{ in } D, && (1.5\,\text{c}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 + ik_0\gamma^2\mathbf{E}_0 &= k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{H}_0 \ \text{ in } D, && (1.5\,\text{d}) \end{aligned}$$

genügen. Weiterhin werden zu vorgegebenen $f$, $g \in C^{1,\alpha}(\partial D)$, die zusätzlich der Bedingung $\nu \cdot f = \nu \cdot g = 0$ genügen, also tangential sind, die Transmissionsbedingungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^{-1/2}\nu \times \mathbf{E}_0 - \varepsilon^{-1/2}\nu \times \mathbf{E} &= f \ \text{ auf } \partial D, && (1.6\,\text{a}) \\ \mu_0^{-1/2}\nu \times \mathbf{H}_0 - \mu^{-1/2}\nu \times \mathbf{H} &= g \ \text{ auf } \partial D && (1.6\,\text{b}) \end{aligned}$$

und die Silver-Müller-Bedingungen (SMB)

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} (\mathbf{H} \times x - r\mathbf{E}) &= 0, && (1.7\,\text{a}) \\ &\text{oder} \\ \lim_{r\to\infty} (\mathbf{E} \times x + r\mathbf{H}) &= 0, && (1.7\,\text{b}) \end{aligned}$$

gleichmäßig für alle Richtungen, gefordert.

Als verkürzte Schreibweise wird der Lösungsoperator $\mathcal{L}$ für das Problem (1.5 a) - (1.7 b) eingeführt, so daß im Falle der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung diese in der Form

$$(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}, \mathbf{H})^\top = \mathcal{L}(f, g)^\top \tag{1.8}$$

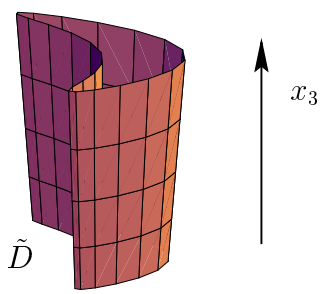
geschrieben werden kann.

## 1.3 Zweidimensionales Randwertproblem

Bei der zweidimensionalen Modellierung des Problems sei angenommen, daß es sich bei dem Streugebiet $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^3$ um einen unendlich langen zylindrischen Körper handelt. Das Koordinatensystem sei dabei so gewählt, daß diese unendlich lange Ausdehnung in $x_3$-Richtung liegt, für $\tilde{D}$ also

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in D, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

mit dem Schnitt $D$ von $\tilde{D}$ und der $x_1$-$x_2$-Ebene gilt.




Diese Symmetrieverhältnisse bedeuten, daß alle Größen von der $x_3$-Komponente des

Ortes unabhängig sind, und werden in die das Problem beschreibenden Gleichungen durch die Forderung $\partial_3 = 0$ eingeführt.

Ausgehend von den Differentialgleichungen (1.2) gilt dann

$$\begin{pmatrix} \partial_2 \mathbf{E}_3 \\ -\partial_1 \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} = \kappa^2\gamma^2\beta \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} + i\kappa\gamma^2 \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \partial_2 \mathbf{H}_3 \\ -\partial_1 \mathbf{H}_3 \end{pmatrix} = \kappa^2\gamma^2\beta \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix} - i\kappa\gamma^2 \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}$$

und

$$-\partial_2 \mathbf{E}_1 + \partial_1 \mathbf{E}_2 = \kappa^2\gamma^2\beta \mathbf{E}_3 + i\kappa\gamma^2 \mathbf{H}_3, \qquad -\partial_2 \mathbf{H}_1 + \partial_1 \mathbf{H}_2 = \kappa^2\gamma^2\beta \mathbf{H}_3 - i\kappa\gamma^2 \mathbf{E}_3.$$

Dabei bedeuten $\mathbf{E}_j$, $\mathbf{H}_j$, $j = 1, 2, 3$, die erste, zweite und dritte Komponente von $\mathbf{E}$ bzw. $\mathbf{H}$. Es ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \partial_2^2 \mathbf{E}_3 + \partial_1^2 \mathbf{E}_3 &= \kappa^2\gamma^2\beta(\partial_2 \mathbf{E}_1 - \partial_1 \mathbf{E}_2) + i\kappa\gamma^2(\partial_2 \mathbf{H}_1 - \partial_1 \mathbf{H}_2) \\ &= -\left[(\kappa^2\gamma^2\beta)^2 - (i\kappa\gamma^2)^2\right] \mathbf{E}_3 - 2\kappa^2\gamma^2\beta i\kappa\gamma^2 \mathbf{H}_3, \end{aligned}$$

also zusammengefaßt mit analogen Rechnungen für $\mathbf{H}$

$$\left(\triangle + \kappa^2\gamma^4(1 + \kappa^2\beta^2)\right) \mathbf{E}_3 = -2i\kappa^3\gamma^4\beta\, \mathbf{H}_3, \tag{1.9 a}$$

$$\left(\triangle + \kappa^2\gamma^4(1 + \kappa^2\beta^2)\right) \mathbf{H}_3 = 2i\kappa^3\gamma^4\beta\, \mathbf{E}_3. \tag{1.9 b}$$

Es bezeichne dabei in dem hier betrachteten zweidimensionalen Fall $\triangle = \partial_1^2 + \partial_2^2$.

Die ersten beiden Feldkomponenten hängen gemäß

$$\begin{aligned} \left(\kappa^4\gamma^4\beta^2 - \kappa^2\gamma^4\right) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix} \left\{\kappa^2\gamma^2\beta \mathbf{E}_3 - i\kappa\gamma^2 \mathbf{H}_3\right\}, \\ \left(\kappa^4\gamma^4\beta^2 - \kappa^2\gamma^4\right) \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix} \left\{\kappa^2\gamma^2\beta \mathbf{H}_3 + i\kappa\gamma^2 \mathbf{E}_3\right\} \end{aligned}$$

von den dritten ab und lassen sich wegen $\kappa^4\gamma^4\beta^2 - \kappa^2\gamma^4 = -\kappa^2\gamma^2$ durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix} \left\{-\beta \mathbf{E}_3 + \frac{i}{\kappa} \mathbf{H}_3\right\}, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix} \left\{-\beta \mathbf{H}_3 - \frac{i}{\kappa} \mathbf{E}_3\right\}.$$

ausdrücken.

Bei verschwindender Chiralität $\beta$ erhält man als Spezialfall

$$(\triangle + \kappa^2)\, \mathbf{E}_3 = 0, \qquad (\triangle + \kappa^2)\, \mathbf{H}_3 = 0$$

für die dritten Komponenten und

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} = \frac{i}{\kappa} \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix} \mathbf{H}_3, \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix} = -\frac{i}{\kappa} \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix} \mathbf{E}_3$$

für die ersten beiden.[3]

Diese Überlegungen ermöglichen es nun, ein entsprechendes Randwertproblem für den zweidimensionalen Fall zu formulieren. Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet, der Rand $\partial D$ sei $C^2$-glatt und zusammenhängend. Weiter seien in $D$ die Chiralität $\beta$, Dielektrizität $\varepsilon_0$ und Permeabilität $\mu_0$ und in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ die Dielektrizität und Permeabilität $\varepsilon$ bzw. $\mu$ gegeben. Die Chiralität im Äußeren von $D$ verschwinde.

Es bezeichne wieder wie in (1.4)

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu, \qquad k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0, \qquad \gamma^2 = (1 - k_0^2 \beta^2)^{-1}.$$

Gesucht sind $\mathbf{e}, \mathbf{h} \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$, $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0 \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, die den Gleichungen

$$\begin{aligned}
(\triangle + k^2)\, \mathbf{e} &= 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, && (1.10\,\text{a})\\
(\triangle + k^2)\, \mathbf{h} &= 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, && (1.10\,\text{b})\\
\left(\triangle + k_0^2 \gamma^4 (1 + k_0^2 \beta^2)\right)\, \mathbf{e}_0 &= -2ik_0^3 \gamma^4 \beta\, \mathbf{h}_0 \ \text{ in } D, && (1.10\,\text{c})\\
\left(\triangle + k_0^2 \gamma^4 (1 + k_0^2 \beta^2)\right)\, \mathbf{h}_0 &= 2ik_0^3 \gamma^4 \beta\, \mathbf{e}_0 \ \text{ in } D && (1.10\,\text{d})
\end{aligned}$$

genügen. Als Forderung im Unendlichen wird die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (SAB)

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial r} - ik\mathbf{e} = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \qquad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial r} - ik\mathbf{h} = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \qquad r \to \infty, \tag{1.11}$$

gleichmäßig für alle Richtungen, verlangt.

Die skalaren Funktionen $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{e}, \mathbf{h}$ entsprechen dabei gerade den dritten Komponenten der Felder $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}, \mathbf{H}$.

Es ist nun noch zu untersuchen, wie die Transmissionsbedingungen für den zweidimensionalen Fall aussehen. Für die äußere Normale $\nu$ an $\partial D$, eingebettet in den $\mathbb{R}^3$, und einen beliebigen Vektor $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \nu \times \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_2 \mathbf{U}_3 \\ -\nu_1 \mathbf{U}_3 \\ \nu_1 \mathbf{U}_2 - \nu_2 \mathbf{U}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_3\, \nu^\perp \\ -\nu^\perp \cdot \binom{\mathbf{U}_1}{\mathbf{U}_2} \end{pmatrix}$$

mit der Bezeichnung $\nu^\perp = \binom{\nu_2}{-\nu_1}$. Damit lauten die Transmissionsbedingungen (1.6 a), (1.6 b) zu vorgegebenen $f = (f_1, f_2, f_3)^\top, g = (g_1, g_2, g_3)^\top$ in den ersten beiden Komponenten

$$\begin{aligned}
\left(\varepsilon_0^{-1/2} \mathbf{e}_0 - \varepsilon^{-1/2} \mathbf{e}\right) \nu^\perp &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},\\
\left(\mu_0^{-1/2} \mathbf{h}_0 - \mu^{-1/2} \mathbf{h}\right) \nu^\perp &= \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

[3] Zu der Modellierung eines zweidimensionalen Problems im nichtchiralen Fall vergleiche auch [42].

bzw. nach Multiplikation mit $\nu^\perp$

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^{-1/2}\mathbf{e}_0 - \varepsilon^{-1/2}\mathbf{e} &= \tilde{f} := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \cdot \nu^\perp, \\ \mu_0^{-1/2}\mathbf{h}_0 - \mu^{-1/2}\mathbf{h} &= \tilde{g} := \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \cdot \nu^\perp.\end{aligned}$$

Wie man sieht, führt die Forderung, daß die Randdaten tangential sind, hier für die ersten beiden Komponenten zu der Bedingung $(f_1, f_2)^\top \cdot \nu = (g_1, g_2)^\top \cdot \nu = 0$.

Die Randbedingung für die dritte Komponente mit $\hat{f} := f_3$ lautet[4]

$$\begin{aligned}-\hat{f} &= \varepsilon_0^{-1/2}\nu^\perp \cdot (\mathbf{E}_{0,1}, \mathbf{E}_{0,2})^\top - \varepsilon^{-1/2}\nu^\perp \cdot (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)^\top \\ &= \underbrace{\nu^\perp \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix}}_{\partial/\partial\nu} \left\{ \varepsilon_0^{-1/2} \left( -\beta \mathbf{e}_0 + \frac{i}{k_0}\mathbf{h}_0 \right) - \varepsilon^{-1/2}\frac{i}{k}\mathbf{h} \right\}.\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung ist für $\hat{g} := g_3$ auszuführen und zusammengefaßt lauten die Randbedingungen auf $\partial D$

$$\hat{f} = \varepsilon_0^{-1/2}\beta\frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \nu} - \varepsilon_0^{-1/2} i k_0^{-1}\frac{\partial \mathbf{h}_0}{\partial \nu} + \varepsilon^{-1/2} i k^{-1}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \nu}, \tag{1.12 a}$$

$$\hat{g} = \mu_0^{-1/2}\beta\frac{\partial \mathbf{h}_0}{\partial \nu} + \mu_0^{-1/2} i k_0^{-1}\frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \nu} - \mu^{-1/2} i k^{-1}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \nu}, \tag{1.12 b}$$

$$\tilde{f} = \varepsilon_0^{-1/2}\mathbf{e}_0 - \varepsilon^{-1/2}\mathbf{e}, \tag{1.12 c}$$

$$\tilde{g} = \mu_0^{-1/2}\mathbf{h}_0 - \mu^{-1/2}\mathbf{h}, \tag{1.12 d}$$

wobei $\hat{f}, \hat{g} \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ und $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ vorausgesetzt wird.

Auch hier wird ein Lösungsoperator $\mathcal{L}$ für das Problem (1.10 a) - (1.12 d) eingeführt, so daß

$$(\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{e}, \mathbf{h})^\top = \mathcal{L}(\hat{f}, \hat{g}, \tilde{f}, \tilde{g})^\top \tag{1.13}$$

gilt, falls die Aufgabe eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Eine Verwechslung mit dem gleichlautenden Operator für das dreidimensionale Problem in (1.8) ist nicht möglich, da einerseits die Anzahl der Argumente verschieden ist und auch immer eindeutig aus dem Kontext hervorgehen wird, ob es sich um das drei- bzw. zweidimensionale Problem handelt.

[4] Hier werden vorübergehend die Bezeichnungen $\mathbf{E}_0 = (\mathbf{E}_{0,1}, \mathbf{E}_{0,2}, \mathbf{e}_0)^\top, \mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{e})^\top, \ldots$ verwendet, die ersten beiden Komponenten aber wieder durch die dritten ausgedrückt.

# 2 Bohrensche Zerlegung und Darstellung der Lösung

Die Randwertprobleme weisen gekoppelte Differentialgleichungen (1.5 a) - (1.5 d) bzw. (1.10 a) - (1.10 d) zwischen $\mathbf{E}-$ und $\mathbf{H}-$Feldern auf, die Transmissionsbedingungen (1.6 a), (1.6 b) und (1.12 a) - (1.12 d) sind im dreidimensionalen Fall entkoppelt und im zweidimensionalen ebenfalls gekoppelt. Mittels einer geeigneten Zerlegung, die auf C. F. Bohren [1] zurückgeht, lassen sich diese Aufgaben in äquivalente Probleme mit entkoppelten Differentialgleichungen und gekoppelten Randbedingungen überführen. Dies ermöglicht einen Zugang zur Lösungstheorie, der auf der Verwendung von Potentialen zur Grundlösung der Helmholtz-Gleichung basiert.

## 2.1 Zerlegung für den dreidimensionalen Fall

Es werden Felder $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$ gemäß

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathbf{A} &=& \mathbf{E}+i\mathbf{H}, & & \mathbf{A}_0 &=& \mathbf{E}_0+i\mathbf{H}_0, \\ \mathbf{B} &=& \mathbf{E}-i\mathbf{H}, & & \mathbf{B}_0 &=& \mathbf{E}_0-i\mathbf{H}_0 \end{array} \tag{2.1}$$

definiert. Falls $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ den Differentialgleichungen (1.5 a) - (1.5 d) genügen, so gilt

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}_0 \pm i\mathbf{H}_0) = k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{E}_0 + ik_0\gamma^2\mathbf{H}_0 \pm (k_0^2\gamma^2\beta i\mathbf{H}_0 + k_0\gamma^2\mathbf{E}_0) = k_0\gamma^2(k_0\beta\pm 1)(\mathbf{E}_0 \pm i\mathbf{H}_0),$$

was

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = k\mathbf{A}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{B} = -k\mathbf{B} \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \tag{2.2 a}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}_0 = \alpha_{\mathbf{A}}\mathbf{A}_0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{B}_0 = -\alpha_{\mathbf{B}}\mathbf{B}_0 \quad \text{in } D, \tag{2.2 b}$$

impliziert. Dabei sind $\alpha_{\mathbf{A}}$ und $\alpha_{\mathbf{B}}$ durch

$$\alpha_{\mathbf{A}} := k_0\gamma^2(1+k_0\beta), \qquad \alpha_{\mathbf{B}} := k_0\gamma^2(1-k_0\beta) \tag{2.3}$$

erklärt. Felder, die Gleichungen der Form (2.2 a), (2.2 b) genügen, werden kraftfrei[1] genannt. Die Transmissionsbedingungen transformieren sich zu

$$\varepsilon_0^{-1/2}\nu \times (\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0) - \varepsilon^{-1/2}\nu \times (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 2f \text{ auf } \partial D, \tag{2.4 a}$$

$$\mu_0^{-1/2}\nu \times (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0) - \mu^{-1/2}\nu \times (\mathbf{A}-\mathbf{B}) = 2ig \text{ auf } \partial D \tag{2.4 b}$$

[1] Vergleiche etwa [20].

und die Ausstrahlungsbedingungen zu

$$\lim_{r\to\infty} (\mathbf{A} \times x - ir\mathbf{A}) = 0, \tag{2.5 a}$$
$$\lim_{r\to\infty} (\mathbf{B} \times x + ir\mathbf{B}) = 0. \tag{2.5 b}$$

Aus (2.2 a) und (2.2 b) läßt sich auch unmittelbar wieder die Divergenzfreiheit der auftretenden Felder ablesen. Außerdem gilt für ein Vektorfeld $\mathbf{U}$ mit $\operatorname{rot}\mathbf{U} = \pm\alpha\mathbf{U}$ die Beziehung

$$\operatorname{rot}\mathbf{U} \pm i\alpha(i\mathbf{U}) = 0, \qquad \operatorname{rot}(i\mathbf{U}) \mp i\alpha\mathbf{U} = 0,$$

so daß das Paar $(i\mathbf{U}, \mathbf{U})$ bzw. $(\mathbf{U}, i\mathbf{U})$ den Maxwellschen Gleichungen der Form (1.3) genügt und die Stratton-Chu-Formeln[2] anwendbar sind. Diese führen direkt auf Darstellungsformeln für $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0(x) &= -\operatorname{rot}\int_{\partial D} \nu(y)\times\mathbf{A}_0(y)\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x,y)\,\mathrm{d}s(y) \\
&\quad -\frac{1}{\alpha_{\mathbf{A}}}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial D} \nu(y)\times\mathbf{A}_0(y)\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x,y)\,\mathrm{d}s(y),\ x\in D, && (2.6\,\mathrm{a})\\
\mathbf{B}_0(x) &= -\operatorname{rot}\int_{\partial D} \nu(y)\times\mathbf{B}_0(y)\Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(x,y)\,\mathrm{d}s(y) \\
&\quad +\frac{1}{\alpha_{\mathbf{B}}}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial D} \nu(y)\times\mathbf{B}_0(y)\Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(x,y)\,\mathrm{d}s(y),\ x\in D, && (2.6\,\mathrm{b})\\
\mathbf{A}(x) &= \operatorname{rot}\int_{\partial D} \nu(y)\times\mathbf{A}(y)\Phi_k(x,y)\,\mathrm{d}s(y) \\
&\quad +\frac{1}{k}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial D} \nu(y)\times\mathbf{A}(y)\Phi_k(x,y)\,\mathrm{d}s(y),\ x\in\mathbb{R}^3\setminus\bar{D}, && (2.6\,\mathrm{c})\\
\mathbf{B}(x) &= \operatorname{rot}\int_{\partial D} \nu(y)\times\mathbf{B}(y)\Phi_k(x,y)\,\mathrm{d}s(y) \\
&\quad -\frac{1}{k}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_{\partial D} \nu(y)\times\mathbf{B}(y)\Phi_k(x,y)\,\mathrm{d}s(y),\ x\in\mathbb{R}^3\setminus\bar{D}. && (2.6\,\mathrm{d})
\end{aligned}$$

Im entsprechenden Komplementärgebiet (ohne den Rand $\partial D$) verschwinden diese Potentiale jeweils. Dabei ist die Grundlösung gegeben durch

$$\Phi_\kappa(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|}, \quad x\neq y. \tag{2.7}$$

[2]Siehe [3, Th. 6.2 und 6.6]. Dabei entspricht $(i\mathbf{U}, \mathbf{U})$ bzw. $(\mathbf{U}, i\mathbf{U})$ dem Paar $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$. Im Außengebiet folgen die Entsprechungen der Silver-Müller-Bedingung (1.7 a), (1.7 b) aus (2.5 a) bzw. (2.5 b).

## 2.2 Zerlegung für den zweidimensionalen Fall

Man transformiert das Problem durch eine Zerlegung

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left(\tfrac{\mu_0}{\mu}\right)^{1/2} \mathbf{e} + i \left(\tfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{1/2} \mathbf{h}, \qquad & \mathbf{a}_0 &= \mathbf{e}_0 + i\mathbf{h}_0, \\ \mathbf{b} &= \left(\tfrac{\mu_0}{\mu}\right)^{1/2} \mathbf{e} - i \left(\tfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{1/2} \mathbf{h}, \qquad & \mathbf{b}_0 &= \mathbf{e}_0 - i\mathbf{h}_0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

so daß die Differentialgleichungen (1.10 a) - (1.10 d) für die neuen Größen die Gestalt

$$(\triangle + k^2)\,\mathbf{a} = (\triangle + k^2)\,\mathbf{b} = 0 \;\text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{2.9 a}$$

und

$$(\triangle + \alpha_{\mathbf{A}}^2)\,\mathbf{a}_0 = (\triangle + \alpha_{\mathbf{B}}^2)\,\mathbf{b}_0 = 0 \;\text{ in } D \tag{2.9 b}$$

annehmen, wobei wie in (2.3)

$$\alpha_{\mathbf{A}} = k_0\gamma^2(1 + k_0\beta) = k_0/(1 - k_0\beta), \qquad \alpha_{\mathbf{B}} = k_0\gamma^2(1 - k_0\beta) = k_0/(1 + k_0\beta)$$

gesetzt wurde. Weiterhin gilt dann die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial r} - ik\mathbf{a} = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \qquad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial r} - ik\mathbf{b} = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right) \tag{2.10}$$

für $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$. Die Randbedingungen ergeben sich durch

$$\mathbf{e} = \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{-1/2} \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}, \quad \mathbf{h} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{-1/2} \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2i}, \quad \mathbf{e}_0 = \frac{\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0}{2}, \quad \mathbf{h}_0 = \frac{\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0}{2i}$$

aus den Randbedingungen (1.12 a) - (1.12 d) für $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{h}_0$, und es gilt

$$-\alpha_{\mathbf{A}}(\varepsilon_0^{1/2}\hat{f} + i\mu_0^{1/2}\hat{g}) \;=:\; N_{\mathbf{a}} \;=\; \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu} - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu}, \tag{2.11 a}$$

$$\alpha_{\mathbf{B}}(\varepsilon_0^{1/2}\hat{f} - i\mu_0^{1/2}\hat{g}) \;=:\; N_{\mathbf{b}} \;=\; \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu} - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu}, \tag{2.11 b}$$

$$\varepsilon_0^{1/2}\tilde{f} + i\mu_0^{1/2}\tilde{g} \;=:\; D_{\mathbf{a}} \;=\; \mathbf{a}_0 - \xi_+\mathbf{a} - \xi_-\mathbf{b}, \tag{2.11 c}$$

$$\varepsilon_0^{1/2}\tilde{f} - i\mu_0^{1/2}\tilde{g} \;=:\; D_{\mathbf{b}} \;=\; \mathbf{b}_0 - \xi_-\mathbf{a} - \xi_+\mathbf{b} \tag{2.11 d}$$

mit den Abkürzungen

$$\xi := \left(\frac{\varepsilon_0\mu}{\varepsilon\mu_0}\right)^{1/2}, \quad \xi_+ := \frac{\xi + \xi^{-1}}{2}, \quad \xi_- := \frac{\xi - \xi^{-1}}{2}. \tag{2.12}$$

Die spezielle Wahl der Koeffizienten in der Definition von $\mathbf{a}_0$ und $\mathbf{b}_0$ führt hier dazu, daß eine Kopplung bei den Randbedingungen nur noch in den Dirichlet-Daten auftritt,

was später die Potentialansätze bei der Untersuchung der Existenz von Lösungen etwas vereinfachen wird.

Die Lösung von (2.9 a) - (2.11 d) wird in Analogie zu (1.13) mittels des Operators $\mathcal{L}^B$ geschrieben, d.h. es gilt

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b})^\top = \mathcal{L}^B \left(N_\mathbf{a}, N_\mathbf{b}, D_\mathbf{a}, D_\mathbf{b}\right)^\top . \tag{2.13}$$

Da $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ Helmholtzgleichungen in $D$ bzw $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ genügen und zusätzlich $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllen, gelten folgende Darstellungen[3]

$$\int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}_0(y) \frac{\partial \Phi_{\alpha_\mathbf{A}}(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu} \Phi_{\alpha_\mathbf{A}}(x,y) \right\} \mathrm{d}s(y) = \begin{cases} -\mathbf{a}_0(x), & x \in D, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \end{cases} \tag{2.14 a}$$

$$\int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}_0(y) \frac{\partial \Phi_{\alpha_\mathbf{B}}(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu} \Phi_{\alpha_\mathbf{B}}(x,y) \right\} \mathrm{d}s(y) = \begin{cases} -\mathbf{b}_0(x), & x \in D, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \end{cases} \tag{2.14 b}$$

$$\int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}(y) \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu} \Phi_k(x,y) \right\} \mathrm{d}s(y) = \begin{cases} 0, & x \in D, \\ \mathbf{a}(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \end{cases} \tag{2.14 c}$$

$$\int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}(y) \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu} \Phi_k(x,y) \right\} \mathrm{d}s(y) = \begin{cases} 0, & x \in D, \\ \mathbf{b}(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}. \end{cases} \tag{2.14 d}$$

Dabei bezeichnet

$$\Phi_\kappa(x,y) = \frac{i}{4} H_0^1(\kappa|x-y|), \quad x \neq y, \tag{2.15}$$

die Grundlösung zur Wellenzahl $\kappa > 0$ im $\mathbb{R}^2$. Hieraus lassen sich auch leicht Darstellungen für $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{h}_0$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ angeben.

# 3 Eindeutigkeit

Für das zwei- und dreidimensionale Transmissionsproblem wird die Eindeutigkeit nachgewiesen, indem gezeigt wird, daß die jeweilige homogene Aufgabe nur die triviale Lösung besitzt. Zunächst wird unter Verwendung der Ausstrahlungsbedingungen gezeigt, daß bei homogenen Randwerten die Lösung im Außenraum verschwindet. Dann kann mit den Darstellungsformeln und den Transmissionsbedingungen auf die Lösung im Inneren geschlossen werden.

[3] Siehe [2, Th. 3.1 und 3.3].

## 3.1 Eindeutigkeit für das dreidimensionale Problem

**Lemma 3.1** *Es seien* $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0 \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ *und* $\mathbf{E}$, $\mathbf{H} \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ *Lösungen des dreidimensionalen Transmissionsproblems mit homogenen Randdaten, also* $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}, \mathbf{H})^\top = \mathcal{L}(0,0)^\top$. *Dann gilt*

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus D.$$

**Beweis** Man betrachtet

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \left(\bar{\mathbf{E}}_0 \times \mathbf{H}_0\right) \cdot \nu \, \mathrm{d}s &= \int_D \operatorname{div} \left(\bar{\mathbf{E}}_0 \times \mathbf{H}_0\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_D (\mathbf{H}_0 \cdot \underbrace{\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}_0}_{-ik_0\gamma^2\bar{\mathbf{H}}_0 + k_0^2\gamma^2\beta\bar{\mathbf{E}}_0} - \bar{\mathbf{E}}_0 \cdot \underbrace{\operatorname{rot} \mathbf{H}_0}_{-ik_0\gamma^2\mathbf{E}_0 + k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{H}_0}) \, \mathrm{d}x \\
&= ik_0\gamma^2 \int_D \left(|\mathbf{E}_0|^2 - |\mathbf{H}_0|^2\right) \, \mathrm{d}x. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Es sei nun $R$ so groß gewählt, daß $D \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leqslant R\}$. Dann gilt

$$ik \int_{\substack{x \notin \bar{D} \\ |x| < R}} \left(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{H}|^2\right) \, \mathrm{d}x = -\int_{\partial D} \left(\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}\right) \cdot \nu \, \mathrm{d}s + \int_{|x|=R} \left(\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}\right) \cdot \nu \, \mathrm{d}s.$$

Aus der Homogenität der Transmissionsbedingungen (1.6 a), (1.6 b) folgt

$$\left\{\varepsilon_0^{-1/2}\mu_0^{-1/2} \left(\bar{\mathbf{E}}_0 \times \mathbf{H}_0\right) - \varepsilon^{-1/2}\mu^{-1/2} \left(\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}\right)\right\} \cdot \nu = 0,$$

womit

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \int_{|x|=R} \left(\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}\right) \cdot \nu \, \mathrm{d}s \\
&= \operatorname{Re} \int_{\partial D} \left(\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}\right) \cdot \nu \, \mathrm{d}s + k \operatorname{Re} \left(i \int_{\substack{x \notin \bar{D} \\ |x| < R}} \left(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{H}|^2\right) \, \mathrm{d}x\right) \\
&= \left(\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}\right)^{-1/2} \operatorname{Re} \int_{\partial D} \left(\bar{\mathbf{E}}_0 \times \mathbf{H}_0\right) \cdot \nu \, \mathrm{d}s \\
&= \left(\frac{\varepsilon_0\mu_0}{\varepsilon\mu}\right)^{-1/2} k_0\gamma^2 \operatorname{Re} \left(i \int_D \left(|\mathbf{E}_0|^2 - |\mathbf{H}_0|^2\right) \, \mathrm{d}x\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

folgt. Für $|x| = R$ ist die Normale durch $\nu = \hat{x}$ gegeben und es folgt aus der Ausstrahlungsbedingung (1.7 a) und der Endlichkeitsbedingung[1] $\mathbf{E} = O(R^{-1})$

$$\nu \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) = -\bar{\mathbf{E}} \cdot (\hat{x} \times \mathbf{H}) = -\underbrace{\bar{\mathbf{E}}}_{\mathrm{O}(R^{-1})} \cdot (-\mathbf{E} + \mathrm{o}(R^{-1})) = |\mathbf{E}|^2 + \mathrm{o}(R^{-2}),$$

und daraus unmittelbar

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|x|=R} |\mathbf{E}|^2 \, \mathrm{d}s = 0.$$

Da $\mathbf{E}$ als Lösung der Maxwell-Gleichungen komponentenweise der Helmholtzgleichung $\triangle \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ genügt, ist das Rellich-Lemma[2] anwendbar und es folgt

$$\mathbf{E} = 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus D.$$

Ein analoger Schluß ist auch für $\mathbf{H}$ möglich, so daß die Behauptung gilt. **q. e. d.**

**Satz 3.2** *Es seien die Voraussetzungen des vorigen Lemmas 3.1 erfüllt. Dann gilt*

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0 \quad \textit{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \quad \textit{und} \quad \mathbf{E}_0 = \mathbf{H}_0 = 0 \quad \textit{in } D,$$

*das heißt, das dreidimensionale Randwertproblem besitzt höchstens eine Lösung.*

**Beweis** Das Verschwinden der Lösung im Komplement von $D$ ist Inhalt des vorangegangenen Lemmas und es folgt hieraus insbesondere das Verschwinden der gemäß (2.1) zerlegten Felder $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ in $\mathbb{R}^3 \setminus D$, so daß auch

$$\nu \times \mathbf{A} = \nu \times \mathbf{B} = 0 \ \text{ auf } \partial D$$

gilt. Hieraus folgt wegen der Homogenität der Randbedingungen (2.4 a), (2.4 b)

$$\nu \times \mathbf{A}_0 = \nu \times \mathbf{B}_0 = 0 \ \text{ auf } \partial D$$

und zusammen mit den Darstellungsformeln (2.6 a), (2.6 b) auch $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$. Aus (2.1) liest man $\mathbf{E}_0 = \mathbf{H}_0 = 0$ ab. **q. e. d.**

Hieraus folgt auch unmittelbar, daß das transformierte Problem (2.2 a) - (2.5 b) höchstens eine Lösung besitzt..

[1] Vergleiche dazu [3, (6.19)].
[2] Siehe [3, Lemma 2.11].

## 3.2 Eindeutigkeit für das zweidimensionale Problem

**Lemma 3.3** *Es seien* $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0 \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ *und* $\mathbf{e}, \mathbf{h} \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus D) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$ *Lösungen des zweidimensionalen Transmissionsproblems mit homogenen Randdaten, das heißt* $(\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{e}, \mathbf{h})^\top = \mathcal{L}(0,0,0,0)^\top$. *Dann gilt*

$$\mathbf{e} = \mathbf{h} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus D.$$

**Beweis** Man betrachtet

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} \left\{ \beta \left[ \mathbf{h}_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_0}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}}_0 \frac{\partial \mathbf{h}_0}{\partial \nu} \right] + \frac{i}{k_0} \left[ \mathbf{h}_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}_0}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}}_0 \frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \nu} \right] \right\} \mathrm{d}s \\
&= \int_D \left\{ \beta \left[ \mathbf{h}_0 \triangle \bar{\mathbf{e}}_0 - \bar{\mathbf{e}}_0 \triangle \mathbf{h}_0 \right] + \frac{i}{k_0} \left[ \mathbf{h}_0 \triangle \bar{\mathbf{h}}_0 - \bar{\mathbf{e}}_0 \triangle \mathbf{e}_0 + |\operatorname{grad} \mathbf{h}_0|^2 - |\operatorname{grad} \mathbf{e}_0|^2 \right] \right\} \mathrm{d}x \\
&= i \int_D \left\{ \left( 2(k_0^2 \gamma^2 \beta)(k_0 \gamma^2) - \gamma^2 (1 + (k_0 \beta)^2) \right) \left( |\mathbf{h}_0|^2 - |\mathbf{e}_0|^2 \right) \right. \\
&\qquad \left. + k_0^{-1} \left( |\operatorname{grad} \mathbf{h}_0|^2 - |\operatorname{grad} \mathbf{e}_0|^2 \right) \right\} \mathrm{d}x \\
&\in i\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt für hinreichend großes $R$ mit $D \subset \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant R\}$

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} \left\{ \beta \left[ \mathbf{h}_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_0}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}}_0 \frac{\partial \mathbf{h}_0}{\partial \nu} \right] + \frac{i}{k_0} \left[ \mathbf{h}_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}_0}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}}_0 \frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \nu} \right] \right\} \mathrm{d}s \\
&= \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{h}_0 \left[ \beta \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_0}{\partial \nu} + i k_0^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}_0}{\partial \nu} \right] - \bar{\mathbf{e}}_0 \left[ \beta \frac{\partial \mathbf{h}_0}{\partial \nu} + i k_0^{-1} \frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \nu} \right] \right\} \mathrm{d}s \\
&= \left( \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu \varepsilon} \right)^{1/2} \frac{i}{k} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{h} \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \nu} \right\} \mathrm{d}s \\
&= \left( \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu \varepsilon} \right)^{1/2} \frac{i}{k} \left[ - \int_{\substack{x \notin \bar{D} \\ |x| < R}} \left\{ \mathbf{h} \triangle \bar{\mathbf{h}} + |\operatorname{grad} \mathbf{h}|^2 - \bar{\mathbf{e}} \triangle \mathbf{e} - |\operatorname{grad} \mathbf{e}|^2 \right\} \mathrm{d}x \right. \\
&\qquad \left. + \int_{|x|=R} \left\{ \mathbf{h} \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \nu} \right\} \mathrm{d}s \right] \\
&= - \left( \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu \varepsilon} \right)^{1/2} \frac{i}{k} \int_{\substack{x \notin \bar{D} \\ |x| < R}} \left\{ k^2 (|\mathbf{e}|^2 - |\mathbf{h}|^2) + |\operatorname{grad} \mathbf{h}|^2 - |\operatorname{grad} \mathbf{e}|^2 \right\} \mathrm{d}x \\
&\quad + \left( \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu \varepsilon} \right)^{1/2} \frac{i}{k} \int_{|x|=R} \left\{ \mathbf{h} \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \nu} \right\} \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Bildung des Realteiles führt auf

$$\mathrm{Re}\left(i\int_{|x|=R}\left\{\mathbf{h}\frac{\partial\bar{\mathbf{h}}}{\partial\nu}-\bar{\mathbf{e}}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial\nu}\right\}\,\mathrm{d}s\right)=0.$$

Aus den Ausstrahlungsbedingungen (1.11) und den Endlichkeitsbedingungen $\mathbf{h} = O(R^{-1/2})$, $\mathbf{e} = O(R^{-1/2})$ erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{h}\frac{\partial\bar{\mathbf{h}}}{\partial\nu} &= \mathbf{h}(o(R^{-1/2})-ik\bar{\mathbf{h}}) = o(R^{-1})-ik|\mathbf{h}|^2,\\ \bar{\mathbf{e}}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial\nu} &= \bar{\mathbf{e}}(o(R^{-1/2})+ik\mathbf{e}) = o(R^{-1})+ik|\mathbf{e}|^2,\end{aligned}$$

womit

$$\int_{|x|=R}(|\mathbf{e}|^2+|\mathbf{h}|^2)\,\mathrm{d}s(x)=o(1)$$

folgt. Nach dem Rellich-Lemma gilt dann $\mathbf{e} = \mathbf{h} = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$. **q. e. d.**

**Satz 3.4** *Es seien die Voraussetzungen des vorigen Lemmas 3.3 erfüllt. Dann gilt*

$$\mathbf{e}=\mathbf{h}=0 \quad \textit{in } \mathbb{R}^2\setminus\bar{D} \quad \textit{und} \quad \mathbf{e}_0=\mathbf{h}_0=0 \quad \textit{in } D,$$

*das heißt das zweidimensionale Randwertproblem besitzt höchstens eine Lösung.*

**Beweis** Das Verschwinden der Lösung im Komplement von $D$ gilt nach dem vorangegangenen Lemma und es folgt hieraus insbesondere das Verschwinden von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gemäß (2.8) in $\mathbb{R}^2 \setminus D$, so daß auch

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\nu}=\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\nu}=0 \ \text{ auf } \partial D$$

gilt. Dies impliziert bei homogenen Randbedingungen[3]

$$\mathbf{a}_0=\mathbf{b}_0=\frac{\partial\mathbf{a}_0}{\partial\nu}=\frac{\partial\mathbf{b}_0}{\partial\nu}=0 \ \text{ auf } \partial D,$$

so daß aus den Darstellungsformeln (2.14 a), (2.14 b) $\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}_0 = 0$ in $D$ folgt, was wiederum $\mathbf{e}_0 = \mathbf{h}_0 = 0$ nach sich zieht. **q. e. d.**

Aus dem vorangegangenen Satz ergibt sich sofort die Eindeutigkeit auch für die Aufgabe (2.9 a) - (2.11 d) in der Bohrenschen Zerlegung.

[3]Falls $\hat{f} = \hat{g} = \tilde{f} = \tilde{g} = 0$, so gilt auch $N_{\mathbf{a}} = N_{\mathbf{b}} = D_{\mathbf{a}} = D_{\mathbf{b}} = 0$ für die Randbedingungen (2.11 a)-(2.11 d) des gemäß (2.8) transformierten Problems.

# 4 Existenz

Mittels geeigneter Potentialansätze werden Felder definiert, die bereits den geforderten Differentialgleichungen und Ausstrahlungbedingungen genügen. Für die darin auftretenden Dichten werden mit Hilfe der Sprungbeziehungen Integralgleichungen abgeleitet, so daß die Transmissionsbedingungen ebenfalls erfüllt sind, falls die Dichten diesen Integralgleichungen genügen. Es werden Bedingungen angegeben, unter denen diese Integralgleichungssysteme zweiter Art eindeutig lösbar sind. Unter Ausnutzung bekannter Beziehungen für die Potentiale können die Lösungen der Transmissionsprobleme durch die Daten in geeigneten Normen abgeschätzt werden.

Die Behandlung für das drei- und zweidimensionale Problem unterscheidet sich hier insoweit voneinander, daß bei der Aufgabe im $\mathbb{R}^3$ die Lösungsbedingungen an die Koeffizienten für das Integralgleichungssystem nicht konkret angegeben werden können, sondern nur bis auf eine abzählbare, aber nicht näher charakterisierte, Ausnahmemenge.

## 4.1 Existenz einer Lösung für das dreidimensionale Problem

Zunächst sollen einige Funktionenräume eingeführt werden. Es bezeichnen $T(\partial D)$, $T^{0,\alpha}(\partial D)$, $T^{1,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, die Räume aller Tangentialfelder, die stetig, gleichmäßig Hölder-stetig bzw. Hölder-stetig differenzierbar sind, ausgestattet mit den entsprechenden Normen der Räume $C(\partial D)$, $C^{0,\alpha}(\partial D)$, $C^{1,\alpha}(\partial D)$.

Das Vektorpotential[1]

$$(\mathfrak{V}_\kappa \varphi)(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi_\kappa(x,y)\, \mathrm{d}s(y), \quad x \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \partial D,$$

mit stetigem Tangentialfeld $\varphi \in T(\partial D)$ läßt sich durch

$$2(\mathfrak{V}_\kappa \varphi)(x) = (S_\kappa \varphi)(x), \qquad x \in \partial D,$$

mit dem Einfachschichtoperator

$$(S_\kappa \varphi)(x) = 2 \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi_\kappa(x,y)\, \mathrm{d}s(y), \qquad x \in \partial D, \tag{4.1}$$

[1] Vergleiche [3, Th. 6.11] zu den folgenden Aussagen über die Sprungbeziehungen des Vektorpotentials $\mathfrak{V}$.

stetig in den $\mathbb{R}^3$ fortsetzen. Es sei

$$\nu(x) \times \operatorname{rot} (\mathfrak{V}_\kappa \varphi)_\pm(x) := \lim_{h \to +0} \nu(x) \times \operatorname{rot} (\mathfrak{V}_\kappa \varphi)(x \pm h\nu(x)),$$

dann gilt

$$2\nu(x) \times \operatorname{rot} (\mathfrak{V}_\kappa \varphi)_\pm(x) = (M_\kappa \varphi)(x) \pm \varphi(x) \tag{4.2}$$

mit dem elektrischen Dipoloperator

$$(M_\kappa \varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{rot}_x \{\varphi(y) \Phi_\kappa(x,y)\} \, \mathrm{d}s(y). \tag{4.3}$$

Weiterhin besteht die Beziehung

$$\lim_{h \to +0} \nu(x) \times [\operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathfrak{V}_\kappa \varphi)(x + h\nu(x)) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathfrak{V}_\kappa \varphi)(x - h\nu(x))] = 0. \tag{4.4}$$

Es bezeichne

$$(L_\kappa \varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x \{\varphi(y) \, [\Phi_\kappa(x,y) - \Phi_0(x,y)]\} \, \mathrm{d}s(y), \ x \in \partial D \tag{4.5}$$

die Fortsetzung von $2\nu \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathfrak{V}_\kappa - \mathfrak{V}_0)\varphi$ auf den Rand. Diese existiert, da die zweiten Ableitungen von $\Phi_\kappa - \Phi_0$ das gleiche singuläre Verhalten wie die Grundlösung $\Phi_0$ selbst aufweisen.

Die Operatoren

$$\begin{aligned} M_\kappa &: T(\partial D) \to T^{0,\alpha}(\partial D), \quad T^{0,\alpha}(\partial D) \to T^{0,\alpha'}(\partial D), \\ L_\kappa &: T(\partial D) \to T^{0,\alpha}(\partial D), \quad T^{0,\alpha}(\partial D) \to T^{0,\alpha'}(\partial D), \quad T^{0,\alpha}(\partial D) \to T^{1,\alpha}(\partial D) \end{aligned}$$

sind für $0 < \alpha < \alpha' < 1$ beschränkt.[2] Unter der zusätzlichen Annahme, daß der Rand $C^{2,\alpha}-$glatt ist, ist auch[3]

$$M_\kappa : T^{0,\alpha}(\partial D) \to T^{1,\alpha}(\partial D)$$

eine beschränkte Abbildung und die Kompaktheit der Einbettungen $T^{0,\alpha}(\partial D) \hookrightarrow T(\partial D)$, $T^{0,\alpha'}(\partial D) \hookrightarrow T^{0,\alpha}(\partial D)$ und $T^{1,\alpha}(\partial D) \hookrightarrow T^{0,\alpha}(\partial D)$ sichert die Kompaktheit von

$$\begin{aligned} M_\kappa &: T(\partial D) \to T(\partial D), \quad T^{0,\alpha}(\partial D) \to T^{0,\alpha}(\partial D), \\ L_\kappa &: T(\partial D) \to T(\partial D), \quad T^{0,\alpha}(\partial D) \to T^{0,\alpha}(\partial D), \quad T^{1,\alpha}(\partial D) \to T^{1,\alpha}(\partial D) \end{aligned}$$

und, im Falle einer $C^{2,\alpha}-$glatten Berandung, auch von

$$M_\kappa : T^{1,\alpha}(\partial D) \to T^{1,\alpha}(\partial D).$$

[2] Vergleiche [43, Satz 3.3], [2, Th. 2.32 und 2.33], [31, Abschn. 4.1], [14].
[3] Siehe [14, Th. 2.5].

Für die Existenzuntersuchungen wird im weiteren vorausgesetzt, daß $\partial D$ ein $C^{2,\alpha}-$glatter Rand ist. Die Darstellungsformeln (2.6 a) - (2.6 d) legen einen gemischten Potentialansatz gemäß

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0(x) &= \alpha_{\mathbf{A}}\mathrm{rot}\int_{\partial D}\varphi(y)\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x,y)\,\mathrm{d}s(y)\\
&\quad +\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_{\partial D}\varphi(y)\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x,y)\,\mathrm{d}s(y),\ x\in D, && (4.6\,\mathrm{a})\\
\mathbf{B}_0(x) &= -\alpha_{\mathbf{B}}\mathrm{rot}\int_{\partial D}\psi(y)\Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(x,y)\,\mathrm{d}s(y)\\
&\quad +\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_{\partial D}\psi(y)\Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(x,y)\,\mathrm{d}s(y),\ x\in D, && (4.6\,\mathrm{b})\\
\mathbf{A}(x) &= k\mathrm{rot}\int_{\partial D}(c_1\varphi(y)+m_1\psi(y))\Phi_k(x,y)\,\mathrm{d}s(y)\\
&\quad +\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_{\partial D}(c_1\varphi(y)+m_1\psi(y))\Phi_k(x,y)\,\mathrm{d}s(y),\ x\in\mathbb{R}^3\setminus\bar{D}, && (4.6\,\mathrm{c})\\
\mathbf{B}(x) &= -k\mathrm{rot}\int_{\partial D}(c_2\varphi(y)+m_2\psi(y))\Phi_k(x,y)\,\mathrm{d}s(y)\\
&\quad +\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\int_{\partial D}(c_2\varphi(y)+m_2\psi(y))\Phi_k(x,y)\,\mathrm{d}s(y),\ x\in\mathbb{R}^3\setminus\bar{D} && (4.6\,\mathrm{d})
\end{aligned}$$

nahe, aus dem mittels der Transmissionsbedingungen ein System von Randintegralgleichungen gewonnen werden soll, wobei die komplexen Konstanten $c_1$, $c_2$, $m_1$, $m_2$ noch geeignet zu wählen sind.

Für die so gebildeten Potentiale mit Dichten $\varphi,\psi\in T^{1,\alpha}(\partial D)$ gilt

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}_0=\alpha_{\mathbf{A}}\mathbf{A}_0,\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0=-\alpha_{\mathbf{B}}\mathbf{B}_0,\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{A}=k\mathbf{A},\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{B}=-k\mathbf{B},$$

d.h. sie erfüllen die Differentialgleichungen (2.2 a), (2.2 b). Weiter gilt nach [2, Th. 4.12] für in obiger Weise definierte Felder $\mathbf{U}$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{U}\times\hat{x}+\hat{x}\,\mathrm{div}\,\mathbf{U}-i\kappa\mathbf{U}=o(1/|x|),\qquad |x|\to\infty,$$

was zusammen mit $\mathrm{rot}\,\mathbf{U}=\pm\kappa\mathbf{U}$ und $\mathrm{div}\,\mathbf{U}=0$ auf die Gültigkeit der Ausstrahlungbedingungen (2.5 a), (2.5 b) führt. Außerdem haben $\mathbf{A}_0,\mathbf{B}_0,\mathbf{A},\mathbf{B}$ die geforderten Regularitäten.[4]

Die Sprungbeziehungen (4.2), (4.4) für Vektorpotentiale sollen nun verwendet werden, um Integralgleichungen für die Dichten $\varphi$, $\psi$ aus den Transmissionsbedingungen abzuleiten.

In den Anteilen der Potentiale, in denen der Rotationsoperator zweimal auftritt, wird die Grundlösung $\Phi_\kappa$ ($\kappa\in\{k,\alpha_{\mathbf{A}},\alpha_{\mathbf{B}}\}$) durch $(\Phi_\kappa-\Phi_0)+\Phi_0$ ersetzt. Um dann den

[4] Vergleiche dazu [43, Satz 3.3].

stetigen Übergang von $\nu \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{V}_0$ gemäß (4.4) ausnutzen zu können, werden die noch freien Konstanten im Potentialansatz (4.6 c), (4.6 d) so gewählt, daß

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^{-1/2} &= \varepsilon^{-1/2}(c_1+c_2) = \varepsilon^{-1/2}(m_1+m_2),\\ \mu_0^{-1/2} &= \mu^{-1/2}(c_1-c_2) = -\mu^{-1/2}(m_1-m_2),\end{aligned}$$

also

$$c_1 = m_2 = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} + \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/2}\right\}, \quad c_2 = m_1 = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} - \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/2}\right\} \tag{4.7}$$

gilt. Dies führt für die mit $\Phi_0$ erklärten Anteile zu

$$\begin{aligned}&\nu \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{V}_0\left(\varepsilon_0^{-1/2}(\varphi+\psi)\right)(.-h\nu)\\ &\qquad -\nu \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{V}_0\left(\varepsilon^{-1/2}(c_1+c_2)\varphi + \varepsilon^{-1/2}(m_1+m_2)\psi\right)(.+h\nu) \to 0,\\ &\nu \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{V}_0\left(\mu_0^{-1/2}(\varphi-\psi)\right)(.-h\nu)\\ &\qquad -\nu \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{V}_0\left(\mu^{-1/2}(c_1-c_2)\varphi + \mu^{-1/2}(m_1-m_2)\psi\right)(.+h\nu) \to 0\end{aligned}$$

für $h \to 0$.

Genügen die Dichten den Integralgleichungen

$$\begin{aligned}4f &= \varepsilon_0^{-1/2}\alpha_{\mathbf{A}}[M_{\alpha_{\mathbf{A}}}\varphi - \varphi] - \varepsilon_0^{-1/2}\alpha_{\mathbf{B}}[M_{\alpha_{\mathbf{B}}}\psi - \psi]\\ &\quad -\varepsilon^{-1/2}k[M_k(c_1\varphi + m_1\psi) + (c_1\varphi + m_1\psi)]\\ &\quad +\varepsilon^{-1/2}k[M_k(c_2\varphi + m_2\psi) + (c_2\varphi + m_2\psi)]\\ &\quad +\varepsilon_0^{-1/2}L_{\alpha_{\mathbf{A}}}\varphi + \varepsilon_0^{-1/2}L_{\alpha_{\mathbf{B}}}\psi\\ &\quad -\varepsilon^{-1/2}L_k(c_1\varphi + m_1\psi) - \varepsilon^{-1/2}L_k(c_2\varphi + m_2\psi),\\ 4ig &= \mu_0^{-1/2}\alpha_{\mathbf{A}}[M_{\alpha_{\mathbf{A}}}\varphi - \varphi] + \mu_0^{-1/2}\alpha_{\mathbf{B}}[M_{\alpha_{\mathbf{B}}}\psi - \psi]\\ &\quad -\mu^{-1/2}k[M_k(c_1\varphi + m_1\psi) + (c_1\varphi + m_1\psi)]\\ &\quad -\mu^{-1/2}k[M_k(c_2\varphi + m_2\psi) + (c_2\varphi + m_2\psi)]\\ &\quad +\mu_0^{-1/2}L_{\alpha_{\mathbf{A}}}\varphi - \mu_0^{-1/2}L_{\alpha_{\mathbf{B}}}\psi\\ &\quad -\mu^{-1/2}L_k(c_1\varphi + m_1\psi) + \mu^{-1/2}L_k(c_2\varphi + m_2\psi),\end{aligned}$$

so folgt aus den Sprungbeziehungen, daß die zu diesen Dichten erklärten Potentiale die Randbedingungen (2.4 a), (2.4 b) erfüllen.

Man kann diese Integralgleichungen in geschlossener Form

$$(E+A)\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\varepsilon_0^{1/2}f\\ 4i\mu_0^{1/2}g\end{pmatrix} \tag{4.8}$$

schreiben. Setzt man die Konstanten $c_1, c_2, m_1, m_2$ gemäß (4.7) ein, so sind $E$ und $A$ durch

$$E = \begin{pmatrix} -\alpha_{\mathbf{A}} - k\xi & \alpha_{\mathbf{B}} + k\xi \\ -\alpha_{\mathbf{A}} - k\xi^{-1} & -\alpha_{\mathbf{B}} - k\xi^{-1} \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{A}} M_{\alpha_{\mathbf{A}}} - \xi k M_k + L_{\alpha_{\mathbf{A}}} - L_k & -\alpha_{\mathbf{B}} M_{\alpha_{\mathbf{B}}} + \xi k M_k + L_{\alpha_{\mathbf{B}}} - L_k \\ \alpha_{\mathbf{A}} M_{\alpha_{\mathbf{A}}} - \xi^{-1} k M_k + L_{\alpha_{\mathbf{A}}} - L_k & \alpha_{\mathbf{B}} M_{\alpha_{\mathbf{B}}} - \xi^{-1} k M_k - L_{\alpha_{\mathbf{B}}} + L_k \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

gegeben, wobei zur Abkürzung wie in (2.12) $\xi = \left(\frac{\varepsilon_0 \mu}{\varepsilon \mu_0}\right)^{1/2}$ gesetzt wurde. Zur Untersuchung der Invertierbarkeit von $E$ betrachtet man die Determinante

$$\begin{aligned} \det E &= 2\alpha_{\mathbf{A}}\alpha_{\mathbf{B}} + 2k^2 + k(\alpha_{\mathbf{A}} + \alpha_{\mathbf{B}})(\xi + \xi^{-1}) \\ &= 2\left\{k_0^2\gamma^2 + k^2 + kk_0\gamma^2(\xi + \xi^{-1})\right\}. \end{aligned}$$

Die Bedingung $\det E \neq 0$ ist damit äquivalent zu

$$kk_0\gamma^2\xi^2 + (k^2 + k_0^2\gamma^2)\xi + kk_0\gamma^2 \neq 0 \tag{4.11}$$

und wegen der Positivität aller darin auftretender Größen immer erfüllt.

Der Operator $A$ ist ein in $T^{1,\alpha}(\partial D) \times T^{1,\alpha}(\partial D)$ kompakter Operator, da seine Komponenten dies sind. In diesem Raum soll die Riesz-Theorie angewendet werden.

Unter Ausnutzung der Abbildungseigenschaften folgt für jede Lösung $(\varphi, \psi) \in T(\partial D) \times T(\partial D)$ der Integralgleichung (4.8) auch $\varphi$, $\psi \in T^{1,\alpha}(\partial D)$, falls $f$, $g \in T^{1,\alpha}(\partial D)$ gilt, so daß man die Untersuchungen zunächst auch in den Räumen stetiger Tangentialfelder durchführen könnte.

**Bemerkung 4.1** *In [21] wird als adäquater Hölderraum für die Lösung der aus einem äußeren elektromagnetischen Problem resultierenden Integralgleichung der Raum von Tangentialfeldern, bei denen die Oberflächendivergenz gebildet werden kann, durch*

$$T_d^{0,\alpha}(\partial D) = \left\{\chi \in T^{0,\alpha}(\partial D) \mid \operatorname{Div} \chi \in C^{0,\alpha}(\partial D)\right\}$$

*mit der Norm*

$$\|\chi\|_{T_d^{0,\alpha}} = \|\chi\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|\operatorname{Div} \chi\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)}$$

*eingeführt.*

*Dieser ist für die Behandlung des hier auftretenden Integralgleichungssytems zweiter Art nicht unmittelbar geeignet, da der Operator $L_\kappa$ beschränkt aber nicht kompakt von $T_d^{0,\alpha}(\partial D)$ in sich abbildet.*[5]

[5] Vergleiche [31, (4.1)].

$\mathbf{A}_0$ hat die Darstellung

$$\mathbf{A}_0 = \alpha_{\mathbf{A}} \operatorname{rot} \mathfrak{V}_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{V}_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi = \alpha_{\mathbf{A}} \operatorname{rot} \mathfrak{V}_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi + \alpha_{\mathbf{A}}^2 \mathfrak{V}_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi + \operatorname{grad} \mathfrak{V}_{\alpha_{\mathbf{A}}} (\operatorname{Div} \varphi),$$

analoges gilt für $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. Mit Hilfe von [2, Th. 2.24] ergibt sich daraus

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \|\mathbf{A}_0\|_{C^{0,\alpha}(D)} & \leqslant & C_\alpha \|\varphi\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)}, & \|\mathbf{A}\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})} & \leqslant & C_\alpha \left( \|\varphi\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} + \|\psi\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} \right), \\ \|\mathbf{B}_0\|_{C^{0,\alpha}(D)} & \leqslant & C_\alpha \|\psi\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)}, & \|\mathbf{B}\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})} & \leqslant & C_\alpha \left( \|\varphi\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} + \|\psi\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} \right), \end{array} \tag{4.12}$$

wobei $C_\alpha$ eine vom Hölderexponenten $\alpha$, sowie von $\partial D$ und den physikalischen Parametern abhängige Konstante ist.

Es wird nun die Riesz-Theorie in $T^{1,\alpha}(\partial D) \times T^{1,\alpha}(\partial D)$ angewendet. Dazu ist das homogene Problem $(E + A)\binom{\varphi}{\psi} = 0$ hinsichtlich der Eindeutigkeit einer Lösung zu untersuchen.

Es soll zunächst der Spezialfall $\xi = 1$ betrachtet werden. Hierfür gilt mit (4.7)

$$c_1 = m_2 = \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} = \left( \frac{\mu}{\mu_0} \right)^{1/2}, \quad c_2 = m_1 = 0.$$

**Lemma 4.2** *Sei $\binom{\varphi}{\psi} \in T^{1,\alpha}(\partial D) \times T^{1,\alpha}(\partial D)$ eine Lösung des homogenen Integralgleichungssystems (4.8) mit $\xi = 1$. Dann gilt $\varphi = \psi = 0$ auf $\partial D$.*

**Beweis** Unter der Voraussetzung $\xi = 1$ entkoppelt das Integralgleichungssystem und es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_{\mathbf{A}} + k)\varphi - (\alpha_{\mathbf{A}} M_{\alpha_{\mathbf{A}}} - k M_k + L_{\alpha_{\mathbf{A}}} - L_k)\, \varphi, \\ 0 &= (\alpha_{\mathbf{B}} + k)\psi - (\alpha_{\mathbf{B}} M_{\alpha_{\mathbf{B}}} - k M_k - L_{\alpha_{\mathbf{B}}} + L_k)\, \psi. \end{aligned}$$

Es seien $\varphi$, $\psi$ Lösungen dieses Systems und $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{A}}_0$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{B}}_0$ die zu diesen Dichten in $\mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ entsprechend (4.6 a) - (4.6 d) definierten Potentiale. Dann lösen $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}|_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}}$, $\mathbf{A}_0 = \tilde{\mathbf{A}}_0|_D$, $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}|_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}}$, $\mathbf{B}_0 = \tilde{\mathbf{B}}_0|_D$ das homogene Randwertproblem (2.2 a) - (2.5 b) und verschwinden wegen dessen eindeutiger Lösbarkeit nach Satz 3.2.

Für $\mathbf{A}' = \tilde{\mathbf{A}}|_D$, $\mathbf{A}'_0 = \tilde{\mathbf{A}}_0|_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}}$, $\mathbf{B}' = \tilde{\mathbf{B}}|_D$, $\mathbf{B}'_0 = \tilde{\mathbf{B}}_0|_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}}$ gilt

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \operatorname{rot} \mathbf{A}'_0 & = & \alpha_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_0 \ \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, & \operatorname{rot} \mathbf{A}' & = & k\mathbf{A}' \text{ in } D, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}'_0 & = & -\alpha_{\mathbf{B}} \mathbf{B}_0 \ \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, & \operatorname{rot} \mathbf{B}' & = & -k\mathbf{B}' \text{ in } D \end{array}$$

und

$$\mathbf{A}'_0 \times \hat{x} - i\mathbf{A}'_0 = o\left( \frac{1}{|x|} \right), \qquad \mathbf{B}'_0 \times \hat{x} + i\mathbf{B}'_0 = o\left( \frac{1}{|x|} \right), \qquad |x| \to \infty.$$

Aus den Sprungrelationen erhält man auf $\partial D$

$$\begin{aligned}
\nu \times \mathbf{A}_0' &= \nu \times (\mathbf{A}_0' - \mathbf{A}_0) = \alpha_{\mathbf{A}} \varphi, \\
\nu \times \mathbf{B}_0' &= \nu \times (\mathbf{B}_0' - \mathbf{B}_0) = -\alpha_{\mathbf{B}} \psi, \\
\nu \times \mathbf{A}' &= -\nu \times (\mathbf{A} - \mathbf{A}') = -k(c_1 \varphi + m_1 \psi) = -k c_1 \varphi, \\
\nu \times \mathbf{B}' &= -\nu \times (\mathbf{B} - \mathbf{B}') = k(c_2 \varphi + m_2 \psi) = k c_1 \psi,
\end{aligned}$$

wobei bei den letzten beiden Identitäten die Voraussetzung $\xi = 1$, d.h. $c_1 = m_2$ und $c_2 = m_1 = 0$, eingegangen ist. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\nu \times \mathbf{A}' + k \frac{c_1}{\alpha_{\mathbf{A}}} \nu \times \mathbf{A}_0' &= 0 \quad \text{auf } \partial D, \\
\nu \times \mathbf{B}' + k \frac{c_1}{\alpha_{\mathbf{B}}} \nu \times \mathbf{B}_0' &= 0 \quad \text{auf } \partial D.
\end{aligned}$$

Nach dem folgenden Lemma 4.3 mit der Wahl

$$(\mathbf{U}, \mathbf{U}_0, \kappa, \kappa_0) = (-k c_1 / \alpha_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_0', \mathbf{A}', \alpha_{\mathbf{A}}, k) \quad \text{und} \quad (4.13\,\text{a})$$

beziehungsweise

$$(\mathbf{U}, \mathbf{U}_0, \kappa, \kappa_0) = (-k c_1 / \alpha_{\mathbf{B}} \mathbf{B}_0', \mathbf{B}', -\alpha_{\mathbf{B}}, -k) \quad \text{und} \quad (4.13\,\text{b})$$

gilt $\mathbf{A}' = \mathbf{B}' = 0$ in $D$ und $\mathbf{A}_0' = \mathbf{B}_0' = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Aus den obigen Sprungbeziehungen folgt $\varphi = \psi = 0$ auf $\partial D$. **q. e. d.**

**Lemma 4.3** *Es seien* $\kappa$, $\kappa_0 \in \mathbb{R}$ *und* $\mathbf{U} \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$, $\mathbf{U}_0 \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ *Lösung von*

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{U}_0 - \kappa_0 \mathbf{U}_0 &= 0 \quad \textit{in } D, \\
\operatorname{rot} \mathbf{U} - \kappa \mathbf{U} &= 0 \quad \textit{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\
\nu \times \mathbf{U} - \nu \times \mathbf{U}_0 &= 0 \quad \textit{auf } \partial D, \\
\mathbf{U} \times \hat{x} - i \mathbf{U} &= o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to \infty \qquad (4.13\,\text{a}) \\
\textit{oder} \quad \mathbf{U} \times \hat{x} + i \mathbf{U} &= o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \to \infty. \qquad (4.13\,\text{b})
\end{aligned}$$

*Dann gilt*

$$\mathbf{U} = 0 \quad \textit{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \quad \textit{und} \quad \mathbf{U}_0 = 0 \quad \textit{in } D.$$

**Beweis** Anwendung der Greenschen Vektorsätze liefert für hinreichend großes $R \in \mathbb{R}$

$$\int_{|x|=R} (\bar{\mathbf{U}} \times \mathbf{U}) \cdot \nu \, \mathrm{d}s(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\substack{x\notin\bar{D}\\ |x|<R}} \operatorname{div}(\bar{\mathbf{U}}\times\mathbf{U})\,\mathrm{d}x + \int_{\partial D}(\bar{\mathbf{U}}\times\mathbf{U})\cdot\nu\,\mathrm{d}s(x)\\
&= \int_{\substack{x\notin\bar{D}\\ |x|<R}} (\mathbf{U}\cdot\operatorname{rot}\bar{\mathbf{U}} - \bar{\mathbf{U}}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{U})\,\mathrm{d}x + \int_{\partial D}(\bar{\mathbf{U}}_0\times\mathbf{U}_0)\cdot\nu\,\mathrm{d}s(x)\\
&= \int_D (\mathbf{U}_0\cdot\operatorname{rot}\bar{\mathbf{U}}_0 - \bar{\mathbf{U}}_0\cdot\operatorname{rot}\mathbf{U}_0)\,\mathrm{d}x\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Nach der Ausstrahlungbedingung (4.13 a) bzw. (4.13 b) gilt nun aber auf der Kugel $|x| = R$

$$(\bar{\mathbf{U}}\times\mathbf{U})\cdot\nu = (\mathbf{U}\times\hat{x})\cdot\bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{U}}\cdot(\pm i\mathbf{U} + o(R^{-1})) = \pm i|\mathbf{U}|^2 + o(R^{-2}),$$

woraus

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|x|=R}|\mathbf{U}|^2\,\mathrm{d}s(x) = 0$$

folgt. Das Rellich-Lemma liefert wegen $\triangle\mathbf{U}+\kappa^2\mathbf{U} = 0$ dann $\mathbf{U} = 0$ in $\mathbb{R}^3\setminus\bar{D}$. Damit ist $\mathbf{U}_0$ Lösung von $\operatorname{rot}\mathbf{U}_0 = \kappa_0\mathbf{U}_0$ in $D$, $\nu\times\mathbf{U}_0 = 0$ auf $\partial D$, so daß eine Darstellungsformel analog zu (2.6 a) - (2.6 d) das Verschwinden von $\mathbf{U}_0$ in $D$ zeigt. **q. e. d.**

Mittels der analytischen Fredholmtheorie[6] kann das Existenzresultat auf den Fall $\xi \neq 1$ bis auf eine abzählbare Ausnahmemenge wie folgt ausgedehnt werden.[7]

Es seien $\beta \geqslant 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\mu_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ fest, so daß $1 - k_0^2\beta^2 > 0$ gilt. $k_0$, $\gamma^2$, $\alpha_{\mathbf{A}}$ und $\alpha_{\mathbf{B}}$ sind dann auch fixiert und $\mu = \xi^2\,\mu_0\,\varepsilon/\varepsilon_0$ sowie $k = \xi\,k_0\,\varepsilon/\varepsilon_0$ hängen analytisch von $\xi$ ab. Die Matrixoperatoren $A$ und $E$, die gemäß (4.9), (4.10) erklärt sind, weisen eine Abhängigkeit von $\alpha_{\mathbf{A}}, \alpha_{\mathbf{B}}, k$ und $\xi$ auf. Unter den eben getroffenen Annahmen, kann dies alles durch eine Abhängigkeit nur von $\xi$ in der Form $A = A(\xi)$ und $E = E(\xi)$ ausgedrückt werden.

Es sei $\delta > 0$ hinreichend klein. $A(\xi)$ und $E(\xi)$ sind dann in einer komplexen Umgebung von $\mathbb{R}_{>\delta} = \{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) > \delta\}$ analytisch von $\xi$ abhängig, da die einzelnen Einträge dies sind. Hier wird benutzt, daß die Grundlösung $\Phi_\kappa(.,.)$ analytisch von der Wellenzahl $\kappa$ abhängt.

Es existiert eine zusammenhängende Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ von $\mathbb{R}_{>\delta}$ in der $E(\xi)$ beschränkt invertierbar ist. Dies folgt aus der Bedingung (4.11) für die Invertierbarkeit von $E(\xi)$, die, in Abhängigkeit von $\xi$ ausgedrückt, die Form

$$0 \neq \xi\left(\xi^2\left(k_0\gamma^2\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + k_0^2\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}\right) + k_0^2\gamma^2 + k_0^2\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)$$

[6] Vergleiche [3, sect. 8.5].
[7] Siehe dazu auch [36].

besitzt. $V$ so zu wählen, daß $0 \notin V$ gilt, ist für beliebig kleines $\delta > 0$ immer möglich. Da in dem zweiten Faktor sowohl das Absolutglied als auch der Koeffizient vor $\xi^2$ positiv sind, ist in einer geeigneten Umgebung der positiven reellen Achse dieser von Null verschieden.

Da $E(\xi)$ in $V$ invertierbar ist, gilt nach der analytischen Fredholmtheorie, daß auch $E(\xi) + A(\xi)$ in $V$ mit Ausnahme einer diskreten Menge invertierbar ist, falls die Invertierbarkeit in mindestens einem Punkt vorliegt.[8] Für $\xi = 1 \in \mathbb{R}_{>\delta} \subset V$ ist dies aber in Lemma 4.2 gezeigt worden. Das direkte Problem ist also für fast alle Parameterwerte wohlgestellt.

Es liege ein solcher Satz von Parametern vor. Unter den Glättevoraussetzungen an $f$ und $g$ gilt dann für die Lösung der Integralgleichung (4.8)

$$\|\varphi\|_{T^{1,\alpha}(\partial D)} + \|\psi\|_{T^{1,\alpha}(\partial D)} \leqslant c'\{\|f\|_{T^{1,\alpha}(\partial D)} + \|g\|_{T^{1,\alpha}(\partial D)}\},$$

so daß sich zusammen mit (4.12) insgesamt die Lösung gegen die Daten in der $T^{1,\alpha}-$Norm abschätzen läßt

$$\|\mathbf{A}_0\|_{C^{0,\alpha}(D)} + \|\mathbf{B}_0\|_{C^{0,\alpha}(D)} + \|\mathbf{A}\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{D})} + \|\mathbf{B}\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{D})} \leqslant c\{\|f\|_{T^{1,\alpha}(\partial D)} + \|g\|_{T^{1,\alpha}(\partial D)}\} \tag{4.14}$$

mit einer geeigneten Konstanten $c = c(\alpha, \partial D)$.

Zusammengefaßt läßt sich der folgende Satz formulieren.

**Satz 4.4** *Es sei $D$ ein $C^{2,\alpha}$-glattes Gebiet im $\mathbb{R}^3$. Weiter seien die positiven Parameter $\beta$, $\varepsilon_0$, $\mu_0$, $\varepsilon$ so, daß $1 - k_0^2\beta^2 > 0$ gilt. Dann ist für alle positiven $\mu$ mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge das Transmissionsproblem (2.2 a) - (2.5 b) zu beliebigen rechten Seiten $f, g \in T^{1,\alpha}(\partial D)$ eindeutig lösbar. In diesem Fall hängt die Lösung stetig von den Daten gemäß (4.14) ab.*

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll noch eine Darstellung für die Fernfelder $\mathbf{A}_\infty, \mathbf{B}_\infty$ angegeben werden, die das asymptotische Verhalten

$$\mathbf{A}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left\{\mathbf{A}_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, \qquad \mathbf{B}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left\{\mathbf{B}_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\},$$

$|x| \to \infty$, $\hat{x} = x/|x|$ von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ in Abhängigkeit von der Lösung des Integralgleichungssystems beschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_\infty(\hat{x}) &= \frac{k^2}{4\pi}\hat{x} \times \int_{\partial D} \{i(c_1\varphi + m_1\psi) + (c_1\varphi + m_1\psi) \times \hat{x}\}\ e^{-ik\hat{x}\cdot y}\, \mathrm{d}s(y), \\
\mathbf{B}_\infty(\hat{x}) &= \frac{k^2}{4\pi}\hat{x} \times \int_{\partial D} \{-i(c_2\varphi + m_2\psi) + (c_2\varphi + m_2\psi) \times \hat{x}\}\ e^{-ik\hat{x}\cdot y}\, \mathrm{d}s(y).
\end{aligned}$$

[8] Siehe [3, Th. 8.19].

## 4.2 Existenz einer Lösung für das zweidimensionale Problem

Es soll nun die Existenz von Lösungen im zweidimensionalen Fall untersucht werden. Dazu wird folgender Potentialansatz verwendet.

$$\mathbf{a}_0(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi_1 + \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x,y) m_1 \varphi_1 \right\} \mathrm{d}s(y),\ x \in D, \quad (4.15\,\mathrm{a})$$

$$\mathbf{b}_0(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial \Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi_2 + \Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(x,y) m_2 \varphi_2 \right\} \mathrm{d}s(y),\ x \in D, \quad (4.15\,\mathrm{b})$$

$$\mathbf{a}(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi_1 + \Phi_k(x,y) c_1 \varphi_1 \right\} \mathrm{d}s(y),\ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (4.15\,\mathrm{c})$$

$$\mathbf{b}(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi_2 + \Phi_k(x,y) c_2 \varphi_2 \right\} \mathrm{d}s(y),\ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}. \quad (4.15\,\mathrm{d})$$

Es bezeichnen $S_\kappa, K_\kappa, K_\kappa^* : C(\partial D) \to C(\partial D)$ die Integraloperatoren

$$(S_\kappa \varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \Phi_\kappa(x,y) \varphi(y)\, \mathrm{d}s(y),\ x \in \partial D, \quad (4.16)$$

$$(K_\kappa \varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_\kappa(x,y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y)\, \mathrm{d}s(y),\ x \in \partial D, \quad (4.17)$$

$$(K_\kappa^* \varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_\kappa(x,y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y)\, \mathrm{d}s(y),\ x \in \partial D \quad (4.18)$$

und $T_\kappa : C^{1,\alpha}(\partial D) \to C(\partial D)$

$$(T_\kappa \varphi)(x) := 2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_\kappa(x,y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y)\, \mathrm{d}s(y),\ x \in \partial D \quad (4.19)$$

mit der Grundlösung $\Phi_\kappa(x,y) = \frac{i}{4} H_0^1(\kappa |x-y|)$.

Für eine Lösung des Integralgleichungssystems

$$\begin{aligned}
2N_{\mathbf{a}} &= \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}(T_{\alpha_{\mathbf{A}}} - T_k)\psi_1 + m_1(K^*_{\alpha_{\mathbf{A}}} + I)\varphi_1 - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} c_1 (K_k^* - I)\varphi_1, \\
2N_{\mathbf{b}} &= \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}(T_{\alpha_{\mathbf{B}}} - T_k)\psi_2 + m_2(K^*_{\alpha_{\mathbf{B}}} + I)\varphi_2 - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} c_2 (K_k^* - I)\varphi_2, \\
2D_{\mathbf{a}} &= \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}(K_{\alpha_{\mathbf{A}}} - I)\psi_1 + m_1 S_{\alpha_{\mathbf{A}}}\varphi_1 \\
&\quad -\xi_+(K_k + I)\psi_1 - \xi_+ c_1 S_k \varphi_1 - \xi_-(K_k + I)\psi_2 - \xi_- c_2 S_k \varphi_2, \\
2D_{\mathbf{b}} &= \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}(K_{\alpha_{\mathbf{B}}} - I)\psi_2 + m_2 S_{\alpha_{\mathbf{B}}}\varphi_2 \\
&\quad -\xi_-(K_k + I)\psi_1 - \xi_- c_1 S_k \varphi_1 - \xi_+(K_k + I)\psi_2 - \xi_+ c_2 S_k \varphi_2
\end{aligned}$$

folgt mit den Sprungbeziehungen, daß für die oben definierten Potentiale die Randbedingungen (2.11 a) - (2.11 d) erfüllt sind.

Dieses Integralgleichungssystem läßt sich in Operatorform

$$\begin{pmatrix} 2N_{\mathbf{a}} \\ 2N_{\mathbf{b}} \\ 2D_{\mathbf{a}} \\ 2D_{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = (E + A) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

mit

$$E = \begin{pmatrix} m_1 + \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_+ - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} & -\xi_- \\ 0 & 0 & -\xi_- & -\xi_+ - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} m_1 K^*_{\alpha_{\mathbf{A}}} - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} c_1 K^*_k & 0 & \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}(T_{\alpha_{\mathbf{A}}} - T_k) & 0 \\ 0 & m_2 K^*_{\alpha_{\mathbf{B}}} - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} c_2 K^*_k & 0 & \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}(T_{\alpha_{\mathbf{B}}} - T_k) \\ m_1 S_{\alpha_{\mathbf{A}}} - c_1 \xi_+ S_k & -c_2 \xi_- S_k & -\xi_+ K_k + \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} K_{\alpha_{\mathbf{A}}} & -\xi_- K_k \\ -c_1 \xi_- S_k & m_2 S_{\alpha_{\mathbf{B}}} - c_2 \xi_+ S_k & -\xi_- K_k & -\xi_+ K_k + \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} K_{\alpha_{\mathbf{B}}} \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

schreiben. Man interessiert sich jetzt für die Invertierbarkeit von $E$. Es gilt

$$\det E = (m_1 + \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} c_1)(m_2 + \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} c_2)(\underbrace{\xi_+^2 - \xi_-^2}_{=1} + \underbrace{\alpha_{\mathbf{A}} \alpha_{\mathbf{B}}}_{k_0^2 \gamma^2} k^{-2} + \xi_+ \underbrace{(\alpha_{\mathbf{A}} + \alpha_{\mathbf{B}})}_{2k_0 \gamma^2} k^{-1}),$$

so daß die Bedingung $\det E \neq 0$ unter Ausnutzung von $2\xi\xi_+ = \xi^2 + 1$ äquivalent zu

$$k k_0 \gamma^2 \xi^2 + (k^2 + k_0^2 \gamma^2)\xi + k k_0 \gamma^2 \neq 0, \tag{4.23}$$

$$k m_1 + \alpha_{\mathbf{A}} c_1 \neq 0, \qquad k m_2 + \alpha_{\mathbf{B}} c_2 \neq 0 \tag{4.24}$$

ist. Dabei ist (4.23) nach den Annahmen über die physikalischen Parameter immer erfüllt. Für die folgenden Betrachtungen sei auch die Gültigkeit von (4.24) vorausgesetzt.

Der Operator $A : (C(\partial D))^4 \to (C(\partial D))^4$ ist kompakt, da alle seine Komponenten dies sind[9].

Wenn man für die Inhomogenitäten $N_{\mathbf{a}}$, $N_{\mathbf{b}} \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $D_{\mathbf{a}}$, $D_{\mathbf{b}} \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ voraussetzt, gilt für eine Lösung $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) \in (C(\partial D))^4$ von (4.20) auch $\varphi_1$, $\varphi_2 \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ und $\psi_1$, $\psi_2 \in C^{1,\alpha}(\partial D)$. In diesem Fall folgen dann auch für die mit diesen Dichten gebildeten Potentiale die geforderten Regularitäten $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0 \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$

[9] Vergleiche [3, Th. 2.30 und 2.31].

und $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$. Die Differentialgleichungen (2.9 a), (2.9 b) sowie die Ausstrahlungsbedingungen (2.10) sind aufgrund des Ansatzes (4.15 a) - (4.15 d) erfüllt.

Es genügt also, die Existenzanalyse für stetige Dichten durchzuführen. Die Riesz-Theorie liefert die Existenz einer Lösung, wenn für das homogene Integralgleichungssystem gezeigt werden kann, daß es nur die triviale Lösung besitzt.

Es seien $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$, $\psi_2$ stetige Lösungen des homogenen Integralgleichungssystems und $\mathbf{a}_{0-} := \mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_{0-} := \mathbf{b}_0$, $\mathbf{a}_+ := \mathbf{a}$, $\mathbf{b}_+ := \mathbf{b}$ die zu diesen Dichten gemäß (4.15 a) - (4.15 d) definierten Potentiale. Weiter bezeichnen $\mathbf{a}_{0+}$, $\mathbf{b}_{0+}$, $\mathbf{a}_-$, $\mathbf{b}_-$ die im jeweiligen Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ bzw. $D$ analog erklärten Potentiale.

Wegen der eindeutigen Lösbarkeit des homogenen Randwertproblems nach Satz 3.4 gilt

$$\mathbf{a}_{0-} = \mathbf{b}_{0-} = 0 \ \text{ in } D, \qquad \mathbf{a}_+ = \mathbf{b}_+ = 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}.$$

Aus den Sprungbeziehungen für das Einfach- und Doppelschichtpotential erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{a}_{0+}}{\partial \nu} &= \frac{\partial \mathbf{a}_{0+}}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{a}_{0-}}{\partial \nu} &&= -m_1\varphi_1, & \qquad \frac{\partial \mathbf{b}_{0+}}{\partial \nu} &= \frac{\partial \mathbf{b}_{0+}}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{b}_{0-}}{\partial \nu} &&= -m_2\varphi_2,\\
-\frac{\partial \mathbf{a}_-}{\partial \nu} &= \frac{\partial \mathbf{a}_+}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{a}_-}{\partial \nu} &&= -c_1\varphi_1, & \qquad -\frac{\partial \mathbf{b}_-}{\partial \nu} &= \frac{\partial \mathbf{b}_+}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{b}_-}{\partial \nu} &&= -c_2\varphi_2,\\
\mathbf{a}_{0+} &= \mathbf{a}_{0+} - \mathbf{a}_{0-} &&= \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\psi_1, & \qquad \mathbf{b}_{0+} &= \mathbf{b}_{0+} - \mathbf{b}_{0-} &&= \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\psi_2,\\
-\mathbf{a}_- &= \mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_- &&= \psi_1, & \qquad -\mathbf{b}_- &= \mathbf{b}_+ - \mathbf{b}_- &&= \psi_2.
\end{aligned}$$

Damit lösen $\mathbf{a}_{0+}$, $\mathbf{a}_-$ bzw. $\mathbf{b}_{0+}$, $\mathbf{b}_-$ folgende zwei Transmissionsprobleme.

$$(\mathrm{P}\mathbf{a}) \qquad \begin{aligned}
(\triangle + \alpha_{\mathbf{A}}^2)\mathbf{a}_{0+} &= 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D},\\
(\triangle + k^2)\mathbf{a}_- &= 0 \ \text{ in } D,\\
c_1\tfrac{\partial \mathbf{a}_{0+}}{\partial \nu} + m_1\tfrac{\partial \mathbf{a}_-}{\partial \nu} &= 0 \ \text{ auf } \partial D,\\
\mathbf{a}_{0+} + \tfrac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\mathbf{a}_- &= 0 \ \text{ auf } \partial D,\\
\tfrac{\partial \mathbf{a}_{0+}}{\partial \nu} - i\alpha_{\mathbf{A}}\mathbf{a}_{0+} &= o\left(r^{-1/2}\right),
\end{aligned}$$

$$(\mathrm{P}\mathbf{b}) \qquad \begin{aligned}
(\triangle + \alpha_{\mathbf{B}}^2)\mathbf{b}_{0+} &= 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D},\\
(\triangle + k^2)\mathbf{b}_- &= 0 \ \text{ in } D,\\
c_2\tfrac{\partial \mathbf{b}_{0+}}{\partial \nu} + m_2\tfrac{\partial \mathbf{b}_-}{\partial \nu} &= 0 \ \text{ auf } \partial D,\\
\mathbf{b}_{0+} + \tfrac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\mathbf{b}_- &= 0 \ \text{ auf } \partial D,\\
\tfrac{\partial \mathbf{b}_{0+}}{\partial \nu} - i\alpha_{\mathbf{B}}\mathbf{b}_{0+} &= o\left(r^{-1/2}\right).
\end{aligned}$$

Dies sind gewöhnliche Transmissionsprobleme, wie sie in [27] behandelt werden. Mit den Ersetzungen (P$\mathbf{a}$) : $\mu_1 = c_1^{-1}$, $\mu_2 = m_1^{-1}\alpha_{\mathbf{A}}k^{-1}$, $k_1 = k$, $k_2 = \alpha_{\mathbf{A}}$ bzw. (P$\mathbf{b}$) : $\mu_1 = c_2^{-1}$, $\mu_2 = m_2^{-1}\alpha_{\mathbf{A}}k^{-1}$, $k_1 = k$, $k_2 = \alpha_{\mathbf{B}}$ haben sie die Gestalt [27, (2.1), (2.2)]. Die

dort in Theorem 3.1 angegebene Bedingung $\frac{\mu_2 \bar{k}_2^{\,2}}{\mu_1 \bar{k}_1^{\,2}} \in \mathbb{R}$ für die eindeutige Lösbarkeit bedeutet dann mit den hier verwendeten Bezeichnungen $\frac{m_1^{-1}}{c_1^{-1}}$, $\frac{m_2^{-1}}{c_2^{-1}} \in \mathbb{R}$.

(P**a**) und (P**b**) sind also eindeutig lösbar, falls $m_1$, $c_1$, $m_2$, $c_2$ von Null verschieden und $\frac{c_1}{m_1}$, $\frac{c_2}{m_2} \in \mathbb{R}$ erfüllt sind. Dies läßt sich zusammen mit (4.24) in

$$\frac{c_1}{m_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0, -k/\alpha_{\mathbf{A}}\}, \qquad \frac{c_2}{m_2} \in \mathbb{R} \setminus \{0, -k/\alpha_{\mathbf{B}}\} \tag{4.25}$$

zusammenfassen.

Unter diesen Bedingungen folgt dann unmittelbar

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_1 = \psi_2 = 0 \text{ auf } \partial D,$$

das zweidimensionale Randwertroblem ist also für alle rechten Seiten (mit entsprechender Regularität) eindeutig lösbar.

Für die Dichten gilt nach der Riesz-Theorie

$$\begin{aligned} &\|\varphi_1\|_{C(\partial D)} + \|\varphi_2\|_{C(\partial D)} + \|\psi_1\|_{C(\partial D)} + \|\psi_2\|_{C(\partial D)} \\ &\quad \leqslant \quad c \left\{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{C(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C(\partial D)} \right\}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Die Beziehung

$$(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)^\top = E^{-1}\{2(N_{\mathbf{a}}, N_{\mathbf{b}}, D_{\mathbf{a}}, D_{\mathbf{b}})^\top - A(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)^\top\} \tag{4.27}$$

und die Abbildungseigenschaften von $A$ implizieren

$$\begin{aligned} &\|\varphi_1\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|\varphi_2\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|\psi_1\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} + \|\psi_2\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} \\ &\quad \leqslant \quad c \left\{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|N_{\mathbf{a}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} \right\} \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten $c$.

Nach [3, Th. 3.3] folgt aus (4.15 a) - (4.15 d)

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{a}_0\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D})} + \|\mathbf{b}_0\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D})} + \|\mathbf{a}\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2 \setminus D)} + \|\mathbf{b}\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2 \setminus D)} \\ &\quad \leqslant \quad c \left\{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|N_{\mathbf{a}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} \right\}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Zusammengefaßt gilt also das folgende Eindeutigkeits- und Wohlgestelltheitsresultat.

**Satz 4.5** *Für ein $C^2$-glattes Gebiet $D$ besitzt das Transmissionsproblem (2.9 a) - (2.11 d) zu beliebigen rechten Seiten $N_{\mathbf{a}}, N_{\mathbf{b}} \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $D_{\mathbf{a}}, D_{\mathbf{b}} \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ genau eine Lösung. Diese hängt stetig von den Daten im Sinne von (4.28) ab.*

Man kann nun noch ein modifiziertes Wohlgestelltheitsresultat angeben. Die im Operator $A$ auftretenden Integraloperatoren sind ebenfalls kompakt von $L^2(\partial D)$ in sich, so daß zweimalige Anwendung der Fredholmschen Alternative – angewendet auf die nicht entarteten Dualsysteme $\langle (C(\partial D))^4, (L^2(\partial D))^4\rangle$ und $\langle (L^2(\partial D))^4, (L^2(\partial D))^4\rangle$, jeweils ausgestattet mit der $L^2$-Bilinearform – auch die beschränkte Invertierbarkeit von $E + A$ in $L^2(\partial D)$ liefert, das heißt, es existiert eine Konstante $c_0$ mit

$$\begin{aligned} &\|\varphi_1\|_{L^2(\partial D)} + \|\varphi_2\|_{L^2(\partial D)} + \|\psi_1\|_{L^2(\partial D)} + \|\psi_2\|_{L^2(\partial D)} \\ &\quad\leqslant\ c_0 \left\{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} \right\}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Es sei ein Punkt $x_0 \in \partial D$ fixiert und für $0 < r < R$ eine Funktion $\chi \in C^2(\partial D)$ gewählt, so daß

$$\chi|_{B_{r'}} = 1, \qquad \operatorname{supp}(\chi) \subset B_{R'}$$

gilt, wobei $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < \rho\}$ für $\rho > 0$ bezeichnet und $r < r' < R' < R$ gelte. Man zerlegt jetzt die Dichten gemäß $\varphi_1 = (1-\chi)\varphi_1 + \chi\varphi_1$, $\varphi_2 = (1-\chi)\varphi_2 + \chi\varphi_2$, $\psi_1 = (1-\chi)\psi_1 + \chi\psi_1$, $\psi_2 = (1-\chi)\psi_2 + \chi\psi_2$ und behandelt die zugehörigen Potentiale separat. Exemplarisch ist $\mathbf{a}_0 = u + u'$, wobei die beiden Anteile gemäß

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D} \left\{ \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x,y)}{\partial \nu(y)} (1-\chi(y))\psi_1(y) + \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x,y) m_1 (1-\chi(y))\varphi_1(y) \right\} \mathrm{d}s(y), \\ u'(x) &= \int_{\partial D} \left\{ \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x,y)}{\partial \nu(y)} \chi(y)\psi_1(y) + \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x,y) m_1 \chi(y)\varphi_1(y) \right\} \mathrm{d}s(y) \end{aligned}$$

erklärt sind. Für $u$ gilt $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_R)} \leqslant \|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D})}$ und

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D})} &\leqslant c_1 \left\{ \|(1-\chi)\varphi_1\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|(1-\chi)\psi_1\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} \right\} \\ &\leqslant c_2 \left\{ \|\varphi_1\|_{C^{0,\alpha}(\partial D \setminus B_{r'})} + \|\psi_1\|_{C^{1,\alpha}(\partial D \setminus B_{r'})} \right\}, \end{aligned}$$

dies läßt sich nun unter Ausnutzung von (4.27) und den Abbildungseigenschaften von $A$ zwischen Hölder-Räumen weiter abschätzen gemäß

$$\begin{aligned} &\|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D})} \\ &\quad\leqslant\ c_3 \left\{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D \setminus B_{r''})} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D \setminus B_{r''})} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D \setminus B_{r''})} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D \setminus B_{r''})} \right. \\ &\qquad \left. + \|\varphi_1\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} + \|\varphi_2\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} + \|\psi_1\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} + \|\psi_2\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} \right\} \end{aligned} \tag{4.30}$$

mit $r < r'' < r'$.

Wiederum (4.27) und die Eigenschaft von $A$, von $(L^2(\partial D))^4$ nach $(C(\partial D))^4$ beschränkt abzubilden, sowie (4.29) implizieren

$$\begin{aligned} &\|\varphi_1\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} + \|\varphi_2\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} + \|\psi_1\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} + \|\psi_2\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} \\ &\quad\leqslant\ c_4 \left\{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C(\partial D \setminus B_r)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{C(\partial D \setminus B_r)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C(\partial D \setminus B_r)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C(\partial D \setminus B_r)} \right. \\ &\qquad \left. + \|N_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} \right\}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Setzt man (4.31) in (4.30) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D})} \\
&\quad\leqslant\; c_5 \left\{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D\setminus B_r)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D\setminus B_r)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D\setminus B_r)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D\setminus B_r)} \right. \\
&\qquad \left. + \|N_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} \right\}. \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

Jetzt ist noch der zweite Anteil $u'$ zu untersuchen. Wertet man $u'$ bezüglich $\|.\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_R)}$ aus, so sieht man, daß der tatsächliche Integrationsbereich und das Gebiet auf dem ausgewertet wird, positiven Abstand haben, so daß mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und (4.29)

$$\begin{aligned}
\|u'\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_R)} &\leqslant c_6 \left\{ \|\varphi_1\|_{L^2(\partial D)} + \|\psi_1\|_{L^2(\partial D)} \right\} \\
&\leqslant c_7 \left\{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} \right\}
\end{aligned}$$

folgt. Mit analogen Betrachtungen für $\mathbf{b}_0$ folgt insgesamt

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{a}_0\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_R)} + \|\mathbf{b}_0\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_R)} \\
&\quad\leqslant\; c \left\{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D\setminus B_r)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D\setminus B_r)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D\setminus B_r)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D\setminus B_r)} \right. \\
&\qquad \left. + \|N_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} \right\} \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c$, die nur von vom Gebiet $D$, dem Hölder-Exponenten $\alpha$, dem Punkt $x_0 \in \partial D$, und den Radien $r$, $R$ abhängt.

Aus der Lösungsdarstellung als gemischtes Potential ergibt sich eine Darstellung für die Fernfelder[10] $\mathbf{a}_\infty$ und $\mathbf{b}_\infty$

$$\mathbf{a}_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \{k\,\nu(y)\cdot\hat{x}\,\psi_1(y) + ic_1\,\varphi_1(y)\}\, e^{-ik\hat{x}\cdot y}\,\mathrm{d}s(y), \qquad (4.34\,\mathrm{a})$$

$$\mathbf{b}_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \{k\,\nu(y)\cdot\hat{x}\,\psi_2(y) + ic_2\,\varphi_2(y)\}\, e^{-ik\hat{x}\cdot y}\,\mathrm{d}s(y), \qquad (4.34\,\mathrm{b})$$

die das asymptotische Verhalten

$$\mathbf{a}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ \mathbf{a}_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad \mathbf{b}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ \mathbf{b}_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \to \infty,$$

von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ im Unendlichen beschreiben.

[10] Vergleiche [3, S.71].

# 5 Formulierung als Streuproblem

In diesem Kapitel soll die allgemeine Behandlung der Randwertprobleme auf die physikalisch relevante Beschreibung von Streuproblemen spezialisiert werden. Dabei sind nun die Randwerte nicht willkürlich vorgegeben, sondern resultieren aus einfallenden ebenen Wellen, die im Außenraum den Feldgleichungen genügen. Von dem entstehenden Streufeld verlangt man ebenfalls das Erfülltsein der Feldgleichungen sowie ein dimensionsabhängiges Abstrahlverhalten, das transmittierte Feld muß den inneren Feldgleichungen genügen.

## 5.1 Dreidimensionales Streuproblem

Beim dreidimensionalen Streuproblem setzen sich die äußeren Felder $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s$ aus einem bekannten einfallenden Feld $\mathbf{E}^i$ bzw. $\mathbf{H}^i$ und einem gestreuten Feld $\mathbf{E}^s$ bzw. $\mathbf{H}^s$ zusammen. Gesucht sind dann Lösungen $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ des direkten Problems (1.5 a) - (1.7 b) mit den Inhomogenitäten

$$f = \varepsilon^{-1/2} \nu \times \mathbf{E}^i|_{\partial D} \quad \text{und} \quad g = \mu^{-1/2} \nu \times \mathbf{H}^i|_{\partial D},$$

also

$$(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)^\top = \mathcal{L}\left(\varepsilon^{-1/2} \nu \times \mathbf{E}^i|_{\partial D}, \mu^{-1/2} \nu \times \mathbf{H}^i|_{\partial D}\right)^\top =: \mathcal{L}^s\left(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i\right)^\top \tag{5.1}$$

mit dem gemäß (1.8) erklärten Operator.

Dabei sind $\mathbf{E}^i$ und $\mathbf{H}^i$ aus Richtung $d$ einfallende ebene Wellen[1] der Form

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{E}^i(x; d, p) = \frac{i}{k} \operatorname{rot} \operatorname{rot} p\, e^{ikx \cdot d} = ik(d \times p) \times d\, e^{ikx \cdot d}, \tag{5.2}$$

$$\mathbf{H}^i = \mathbf{H}^i(x; d, p) = \operatorname{rot} p\, e^{ikx \cdot d} = ik(d \times p)\, e^{ikx \cdot d}, \tag{5.3}$$

wobei $p$ die Polarisationsrichtung beschreibt und $|d| = |p| = 1$ gilt. Falls $d \perp p$, so vereinfacht sich die Darstellung zu

$$\mathbf{E}^i(x; d, p) = ikp\, e^{ikx \cdot d}, \qquad \mathbf{H}^i(x; d, p) = ikd \times p\, e^{ikx \cdot d}.$$

[1] Daß die Maxwellgleichungen erfüllt sind, rechnet man leicht mit den Beziehungen $(x \times y) \times z = (xz)y - (yz)x$ und $\operatorname{rot}_x (y\, e^{\alpha\, x \cdot z}) = \alpha\, (z \times y)\, e^{\alpha\, x \cdot z}$ nach.

## 5.2 Zweidimensionales Streuproblem

Es soll nun das Streuproblem für den zweidimensionalen Fall formuliert werden. Dazu sind zwei Probleme bezüglich der Polarisationsrichtung der einfallenden Felder, nämlich das transversalmagnetische oder auch elektrische Problem (TM) und das transversalelektrische oder auch magnetische Problem (TE), zu unterscheiden. Zu den Bezeichnungen vergleiche [12, S. 404f.].

Beim (TM), dies entspricht gerade der Polarisation $p = (0,0,1)^\top$ in $x_3-$Richtung, sind die einfallenden Felder durch

$$\mathbf{E}^i = ike^{ikx\cdot d}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{H}^i = ikd^\perp e^{ikx\cdot d}$$

gegeben, wobei $d = (d_1, d_2, 0)^\top$ mit $|d| = 1$, $d^\perp = (d_2, -d_1, 0)^\top$ ist.

Analog gilt beim (TE), was der Polarisation $p = -d^\perp$ orthogonal zu $d$ und der $x_3-$Richtung entspricht,

$$\mathbf{H}^i = ike^{ikx\cdot d}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E}^i = -ikd^\perp e^{ikx\cdot d}.$$

Gesucht sind Lösungen $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0 \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, $\mathbf{e}^s, \mathbf{h}^s \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ von (1.10 a) - (1.12 d), wobei die Inhomogenitäten gegeben sind durch[2]

$$\begin{array}{lllll}
\text{(TM)} & f = ik\varepsilon^{-1/2}e^{ikx\cdot d}\nu^\perp, & \hat{f} = 0, & & \tilde{f} = ik\varepsilon^{-1/2}e^{ikx\cdot d}, \\
& g_1 = g_2 = 0, & \hat{g} = -ik\mu^{-1/2}e^{ikx\cdot d}\nu\cdot d, & & \tilde{g} = 0, \\
\\
\text{(TE)} & g = ik\mu^{-1/2}e^{ikx\cdot d}\nu^\perp, & \hat{g} = 0, & & \tilde{g} = ik\mu^{-1/2}e^{ikx\cdot d}, \\
& f_1 = f_2 = 0, & \hat{f} = ik\varepsilon^{-1/2}e^{ikx\cdot d}\nu\cdot d, & & \tilde{f} = 0.
\end{array}$$

Dies kann mittels

$$\begin{array}{lll}
\text{(TM)} & \mathbf{e}^i(x;d) = ike^{ikx\cdot d}, & \mathbf{h}^i = 0, \\
\text{(TE)} & \mathbf{h}^i(x;d) = ike^{ikx\cdot d}, & \mathbf{e}^i = 0
\end{array} \tag{5.4}$$

auch in der Form

$$\tilde{f} = \varepsilon^{-1/2}\mathbf{e}^i, \quad \tilde{g} = \mu^{-1/2}\mathbf{h}^i, \quad \hat{f} = -\varepsilon^{-1/2}ik^{-1}\frac{\partial \mathbf{h}^i}{\partial \nu}, \quad \hat{g} = \mu^{-1/2}ik^{-1}\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial \nu}$$

geschrieben werden, so daß

$$(\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{e}^s, \mathbf{h}^s)^\top = \mathcal{L}\begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1/2}ik^{-1}\frac{\partial \mathbf{h}^i}{\partial \nu} \\ \mu^{-1/2}ik^{-1}\frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial \nu} \\ \varepsilon^{-1/2}\mathbf{e}^i \\ \mu^{-1/2}\mathbf{h}^i \end{pmatrix} =: \mathcal{L}^s\left(\mathbf{e}^i, \mathbf{h}^i\right)^\top$$

[2]Es wird benutzt, daß $f = \varepsilon^{-1/2}\nu \times \mathbf{E}^i|_{\partial D}$, $g = \mu^{-1/2}\nu \times \mathbf{H}^i|_{\partial D}$ und $\nu^\perp \cdot d^\perp = \nu \cdot d$ gelten.

mit $\mathcal{L}$ gemäß (1.13) gilt.

Für das Problem in Bohrenscher Zerlegung ergeben sich hieraus die folgenden Randbedingungen gemäß (2.11 a) - (2.11 d)

$$\text{(TM)} \qquad \begin{aligned} N_{\mathbf{a}} &= -k\alpha_{\mathbf{A}}(\mu_0/\mu)^{1/2}e^{ikx\cdot d}\nu\cdot d, \\ N_{\mathbf{b}} &= -k\alpha_{\mathbf{B}}(\mu_0/\mu)^{1/2}e^{ikx\cdot d}\nu\cdot d, \\ D_{\mathbf{a}} = D_{\mathbf{b}} &= ik(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}e^{ikx\cdot d}, \end{aligned} \tag{5.5 a}$$

$$\text{(TE)} \qquad \begin{aligned} N_{\mathbf{a}} &= -ik\alpha_{\mathbf{A}}(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}e^{ikx\cdot d}\nu\cdot d, \\ N_{\mathbf{b}} &= ik\alpha_{\mathbf{B}}(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}e^{ikx\cdot d}\nu\cdot d, \\ -D_{\mathbf{a}} = D_{\mathbf{b}} &= k(\mu_0/\mu)^{1/2}e^{ikx\cdot d}. \end{aligned} \tag{5.5 b}$$

Setzt man

$$\text{(TM)} \qquad \mathbf{a}^i = \mathbf{b}^i = ik(\mu_0/\mu)^{1/2}e^{ikx\cdot d}, \tag{5.6 a}$$

$$\text{(TE)} \qquad -\mathbf{a}^i = \mathbf{b}^i = k(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}e^{ikx\cdot d} \tag{5.6 b}$$

so daß bei beiden Problemen

$$N_{\mathbf{a}} = \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial \nu}, \quad N_{\mathbf{b}} = \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\frac{\partial \mathbf{b}^i}{\partial \nu}, \quad D_{\mathbf{a}} = \xi_+\mathbf{a}^i + \xi_-\mathbf{b}^i, \quad D_{\mathbf{b}} = \xi_-\mathbf{a}^i + \xi_+\mathbf{b}^i,$$

gilt, dann läßt sich das Streuproblem in der Bohrenschen Zerlegung in der folgenden Form schreiben.

Gesucht sind $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0 \in C^2(D)\cap C(\bar{D})$, $\mathbf{a}^s, \mathbf{b}^s \in C^2(\mathbb{R}^2\setminus\bar{D})\cap C(\mathbb{R}^2\setminus D)$ mit

$$\begin{aligned} (\triangle + \alpha_{\mathbf{A}}^2)\mathbf{a}_0 = (\triangle + \alpha_{\mathbf{B}}^2)\mathbf{b}_0 &= 0 \ \text{ in } D, \\ (\triangle + k^2)\mathbf{a}^s = (\triangle + k^2)\mathbf{b}^s &= 0 \ \text{ in } \mathbb{R}^2\setminus\bar{D}, \\ \tfrac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu} - \tfrac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\tfrac{\partial \mathbf{a}^s}{\partial \nu} &= \tfrac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\tfrac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial \nu} \ \text{ auf } \partial D, \\ \tfrac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu} - \tfrac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\tfrac{\partial \mathbf{b}^s}{\partial \nu} &= \tfrac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\tfrac{\partial \mathbf{b}^i}{\partial \nu} \ \text{ auf } \partial D, \\ \mathbf{a}_0 - \xi_+\mathbf{a}^s - \xi_-\mathbf{b}^s &= \xi_+\mathbf{a}^i + \xi_-\mathbf{b}^i \ \text{ auf } \partial D, \\ \mathbf{b}_0 - \xi_-\mathbf{a}^s - \xi_+\mathbf{b}^s &= \xi_-\mathbf{a}^i + \xi_+\mathbf{b}^i \ \text{ auf } \partial D, \\ \tfrac{\partial \mathbf{a}^s}{\partial r} - ik\mathbf{a}^s &= o\left(r^{-1/2}\right), \\ \tfrac{\partial \mathbf{b}^s}{\partial r} - ik\mathbf{b}^s &= o\left(r^{-1/2}\right). \end{aligned} \tag{5.7}$$

oder kurz

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{a}^s, \mathbf{b}^s)^\top = \mathcal{L}^B \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial \nu} \\ \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\frac{\partial \mathbf{b}^i}{\partial \nu} \\ \xi_+\mathbf{a}^i + \xi_-\mathbf{b}^i \\ \xi_-\mathbf{a}^i + \xi_+\mathbf{b}^i \end{pmatrix} =: \mathcal{L}^{Bs}\left(\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^i\right)^\top \tag{5.8}$$

mit $\mathcal{L}^B$ gemäß (2.13).

Bei der Betrachtung von Streuproblemen bezeichnen $\mathbf{a}_\infty$ und $\mathbf{b}_\infty$ die zu $\mathbf{a}^s$ beziehungsweise $\mathbf{b}^s$ gehörigen Fernfelder.

# 6 Das Fernfeld

Die Parameter seien im folgenden immer so gewählt, daß Existenz und Eindeutigkeit bei den direkten Problemen gesichert sind. Insbesondere sind dann die Lösungen durch die angegebenen Potentiale darstellbar.

Die Lösungen des dreidimensionalen Problems im Außengebiet haben das asymptotische Verhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left\{\mathbf{E}_\infty(\hat{x})+O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, \quad |x|\to\infty,\\ \mathbf{H}(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left\{\mathbf{H}_\infty(\hat{x})+O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, \quad |x|\to\infty,\end{aligned}$$

gleichmäßig für alle Richtungen $\hat{x} = x/|x|$. Dabei haben die Fernfelder $\mathbf{E}_\infty$, $\mathbf{H}_\infty$ die Darstellung[1]

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\infty(\hat{x}) &= \frac{ik}{4\pi}\hat{x}\times\int_{\partial D}\{\nu(y)\times\mathbf{E}(y)+[\nu(y)\times\mathbf{H}(y)]\times\hat{x}\}e^{-ik\hat{x}\cdot y}\,\mathrm{d}s(y),\\ \mathbf{H}_\infty(\hat{x}) &= \frac{ik}{4\pi}\hat{x}\times\int_{\partial D}\{\nu(y)\times\mathbf{H}(y)-[\nu(y)\times\mathbf{E}(y)]\times\hat{x}\}e^{-ik\hat{x}\cdot y}\,\mathrm{d}s(y).\end{aligned}$$

Entsprechende Aussagen gelten für $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{A}_\infty$, $\mathbf{B}_\infty$.

Für die Fernfelder gelten die Orthogonalitätsrelationen[2]

$$\mathbf{H}_\infty(\hat{x}) = \hat{x}\times\mathbf{E}_\infty(\hat{x}), \qquad \hat{x}\cdot\mathbf{E}_\infty(\hat{x}) = \hat{x}\cdot\mathbf{H}_\infty(\hat{x}) = 0. \tag{6.1}$$

Bei den zerlegten Feldern ergeben sich die Beziehungen

$$\mathbf{A}_\infty(\hat{x}) = i\hat{x}\times\mathbf{A}_\infty(\hat{x}), \qquad \mathbf{B}_\infty(\hat{x}) = -i\hat{x}\times\mathbf{B}_\infty(\hat{x}), \qquad \hat{x}\cdot\mathbf{A}_\infty(\hat{x}) = \hat{x}\cdot\mathbf{B}_\infty(\hat{x}) = 0.$$

Im zweidimensionalen Fall gilt[3]

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}}\left\{\mathbf{e}_\infty(\hat{x})+O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, \quad |x|\to\infty,\\ \mathbf{h}(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}}\left\{\mathbf{h}_\infty(\hat{x})+O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, \quad |x|\to\infty,\end{aligned}$$

[1] Siehe dazu [3, (6.24)].
[2] Vergleiche [3, (6.23)].
[3] Vergleiche [3, (3.63) und (3.64)].

gleichmäßig für alle Richtungen $\hat{x} = x/|x|$ mit den Darstellungen

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\infty(\hat{x}) &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{e}(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} \right\} \mathrm{d}s(y), \\ \mathbf{h}_\infty(\hat{x}) &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{h}(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} \right\} \mathrm{d}s(y)\end{aligned}$$

für die Fernfelder. Für $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}_\infty$, $\mathbf{b}_\infty$ gilt dies entsprechend.

## 6.1 Reziprozität im dreidimensionalen Fall

Es bezeichnen

$$\mathbf{E}^i(x;d,p) = ik(d\times p)\times d\, e^{ikx\cdot d}, \qquad \mathbf{H}^i(x;d,p) = ikd\times p\, e^{ikx\cdot d} = \frac{1}{ik}\mathrm{rot}\,\mathbf{E}^i(x;d,p)$$

die einfallenden elektromagnetischen Wellen und

$$(\mathbf{E}_0(.;d,p), \mathbf{H}_0(.;d,p), \mathbf{E}^s(.;d,p), \mathbf{H}^s(.;d,p))^\top = \mathcal{L}\begin{pmatrix} \varepsilon^{-1/2}\nu \times \mathbf{E}^i(.;d,p) \\ \mu^{-1/2}\nu \times \mathbf{H}^i(.;d,p)\end{pmatrix}$$

die Lösung des zugehörigen Streuproblems, sowie $\mathbf{E}_\infty(.;d,p)$, $\mathbf{H}_\infty(.;d,p)$ die zu $\mathbf{E}^s$ beziehungsweise $\mathbf{H}^s$ gehörigen Fernfelder.

Für diese gilt der folgende Satz.

**Satz 6.1** *Das elektrische Fernfeld für die Streuung einer ebenen elektromagnetischen Welle am chiralen Gebiet erfüllt die Reziprozitätsrelation*

$$q\cdot\mathbf{E}_\infty(\hat{x};d,p) = p\cdot\mathbf{E}_\infty(-d;-\hat{x},q) \tag{6.2}$$

*für alle $\hat{x}, d \in \Omega$ und alle $p, q \in \mathbb{R}^3$.*

**Beweis** Nach [3, (6.78)] gilt für die Fernfelder, ausgedrückt durch die Gesamtfelder,

$$\begin{aligned}&4\pi\left(q\cdot\mathbf{E}_\infty(\hat{x};d,p) - p\cdot\mathbf{E}_\infty(-d;-\hat{x},q)\right) \\ &\quad= \int_{\partial D} \left\{\nu(y)\times\mathbf{E}(y;d,p)\cdot\mathbf{H}(y;-\hat{x},q) + \nu(y)\times\mathbf{H}(y;d,p)\cdot\mathbf{E}(y;-\hat{x},q)\right\}\mathrm{d}s(y)\end{aligned}$$

für alle $\hat{x}, d \in \Omega$ und alle $p, q \in \mathbb{R}^3$. Mit den Transmissionsbedingungen (1.6 a), (1.6 b) folgt daraus

$$4\pi\left(q\cdot\mathbf{E}_\infty(\hat{x};d,p) - p\cdot\mathbf{E}_\infty(-d;-\hat{x},q)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}\right)^{1/2} \int_{\partial D} \{\mathbf{E}_0(y;d,p)\times\mathbf{H}_0(y;-\hat{x},q)+\mathbf{H}_0(y;d,p)\times\mathbf{E}_0(y;-\hat{x},q)\}\cdot\nu(y)\,\mathrm{d}s(y)\\
&= \left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}\right)^{1/2} \int_{D} \operatorname{div}\,\{\mathbf{E}_0(y;d,p)\times\mathbf{H}_0(y;-\hat{x},q)+\mathbf{H}_0(y;d,p)\times\mathbf{E}_0(y;-\hat{x},q)\}\,\mathrm{d}y\\
&= \left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}\right)^{1/2} \int_{D} \{\mathbf{H}_0(y;-\hat{x},q)\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}_0(y;d,p)-\mathbf{E}_0(y;d,p)\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}_0(y;-\hat{x},q)\\
&\qquad +\mathbf{E}_0(y;-\hat{x},q)\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}_0(y;d,p)-\mathbf{H}_0(y;d,p)\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}_0(y;-\hat{x},q)\}\,\mathrm{d}y\\
&= \left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}\right)^{1/2} \int_{D} \{\mathbf{H}_0(y;-\hat{x},q)\cdot[ik_0\gamma^2\mathbf{H}_0(y;d,p)+k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{E}_0(y;d,p)]\\
&\qquad -\mathbf{E}_0(y;d,p)\cdot[-ik_0\gamma^2\mathbf{E}_0(y;-\hat{x},q)+k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{H}_0(y;-\hat{x},q)]\\
&\qquad +\mathbf{E}_0(y;-\hat{x},q)\cdot[-ik_0\gamma^2\mathbf{E}_0(y;d,p)+k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{H}_0(y;d,p)]\\
&\qquad -\mathbf{H}_0(y;d,p)\cdot[ik_0\gamma^2\mathbf{H}_0(y;-\hat{x},q)+k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{E}_0(y;-\hat{x},q)]\}\,\mathrm{d}y\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

**q. e. d.**

Ein analoges Resultat läßt sich für das magnetische Fernfeld formulieren.

**Korollar 6.2** *Das magnetische Fernfeld für die Streuung einer ebenen elektromagnetischen Welle am chiralen Gebiet erfüllt die Reziprozitätsrelation*

$$q\cdot\mathbf{H}_\infty(\hat{x};d,p)=p\cdot\mathbf{H}_\infty(-d;-\hat{x},q) \tag{6.3}$$

*für alle $\hat{x},d\in\Omega$ und alle $p,q\in\mathbb{R}^3$.*

**Beweis** Mit der Orthogonalitätsbeziehung (6.1) und der Reziprozität (6.2) gilt

$$q\cdot\mathbf{H}_\infty(\hat{x};d,p)=q\cdot(\hat{x}\times\mathbf{E}_\infty(\hat{x};d,p))=(q\times\hat{x})\cdot\mathbf{E}_\infty(\hat{x};d,p)=p\cdot\mathbf{E}_\infty(-d;-\hat{x},q\times\hat{x}).$$

Dabei ist $\mathbf{E}_\infty(.;-\hat{x},q\times\hat{x})$ Fernfeld des elektrischen Streufeldes bei einfallenden Wellen

$$\mathbf{E}^i(.;-\hat{x},q\times\hat{x})=\mathbf{H}^i(.;-\hat{x},q),\qquad \mathbf{H}^i(.;-\hat{x},q\times\hat{x})=\mathbf{E}^i(.;-\hat{x},q),$$

so daß

$$\mathbf{E}_\infty(-d;-\hat{x},q\times\hat{x})=\mathbf{H}_\infty(-d;-\hat{x},q)$$

und zusammen mit der ersten Gleichungskette die Behauptung gilt. **q. e. d.**

**Definition 6.3** *Es bezeichnet $T^2(\Omega)$ den Raum der quadratintegrablen Tangentialfelder auf $\Omega$.*[4] *Ein elektromagnetisches Herglotz-Paar ist ein Paar von Vektorfeldern der Form*

$$\mathbf{E}(x)=\int_\Omega e^{ikx\cdot d}g(d)\,\mathrm{d}s(d),\qquad \mathbf{H}(x)=\frac{1}{ik}\operatorname{rot}\mathbf{E}(x),\quad x\in\mathbb{R}^3, \tag{6.4}$$

*wobei $g\in T^2(\Omega)$ der Herglotz-Kern von $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ genannt wird.*

[4] Das ist die Vervollständigung von $T(\Omega)$ bezüglich der gewöhnlichen $L^2$-Norm.

In Analogie zu [3, Lemma 6.31] gilt der folgende Hilfssatz.

**Lemma 6.4** *Es sei $g \in L^2(\Omega)$. Die Lösung des Streuproblems zu einfallenden Feldern der Form*

$$\tilde{\mathbf{E}}^i(x) = \int_\Omega \mathbf{E}^i(x; d, g(d))\,\mathrm{d}s(d), \qquad \tilde{\mathbf{H}}^i(x) = \int_\Omega \mathbf{H}^i(x; d, g(d))\,\mathrm{d}s(d)$$

*ist gegeben durch*

$$\tilde{\mathbf{E}}^s(x) = \int_\Omega \mathbf{E}^s(x; d, g(d))\,\mathrm{d}s(d), \qquad \tilde{\mathbf{H}}^s(x) = \int_\Omega \mathbf{H}^s(x; d, g(d))\,\mathrm{d}s(d),$$
$$\tilde{\mathbf{E}}_0(x) = \int_\Omega \mathbf{E}^s(x; d, g(d))\,\mathrm{d}s(d), \qquad \tilde{\mathbf{H}}_0(x) = \int_\Omega \mathbf{H}^s(x; d, g(d))\,\mathrm{d}s(d)$$

*für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ bzw. $x \in D$ mit den zugehörigen Fernfeldern*

$$\tilde{\mathbf{E}}_\infty(\hat{x}) = \int_\Omega \mathbf{E}_\infty(\hat{x}; d, g(d))\,\mathrm{d}s(d), \quad \tilde{\mathbf{H}}_\infty(\hat{x}) = \int_\Omega \mathbf{H}_\infty(\hat{x}; d, g(d))\,\mathrm{d}s(d)$$

*für $\hat{x} \in \Omega$.*

**Beweis** Für den Beweis wird die Problemformulierung nach der Bohrenschen Zerlegung gemäß (2.1) benutzt. Es gelten für die zerlegten Felder $\mathbf{A}_0(.; d, g(d))$, $\mathbf{B}_0(.; d, g(d))$, $\mathbf{A}^s(.; d, g(d))$ und $\mathbf{B}^s(.; d, g(d))$ zu den durch $\mathbf{E}^i(.; d, g(d))$ und $\mathbf{H}^i(.; d, g(d))$ bestimmten Feldern $\mathbf{E}_0(.; d, g(d))$, $\mathbf{H}_0(.; d, g(d))$, $\mathbf{E}^s(.; d, g(d))$, $\mathbf{H}^s(.; d, g(d))$ Darstellungen gemäß (4.6 a) - (4.6 d), wobei die dabei verwendeten Dichten $\varphi(.; d, g(d))$, $\psi(.; d, g(d))$ dem Integralgleichungssystem

$$(E + A)\begin{pmatrix} \varphi(.; d, g(d)) \\ \psi(.; d, g(d)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}\nu \times \mathbf{E}^i(.; d, g(d)) \\ 4i(\mu_0/\mu)^{1/2}\nu \times \mathbf{H}^i(.; d, g(d)) \end{pmatrix}$$

genügen. Integration dieser Darstellungen und des Integralgleichungssystems bezüglich $d$ über $\Omega$ führt nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge auf Darstellungen für $\tilde{\mathbf{A}}_0$, $\tilde{\mathbf{B}}_0$, $\tilde{\mathbf{A}}^s$, $\tilde{\mathbf{B}}^s$ gemäß (4.6 a) - (4.6 d) mit Dichten

$$\tilde{\varphi}(y) := \int_\Omega \varphi(y; d, g(d))\,\mathrm{d}s(d), \quad \tilde{\psi}(y) := \int_\Omega \psi(y; d, g(d))\,\mathrm{d}s(d), \quad y \in \partial D,$$

die Lösungen des Integralgleichungssystems

$$(E + A)\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}\nu \times \tilde{\mathbf{E}}^i \\ 4i(\mu_0/\mu)^{1/2}\nu \times \tilde{\mathbf{H}}^i \end{pmatrix}$$

sind. Eine entsprechende Darstellung folgt dann auch für die Fernfelder $\tilde{\mathbf{A}}_\infty$, $\tilde{\mathbf{B}}_\infty$ . Wegen der eineindeutigen Zuordnung zwischen den zerlegten und den ursprünglichen Feldern durch (2.1) gilt die Behauptung. **q. e. d.**

**Bemerkung 6.5** *Für $g \in T^2(\Omega)$ gilt*

$$\tilde{\mathbf{E}}^i(x) = ik \int_\Omega g(d) e^{ikx\cdot d}\, \mathrm{d}s(d), \qquad \tilde{\mathbf{H}}^i(x) = \operatorname{rot} \int_\Omega g(d) e^{ikx\cdot d}\, \mathrm{d}s(d), \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

*das heißt $\tilde{\mathbf{E}}^i, \tilde{\mathbf{H}}^i$ ist ein elektromagnetisches Herglotz-Paar mit Kern $ikg$.*

**Definition 6.6** *Es sei $\{d_n\}$ eine Folge von in $\Omega$ dichten Einheitsvektoren und es bezeichnen*

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &:= \{\mathbf{E}_\infty(.; d_n, e_j) \mid n \in \mathbb{N}, j = 1,2,3\}, \\ \mathfrak{H} &:= \{\mathbf{H}_\infty(.; d_n, e_j) \mid n \in \mathbb{N}, j = 1,2,3\} \end{aligned}$$

*die Mengen der elektrischen bzw. magnetischen Fernfelder zu den Einfallsrichtungen $d_n$ und den kartesischen Einheitsvektoren $e_j$ als Polarisationen*[5].

*Weiter bezeichne $\Theta$ die Menge der Herglotz-Kerne $g \in T^2(\Omega)$ mit der Eigenschaft, daß $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0 \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ existieren, so daß $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ und das elektromagnetische Herglotz-Paar $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ zum Herglotz-Kern $g$ Lösungen des inneren Problems*

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} - ik\mathbf{H} &= 0 \quad \text{in } D, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} + ik\mathbf{E} &= 0 \quad \text{in } D, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 - ik_0\gamma^2\mathbf{H}_0 &= k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{E}_0 \quad \text{in } D, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 + ik_0\gamma^2\mathbf{E}_0 &= k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{H}_0 \quad \text{in } D, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_0^{-1/2}\nu \times \mathbf{E}_0 - \varepsilon^{-1/2}\nu \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{auf } \partial D, \tag{6.5 a}$$

$$\mu_0^{-1/2}\nu \times \mathbf{H}_0 - \mu^{-1/2}\nu \times \mathbf{H} = 0 \quad \text{auf } \partial D \tag{6.5 b}$$

*sind.*

Es gilt dann analog zu [3, Th. 6.32] der folgende Zusammenhang zwischen der Vollständigkeit der Fernfelder und der eindeutigen Lösbarkeit dieses zugeordneten inneren Problems.

**Satz 6.7** *$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ sind vollständig in $T^2(\Omega)$ genau dann, wenn $\Theta = \{0\}$ gilt.*

**Beweis** Der Beweis wird für $\mathfrak{E}$ geführt, für $\mathfrak{H}$ verläuft er analog. Die Vollständigkeit von $\mathfrak{E}$ ist gleichbedeutend damit, daß

$$\int_\Omega h(\hat{x}) \mathbf{E}_\infty(\hat{x}; d_n, e_j)\, \mathrm{d}s(\hat{x}) = 0, \qquad n \in \mathbb{N},\ j = 1,2,3$$

[5] Hier kann man auch drei beliebige linear unabhängige Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$ wählen.

für $h \in T^2(\Omega)$ das Verschwinden von $h$ impliziert. Wegen der vorausgesetzten Wohlgestelltheit des Streuproblems und der Dichtheit der $d_n$ in $\Omega$ ist die Vollständigkeitsrelation äquivalent zu

$$\int_\Omega h(\hat{x}) \mathbf{E}_\infty(\hat{x}; d, e_j)\, \mathrm{d}s(\hat{x}) = 0, \qquad d \in \Omega,\ j = 1, 2, 3$$

für $h \in T^2(\Omega)$. Ausnutzen der Reziprozitätseigenschaft (6.2) und der Eigenschaft, daß $e_j$, $j = 1, 2, 3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden sowie Ersetzung von $\hat{x}$ durch $-d$ führen auf die äquivalente Bedingung

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\infty,g} := \int_\Omega \mathbf{E}_\infty(\hat{x}; d, g(d))\, \mathrm{d}s(d) = 0$$

für $g \in T^2(\Omega)$, wobei $g(d) := h(-d)$ gesetzt wurde.

Dann ist $\tilde{\mathbf{E}}_{\infty,g}$ Fernfeld zur Lösung des Streuproblems zu einfallenden Wellen[6] $\tilde{\mathbf{E}}^i_g$, $\tilde{\mathbf{H}}^i_g$ gemäß Lemma 6.4. Mit den Maxwellgleichungen im Außenraum und dem Rellich-Lemma folgt aus $\tilde{\mathbf{E}}_{\infty,g} = 0$ das Verschwinden von $\tilde{\mathbf{E}}^s_g, \tilde{\mathbf{H}}^s_g$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Nach [3, Th. 3.15] ergibt sich aus der Existenz eines nichttrivialen Tangentialfeldes g mit $\tilde{\mathbf{E}}_{\infty,g} = 0$ das Nichtverschwinden des zugehörigen elektromagnetischen Herglotz-Paares $\tilde{\mathbf{E}}^i_g, \tilde{\mathbf{H}}^i_g$. Für dieses gilt wegen $\tilde{\mathbf{E}}^s_g = \tilde{\mathbf{H}}^s_g = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ und wegen der Transmissionsbedingungen (6.5 a), (6.5 b), daß auch die Randbedingungen $\varepsilon_0^{-1/2} \nu \times \tilde{\mathbf{E}}_{0,g} - \varepsilon^{-1/2} \nu \times \tilde{\mathbf{E}}^i_g = 0$ und $\mu_0^{-1/2} \nu \times \tilde{\mathbf{H}}_{0,g} - \mu^{-1/2} \nu \times \tilde{\mathbf{H}}^i_g = 0$ auf $\partial D$ erfüllt sind. Außerdem genügen $\tilde{\mathbf{E}}^i_g, \tilde{\mathbf{H}}^i_g$ den Maxwellgleichungen in $\mathbb{R}^3$, also insbesondere in $D$. Damit ist $g \neq 0$ in der Menge $\Theta$ enthalten. Es ist also gezeigt, daß die Nichtvollständigkeit von $\mathfrak{E}$ die Nichttrivialität von $\Theta$ nach sich zieht.

Umgekehrt folgt aus der Existenz eines Tangentialfeldes $g \in \Theta \setminus \{0\}$ mit der Eindeutigkeit des Transmissionsproblems zu den einfallenden Wellen $\tilde{\mathbf{E}}^i_g, \tilde{\mathbf{H}}^i_g$ das Verschwinden von $\tilde{\mathbf{E}}^s_g, \tilde{\mathbf{H}}^s_g$ und damit auch von $\tilde{\mathbf{E}}_{\infty,g}$. $\mathfrak{E}$ ist also in diesem Fall nicht vollständig.

**q. e. d.**

## 6.2 Reziprozität im zweidimensionalen Fall

Das Ergebnis für den dreidimensionalen Fall legt die Vermutung nahe, daß

$$\mathbf{e}_\infty(\hat{x}; d) = \mathbf{e}_\infty(-d; -\hat{x}), \quad \mathbf{h}_\infty(\hat{x}; d) = \mathbf{h}_\infty(-d; -\hat{x})$$

[6] Der untere Index $g$ kennzeichnet dabei den zugrundeliegenden Herglotz-Kern.

gilt, wobei wieder das zweite Argument die Zugehörigkeit der Lösung des Streuproblems zu den einfallenden Wellen $\mathbf{e}^i(.;d)$, $\mathbf{h}^i(.;d)$ kennzeichne.

Ein solch allgemeines Resultat konnte hier aber nicht erzielt werden, sondern nur das Ergebnis des folgenden Satzes.

**Satz 6.8** *Das elektrische Fernfeld $\mathbf{e}_\infty$ für die Streuung einer ebenen elektromagnetischen Welle am chiralen Gebiet beim transversalmagnetischen Problem erfüllt die Reziprozitätsrelation*

$$\mathbf{e}_\infty(\hat{x};d) = \mathbf{e}_\infty(-d;-\hat{x}) \tag{6.6}$$

*und das magnetische Fernfeld $\mathbf{h}_\infty$ für die Streuung einer ebenen elektromagnetischen Welle am chiralen Gebiet beim transversalelektrischen Problem*

$$\mathbf{h}_\infty(\hat{x};d) = \mathbf{h}_\infty(-d;-\hat{x}) \tag{6.7}$$

*für alle $\hat{x}, d \in \Omega$.*

**Beweis** Der Nachweis ist recht umfangreich, macht im wesentlichen aber nur von den Greenschen Sätzen und der Problemformulierung (5.7) Gebrauch. Der vollständige Beweis findet sich im Anhang A.1. **q. e. d.**

## 6.3 Fréchet-Ableitung des Fernfeldes nach dem Rand im $\mathbb{R}^2$

Im folgenden werden die Bezeichnungen und Resultate aus dem Anhang A.3.3 benutzt. Es seien die Einfallsrichtung $d$ und die Wellenzahl $k$, die die einfallenden ebenen Wellen $\mathbf{a}^i$, $\mathbf{b}^i$ erklären, im weiteren als fest angenommen, so daß diese Abhängigkeit in der Notation nicht gekennzeichnet wird. Es bezeichne $z \in RP$ eine zulässige Randparametrisierung von $\partial D$.

Der Randwertoperator $\mathcal{R} : RP \to C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^4)$, der das Doppelte der Randwerte[7] der einfallenden ebenen Wellen $\mathbf{a}^i(x) = \mathbf{a}^i(x,d)$, $\mathbf{b}^i(x) = \mathbf{b}^i(x,d)$ gemäß (5.6 a) bzw. (5.6 b) auf der durch $x = z(t)$ parametrisierten Randkurve $\partial D$ angibt, ist gegeben durch

$$(\mathcal{R}(z))(t) = 2 \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial}{\partial \nu(z(t))} \mathbf{a}^i(z(t)) \\ \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial}{\partial \nu(z(t))} \mathbf{b}^i(z(t)) \\ \xi_+ \mathbf{a}^i(z(t)) + \xi_- \mathbf{b}^i(z(t)) \\ \xi_- \mathbf{a}^i(z(t)) + \xi_+ \mathbf{b}^i(z(t)) \end{pmatrix}.$$

[7] Das ist gerade die rechte Seite des entsprechenden Integralgleichungssystems (4.20) für das Streuproblem (5.7).

Weiter seien $\mathcal{P}_0(z) : (C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}))^4 \to (C^{1,\alpha}(D))^2$ der Potentialoperator entsprechend (4.15 a), (4.15 b)

$$\left(\mathcal{P}_0(z)\,(\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)^\top\right)(x) =$$

$$\begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{im_1}{4} H_0^1(\alpha_{\mathbf{A}} \tilde{r}_z(x,\tau)) |z'(\tau)| \varphi_1(\tau) + \frac{i\alpha_{\mathbf{A}}^2}{4k} \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \cdot (x - z(\tau)) \frac{H_1^1(\alpha_{\mathbf{A}} \tilde{r}_z(x,\tau))}{\tilde{r}_r(x,\tau)} \psi_1(\tau) \right\} \mathrm{d}\tau \\ \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{im_2}{4} H_0^1(\alpha_{\mathbf{B}} \tilde{r}_z(x,\tau)) |z'(\tau)| \varphi_2(\tau) + \frac{i\alpha_{\mathbf{B}}^2}{4k} \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \cdot (x - z(\tau)) \frac{H_1^1(\alpha_{\mathbf{B}} \tilde{r}_z(x,\tau))}{\tilde{r}_z(x,\tau)} \psi_2(\tau) \right\} \mathrm{d}\tau \end{pmatrix}$$

und

$\mathcal{P}(z) : (C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}))^4 \to (C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2 \setminus D))^2$ der Potentialoperator gemäß (4.15 c), (4.15 d)

$$\left(\mathcal{P}(z)\,(\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)^\top\right)(x) =$$

$$\begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{ic_1}{4} H_0^1(k\tilde{r}_z(x,\tau)) |z'(\tau)| \varphi_1(\tau) + \frac{ik}{4} \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \cdot (x - z(\tau)) \frac{H_1^1(k\tilde{r}_z(x,\tau))}{\tilde{r}_z(x,\tau)} \psi_1(\tau) \right\} \mathrm{d}\tau \\ \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{ic_2}{4} H_0^1(k\tilde{r}_z(x,\tau)) |z'(\tau)| \varphi_2(\tau) + \frac{ik}{4} \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \cdot (x - z(\tau)) \frac{H_1^1(k\tilde{r}_z(x,\tau))}{\tilde{r}_z(x,\tau)} \psi_2(\tau) \right\} \mathrm{d}\tau \end{pmatrix},$$

die den parametrisierten Dichten $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$, $\psi_2$ die Potentiale $(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$ im Inneren bzw. $(\mathbf{a}^s, \mathbf{b}^s)$ im Außenraum zuordnen. Dabei bezeichnet $\tilde{r}_z(x,\tau)$ den Abstand $|x - z(\tau)|$ zwischen dem Punkt $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ und dem Randpunkt $z(\tau)$.

Ferner sei $\mathcal{F}(z) : (C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}))^4 \to L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ der Fernfeldoperator entsprechend (4.34 a), (4.34 b)

$$\left(\mathcal{F}(z)\,(\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2)^\top\right)(\hat{x})$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_0^{2\pi} \left\{ ic_1 |z'(\tau)| \varphi_1(\tau) + k \left( \hat{x}, \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \right) \psi_1(\tau) \right\} e^{-ik\hat{x}\cdot z(\tau)}\, \mathrm{d}\tau \\ \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_0^{2\pi} \left\{ ic_2 |z'(\tau)| \varphi_2(\tau) + k \left( \hat{x}, \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \right) \psi_2(\tau) \right\} e^{-ik\hat{x}\cdot z(\tau)}\, \mathrm{d}\tau \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\mathcal{F}' = (\mathcal{P}')_\infty\,,$$

da für das Einfach- und Doppelschichtpotential entsprechende Beziehungen gelten.

Mit den gemäß (4.21) beziehungsweise (4.22) erklärten Matrixoperatoren $E$ und $A(z) \in L((C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}))^4, (C_{2\pi}^{0,\alpha}(\mathbb{R},\mathbb{C}))^2 \times (C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R},\mathbb{C}))^2)$, wobei für die Integraloperatoren die Randparametrisierung $z$ verwendet wird, definiert man

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_0(z) &= \mathcal{P}_0(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z), \\ \mathfrak{P}(z) &= \mathcal{P}(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z), \\ \mathfrak{F}(z) &= \mathcal{F}(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z). \end{aligned}$$

Dann kann die Lösung des Problems beziehungsweise das Fernfeld in der Form

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a}_0\\ \mathbf{b}_0\end{pmatrix}(.,z)=\mathfrak{P}_0(z),\qquad \begin{pmatrix}\mathbf{a}^s\\ \mathbf{b}^s\end{pmatrix}(.,z)=\mathfrak{P}(z),\qquad \begin{pmatrix}\mathbf{a}_\infty\\ \mathbf{b}_\infty\end{pmatrix}(.,z)=\mathfrak{F}(z)$$

dargestellt werden.

Seien $G_0$ und $G$ Gebiete mit $\bar{G}_0\subset D$, $\bar{G}\subset\mathbb{R}^2\backslash\bar{D}$ und bezeichne $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^2\mid |x|=1\}$ den Einheitskreis. Dann sind die Abbildungen $\mathfrak{P}_0: RP_r\to C(G_0)$, $\mathfrak{P}: RP_r\to C(G)$ und $\mathfrak{F}: RP\to L^2(\Omega)$ Fréchet-differenzierbar und die Ableitungen sind nach der Ketten- und Quotientenregel durch

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_0'(z;h) &= \mathcal{P}_0'(z;h)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}(z)\\
&\quad -\mathcal{P}_0(z)\circ(E+A(z))^{-1}\circ A'(z;h)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}(z)\\
&\quad +\mathcal{P}_0(z)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}'(z;h),\\
\mathfrak{P}'(z;h) &= \mathcal{P}'(z;h)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}(z)\\
&\quad -\mathcal{P}(z)\circ(E+A(z))^{-1}\circ A'(z;h)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}(z)\\
&\quad +\mathcal{P}(z)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}'(z;h),\\
\mathfrak{F}'(z;h) &= \mathcal{F}'(z;h)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}(z)\\
&\quad -\mathcal{F}(z)\circ(E+A(z))^{-1}\circ A'(z;h)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}(z)\\
&\quad +\mathcal{F}(z)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}'(z;h)
\end{aligned}$$

gegeben. Dabei ist die Differenzierbarkeit der einzelnen Operatoren durch die Sätze aus Abschnitt A.3.3 bzw. diejenige von $\mathcal{R}$ durch Nachrechnen[8] gesichert. Es gilt $\mathfrak{F}'=(\mathfrak{P}')_\infty$. Ziel soll es nun sein, die Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators $\mathfrak{F}'$ durch ein geeignetes Randwertproblem zu charakterisieren.

Seien im weiteren $z$ und $h$ fest. Man definiert

$$\begin{aligned}
v_1(x) &= \left(\mathcal{P}_0'(z;h)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}(z)\right)(x),\\
v_2(x) &= -\left(\mathcal{P}_0(z)\circ(E+A(z))^{-1}\circ A'(z;h)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}(z)\right)(x),\\
v_3(x) &= \left(\mathcal{P}_0(z)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}'(z;h)\right)(x),\\
v(x) &= v_1(x)+v_2(x)+v_3(x)
\end{aligned}$$

für $x\in D$ und

$$\begin{aligned}
w_1(x) &= \left(\mathcal{P}'(z;h)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}(z)\right)(x),\\
w_2(x) &= -\left(\mathcal{P}(z)\circ(E+A(z))^{-1}\circ A'(z;h)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}(z)\right)(x),\\
w_3(x) &= \left(\mathcal{P}(z)\circ(E+A(z))^{-1}\circ\mathcal{R}'(z;h)\right)(x),\\
w(x) &= w_1(x)+w_2(x)+w_3(x)
\end{aligned}$$

[8] Siehe (6.8 a)-(6.8 d).

für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$. Die beiden in jedem dieser Ausdrücke vorhandenen Komponenten werden mit Index $a$ bzw. $b$ gekennzeichnet.

Es sind dann $v$ und $w$ die nach dem Rand abgeleiteten inneren beziehungsweise äußeren Potentiale und die gesuchte Fréchet-Ableitung $\mathfrak{F}'$ des Fernfeldoperators ist durch $w_\infty$ bestimmbar. Die Aufgabe besteht jetzt also darin, die Felder $v$ und $w$ als Lösungen eines Randwertproblems darzustellen.

Wegen der Definition von $\mathcal{P}_0$ als kombiniertem Einfach- und Doppelschichtpotential folgt

$$(\triangle + \alpha_{\mathbf{A}}^2) v_{a,j} = 0, \qquad (\triangle + \alpha_{\mathbf{B}}^2) v_{b,j} = 0, \qquad j = 2,3, \quad \text{in } D.$$

Das gleiche erhält man auch für $j = 1$, da bei der Auswertung in $D$, also außerhalb des Randes, die Fréchet-Ableitung mit dem Differentialoperator vertauschbar ist. Ein analoges Resultat gilt für $w$, so daß insgesamt die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
(\triangle + \alpha_{\mathbf{A}}^2) v_{a,j} &= 0 \quad \text{in } D, \\
(\triangle + \alpha_{\mathbf{B}}^2) v_{b,j} &= 0 \quad \text{in } D, \\
(\triangle + k^2) w_{a,j} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \\
(\triangle + k^2) w_{b,j} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}
\end{aligned}$$

für $j = 1,2,3$ gelten. Für $w$ folgt auf Grund der Darstellung auch das asymptotische Verhalten

$$\frac{\partial w_{a,j}}{\partial r} - ikw_{a,j} = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \qquad \frac{\partial w_{b,j}}{\partial r} - ikw_{b,j} = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \qquad j = 1,2,3.$$

Damit sind die Differentialgleichungen und das asymptotische Verhalten, denen $v$ bzw. $w$ genügen, ermittelt. Es bleiben jetzt noch Bedingungen auf $\partial D$ zu bestimmen.

Für $v_3, w_3$ folgt sofort aus der Form der Darstellung, daß sie Lösungen des Transmissionsproblems (2.9 a) - (2.11 d) mit Randwerten $\frac{1}{2}\mathcal{R}'(z;h)$ sind, also

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_{a,3}}{\partial \nu}(z(t)) - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\frac{\partial w_{a,3}}{\partial \nu}(z(t)) &= \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2 \mathbf{a}^i}{\partial x_j \partial x_k}(z(t))h_j(t)\nu_k(z(t)) \\
&\quad + \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\left(\operatorname{grad}\mathbf{a}^i(z(t)), \frac{\partial}{\partial z}\nu(z(t);h(t))\right), \quad (6.8\,\text{a}) \\
\frac{\partial v_{b,3}}{\partial \nu}(z(t)) - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\frac{\partial w_{b,3}}{\partial \nu}(z(t)) &= \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2 \mathbf{b}^i}{\partial x_j \partial x_k}(z(t))h_j(t)\nu_k(z(t)) \\
&\quad + \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\left(\operatorname{grad}\mathbf{b}^i(z(t)), \frac{\partial}{\partial z}\nu(z(t);h(t))\right), \quad (6.8\,\text{b}) \\
(v_{a,3} - \xi_+ w_{a,3} - \xi_- w_{b,3})(z(t)) &= \xi_+\left(\operatorname{grad}\mathbf{a}^i(z(t)), h(t)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& & & +\xi_- \left(\operatorname{grad} \mathbf{b}^i(z(t)), h(t)\right), && (6.8\,\mathrm{c})\\
(v_{b,3} - \xi_- w_{a,3} - \xi_+ w_{b,3})(z(t)) & = & & \xi_- \left(\operatorname{grad} a^i(z(t)), h(t)\right) \\
& & & +\xi_+ \left(\operatorname{grad} b^i(z(t)), h(t)\right). && (6.8\,\mathrm{d})
\end{aligned}
$$

Es bezeichne $\chi := (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z)$. Dann ist $A'(z;h)\chi$ gerade das Doppelte der Randwerte des Transmissionsproblems für $v_2$, $w_2$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_{a,2}}{\partial \nu}(z(t)) - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\frac{\partial w_{a,2}}{\partial \nu}(z(t)) &= -\frac{1}{2}\left[A'(z;h)\chi\right]_1(t), && (6.9\,\mathrm{a})\\
\frac{\partial v_{b,2}}{\partial \nu}(z(t)) - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\frac{\partial w_{b,2}}{\partial \nu}(z(t)) &= -\frac{1}{2}\left[A'(z;h)\chi\right]_2(t), && (6.9\,\mathrm{b})\\
(v_{a,2} - \xi_+ w_{a,2} - \xi_- w_{b,2})(z(t)) &= -\frac{1}{2}\left[A'(z;h)\chi\right]_3(t), && (6.9\,\mathrm{c})\\
(v_{b,2} - \xi_- w_{a,2} - \xi_+ w_{b,2})(z(t)) &= -\frac{1}{2}\left[A'(z;h)\chi\right]_4(t), && (6.9\,\mathrm{d})
\end{aligned}
$$

wobei die Indizes $1, 2, 3, 4$ die jeweilige Komponente des Vektors $A'(z;h)\chi$ bezeichnen. Das negative Vorzeichen resultiert aus der Definition von $v_2$ und $w_2$.

Für die Untersuchung der Randbedingungen für $v_1$ und $w_1$ schreibt man die Operatoren $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}$ in der Form

$$
\left(\mathcal{P}_0(z)\chi\right)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}(\mathfrak{D}_{\alpha_{\mathbf{A}}}(z)\chi_3)(x) + m_1(\mathfrak{E}_{\alpha_{\mathbf{A}}}(z)\chi_1)(x) \\ \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}(\mathfrak{D}_{\alpha_{\mathbf{B}}}(z)\chi_4)(x) + m_2(\mathfrak{E}_{\alpha_{\mathbf{B}}}(z)\chi_2)(x) \end{pmatrix}, \qquad x \in D,
$$

$$
\left(\mathcal{P}(z)\chi\right)(x) = \begin{pmatrix} (\mathfrak{D}_k(z)\chi_3)(x) + c_1(\mathfrak{E}_k(z)\chi_1)(x) \\ (\mathfrak{D}_k(z)\chi_4)(x) + c_2(\mathfrak{E}_k(z)\chi_2)(x) \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}
$$

und nutzt die Sprungbeziehungen aus Satz A.9 für die Ableitungen des Einfach- und Doppelschichtpotentials aus. Dabei ist zu beachten, daß für den $C^{2,\alpha}-$glatten Rand $\partial D$ die Normale eine Funktion aus $C^{1,\alpha}$ ist und damit $u^i|_{\partial D} \in C^{2,\alpha}(\partial D)$, $\left.\frac{\partial u^i}{\partial \nu}\right|_{\partial D} \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ gilt. Die Abbildungseigenschaften der Integraloperatoren implizieren dann $\chi_1, \chi_2 \in C^{1,\alpha}_{2\pi}(\mathbb{R})$, $\chi_3, \chi_4 \in C^{2,\alpha}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Es bezeichnen vorübergehend

$$
U_- = \mathfrak{E}_{\alpha_{\mathbf{A}}}(z)\chi_1, \qquad V_- = \mathfrak{D}_{\alpha_{\mathbf{A}}}(z)\chi_3, \qquad U_+ = \mathfrak{E}_k(z)\chi_1, \qquad V_+ = \mathfrak{D}_k(z)\chi_3.
$$

Mit dieser Definition gilt $\mathbf{a}_0 = \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}V_- + m_1 U_-$, $\mathbf{a}^s = V_+ + c_1 U_+$. Mit den Sprungbeziehungen aus Satz A.9 folgt

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial v_{a,1}}{\partial \nu} - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\frac{\partial w_{a,1}}{\partial \nu} \\
&= \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\frac{1}{2}\left(T'_{\alpha_{\mathbf{A}}}(z;h) - T'_k(z;h)\right)\chi_3 + \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\left(\operatorname{grad}(V_+ - V_-), \frac{\partial \nu}{\partial z}(z;h)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2(V_+-V_-)}{\partial x_j\partial x_k}h_j\nu_k(z)+\frac{1}{2}\left(m_1 {K^*_{\alpha_{\mathbf{A}}}}'(z;h)-\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}c_1K_k^{*\prime}(z;h)\right)\chi_1\\
&+\left(\operatorname{grad}\left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}c_1U_+-m_1U_-\right),\frac{\partial\nu}{\partial z}(z;h)\right)+\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}c_1U_+-m_1U_-)}{\partial x_j\partial x_k}h_j\nu_k(z)\\
=\;&\frac{1}{2}\left[A'(z;h)\chi\right]_1+\left(\operatorname{grad}\left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\mathbf{a}^s-\mathbf{a}_0\right),\;\frac{\partial\nu}{\partial z}(z;h)\right)+\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\mathbf{a}^s-\mathbf{a}_0)}{\partial x_j\partial x_k}h_j\nu_k(z),
\end{aligned}
\tag{6.10 a}
$$

und analog

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_{b,1}}{\partial\nu}-\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\frac{\partial w_{b,1}}{\partial\nu}\\
&=\;\frac{1}{2}\left[A'(z;h)\chi\right]_2+\left(\operatorname{grad}\left(\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\mathbf{b}^s-\mathbf{b}_0\right),\;\frac{\partial\nu}{\partial z}(z;h)\right)+\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2(\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\mathbf{b}^s-\mathbf{b}_0)}{\partial x_j\partial x_k}h_j\nu_k(z).
\end{aligned}
\tag{6.10 b}
$$

Es bezeichnen weiter vorübergehend

$$\hat{U}_+=\mathfrak{E}_k(z)\chi_2,\qquad \hat{V}_+=\mathfrak{D}_k(z)\chi_4,$$

hiermit gilt $\mathbf{b}^s=\hat{V}_++c_2\hat{U}_+$. Man erhält wieder mit den Sprungbeziehungen

$$
\begin{aligned}
&v_{a,1}-\xi_+w_{a,1}-\xi_-w_{b,1}\\
&=\;\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\frac{1}{2}K'_{\alpha_{\mathbf{A}}}(z;h)\chi_3-\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\left(\operatorname{grad}V_-,h\right)+m_1\frac{1}{2}S'_{\alpha_{\mathbf{A}}}(z;h)\chi_1-m_1\left(\operatorname{grad}U_-,h\right)\\
&\quad-\xi_+\frac{1}{2}K'_k(z;h)\chi_3+\xi_+\left(\operatorname{grad}V_+,h\right)-\xi_+c_1\frac{1}{2}S'_k(z;h)\chi_1+\xi_+c_1\left(\operatorname{grad}U_+,h\right)\\
&\quad-\xi_-\frac{1}{2}K'_k(z;h)\chi_4+\xi_-\left(\operatorname{grad}\hat{V}_+,h\right)-\xi_-c_2\frac{1}{2}S'_k(z;h)\chi_2+\xi_-c_2\left(\operatorname{grad}\hat{U}_+,h\right)\\
&=\;\frac{1}{2}\left[A'(z;h)\chi\right]_3+\left(\operatorname{grad}\left(\xi_+\mathbf{a}^s+\xi_-\mathbf{b}^s-\mathbf{a}_0\right),h\right)
\end{aligned}
\tag{6.10 c}
$$

und analog

$$v_{b,1}-\xi_-w_{a,1}-\xi_+w_{b,1}=\frac{1}{2}\left[A'(z;h)\chi\right]_4+\left(\operatorname{grad}\left(\xi_-\mathbf{a}^s+\xi_+\mathbf{b}^s-\mathbf{b}_0\right),h\right).\tag{6.10 d}$$

Benutzt man $\mathbf{a}=\mathbf{a}^i+\mathbf{a}^s$, $\mathbf{b}=\mathbf{b}^i+\mathbf{b}^s$ und die Identitäten

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}\left(\xi_+\mathbf{a}+\xi_-\mathbf{b}-\mathbf{a}_0\right)&=\left(\xi_+\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\nu}+\xi_-\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\nu}-\frac{\partial\mathbf{a}_0}{\partial\nu}\right)\nu,\\
\operatorname{grad}\left(\xi_-\mathbf{a}+\xi_+\mathbf{b}-\mathbf{b}_0\right)&=\left(\xi_-\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\nu}+\xi_+\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\nu}-\frac{\partial\mathbf{b}_0}{\partial\nu}\right)\nu,
\end{aligned}
$$

die aus

$$\xi_+\mathbf{a}+\xi_-\mathbf{b}-\mathbf{a}_0=0, \qquad \xi_-\mathbf{a}+\xi_+\mathbf{b}-\mathbf{b}_0=0 \quad \text{auf } \partial D$$

folgen, so führt Addition der jeweils drei Beziehungen (6.8 a) + (6.9 a) + (6.10 a), ... , (6.8 d) + (6.9 d) + (6.10 d) auf dem Rand für die drei Teilprobleme auf den folgenden Satz.

**Satz 6.9** *Die Fréchet-Ableitung $\mathfrak{F}'(z;h)$ des Fernfeldoperators bei vorgegebenen einfallenden Wellen $\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^i$ ist gegeben durch das Fernfeld $w_\infty$ der Lösung des Transmissionsproblems*

$$\begin{aligned}(\triangle+\alpha_{\mathbf{A}}^2)v_a=(\triangle+\alpha_{\mathbf{B}}^2)v_b &= 0 \quad \text{in } D,\\ (\triangle+k^2)w_a=(\triangle+k^2)w_b &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2\setminus\bar{D},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial w_a}{\partial r}-ikw_a=o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \qquad \frac{\partial w_b}{\partial r}-ikw_b=o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_a}{\partial \nu}(z(t))-\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\frac{\partial w_a}{\partial \nu}(z(t)) &= \left(\operatorname{grad}\left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\mathbf{a}-\mathbf{a}_0\right)(z(t)),\frac{\partial \nu}{\partial z}(z(t);h(t))\right)\\ &\quad+\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2\left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\mathbf{a}-\mathbf{a}_0\right)}{\partial x_j\partial x_k}(z(t))\,h_j(t)\nu_k(z(t)), \quad (6.11\,\text{a})\\ \frac{\partial v_b}{\partial \nu}(z(t))-\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\frac{\partial w_b}{\partial \nu}(z(t)) &= \left(\operatorname{grad}\left(\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\mathbf{b}-\mathbf{b}_0\right)(z(t)),\frac{\partial \nu}{\partial z}(z(t);h(t))\right)\\ &\quad+\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2\left(\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\mathbf{b}-\mathbf{b}_0\right)}{\partial x_j\partial x_k}(z(t))\,h_j(t)\nu_k(z(t)), \quad (6.11\,\text{b})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(v_a-\xi_+w_a-\xi_-w_b)(z(t)) &= (\nu(z(t)),h(t))\left(\xi_+\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu}+\xi_-\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu}-\frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu}\right)(z(t)), \quad (6.12\,\text{a})\\ (v_b-\xi_-w_a-\xi_+w_b)(z(t)) &= (\nu(z(t)),h(t))\left(\xi_-\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu}+\xi_+\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu}-\frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu}\right)(z(t)). \quad (6.12\,\text{b})\end{aligned}$$

**Lemma 6.10** *Die Randbedingungen (6.11 a), (6.11 b) für die Neumanndaten können auch in einer Form gegeben werden, in der nur Ableitungen nach dem Parameter des Randes auftreten:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_a}{\partial \nu}(z)-\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\frac{\partial w_a}{\partial \nu}(z) &= -\frac{1}{|z'|}\left(\frac{(\nu(z),h)}{|z'|}\left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\mathbf{a}\circ z-\mathbf{a}_0\circ z\right)'\right)'\\ &\quad-(\nu(z),h)\left(\alpha_{\mathbf{A}}k\,\mathbf{a}\circ z-\alpha_{\mathbf{A}}^2\mathbf{a}_0\circ z\right), \quad (6.13\,\text{a})\\ \frac{\partial v_b}{\partial \nu}(z)-\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\frac{\partial w_b}{\partial \nu}(z) &= -\frac{1}{|z'|}\left(\frac{(\nu(z),h)}{|z'|}\left(\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\mathbf{b}\circ z-\mathbf{b}_0\circ z\right)'\right)'\\ &\quad-(\nu(z),h)\left(\alpha_{\mathbf{B}}k\,\mathbf{b}\circ z-\alpha_{\mathbf{B}}^2\mathbf{b}_0\circ z\right). \quad (6.13\,\text{b})\end{aligned}$$

*Dabei bezeichnet $(u \circ z)'$ die Ableitung der Abbildung $t \mapsto u(z(t))$ nach $t$.*

**Beweis** Der Beweis verläuft im wesentlichen wie in [10, Lemma 4.5], soll aber hier in der für das Transmissionsproblem passenden Form kurz ausgeführt werden.

In einer (hinreichend kleinen) Umgebung des Randes führt man mittels

$$x(t,r) := z(t) + rn(t), \qquad t \in [0,2\pi], \qquad r \in [-r_0, r_0],$$

ein lokales Koordinatensystem ein, wobei $n(t) := \nu(z(t)) = \frac{1}{|z'(t)|}\begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix}$ die äußere Normale bezeichnet. Für die lokalen Basisvektoren $x_{,t} = \frac{\partial x}{\partial t}$, $x_{,r} = \frac{\partial x}{\partial r}$ gilt

$$x_{,t} = z'(t) + rn'(t), \qquad x_{,r} = n(t).$$

Für den Maßtensor $(g_{ij}) = (x_{,t} \cdot x_{,r})$ erhält man

$$\begin{aligned} g_{11}(t,r) &= |z'(t) + rn'(t)|^2, \\ g_{12}(t,r) &= g_{21}(t,r) = z'(t) \cdot n(t) + rn'(t) \cdot n(t) \\ &= \frac{1}{|z'(t)|} \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} + \frac{r}{2}(n(t) \cdot n(t))' = 0, \\ g_{22}(t,r) &= 1. \end{aligned}$$

Es bezeichnen $(g^{ij})$ die inverse Matrix zu $(g_{ij})$ und $g := \det(g_{ij})$. Es gilt also $g = g_{11}$, $g^{11} = 1/g$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = 1$.

Der Gradient und der Laplace-Operator berechnen sich für eine Funktion $v$, wobei $\tilde{v}(t,r) := v(x(t,r))$ gesetzt wird, in den neuen Koordinaten gemäß

$$(\operatorname{grad} v) \circ z = g^{11}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} x_{,t} + g^{22}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} x_{,r} = \frac{1}{g}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} x_{,t} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} x_{,r}\,, \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} (\triangle v) \circ z &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{g} g^{11}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{g} g^{22}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r}\right) \\ &= \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(1/\sqrt{g})}{\partial t}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial r}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Es sei nun $u := \frac{\alpha_A}{k}\mathbf{a} - \mathbf{a}_0$, $\tilde{u} = u \circ x$. Wegen der Transmissionsbedingung[9] gilt

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x(t,0)) = 0, \quad t \in [0,2\pi] \tag{6.16}$$

und damit

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial r}(t,0) = 0, \quad t \in [0,2\pi]. \tag{6.17}$$

[9] Vergleiche (5.7).

Mit (6.15) und der Helmholtz-Gleichung $(\triangle + k^2)\mathbf{a} = 0$ folgt

$$0 = \left( k^2 \tilde{\mathbf{a}} + \frac{1}{|z'(t)|^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{a}}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{a}}}{\partial r^2} + \frac{1}{|z'(t)|} \left( \frac{1}{|z'(t)|} \right)' \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}}{\partial t} + \frac{z'(t) \cdot n'(t)}{|z'(t)|} \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}}{\partial r} \right) (t, 0)$$

und analog wegen $(\triangle + \alpha_{\mathbf{A}}^2)\mathbf{a}_0 = 0$

$$0 = \left( \alpha_A^2 \tilde{\mathbf{a}}_0 + \frac{1}{|z'(t)|^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{a}}_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{a}}_0}{\partial r^2} + \frac{1}{|z'(t)|} \left( \frac{1}{|z'(t)|} \right)' \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_0}{\partial t} + \frac{z'(t) \cdot n'(t)}{|z'(t)|} \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_0}{\partial r} \right) (t, 0).$$

Zusammengefaßt gilt nach Multiplikation der ersten Gleichung mit $\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}$ und Subtraktion der zweiten unter Verwendung von (6.16)

$$0 = \left( \left( \alpha_{\mathbf{A}} k \tilde{\mathbf{a}} - \alpha_{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathbf{a}}_0 \right) + \frac{1}{|z'(t)|^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{|z'(t)|} \left( \frac{1}{|z'(t)|} \right)' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right) (t, 0). \tag{6.18}$$

Für den ersten Summanden in (6.11 a) gilt nun

$$\begin{aligned}
&\left( \operatorname{grad} \left( \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 \right), \frac{\partial \nu}{\partial z}(z; h) \right) \\
&= \left( \frac{1}{g} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \, x_{,t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \, x_{,r} \right) \cdot \left( -\frac{1}{|z'|} \begin{pmatrix} h_2' \\ -h_1' \end{pmatrix} - \frac{z' \cdot h'}{|z'|^3} \begin{pmatrix} z_2' \\ -z_1' \end{pmatrix} \right) \Bigg|_{r=0} \\
&= -\frac{1}{|z'|^3} \left( z_1' h_2' - z_2' h_1' \right) \frac{\partial \tilde{u}(., 0)}{\partial t} \\
&= \frac{(n, h')}{|z'|^2} \frac{\partial \tilde{u}(., 0)}{\partial t}
\end{aligned}$$

und für den zweiten

$$\begin{aligned}
&\sum_{j,k=1}^{2} h_j \nu_k \frac{\partial^2 (\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \mathbf{a} - \mathbf{a}_0)}{\partial x_j \partial x_k} (x(., 0)) \\
&= \sum_{j=1}^{2} h_j \, \nu \cdot \left( \operatorname{grad}_x \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(., 0)) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{2} h_j \left( \underbrace{(n, x_{,t})}_{=0} \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \circ x \right) + \underbrace{(n, x_{,r})}_{=1} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \circ x \right) \right) \Bigg|_{r=0} \\
&= \sum_{j=1}^{2} h_j \, \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{g} (x_{,t}, e_j) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (x_{,r}, e_j) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=0} \\
&= \sum_{j=1}^{2} h_j \left( \frac{\partial (x_{,t}/g)}{\partial r} \cdot e_j \, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + n_j \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} \right) \Bigg|_{r=0} \\
&= \left. \frac{\partial (x_{,t}/g)}{\partial r} \right|_{r=0} \cdot h \, \frac{\partial \tilde{u}(., 0)}{\partial t} + (n, h) \frac{\partial^2 \tilde{u}(., 0)}{\partial r^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \; & -\frac{(n',h)}{|z'|^2}\frac{\partial\tilde{u}(.,0)}{\partial t} - (n,h)\left(\frac{1}{|z'(t)|^2}\frac{\partial^2\tilde{u}(.,0)}{\partial t^2} + \frac{1}{|z'(t)|}\left(\frac{1}{|z'(t)|}\right)'\frac{\partial\tilde{u}(.,0)}{\partial t}\right) \\
& -(n,h)\left(\alpha_A k\tilde{\mathbf{a}}(.,0) - \alpha_{\mathbf{A}}^2\tilde{\mathbf{a}}_0(.,0)\right).
\end{aligned}
$$

Dabei wurde in der letzten Zeile (6.18) und die Beziehung

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial(x_{,t}/g)}{\partial r}\right|_{r=0}\cdot h &= \frac{(n',h)}{|z'|^2} - 2\frac{(n',z')(z',h)}{|z'|^4} \\
&= \frac{(n',h)}{|z'|^2} - \frac{2}{|z'|^2}\underbrace{\left((n',z'/|z'|)\,(z'/|z'|,h) + \overbrace{(n',n)}^{=0}\,(n,h)\right)}_{=(n',h)} = -\frac{(n',h)}{|z'|^2}
\end{aligned}
$$

benutzt. Zusammensetzen der beiden Ausdrücke und Anwendung der Produktregel führen dann auf die Darstellung (6.13 a). Die Beziehung (6.13 b) wird durch eine analoge Betrachtung nachgewiesen. **q. e. d.**

**Korollar 6.11** *In Kurzform gilt mit dem in (2.13) definierten Operator*

$$
\mathfrak{F}'(z;h) = w_\infty, \qquad (v,w)^\top = \mathcal{L}^B\mathcal{U} \tag{6.19}
$$

*mit*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_1 &= -\frac{1}{|z'|}\left(\frac{(\nu(z),h)}{|z'|}\left(\left(\left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\xi_+ - 1\right)\mathbf{a}_0 - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\xi_-\mathbf{b}_0\right)\circ z\right)'\right)' \\
&\quad -\alpha_{\mathbf{A}}(\nu(z),h)\left(((k\xi_+ - \alpha_{\mathbf{A}})\mathbf{a}_0 - k\xi_-\mathbf{b}_0)\circ z\right), && (6.20\,\text{a}) \\
\mathcal{U}_2 &= -\frac{1}{|z'|}\left(\frac{(\nu(z),h)}{|z'|}\left(\left(\left(\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\xi_+ - 1\right)\mathbf{b}_0 - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\xi_-\mathbf{a}_0\right)\circ z\right)'\right)' \\
&\quad -\alpha_{\mathbf{B}}(\nu(z),h)\left(((k\xi_+ - \alpha_{\mathbf{B}})\mathbf{b}_0 - k\xi_-\mathbf{a}_0)\circ z\right), && (6.20\,\text{b}) \\
\mathcal{U}_3 &= (\nu(z),h)\left((\xi_+\frac{k}{\alpha_{\mathbf{A}}} - 1)\frac{\partial\mathbf{a}_0}{\partial\nu} + \xi_-\frac{k}{\alpha_{\mathbf{B}}}\frac{\partial\mathbf{b}_0}{\partial\nu}\right)(z), && (6.20\,\text{c}) \\
\mathcal{U}_4 &= (\nu(z),h)\left((\xi_+\frac{k}{\alpha_{\mathbf{B}}} - 1)\frac{\partial\mathbf{b}_0}{\partial\nu} + \xi_-\frac{k}{\alpha_{\mathbf{A}}}\frac{\partial\mathbf{a}_0}{\partial\nu}\right)(z). && (6.20\,\text{d})
\end{aligned}
$$

**Beweis** Diese Darstellung folgt sofort aus

$$
\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\nu} = \frac{k}{\alpha_{\mathbf{A}}}\frac{\partial\mathbf{a}_0}{\partial\nu}, \qquad \frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\nu} = \frac{k}{\alpha_{\mathbf{B}}}\frac{\partial\mathbf{b}_0}{\partial\nu}, \qquad \mathbf{a} = \xi_+\mathbf{a}_0 - \xi_-\mathbf{b}_0, \qquad \mathbf{b} = \xi_+\mathbf{b}_0 - \xi_-\mathbf{a}_0
$$

und (6.12 a) - (6.13 b). **q. e. d.**

Die zur Berechnung von $\mathcal{U}$ benötigten Randwerte können aus (4.15 a), (4.15 b) mittels der Sprungbeziehungen gemäß

$$
2\mathbf{a}_0 = \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}(K_{\alpha_{\mathbf{A}}} - I)\psi_1 + m_1 S_{\alpha_{\mathbf{A}}}\varphi_1, \tag{6.21 a}
$$

$$2\mathbf{b}_0 = \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}(K_{\alpha_{\mathbf{B}}} - I)\psi_2 + m_2 S_{\alpha_{\mathbf{A}}}\varphi_2, \tag{6.21 b}$$

$$2\frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu} = \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}T_{\alpha_{\mathbf{A}}}\psi_1 + m_1(K^*_{\alpha_{\mathbf{A}}} + I)\varphi_1, \tag{6.21 c}$$

$$2\frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu} = \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}T_{\alpha_{\mathbf{B}}}\psi_2 + m_2(K^*_{\alpha_{\mathbf{B}}} + I)\varphi_2 \tag{6.21 d}$$

aus der Lösung des Integralgleichungssystems (4.20) für das direkte Streuproblem (5.7) ermittelt werden. Auf technische Details zur numerischen Bestimmung der Fréchet-Ableitung und dafür benötigter Hilfsgrößen wird im Abschnitt 9.3 näher eingegangen.

# 7 Numerische Behandlung für das zweidimensionale Problem

Die numerische Behandlung der zweidimensionalen direkten Aufgabe soll für das durch die Bohrensche Zerlegung transformierte Streuproblem (5.7) durchgeführt werden. Das heißt, zu gegebener Parametrisierung des Randes und vorgegebener Einfallsrichtung $d$, die die Randbedingungen festlegt, soll sowohl für das transversalmagnetische als auch das transversalelektrische Problem das Fernfeld der zugehörigen Streufelder berechnet werden.

## 7.1 Parametrisierung der Integraloperatoren

Für die numerische Lösung sind die Parametrisierungen für die Integraloperatoren $S, K, K^*, \tilde{T}$ zu verschiedenen Wellenzahlen $(k, \alpha_{\mathbf{A}}, \alpha_{\mathbf{B}})$ zu bestimmen. Dabei bezeichnet

$$\begin{aligned}(\tilde{T}_\kappa\varphi)(x) &:= (T_\kappa\varphi)(x) - (T_0\varphi)(x)\\ &= \frac{\partial}{\partial\nu(x)}\int_{\partial D}\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\left[\frac{i}{2}H_0^1(\kappa|x-y|) + \frac{1}{\pi}\ln(|x-y|)\right]\varphi(y)\,\mathrm{d}s(y)\end{aligned} \tag{7.1}$$

für $x \in \partial D$ den Differenzoperator von $T_\kappa$ und $T_0$ mit schwach singulärem Kern, so daß also $T_{\alpha_{\mathbf{A}}} - T_k = \tilde{T}_{\alpha_{\mathbf{A}}} - \tilde{T}_k$, $T_{\alpha_{\mathbf{B}}} - T_k = \tilde{T}_{\alpha_{\mathbf{B}}} - \tilde{T}_k$ gilt.

Für die Hankelfunktionen erster Art der $n-$ten Ordnung gilt

$$H_n^1(z) = J_n(z) + iY_n(z), \quad n \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{C},$$

wobei $J_n$ und $Y_n$ die Bessel- bzw. Neumannfunktionen bezeichnen. Für die Neumannfunktionen zu $n = 0, 1$ gilt

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi}\left(C_E + \ln\frac{z}{2}\right)J_0(z) - \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j}J_{2j}(z),$$

$$Y_1(z) = -\frac{1}{\pi}(z/2)^{-1}J_0(z) + \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2} + C_E - 1\right)J_1(z) - \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j(2j+1)}{j(j+1)}J_{2j+1}(z),$$

diese tragen also die logarithmische Singularität der Hankelfunktionen. Hierbei bezeichnet $C_E = 0,577215...$ die Eulersche Zahl.

Der Rand $\partial D$ des Gebietes $D$ sei durch

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

in mathematisch positiver Orientierung parametrisiert, wobei $[z_1'(t)]^2 + [z_2'(t)]^2 > 0$ für alle $t$ gelten soll. Zur Abkürzung wird

$$r(t,\tau) := \left([z_1(t) - z_1(\tau)]^2 + [z_2(t) - z_2(\tau)]^2\right)^{1/2}$$

gesetzt. Es ergibt sich mit

$$\frac{\mathrm{d}s(z(\tau))}{\mathrm{d}\tau} = |z'(\tau)|, \qquad \nu(z(\tau)) = \frac{1}{|z'(\tau)|}\begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau)\end{pmatrix}$$

für die gemäß (4.16) - (4.18), (7.1) erklärten Integraloperatoren in der Parameterdarstellung[1]

$$S_k\varphi(t) = \int_0^{2\pi}\varphi(\tau)M_k(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{7.2 a}$$

$$K_k\varphi(t) = \int_0^{2\pi}\varphi(\tau)L_k(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{7.2 b}$$

$$K_k^*\varphi(t) = \int_0^{2\pi}\varphi(\tau)L_k^*(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{7.2 c}$$

$$\tilde{T}_k\varphi(t) = \int_0^{2\pi}\varphi(\tau)N_k(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{7.2 d}$$

mit den Kernen[2]

$$M_k(t,\tau) = \frac{i}{2}H_0^1(kr(t,\tau)|z'(\tau)|, \tag{7.3 a}$$

$$L_k(t,\tau) = \frac{ik}{2}\left\{z_2'(\tau)[z_1(t) - z_1(\tau)] - z_1'(\tau)[z_2(t) - z_2(\tau)]\right\}\frac{H_1^1(kr(t,\tau))}{r(t,\tau)}, \tag{7.3 b}$$

$$\begin{aligned} L_k^*(t,\tau) &= -\frac{ik}{2}\left\{z_2'(t)[z_1(t) - z_1(\tau)] - z_1'(t)[z_2(t) - z_2(\tau)]\right\}\frac{|z'(\tau)|}{|z'(t)|}\frac{H_1^1(kr(t,\tau))}{r(t,\tau)} \\ &= \frac{|z'(\tau)|}{|z'(t)|}L_k(\tau,t), \end{aligned} \tag{7.3 c}$$

[1] Als vereinfachte Schreibweise wird dabei $\varphi(t) = \varphi(z(t))$ verwendet.

[2] Vergleiche [3, 3.5] und für $\tilde{T}_k$ [13, S.53f] oder [33, S.29].

$$
\begin{aligned}
N_k(t,\tau) &= \{z_2'(t)[z_1(\tau)-z_1(t)] - z_1'(t)[z_2(\tau)-z_2(t)]\} \\
&\quad \times \{z_2'(\tau)[z_1(\tau)-z_1(t)] - z_1'(\tau)[z_2(\tau)-z_2(t)]\} \\
&\quad \times \frac{1}{|z'(t)|[r(t,\tau)]^4}\left(\frac{ik^2}{2}H_0^1(kr(t,\tau))[r(t,\tau)]^2 - ikH_1^1(kr(t,\tau))r(t,\tau) + \frac{2}{\pi}\right) \\
&\quad + \frac{z_1'(t)z_1'(\tau)+z_2'(t)z_2'(\tau)}{|z'(t)|[r(t,\tau)]^2}\left(\frac{ik}{2}H_1^1(kr(t,\tau))r(t,\tau) - \frac{1}{\pi}\right). \qquad (7.3\,\mathrm{d})
\end{aligned}
$$

Es sollen nun die logarithmischen Singularitäten abgespalten werden. Man benutzt hierfür $H_0^1(z) = \frac{2i}{\pi}\ln(z/2)J_0(z) + ...$, $H_1^1(z) = \frac{2i}{\pi}\ln(z/2)J_1(z) + ...$ und $\ln(z/2) = \ln\left(\frac{kr(t,\tau)}{4|\sin((t-\tau)/2)|}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(4\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)$ für $z = kr(t,\tau)$, wobei in dem ersten Summanden die Nullstelle von $r(.,.)$ bei $t=\tau$ kompensiert wird und die $2\pi$-Periodizität dieser Summe gesichert ist. Dies führt auf die folgende Zerlegung

$$
\begin{aligned}
M_k(t,\tau) &= M_k^1(t,\tau)\ln\left(4\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + M_k^2(t,\tau), \qquad (7.4\,\mathrm{a}) \\
L_k(t,\tau) &= L_k^1(t,\tau)\ln\left(4\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + L_k^2(t,\tau), \qquad (7.4\,\mathrm{b}) \\
L_k^*(t,\tau) &= L_k^{*1}(t,\tau)\ln\left(4\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + L_k^{*2}(t,\tau), \qquad (7.4\,\mathrm{c}) \\
N_k(t,\tau) &= N_k^1(t,\tau)\ln\left(4\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + N_k^2(t,\tau) \qquad (7.4\,\mathrm{d})
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
M_k^1(t,\tau) &= -\frac{1}{2\pi}J_0(kr(t,\tau))|z'(\tau)|, \qquad (7.5\,\mathrm{a}) \\
M_k^2(t,\tau) &= M_k(t,\tau) - M_k^1(t,\tau)\ln\left(4\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right), \qquad (7.5\,\mathrm{b}) \\
L_k^1(t,\tau) &= -\frac{k}{2\pi}\{z_2'(\tau)[z_1(t)-z_1(\tau)] - z_1'(\tau)[z_2(t)-z_2(\tau)]\}\frac{J_1(kr(t,\tau))}{r(t,\tau)}, \qquad (7.5\,\mathrm{c}) \\
L_k^2(t,\tau) &= L_k(t,\tau) - L_k^1(t,\tau)\ln\left(4\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right), \qquad (7.5\,\mathrm{d}) \\
L_k^{*1}(t,\tau) &= \frac{|z'(\tau)|}{|z'(t)|}L_k^1(\tau,t), \qquad (7.5\,\mathrm{e}) \\
L_k^{*2}(t,\tau) &= L_k^*(t,\tau) - L_k^{*1}(t,\tau)\ln\left(4\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) = \frac{|z'(\tau)|}{|z'(t)|}L_k^2(\tau,t), \qquad (7.5\,\mathrm{f}) \\
N_k^1(t,\tau) &= \frac{z_2'(t)[z_1(\tau)-z_1(t)] - z_1'(t)[z_2(\tau)-z_2(t)]}{[r(t,\tau)]^2} \\
&\quad \times \frac{z_2'(\tau)[z_1(\tau)-z_1(t)] - z_1'(\tau)[z_2(\tau)-z_2(t)]}{[r(t,\tau)]^2} \\
&\quad \times \frac{1}{|z'(t)|}\left(\frac{-k^2}{2\pi}J_0(kr(t,\tau))[r(t,\tau)]^2 + \frac{k}{\pi}J_1(kr(t,\tau))[r(t,\tau)]\right)
\end{aligned}
$$

$$-\frac{k}{2\pi}\frac{z_1'(t)z_1'(\tau)+z_2'(t)z_2'(\tau)}{|z'(t)|[r(t,\tau)]}J_1(kr(t,\tau)), \tag{7.5 g}$$

$$N_k^2(t,\tau) = N_k(t,\tau) - N_k^1(t,\tau)\ln\left(4\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) \tag{7.5 h}$$

für $t \neq \tau$. Bei analytischer Randparametrisierung sind die Funktionen $M_k^1$, $M_k^2$, $L_k^1$, $L_k^2$, $L_k^{*1}$, $L_k^{*2}$, $N_k^1$, $N_k^2$ analytisch und für die Diagonalelemente gilt

$$M_k^1(t,t) = -\frac{1}{2\pi}|z'(t)|, \tag{7.6 a}$$

$$M_k^2(t,t) = |z'(t)|\left\{\frac{i}{2} - \frac{C_E}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{k^2}{4}|z'(t)|^2\right)\right\}, \tag{7.6 b}$$

$$L_k^1(t,t) = 0, \tag{7.6 c}$$

$$L_k^2(t,t) = -\frac{1}{2\pi}\frac{z_1'(t)z_2''(t)-z_2'(t)z_1''(t)}{|z'(t)|^2}, \tag{7.6 d}$$

$$L_k^{*1}(t,t) = 0, \tag{7.6 e}$$

$$L_k^{*2}(t,t) = -L_k^2(t,t) \tag{7.6 f}$$

$$N_k^1(t,t) = -\frac{k^2}{4\pi}|z'(t)|, \tag{7.6 g}$$

$$N_k^2(t,t) = \frac{k^2}{2}\left\{\frac{i}{2} - \frac{C_E}{\pi} - \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{k^2}{4}|z'(t)|^2\right) + \frac{1}{2\pi}\right\}|z'(t)|. \tag{7.6 h}$$

Die Integralgleichung (4.20) läßt sich nun in der Form

$$(E+A)\chi(t) = U(t) \tag{7.7}$$

mit

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z(t)) \\ \varphi_2(z(t)) \\ \psi_1(z(t)) \\ \psi_2(z(t)) \end{pmatrix}, \qquad U(t) = 2\begin{pmatrix} N_{\mathbf{a}}(z(t)) \\ N_{\mathbf{b}}(z(t)) \\ D_{\mathbf{a}}(z(t)) \\ D_{\mathbf{b}}(z(t)) \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

schreiben, wobei der Integraloperator $A$ dargestellt werden kann als

$$A\chi(t) = \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(t,\tau)\chi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

mit einer Zerlegung

$$\mathcal{K}(t,\tau) = \mathcal{K}^1(t,\tau)\ln\left(4\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + \mathcal{K}^2(t,\tau),$$

wo $\mathcal{K}^1(.,.)$ und $\mathcal{K}^2(.,.)$ analytisch auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sind, falls dies für die Parametrisierung $z$ zutrifft.

## 7.2 Nyström-Methode

Für die Diskretisierung des Problems soll die Nyström-Methode angewandt werden, die auf einer direkten Approximation der Integrale durch Quadraturformeln basiert. Dazu werden äquidistante Stützstellen $t_j = \pi j/n$, $j = 0, ..., 2n-1$ gewählt und die Quadraturfomeln

$$\int_0^{2\pi} \ln\left(4\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) f(t_j), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{7.9}$$

mit Gewichten[3]

$$R_j^{(n)}(t) := -\frac{2\pi}{n}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l}\cos(l(t-t_j)) - \frac{\pi}{n^2}\cos(n(t-t_j)), \quad j = 0, ..., 2n-1 \tag{7.10}$$

und

$$\int_0^{2\pi} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \approx \frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j). \tag{7.11}$$

benutzt, die man durch trigonometrische Interpolation und anschließende exakte Integration erhält. Bei (7.11) handelt es sich um die Trapezregel.

Die Integralgleichung (7.7) wird ersetzt durch die approximative Gleichung

$$E\chi^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{2n-1}\left\{R_j^{(n)}(t)\mathcal{K}^1(t,t_j) + \frac{\pi}{n}\mathcal{K}^2(t,t_j)\right\}\chi^{(n)}(t_j) = U(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \tag{7.12}$$

wobei $\chi^{(n)}$ die gesuchte Näherung an die wahre Lösung $\chi$ ist. Mit $\chi_i^{(n)} := \chi^{(n)}(t_i)$, $i = 0, ..., 2n-1$, und der Abkürzung $R_{|i-j|}^{(n)} := R_j^{(n)}(t_i)$ führt dies auf das lineare Gleichungssystem[4]

$$E\chi_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{2n-1}\left\{R_{|i-j|}^{(n)}\mathcal{K}^1(t_i,t_j) + \frac{\pi}{n}\mathcal{K}^2(t_i,t_j)\right\}\chi_j^{(n)} = U(t_i), \quad i = 0, ..., 2n-1. \tag{7.13}$$

Die auftretenden Gewichte lassen sich dabei gemäß

$$R_l^{(n)} = R_l^{(n)}(0) = -\frac{2\pi}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}\cos\frac{ml\pi}{n} - \frac{(-1)^l\pi}{n^2}, \quad j = 0, ..., 2n-1$$

berechnen.

[3] Vergleiche etwa [28, (3.31)-(3.35)].

[4] Man beachte, daß hier $\chi_i^{(n)}$ aus vier Komponenten $\chi_{i;k}^{(n)}$, $k = 1, 2, 3, 4$ besteht, das Gleichungssystem also insgesamt $8n$ Gleichungen hat.

Umgekehrt liefert für eine Lösung $\chi_j^{(n)}$, $j = 0, ..., 2n-1$ von (7.13) die vierkomponentige Funktion $\chi^{(n)}$, die durch

$$\chi^{(n)}(t) := E^{-1}\left[U(t) - \sum_{j=0}^{2n-1}\left\{R_{|i-j|}^{(n)}\mathcal{K}^1(t_i,t_j) + \frac{\pi}{n}\mathcal{K}^2(t_i,t_j)\right\}\chi_j^{(n)}\right]$$

definiert ist, eine Lösung für die Approximationsgleichung (7.12)[5].

Für die Fernfelder in der Darstellung (4.34 a), (4.34 b) erhält man in parametrisierter Form und nach Anwedung der Trapezregel

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_\infty(\hat{x}) \\
&= \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}\int_0^{2\pi}\{k[\hat{x}_1 z_2'(\tau) - \hat{x}_2 z_1'(\tau)]\chi_3(\tau) + ic_1|z'(\tau)|\chi_1(\tau)\}\, e^{-ik[\hat{x}_1 z_1(\tau)+\hat{x}_2 z_2(\tau)]}\,\mathrm{d}\tau \\
&\approx \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}\frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{2n-1}\left\{k[\hat{x}_1 z_2'(t_j) - \hat{x}_2 z_1'(t_j)]\chi_{j;3}^{(n)} + ic_1|z'(t_j)|\chi_{j,1}^{(n)}\right\} e^{-ik[\hat{x}_1 z_1(t_j)+\hat{x}_2 z_2(t_j)]},
\end{aligned} \tag{7.14 a}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{b}_\infty(\hat{x}) \\
&= \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}\int_0^{2\pi}\{k[\hat{x}_1 z_2'(\tau) - \hat{x}_2 z_1'(\tau)]\chi_4(\tau) + ic_2|z'(\tau)|\chi_2(\tau)\}\, e^{-ik[\hat{x}_1 z_1(\tau)+\hat{x}_2 z_2(\tau)]}\,\mathrm{d}\tau \\
&\approx \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}\frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{2n-1}\left\{k[\hat{x}_1 z_2'(t_j) - \hat{x}_2 z_1'(t_j)]\chi_{j;4}^{(n)} + ic_2|z'(t_j)|\chi_{j;2}^{(n)}\right\} e^{-ik[\hat{x}_1 z_1(t_j)+\hat{x}_2 z_2(t_j)]}.
\end{aligned} \tag{7.14 b}$$

Damit ist das Problem der näherungsweisen Berechnung der Fernfelder auf das Lösen des linearen Gleichungssystems (7.13) zurückgeführt.

## 7.3 Diskussion der Konvergenz

Für die hier durchgeführte numerische Behandlung soll die eindeutige Lösbarkeit von (4.20) vorausgesetzt werden, d.h. die Bedingung (4.25) sei erfüllt. Die Eigenschaft, daß genau eine Lösung existiert, überträgt sich unmittelbar auf das parametrisierte Integralgleichungssystem (7.7).

Mit den Resultaten aus [22], insbesondere der Kapitel 10 und 12, kann gezeigt werden, daß für hinreichend großes $n$ das lineare Gleichungssystem (7.13) und damit die Approximationsgleichung (7.12) eindeutig lösbar sind. Ferner konvergiert die approximative Lösung $\chi^{(n)}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen die Lösung $\chi$ des Integralgleichungssystems, wobei sich die Konvergenzordnung der Quadraturen (7.9), (7.11) vererbt[6].

[5] Vergleiche [22, Th. 12.7].
[6] Siehe speziell [22, (10.7)].

Die Fehler bei den Quadraturformeln (7.9), (7.11) fallen bei analytischem $f$ exponentiell bei wachsender Stützstellenzahl $2n$. Es gilt genauer, daß der Fehler die Ordnung $O(\exp(-na))$ hat, wenn sich $f$ analytisch in einen Streifen $\mathbb{R} \times (-a, a) \subset \mathbb{C}$ fortsetzen läßt. Man vergleiche hierzu [26, Th. 9.28].

Ist der Rand analytisch, so gilt dies auch für die rechte Seite $U$ der Integralgleichung. Die Kerne $\mathcal{K}^1$ und $\mathcal{K}^2$ sind dann analytisch, so daß die Quadraturformeln exponentiell konvergieren und auch insgesamt für die Lösung der Integralgleichung exponentielle Konvergenz vorliegt. Das heißt, es existieren positive Konstanten $C$ und $a$ mit

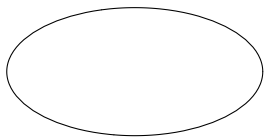
$$\|\chi^{(n)} - \chi\| \leqslant Ce^{-na}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine analoge Beziehung gilt auch für die approximierten Fernfelder, was sich darin äußern sollte, daß eine Verdopplung der Knotenzahl $2n$ auch zu einer Verdopplung der Anzahl der korrekten Ziffern in der Lösung führt.

## 7.4 Numerische Testbeispiele

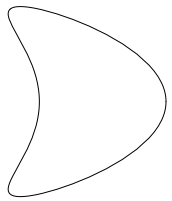
Das beschriebene numerische Verfahren soll für verschiedene Beispiele getestet werden. Betrachtet werden dazu spezielle Gebiete im $\mathbb{R}^2$, die Ellipse mit Parametrisierung

$$z(t) = \begin{pmatrix} \delta \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$



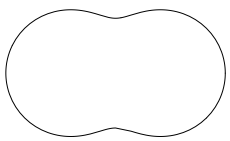
der Drachen mit

$$z(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 0.65 \cos(2t) - 0.65 \\ 1.5 \sin t \end{pmatrix},$$



und die Erdnuß mit

$$z(t) = \sqrt{\cos^2 t + 0.25 \sin^2 t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$



## Randwertproblem

Um die Korrektheit des implementierten Algorithmus zu testen, wird dieser auf Randwertprobleme angewendet, deren Lösungen exakt bekannt sind. Genauer werden, wie im folgenden angegeben, Lösungen im Innen- und Außengebiet vorgegeben und die dadurch gemäß (2.11 a)- (2.11 d) erklärten Größen $N_{\mathbf{a}}, N_{\mathbf{b}}, D_{\mathbf{a}}, D_{\mathbf{b}}$ als Input-Daten für das Programm verwendet. Dabei werden die Untersuchungen zu verschiedenen Gebieten und willkürlich gewählten Parametern durchgeführt.

Es sei $x_0 \in D$. Die Felder

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0(x) &= l_1 J_0(\alpha_{\mathbf{A}}|x-x_0|), \qquad \mathbf{b}_0(x) = l_2 J_0(\alpha_{\mathbf{B}}|x-x_0|), \qquad x \in D, \\ \mathbf{a}(x) &= l_3 H_0^1(k|x-x_0|), \qquad \mathbf{b}(x) = l_4 H_0^1(k|x-x_0|), \qquad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \end{aligned}$$

sind Lösungen des Randwertproblems (2.9 a) - (2.11 d) mit Randwerten

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{a}}(x) &= -\alpha_{\mathbf{A}} \left\{ l_1 J_1(\alpha_{\mathbf{A}}|x-x_0|) - l_3 H_1^1(k|x-x_0|) \right\} \frac{\nu(x)(x-x_0)}{|x-x_0|}, \\ N_{\mathbf{b}}(x) &= -\alpha_{\mathbf{B}} \left\{ l_2 J_1(\alpha_{\mathbf{B}}|x-x_0|) - l_4 H_1^1(k|x-x_0|) \right\} \frac{\nu(x)(x-x_0)}{|x-x_0|}, \\ D_{\mathbf{a}}(x) &= l_1 J_0(\alpha_{\mathbf{A}}|x-x_0|) - (l_3\xi_+ + l_4\xi_-) H_0^1(k|x-x_0|), \\ D_{\mathbf{b}}(x) &= l_2 J_0(\alpha_{\mathbf{B}}|x-x_0|) - (l_3\xi_- + l_4\xi_+) H_0^1(k|x-x_0|) \end{aligned}$$

auf $\partial D$. Diese sind in parametrisierter Form durch

$$\begin{aligned} 2N_{\mathbf{a}}(t) &= -2\alpha_{\mathbf{A}} \left\{ l_1 J_1(\alpha_{\mathbf{A}}|z(t)-x_0|) - l_3 H_1^1(k|z(t)-x_0|) \right\} \frac{\begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} \cdot (z(t)-x_0)}{|z(t)-x_0||z'(t)|}, \\ 2N_{\mathbf{b}}(t) &= -2\alpha_{\mathbf{B}} \left\{ l_2 J_1(\alpha_{\mathbf{B}}|z(t)-x_0|) - l_4 H_1^1(k|z(t)-x_0|) \right\} \frac{\begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} \cdot (z(t)-x_0)}{|z(t)-x_0||z'(t)|}, \\ 2D_{\mathbf{a}}(x) &= 2l_1 J_0(\alpha_{\mathbf{A}}|z(t)-x_0|) - 2(l_3\xi_+ + l_4\xi_-) H_0^1(k|z(t)-x_0|), \\ 2D_{\mathbf{b}}(x) &= 2l_2 J_0(\alpha_{\mathbf{B}}|z(t)-x_0|) - 2(l_3\xi_- + l_4\xi_+) H_0^1(k|z(t)-x_0|) \end{aligned}$$

gegeben. Aufgrund des asymptotischen Verhaltens[7] der Hankelfunktion gilt für $x_0 = 0$

$$\mathbf{a}_\infty(\hat{x}) = l_3 \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\, e^{-i\pi/4}, \qquad \mathbf{b}_\infty(\hat{x}) = l_4 \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\, e^{-i\pi/4}.$$

Bei einem numerischen Experiment mit $l_1 = 1+i$, $l_2 = 3$, $l_3 = 1$, $l_4 = 2$, $\varepsilon = \mu = \omega = 1$, $\varepsilon_0 = 1.4$, $\mu_0 = 1.2$, $\beta = 0.1$ ($\rightsquigarrow k = 1.0$, $k_0 = 1.296$) ergibt sich bei Stützstellenzahl $2n = 32$ und einer Wahl $c_1 = m_1 = 1$, $c_2 = m_2 = 2$ im Potentialansatz

[7] Vergleiche [3, (3.59)].

| Fehler | $\mathrm{Re}\,\mathbf{a}_\infty(1,0)^\top$ | $\mathrm{Im}\,\mathbf{a}_\infty(1,0)^\top$ | $\mathrm{Re}\,\mathbf{b}_\infty(1,0)^\top)$ | $\mathrm{Im}\,\mathbf{b}_\infty(1,0)^\top$ |
|---|---|---|---|---|
| Kreis | — | — | — | — |
| Ellipse | 4.5 e -9 | 3.8 e -9 | 1.2 e -8 | 6.0 e -9 |
| Erdnuß | 3.7 e -4 | 2.6 e -4 | 1.9 e -3 | 9.7 e -4 |
| Drachen | 1.6 e -7 | 5.7 e -7 | 2.4 e -7 | 1.1 e -7 |

| Fehler | $\mathrm{Re}\,\mathbf{a}_\infty(0,1)^\top$ | $\mathrm{Im}\,\mathbf{a}_\infty(0,1)^\top$ | $\mathrm{Re}\,\mathbf{b}_\infty(0,1)^\top)$ | $\mathrm{Im}\,\mathbf{b}_\infty(0,1)^\top$ |
|---|---|---|---|---|
| Kreis | — | — | — | — |
| Ellipse | 7.5 e -10 | 1.7 e -10 | 5.0 e -10 | 3.5 e -9 |
| Erdnuß | 7.0 e -5 | 6.4 e -6 | 2.1 e -3 | 5.7 e -4 |
| Drachen | 3.7 e -7 | 2.6 e -7 | 7.9 e -7 | 3.9 e -7 |

wobei die korrekten Werte (auf 22 Stellen genau)

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\infty(\hat{x}) &= 0.5641895835477562869481\,(1-i),\\ \mathbf{b}_\infty(\hat{x}) &= 1.1283791670955125738962\,(1-i)\end{aligned}$$

unabhängig von der Beobachtungsrichtung $\hat{x}$ und dem entsprechenden Gebiet sind und beim Kreis bis auf 16 Stellen genau auch erzielt werden.

Zur Konvergenz ergibt sich beim Drachen folgendes Resultat (mit gleicher Parameterwahl wie eben, aber unterschiedlichen Werten für $n$)

| Fehler | $\mathrm{Re}\,\mathbf{a}_\infty(1,0)^\top$ | $\mathrm{Im}\,\mathbf{a}_\infty(1,0)^\top$ | $\mathrm{Re}\,\mathbf{b}_\infty(1,0)^\top)$ | $\mathrm{Im}\,\mathbf{b}_\infty(1,0)^\top$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 7.6 e -2 | 2.2 e -2 | 1.9 e -1 | 4.9 e -2 |
| 8 | 5.9 e -4 | 1.3 e -3 | 9.1 e -5 | 1.6 e -4 |
| 16 | 1.6 e -7 | 5.7 e -7 | 2.3 e -7 | 1.1 e -7 |
| 32 | 1.6 e -13 | 3.3 e -13 | 4.1 e -12 | 3.4 e -12 |
| 64 | — | — | — | — |

wobei Fehler der Größenordnung $10^{-16}$ und kleiner nicht mehr angegeben sind.

Bei der Erdnuß oder auch bei größeren Wellenzahlen lassen sich schlechtere Resultate beobachten. So erhält man für die Ellipse mit $l_1 = 1+i$, $l_2 = 3$, $l_3 = 1$, $l_4 = 1$, $\varepsilon = \mu = 1$, $\omega = 5$, ($\rightsquigarrow k = 5$), $\varepsilon_0 = 1.4$, $\mu_0 = 1.2$, $\beta = 0.1$, $c_1 = m_1 = 1$, $c_2 = m_2 = 2$ als exakte Lösung

$$\mathbf{a}_\infty = \mathbf{b}_\infty = 0.252313252202016004 82(1-i)$$

und im numerischen Experiment

| Fehler | $\mathrm{Re}\,\mathbf{a}_\infty(1,0)^\top$ | $\mathrm{Im}\,\mathbf{a}_\infty(1,0)^\top$ | $\mathrm{Re}\,\mathbf{b}_\infty(1,0)^\top)$ | $\mathrm{Im}\,\mathbf{b}_\infty(1,0)^\top$ |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 2.2 e -2 | 1.3 e -1 | 2.3 e -1 | 1.0 e -1 |
| 16 | 3.5 e -2 | 2.5 e -2 | 1.7 e -1 | 3.5 e -1 |
| 32 | 1.2 e -4 | 1.9 e -4 | 4.2 e -3 | 1.2 e -4 |
| 64 | 4.1 e -12 | 5.1 e -12 | 2.3 e -11 | 1.3 e -10 |
| 128 | — | — | 7.8 e -15 | 1.3 e -15 |

## Streuproblem

Hier wird der Algorithmus für das eigentliche, auch für die inverse Fragestellung interessante, Streuproblem numerisch getestet.

Für den Drachen erhält man für

$$\varepsilon = 1.0, \quad \varepsilon_0 = 1.4, \quad \mu = 1.0, \quad \mu_0 = 1.2, \quad \omega = 1.0, \quad \beta = 0.1$$

und Einfallsrichtung $\binom{0}{1}$ bei verschiedenen Diskretisierungen und Beobachtungsrichtungen $\hat{x}$ im transversalmagnetischen Fall

| $\hat{x}$ | $n$ | $\mathbf{a}_\infty(\hat{x})$ | $\mathbf{b}_\infty(\hat{x})$ |
|---|---|---|---|
| $\binom{1}{0}$ | 8 | $-0.13359043238065 + 0.04300119234498\,\mathrm{i}$ | $-0.42209550809467 - 0.02735122520861\,\mathrm{i}$ |
| | 16 | $-0.13364771237597 + 0.04296288391846\,\mathrm{i}$ | $-0.42219122854833 - 0.02755767553683\,\mathrm{i}$ |
| | 32 | $-0.13364766443120 + 0.04296288826471\,\mathrm{i}$ | $-0.42219137770142 - 0.02755782251173\,\mathrm{i}$ |
| | 64 | $-0.13364766443424 + 0.04296288826123\,\mathrm{i}$ | $-0.42219137771110 - 0.02755782252817\,\mathrm{i}$ |
| | 128 | $-0.13364766443424 + 0.04296288826123\,\mathrm{i}$ | $-0.42219137771110 - 0.02755782252817\,\mathrm{i}$ |
| | 256 | $-0.13364766443424 + 0.04296288826123\,\mathrm{i}$ | $-0.42219137771111 - 0.02755782252817\,\mathrm{i}$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}\binom{1}{1}$ | 8 | $-0.23210748222796 + 0.09231324807461\,\mathrm{i}$ | $-0.90543842819382 + 0.09776172021991\,\mathrm{i}$ |
| | 16 | $-0.23219454900381 + 0.09228216893244\,\mathrm{i}$ | $-0.90555284175777 + 0.09757240721812\,\mathrm{i}$ |
| | 32 | $-0.23219443179846 + 0.09228223731314\,\mathrm{i}$ | $-0.90555277272083 + 0.09757287290924\,\mathrm{i}$ |
| | 64 | $-0.23219443179970 + 0.09228223731215\,\mathrm{i}$ | $-0.90555277272309 + 0.09757287291275\,\mathrm{i}$ |
| | 128 | $-0.23219443179970 + 0.09228223731215\,\mathrm{i}$ | $-0.90555277272309 + 0.09757287291275\,\mathrm{i}$ |
| | 256 | $-0.23219443179970 + 0.09228223731215\,\mathrm{i}$ | $-0.90555277272309 + 0.09757287291275\,\mathrm{i}$ |
| $\binom{0}{1}$ | 8 | $-0.24127294209982 + 0.17877587247742\,\mathrm{i}$ | $-1.06663337461236 + 0.42015140732797\,\mathrm{i}$ |
| | 16 | $-0.24131853563047 + 0.17883584743138\,\mathrm{i}$ | $-1.06659699796002 + 0.42016866267815\,\mathrm{i}$ |
| | 32 | $-0.24131845358299 + 0.17883570955156\,\mathrm{i}$ | $-1.06659680716968 + 0.42016844349451\,\mathrm{i}$ |
| | 64 | $-0.24131845358251 + 0.17883570954974\,\mathrm{i}$ | $-1.06659680715732 + 0.42016844349046\,\mathrm{i}$ |
| | 128 | $-0.24131845358251 + 0.17883570954974\,\mathrm{i}$ | $-1.06659680715732 + 0.42016844349046\,\mathrm{i}$ |
| | 256 | $-0.24131845358251 + 0.17883570954974\,\mathrm{i}$ | $-1.06659680715732 + 0.42016844349046\,\mathrm{i}$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}\binom{-1}{1}$ | 8 | $-0.16740124955170 + 0.18461496635031\,\mathrm{i}$ | $-0.76721516217778 + 0.47044227584829\,\mathrm{i}$ |
| | 16 | $-0.16734396626029 + 0.18468741909176\,\mathrm{i}$ | $-0.76689476415258 + 0.47042973671511\,\mathrm{i}$ |
| | 32 | $-0.16734411325381 + 0.18468736023272\,\mathrm{i}$ | $-0.76689548555535 + 0.47042980306522\,\mathrm{i}$ |
| | 64 | $-0.16734411325404 + 0.18468736023464\,\mathrm{i}$ | $-0.76689548555261 + 0.47042980307000\,\mathrm{i}$ |
| | 128 | $-0.16734411325404 + 0.18468736023464\,\mathrm{i}$ | $-0.76689548555261 + 0.47042980307000\,\mathrm{i}$ |
| | 256 | $-0.16734411325404 + 0.18468736023464\,\mathrm{i}$ | $-0.76689548555261 + 0.47042980307001\,\mathrm{i}$ |
| $\binom{-1}{0}$ | 8 | $-0.11413641100608 + 0.08841548645313\,\mathrm{i}$ | $-0.41178385174998 + 0.15019031528010\,\mathrm{i}$ |
| | 16 | $-0.11408666633912 + 0.08843467674538\,\mathrm{i}$ | $-0.41153277571356 + 0.15023063483991\,\mathrm{i}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 32 | $-0.11408666704600 + 0.08843477024973\,\mathrm{i}$ | $-0.41153315635196 + 0.15023086465573\,\mathrm{i}$ |
| | 64 | $-0.11408666704197 + 0.08843477025360\,\mathrm{i}$ | $-0.41153315634037 + 0.15023086466927\,\mathrm{i}$ |
| | 128 | $-0.11408666704197 + 0.08843477025360\,\mathrm{i}$ | $-0.41153315634037 + 0.15023086466927\,\mathrm{i}$ |
| | 256 | $-0.11408666704197 + 0.08843477025360\,\mathrm{i}$ | $-0.41153315634037 + 0.15023086466927\,\mathrm{i}$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}\binom{-1}{-1}$ | 8 | $-0.06993035625994 - 0.00494886385149\,\mathrm{i}$ | $-0.15519523173526 - 0.06381113465812\,\mathrm{i}$ |
| | 16 | $-0.06992542474012 - 0.00495922623701\,\mathrm{i}$ | $-0.15531063576943 - 0.06382045778201\,\mathrm{i}$ |
| | 32 | $-0.06992536513686 - 0.00495915722265\,\mathrm{i}$ | $-0.15531018795742 - 0.06382061995945\,\mathrm{i}$ |
| | 64 | $-0.06992536513546 - 0.00495915722025\,\mathrm{i}$ | $-0.15531018794952 - 0.06382061995603\,\mathrm{i}$ |
| | 128 | $-0.06992536513546 - 0.00495915722025\,\mathrm{i}$ | $-0.15531018794952 - 0.06382061995603\,\mathrm{i}$ |
| | 256 | $-0.06992536513546 - 0.00495915722025\,\mathrm{i}$ | $-0.15531018794952 - 0.06382061995603\,\mathrm{i}$ |
| $\binom{0}{-1}$ | 8 | $-0.02621322352421 - 0.01126888257812\,\mathrm{i}$ | $-0.04087073023185 - 0.08400502197927\,\mathrm{i}$ |
| | 16 | $-0.02619918794183 - 0.01127817117549\,\mathrm{i}$ | $-0.04091616821299 - 0.08414929250476\,\mathrm{i}$ |
| | 32 | $-0.02619922602963 - 0.01127816256067\,\mathrm{i}$ | $-0.04091588975363 - 0.08414918484102\,\mathrm{i}$ |
| | 64 | $-0.02619922603066 - 0.01127816256089\,\mathrm{i}$ | $-0.04091588974892 - 0.08414918484261\,\mathrm{i}$ |
| | 128 | $-0.02619922603065 - 0.01127816256089\,\mathrm{i}$ | $-0.04091588974892 - 0.08414918484261\,\mathrm{i}$ |
| | 256 | $-0.02619922603065 - 0.01127816256089\,\mathrm{i}$ | $-0.04091588974892 - 0.08414918484261\,\mathrm{i}$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}\binom{1}{-1}$ | 8 | $-0.04652035183988 + 0.02407370530639\,\mathrm{i}$ | $-0.09528794117985 - 0.04971162443640\,\mathrm{i}$ |
| | 16 | $-0.04652686944515 + 0.02408672234876\,\mathrm{i}$ | $-0.09530033643502 - 0.04976490698984\,\mathrm{i}$ |
| | 32 | $-0.04652687150631 + 0.02408662185549\,\mathrm{i}$ | $-0.09530028238565 - 0.04976526574971\,\mathrm{i}$ |
| | 64 | $-0.04652687150802 + 0.02408662185328\,\mathrm{i}$ | $-0.09530028238598 - 0.04976526576056\,\mathrm{i}$ |
| | 128 | $-0.04652687150802 + 0.02408662185328\,\mathrm{i}$ | $-0.09530028238598 - 0.04976526576056\,\mathrm{i}$ |
| | 256 | $-0.04652687150802 + 0.02408662185328\,\mathrm{i}$ | $-0.09530028238598 - 0.04976526576056\,\mathrm{i}$ |

Es soll außerdem die Abhängigkeit vom Parameter $\beta$ untersucht werden, dazu werden an dieser Stelle nicht die Felder $\mathbf{a}_\infty$, $\mathbf{b}_\infty$, sondern $\mathbf{e}_\infty$, $\mathbf{h}_\infty$ betrachtet.

Die folgenden Daten sind beim (TM) für

$$\varepsilon = 1.0, \quad \varepsilon_0 = 1.4, \quad \mu = 1.0, \quad \mu_0 = 1.2, \quad \omega = 1.5,$$

und Einfallsrichtung $\binom{0}{1}$, Beobachtungsrichtung $\hat{x} = \binom{1}{0}$, sowie $n = 32$ bestimmt worden.

| $\beta$ | $\mathbf{e}_\infty(\hat{x})$ | $\mathbf{h}_\infty(\hat{x})$ |
|---|---|---|
| $10^{-1}$ | $-0.2077081450 - 0.1297778411\,\mathrm{i}$ | $0.2200993387 - 0.0919987716\,\mathrm{i}$ |
| $10^{-2}$ | $-0.2988333988 + 0.0262107796\,\mathrm{i}$ | $0.0194877287 - 0.0179263846\,\mathrm{i}$ |
| $10^{-3}$ | $-0.2994275566 + 0.0278939744\,\mathrm{i}$ | $0.0019452908 - 0.0018005373\,\mathrm{i}$ |
| $10^{-4}$ | $-0.2994334682 + 0.0279108150\,\mathrm{i}$ | $0.0001945256 - 0.0001800616\,\mathrm{i}$ |
| $10^{-5}$ | $-0.2994335273 + 0.0279109834\,\mathrm{i}$ | $0.0000194526 - 0.0000180062\,\mathrm{i}$ |
| $10^{-6}$ | $-0.2994335279 + 0.0279109851\,\mathrm{i}$ | $0.0000019453 - 0.0000018006\,\mathrm{i}$ |
| $10^{-7}$ | $-0.2994335279 + 0.0279109851\,\mathrm{i}$ | $0.0000001945 - 0.0000001801\,\mathrm{i}$ |
| 0 | $-0.2994335279 + 0.0279109851\,\mathrm{i}$ | $0.0000000000 - 0.0000000000\,\mathrm{i}$ |

Man erkennt also, daß erwartungsgemäß für $\beta \to 0$ das (TM) zu einem reinen elektrischen Problem wird, die Kopplung sich also immer mehr abschwächt. Eine analoge Beobachtung läßt sich für das (TE) machen.