Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis i

Einleitung iv

I Direktes Problem 1

1 Problemstellung 1

1.1 Chirale Medien 1

1.2 Dreidimensionales Randwertproblem 2

1.3 Zweidimensionales Randwertproblem 3

2 Bohrensche Zerlegung und Darstellung der Lösung 7

2.1 Zerlegung für den dreidimensionalen Fall 7

2.2 Zerlegung für den zweidimensionalen Fall 9

3 Eindeutigkeit 10

3.1 Eindeutigkeit für das dreidimensionale Problem 11

3.2 Eindeutigkeit für das zweidimensionale Problem 13

4 Existenz 15

4.1 Existenz einer Lösung für das dreidimensionale Problem 15

4.2 Existenz einer Lösung für das zweidimensionale Problem 24

5 Formulierung als Streuproblem **30**

5.1 Dreidimensionales Streuproblem 30

5.2 Zweidimensionales Streuproblem 31

6 Das Fernfeld **33**

6.1 Reziprozität im dreidimensionalen Fall 34

6.2 Reziprozität im zweidimensionalen Fall 38

6.3 Fréchet-Ableitung des Fernfeldes nach dem Rand im $\mathbb{R}^2$ 39

7 Numerische Behandlung für das zweidimensionale Problem **49**

7.1 Parametrisierung der Integraloperatoren 49

7.2 Nyström-Methode 53

7.3 Diskussion der Konvergenz 54

7.4 Numerische Testbeispiele 55

II Inverses Streuproblem **60**

8 Eindeutigkeit des inversen Streuproblems **60**

8.1 Hilfssätze 61

8.2 Eindeutigkeit beim zweidimensionalen Problem 62

9 Numerische Ergebnisse für das inverse Problem im $\mathbb{R}^2$ **70**

9.1 Newtonverfahren und Regularisierung 70

9.2 Modifikation in der Regularisierung 73

9.3 Die rechte Seite und der hypersinguläre Operator T 74

9.4 Rekonstruktionen 78

A Anhang **84**

A.1 Beweis zu Satz 6.8 84

A.2 Ein Alternativ-Beweis zu Satz 8.4 89

A.3 Fréchet-Ableitung 90

A.3.1 Allgemeines zur Fréchet-Differenzierbarkeit 90

A.3.2 Ein Differentiationssatz 92

A.3.3 Behandlung des zweidimensionalen Falles 92

Literaturverzeichnis **96**

Teil II Inverses Streuproblem

In diesem Teil soll das inverse Streuproblem behandelt werden. Es sind mehrere inverse Fragestellungen, wie die nach der Ermittlung der Gestalt oder einzelner physikalischer Größen (Chiralität, Permeabilität, Dielektrizität) im Inneren des Streukörpers, denkbar, wobei man geeignete Daten im Außenraum, die durch Messungen ermittelt werden können, zur Verfügung hat.

Hier soll die Frage nach der Gestalt des Streukörpers unter Kenntnis der physikalischen Parameter behandelt werden. Als Daten stehen Fernfelder zu gestreuten Feldern bei aus unterschiedlichen Richtungen einfallenden ebenen Wellen zur Verfügung.

Es werden sowohl das Problem der Eindeutigkeit dieser Aufgabe als auch seine numerische Lösung untersucht.

8 Eindeutigkeit des inversen Streuproblems

In diesem Abschnitt wird die Eindeutigkeit des Streugebietes unter geeigneten Voraussetzungen gezeigt. Zunächst wird ein Hilfsresultat bewiesen, das sowohl für den zwei- als auch den dreidimensionalen Fall Gültigkeit hat. Dann wird der Beweis für den zweidimensionalen Fall geführt.

Der Beweis für das dreidimensionale Problem ist leider nicht gelungen, da eine Lücke im Beweis nicht geschlossen werden konnte. Es wurde, wie es hier für die zweidimensionale Aufgabe beschrieben wird oder sich auch in [15], [7], [8] findet, versucht, einen Widerspruch zur Existenz zweier verschiedener Körper mit identischen Fernfelddaten zu erzeugen, indem man eine Punktquelle gegen den Rand des einen Streukörpers streben läßt und die Wohlgestelltheit des Problems bezüglich des anderen ausnutzt. Dabei tritt bei Transmissionsproblemen die Schwierigkeit auf, die auftretende Singularität im inneren geeignet zu charakterisieren. Dabei macht man von Eigenschaften der Abbildung von Dirichlet- nach Neumann-Daten, oder umgekehrt, beziehungsweise bei elektromagnetischen Problemen von elektrischen nach magnetischen Randdaten, oder umgekehrt, entsprechender innerer Aufgaben Gebrauch. Für die hier auftretende innere Aufgabe mit $\operatorname{rot}\mathbf{E}_0 - ik_0\gamma^2\mathbf{H}_0 = k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{E}_0$, $\operatorname{rot}\mathbf{H}_0 + ik_0\gamma^2\mathbf{E}_0 = k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{H}_0$ mit Chiralität ist dies allerdings nicht gelungen.

8.1 Hilfssätze

Für den Beweis des Eindeutigkeitssatzes benötigt man die Approximation von singulären Quellen durch einfallende ebene Wellen. Dazu verwendet man folgenden Hilfssatz.

Lemma 8.1 *Es sei D ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^m$, $m = 2, 3$, mit C^2-glattem Rand, so daß $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ zusammenhängend ist. Weiter sei $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ Lösung der Helmholtzgleichung $\triangle u + \kappa^2 u = 0$. Es bezeichnen*

$$\mathbb{V} := \operatorname{span} \left\{ u^i(.;d) \mid d \in \Omega \right\}$$

den Raum, der von den ebenen Wellen $u^i(x,d) = e^{i\kappa x \cdot d}$ aufgespannt wird, und Q eine beliebige kompakte Teilmenge von D. Dann gibt es eine Folge $(v_n) \subset \mathbb{V}$ mit der Eigenschaft

$$\|D^\sigma v_n - D^\sigma u\|_{C(Q)} \to 0, \quad n \to \infty$$

für alle Multiindizes $\sigma \in \mathbb{N}_0^m$, wobei D^σ den Differentialoperator

$$\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2}} \quad \textit{für} \quad m = 2 \qquad \textit{bzw.} \qquad \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \partial x_3^{\sigma_3}} \quad \textit{für} \quad m = 3$$

bezeichnet.

Beweis Der Beweis findet sich in [15, Lemma 3.2], hier sollen nur die wesentlichen Schritte dargestellt werden. Als erstes wird die Vollständigkeit der Menge

$$\mathbb{H} := \left\{ \frac{\partial u^i(.;d)}{\partial \nu} - i u^i(.;d) \mid d \in \Omega \right\}$$

in $L^2(\partial D)$ gezeigt. Sei $\varphi \in L^2(\partial D)$ so, daß $\int_{\partial D} \bar{\varphi}(y) \left\{ \frac{\partial u^i(y;d)}{\partial \nu(y)} - i u^i(y;d) \right\} \mathrm{d}s(y) = 0$ für alle $d \in \Omega$ gilt. Dieses Integral ist gerade das Fernfeld zum gemischten Einfach- und Doppelschichtpotential $v(x) := \int_{\partial D} \bar{\varphi}(y) \left\{ \frac{\partial \Phi_\kappa(x,y)}{\partial \nu(y)} - i \Phi_\kappa(x,y) \right\} \mathrm{d}s(y)$, $x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$. Wegen des Rellich-Lemmas verschwindet v in $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$. Mittels der L^2-Sprungbeziehungen, der Invertierbarkeit von $I + K_\kappa - i S_\kappa$ und zweimaliger Anwendung der Fredholmschen Alternative kann auf $\varphi = 0$ geschlossen werden, womit die Vollständigkeit von $\mathbb{H}$ in $L^2(\partial D)$ gezeigt ist.

Es existiert dann eine Folge $(v_n) \subset \mathbb{V}$ mit

$$\left\| \frac{\partial v_n}{\partial \nu} - i v_n - \frac{\partial u}{\partial \nu} + i u \right\|_{L^2(\partial D)} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Man definiert eine Folge $w_n(x) := \int_{\partial D} \psi_n(y)\Phi_\kappa(x,y)\,\mathrm{d}\,s(y)$, $x \in D$, von Einfachschichtpotentialen, wobei die Dichten $\psi_n \in C(\partial D)$ Lösungen der Integralgleichung $\psi_n + K_\kappa^* \psi_n - iS_\kappa \psi_n = 2f_n$ mit $f_n := \frac{\partial v_n}{\partial \nu} - iv_n - \frac{\partial u}{\partial \nu} + iu$ sind. Aus der Eindeutigkeit des Impedanzproblems ergibt sich $w_n = v_n - u$. Daraus folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\|D^\sigma v_n - D^\sigma u\|_{C(Q)} = \|D^\sigma w_n\|_{C(Q)} \\
&\leqslant \sup_{x\in Q} \int_{\partial D} 2\left|((I + K_\kappa^* - iS_\kappa)^{-1} f_n)(y)\right| \, |D^\sigma \Phi_k(x,y)| \, \mathrm{d}s(y) \\
&\leqslant \|D^\sigma \Phi_\kappa(.,.)\|_{C(\mathrm{Q}\times\partial D)} \, |\partial D|^{1/2} \left\|(I + K_\kappa^* - iS_\kappa)^{-1} f_n\right\|_{L^2(\partial D)} \to 0, \quad n \to \infty,
\end{aligned}$$

wobei die Beschränktheit von $(I + K_\kappa^* - iS_\kappa)^{-1}$ in $L^2(\partial D)$ und $\|f_n\|_{L^2(\partial D)} \to 0$, $n \to \infty$ ausgenutzt werden. **q. e. d.**

8.2 Eindeutigkeit beim zweidimensionalen Problem

Für die Untersuchung der Eindeutigkeit wird hier das transversalmagnetische Streuproblem (TM) (5.6 a), (5.7) in der Bohrenschen Zerlegung untersucht, wobei im folgenden die Abhängigkeit der betrachteten Felder von der Einfallsrichtung $d \in \Omega := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| = 1\}$ als zweites Argument gekennzeichnet wird, so daß $\mathbf{a}^i(x;d) = \mathbf{b}^i(x;d) = ik(\mu_0/\mu)^{1/2} e^{ikx\cdot d}$ die einfallenden Felder sind.

Weiter wird o.B.d.A. vorausgesetzt, daß die inneren Permeabilitäten μ_0 für alle Streukörper übereinstimmen. Dies läßt sich durch eine Ersetzung aller auftretender Felder u_j durch $(\mu_{0,j})^{-1/2} u_j$ aufgrund der Linearität des Streuproblems erreichen, dabei bezeichnet j die Abhängigkeit vom entsprechenden Streugebiet D_j. Hierdurch wird die durch die Bohrensche Zerlegung (2.8) künstlich eingeführte zusätzliche Abhängigkeit der einfallenden Wellen von μ_0 wieder „entfernt“. Man beachte dabei, daß nach (5.4) für das (TM) $h^i = 0$ gilt, die durch (2.8) auftretende Abhängigkeit von ε_0 also nicht vorhanden ist.

Die gleichen Schlüsse sind auch für das transversalelektrische Streuproblem durchführbar. Will man dort die Beweise analog nachvollziehen, ist o.B.d.A. die Übereinstimmung der inneren Dielektrizitäten ε_0 vorauszusetzen.

Desweiteren sei in den betrachteten Höldernormen α eine positive Konstante echt kleiner als eins. Diese Voraussetzung ist erforderlich, um später einen Widerspruch zwischen (8.9 a), (8.9 b) und (8.10) zu erhalten.

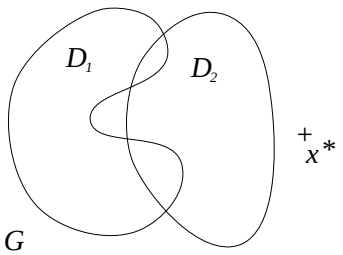
Lemma 8.2 *Es seien D_1 und D_2 zwei Streugebiete und G die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2\right)$. Weiter seien $\mathbf{a}_{\infty,1}(.;d)$, $\mathbf{b}_{\infty,1}(.;d)$ bzw. $\mathbf{a}_{\infty,2}(.;d)$, $\mathbf{b}_{\infty,2}(.;d)$ die Fernfelder der zu D_1 bzw. D_2 gehörigen Streuprobleme bei einfallenden Wellen $\mathbf{a}^i(.;d)$, $\mathbf{b}^i(.;d)$, $d \in \Omega$. Aus $\mathbf{a}_{\infty,1}(\hat{x};d) = \mathbf{a}_{\infty,2}(\hat{x};d)$ und $\mathbf{b}_{\infty,1}(\hat{x};d) = \mathbf{b}_{\infty,2}(\hat{x};d)$ für alle $\hat{x} \in \Omega$ folgt dann*

$$\mathbf{a}_1^s(x;d) = \mathbf{a}_2^s(x;d), \qquad \mathbf{b}_1^s(x;d) = \mathbf{b}_2^s(x;d), \qquad x \in G.$$

Beweis Wegen des Rellich-Lemmas impliziert das Verschwinden von $\mathbf{a}_{\infty,1}(\hat{x};d) - \mathbf{a}_{\infty,2}(\hat{x};d)$, $\hat{x} \in \Omega$, daß auch $\mathbf{a}_1^s(x;d) - \mathbf{a}_2^s(x;d)$, $x \in G$, verschwindet, das analoge Resultat gilt für die $\mathbf{b}-$Felder. **q. e. d.**

Lemma 8.3 *Es seien die Bezeichnungen wie im vorangegangenen Lemma, es sei $x^* \in G$. Die Streukörper D_1 und D_2 seien derart, daß (bei fester Wellenzahl k) für alle Einfallsrichtungen die Fernfelder übereinstimmen, das heißt für alle $d \in \Omega$ gilt*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\infty,1}(.;d) &= \mathbf{a}_{\infty,2}(.;d), \\ \mathbf{b}_{\infty,1}(.;d) &= \mathbf{b}_{\infty,2}(.;d). \end{aligned}$$



Für gegebenes $x^* \in G$ seien $\mathbf{a}_j^*, \mathbf{b}_j^*, \mathbf{a}_{0,j}^*, \mathbf{b}_{0,j}^*$, $j = 1,2$, Lösungen des Streuproblems mit singulärer Quelle $\mathbf{a}^i = \mathbf{b}^i = u(.,x^*) := ik(\mu_0/\mu)^{1/2}\Phi(.,x^*)$, also

$$\left(\mathbf{a}_{0,j}^*, \mathbf{b}_{0,j}^*, \mathbf{a}_j^*, \mathbf{b}_j^*\right)^\top = \mathcal{L}_j^{Bs}\left(u(.,x^*), u(.,x^*)\right)^\top,$$

wobei der Index $j = 1,2$ am gemäß (5.8) definierten Operator $\mathcal{L}^{Bs}$ die Abhängigkeit vom Gebiet D_j einschließlich der inneren Paramter $\alpha_{\mathbf{A},j}$, $\alpha_{\mathbf{B},j}$, $\xi_{+,j}$, $\xi_{-,j}$ kennzeichnet.

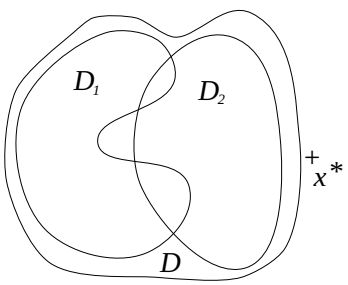
Dann gelten in G die Übereinstimmungen

$$\mathbf{a}_1^* = \mathbf{a}_2^* \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b}_1^* = \mathbf{b}_2^*.$$

Beweis Man wählt ein C^2-glattes Gebiet D so, daß $\mathbb{R}^2 \setminus D$ zusammenhängend ist und $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2 \subset D$ sowie $x^* \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ gilt. Es existiert nach Lemma 8.1 eine Folge $(u_n^i)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{V}$ mit

$$u_n^i \to u(.,x^*)$$

für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$ als kompakter Teilmenge von D. Da die u_n^i Linearkombinationen ebener Wellen sind, stimmen die zugehörigen Streufelder von



$$\left(\mathbf{a}_{0,j;n}, \mathbf{b}_{0,j;n}, \mathbf{a}_{j;n}^s, \mathbf{b}_{j;n}^s\right)^\top = \mathcal{L}^{Bs}\left(u_n^i, u_n^i\right)^\top$$

für $j = 1$ beziehungsweise $j = 2$ und alle $n \in \mathbb{N}$ nach Lemma 8.2 auf G überein. Wegen der korrekten Gestelltheit des Problems und der gleichmäßigen Konvergenz der Randwerte auf ∂D_j, $j = 1, 2$, gilt

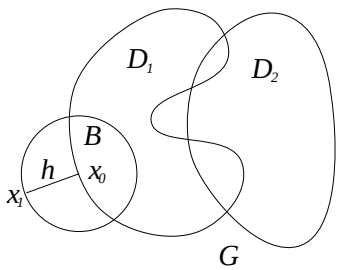
$$\mathbf{a}^s_{j;n} \to \mathbf{a}^*_j\,, \qquad \mathbf{b}^s_{j;n} \to \mathbf{b}^*_j\,, \qquad n \to \infty$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G. Da dort $\mathbf{a}^s_{1;n} = \mathbf{a}^s_{2;n}$ und $\mathbf{b}^s_{1;n} = \mathbf{b}^s_{2;n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung. **q. e. d.**

Satz 8.4 *Es seien D_1 und D_2 zwei Streugebiete, so daß die Fernfelder des zugehörigen Streuproblems bei fester Wellenzahl und allen Einfallsrichtungen einfallender ebener Wellen übereinstimmen. Weiter sei vorausgesetzt, daß eine der Bedingungen $\alpha_{\mathbf{A}} \neq k\xi$ oder $\alpha_{\mathbf{B}} \neq k\xi$ erfüllt ist.*[1] *Dann gilt $D_1 = D_2$.*

Beweis Angenommen es gilt $D_1 \neq D_2$. Dann existiert ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Punkt $x_0 \in \partial G$ mit $x_0 \in \partial D_1$ und $x_0 \notin \bar{D}_2$. Es sei $h > 0$ so gewählt, daß die Folge

$$x_n := x_0 + \frac{h}{n}\nu(x_0), \quad n = 1, 2, ... \tag{8.1}$$



in G enthalten ist und für die abgeschlossene Kreisscheibe $B := \{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leqslant h \,\}$ die Beziehung $B \cap \bar{D}_2 = \emptyset$ gilt. Außerdem gelte für ein $R > h$, daß für $B_R := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leqslant R\}$ der Durchschnitt $D_1 \cap B_R$ eine zusammenhängende Teilmenge von D_1 ist.

Betrachtet man die Lösungen $\mathbf{a}^s_{j;n}, \mathbf{b}^s_{j;n}, \mathbf{a}_{0,j;n}, \mathbf{b}_{0,j;n}$, zu den beiden Streukörpern D_j, $j = 1, 2$, mit den Quellen

$$\mathbf{a}^i_n = \mathbf{b}^i_n = u(.; x_n) = ik(\mu_0/\mu)^{1/2}\Phi_k(.; x_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

so gilt nach Lemma 8.3

$$\mathbf{a}^s_{1;n}\big|_G = \mathbf{a}^s_{2;n}\big|_G =: \mathbf{a}^s_n, \qquad \mathbf{b}^s_{1;n}\big|_G = \mathbf{b}^s_{2;n}\big|_G =: \mathbf{b}^s_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $B \cap \bar{D}_2 = \emptyset$ gilt für die rechten Seiten gemäß (5.7)

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{a};n} &:= \xi_{+,2}\mathbf{a}^i_n + \xi_{-,2}\mathbf{b}^i_n, & N_{\mathbf{a};n} &:= \tfrac{\alpha_{\mathbf{A},2}}{k}\tfrac{\partial \mathbf{a}^i_n}{\partial \nu}, \\ D_{\mathbf{b};n} &:= \xi_{-,2}\mathbf{a}^i_n + \xi_{+,2}\mathbf{b}^i_n, & N_{\mathbf{b};n} &:= \tfrac{\alpha_{\mathbf{B},2}}{k}\tfrac{\partial \mathbf{b}^i_n}{\partial \nu} \end{aligned}$$

[1] Wäre keine dieser beiden Bedingungen erfüllt, so folgte aus $\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} = \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} = \xi$ wegen (1.4), (2.3), (2.12), daß β verschwindet und μ mit μ_0 übereinstimmt, so daß es sich nicht um ein „echtes“ Transmissionsproblem handelt.
Im transversalelektrischen Fall ist $\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \neq \xi^{-1}$ oder $\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \neq \xi^{-1}$ zu fordern. Die Annahme des Gegenteils führt dort auf $\beta = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$.

die Ungleichung

$$\|D_{\mathbf{a};n}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D_2)} + \|D_{\mathbf{b};n}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D_2)} + \|N_{\mathbf{a};n}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D_2)} + \|N_{\mathbf{b};n}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D_2)} \leqslant c_1,\ n = 1, 2, ...,$$

mit einer geeigneten Konstanten c_1, woraus mit der korrekten Gestelltheit (4.28) des direkten Problems

$$\|\mathbf{a}_n^s\|_{C^{1,\alpha}(G\cap B)} + \|\mathbf{b}_n^s\|_{C^{1,\alpha}(G\cap B)} \leqslant c_2, \quad n = 1, 2, ..., \tag{8.2}$$

folgt.

Man untersucht nun das Streuproblem bezüglich D_1 – der Index 1 wird im folgenden weggelassen.[2] Mit dem Ziel, das singuläre Verhalten im Inneren näher zu charakterisieren, werden modifizierte rechte Seiten

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{a};n} &= D_{\mathbf{a};n} - s\Phi_{\alpha_\mathbf{A}}(.,x_n), & \tilde{N}_{\mathbf{a};n} &= N_{\mathbf{a};n} - s\frac{\partial\Phi_{\alpha_\mathbf{A}}(.,x_n)}{\partial\nu}, \\ \tilde{D}_{\mathbf{b};n} &= D_{\mathbf{b};n} - t\Phi_{\alpha_\mathbf{A}}(.,x_n), & \tilde{N}_{\mathbf{b};n} &= N_{\mathbf{b};n} - t\frac{\partial\Phi_{\alpha_\mathbf{A}}(.,x_n)}{\partial\nu} \end{aligned}$$

mit noch frei zu wählenden Parametern $s, t \in \mathbb{C}$ betrachtet. Diese führen auf die Lösungen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_n^s &= \mathbf{a}_n^s, & \tilde{\mathbf{a}}_{0;n} &= \mathbf{a}_{0;n} - s\Phi_{\alpha_\mathbf{A}}(.,x_n), \\ \tilde{\mathbf{b}}_n^s &= \mathbf{b}_n^s, & \tilde{\mathbf{b}}_{0;n} &= \mathbf{b}_{0;n} - t\Phi_{\alpha_\mathbf{B}}(.,x_n). \end{aligned}$$

Wählt man

$$s = t = ik\xi(\mu_0/\mu)^{1/2}, \tag{8.3}$$

so folgt

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{a};n} &= ik\xi(\mu_0/\mu)^{1/2}\left\{\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{\alpha_\mathbf{A}}(.,x_n)\right\}, \\ \tilde{D}_{\mathbf{b};n} &= ik\xi(\mu_0/\mu)^{1/2}\left\{\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{\alpha_\mathbf{B}}(.,x_n)\right\}, \\ \tilde{N}_{\mathbf{a};n} &= i(\mu_0/\mu)^{1/2}\left\{\alpha_\mathbf{A}\frac{\partial\Phi_k(.,x_n)}{\partial\nu} - k\xi\frac{\partial\Phi_{\alpha_\mathbf{A}}(.,x_n)}{\partial\nu}\right\}, \qquad (8.4\,\text{a}) \\ \tilde{N}_{\mathbf{b};n} &= i(\mu_0/\mu)^{1/2}\left\{\alpha_\mathbf{B}\frac{\partial\Phi_k(.,x_n)}{\partial\nu} - k\xi\frac{\partial\Phi_{\alpha_\mathbf{B}}(.,x_n)}{\partial\nu}\right\}. \qquad (8.4\,\text{b}) \end{aligned}$$

Die Differenzen $\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{\alpha_\mathbf{A}}(.,x_n)$, $\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{\alpha_\mathbf{B}}(.,x_n)$ sind gleichmäßig für alle $n \in \mathbb{N}$ an der Stelle x_0 beschränkt, $\tilde{N}_{\mathbf{a};n}$, $\tilde{N}_{\mathbf{b};n}$ besitzen dort Singularitäten der Ordnung n, wie noch näher ausgeführt werden wird.

Eine alternative Beweis-Variante, in der durch andere Wahl von s und t eine Singularität bei den Dirichlet-Werten auftritt, ist im Anhang A.2 zu finden.

[2] Man beachte, daß insbesondere auch $\alpha_\mathbf{A}$, $\alpha_\mathbf{B}$, ξ, $\xi_\pm$ zu den Größen $\varepsilon_{0,1}$, $\mu_{0,1}$, β_1 definiert sind.

Nach dem modifizierten Wohlgestelltheitsresultat (4.33) gilt für ein hinreichend kleines $r > 0$ und Kreise B_r, $B_{r/2}$ um x_0 mit Radien r bzw. $r/2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_r)} + \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_r)} \\
&\leqslant\ c\Big\{\|\tilde{N}_{\mathbf{a};n}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D\setminus B_{r/2})} + \|\tilde{N}_{\mathbf{b};n}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D\setminus B_{r/2})} \\
&\quad + \|\tilde{D}_{\mathbf{a};n}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D\setminus B_{r/2})} + \|\tilde{D}_{\mathbf{b};n}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D\setminus B_{r/2})} \\
&\quad + \|\tilde{N}_{\mathbf{a};n}\|_{L^2(\partial D)} + \|\tilde{N}_{\mathbf{b};n}\|_{L^2(\partial D)} + \|\tilde{D}_{\mathbf{a};n}\|_{L^2(\partial D)} + \|\tilde{D}_{\mathbf{b};n}\|_{L^2(\partial D)}\Big\}. \qquad (8.5)
\end{aligned}$$

Dabei sind die auftretenden Höldernormen auf $\partial D \setminus B_{r/2}$ gleichmäßig für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt, ebenso die L^2-Normen von $\tilde{D}_{\mathbf{a};n}$, $\tilde{D}_{\mathbf{b};n}$. Für die verbleibenden zwei Terme erhält man aufgrund der Singularität der Ordnung n nach dem nachfolgenden Lemma 8.5 a) eine Abschätzung

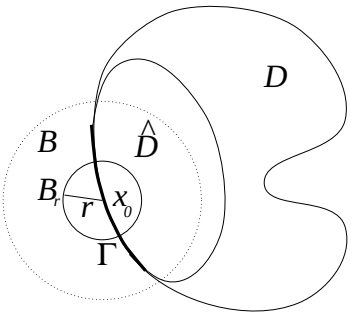
$$\|\tilde{N}_{\mathbf{a};n}\|_{L^2(\partial D)} + \|\tilde{N}_{\mathbf{b};n}\|_{L^2(\partial D)} \leqslant c_3' n^{1/2},$$

so daß insgesamt

$$\|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_r)} + \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_r)} \leqslant c_3 n^{1/2}, \qquad n = 1, 2, ... \qquad (8.6)$$

mit einer geeigneten Konstanten c_3 gilt.

Man wählt nun ein hinreichend kleines, C^2-glattes Gebiet $\hat{D} \subset D$ so, daß $\alpha_{\mathbf{A}}^2$, $\alpha_{\mathbf{B}}^2$ keine Dirichlet-Eigenwerte von $-\triangle$ sind und für $\Gamma := \partial D \cap \partial\hat{D}$ die Bedingungen $x_0 \in \Gamma$, $\Gamma \subset B$, $\nu(x_0)\cdot\nu(y) \geqslant \frac{1}{2}\,\forall y \in \Gamma$ erfüllt sind. Weiter sei r so, daß $\partial\hat{D} \setminus \Gamma \subset \bar{D} \setminus B_r$.[3]
Mit [8, Lemma 3.2] folgt dann für $x_0 \in \Gamma_0 \subset \Gamma$, $\operatorname{dist}(\Gamma_0, \partial\hat{D} \setminus \Gamma) > 0$ die Existenz einer Konstanten c_4', so daß



$$\begin{aligned}
\left\|\tfrac{\partial\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial\nu}\right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} &\leqslant c_4'\left\{\|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} + \|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C(\partial\hat{D})}\right\}, \\
\left\|\tfrac{\partial\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial\nu}\right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} &\leqslant c_4'\left\{\|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} + \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C(\partial\hat{D})}\right\},
\end{aligned}$$

beziehungsweise einer Konstanten c_4, so daß

$$\begin{aligned}
\left\|\tfrac{\partial\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial\nu}\right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} &\leqslant c_4\left\{\|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} + \|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C(\partial\hat{D}\setminus\Gamma)}\right\}, \\
\left\|\tfrac{\partial\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial\nu}\right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} &\leqslant c_4\left\{\|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} + \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C(\partial\hat{D}\setminus\Gamma)}\right\}
\end{aligned} \qquad (8.7)$$

[3] Die Existenz von $\hat{D}$ und passendem Γ wird durch Lemma 3.26 beziehungsweise Formel (2.11) in [2] gesichert.
Wollte man etwas genauer sein, so müßten erst nach dieser Wahl von r die Beziehungen (8.5) und (8.6) hergeleitet werden.

gilt. Auf $\Gamma \subset \partial D$ ist

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}_{0;n} &= \xi_+ \mathbf{a}_n^s + \xi_- \mathbf{b}_n^s + ik\xi(\mu_0/\mu)^{1/2}\left\{\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{\alpha_\mathbf{A}}(.,x_n)\right\},\\ \tilde{\mathbf{b}}_{0;n} &= \xi_- \mathbf{a}_n^s + \xi_+ \mathbf{b}_n^s + ik\xi(\mu_0/\mu)^{1/2}\left\{\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{\alpha_\mathbf{B}}(.,x_n)\right\},\end{aligned}$$

woraus mit Hilfe von (8.2) und Lemma 8.5 b)

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} &\leqslant (|\xi_+| + |\xi_-|)c_2 + |k\xi(\tfrac{\mu_0}{\mu})^{1/2}|\,\|\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{\alpha_\mathbf{A}}(.,x_n)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \leqslant c_5 n^\alpha,\\ \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} &\leqslant (|\xi_+| + |\xi_-|)c_2 + |k\xi(\tfrac{\mu_0}{\mu})^{1/2}|\,\|\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{\alpha_\mathbf{B}}(.,x_n)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \leqslant c_5 n^\alpha\end{aligned} \tag{8.8}$$

mit einer geeigneten Konstanten c_5 folgt.

Die Beziehungen $\tilde{N}_{\mathbf{a};n} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial \nu} - \frac{\alpha_\mathbf{A}}{k}\frac{\partial \mathbf{a}_n^s}{\partial \nu}$ und $\tilde{N}_{\mathbf{b};n} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial \nu} - \frac{\alpha_\mathbf{B}}{k}\frac{\partial \mathbf{b}_n^s}{\partial \nu}$ ergeben mit der Dreiecksungleichung in Kombination mit den Abschätzungen (8.6), (8.7), (8.8) für den ersten Summanden und (8.2) für den zweiten die Ungleichungen

$$\|\tilde{N}_{\mathbf{a};n}\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} \leqslant \left\|\frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial \nu}\right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} + \left|\frac{\alpha_\mathbf{A}}{k}\right| \left\|\frac{\partial \mathbf{a}_n^s}{\partial \nu}\right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} \leqslant c_4\{c_5 n^\alpha + c_3 n^{1/2}\} + c_6, \tag{8.9 a}$$

$$\|\tilde{N}_{\mathbf{b};n}\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} \leqslant \left\|\frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial \nu}\right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} + \left|\frac{\alpha_\mathbf{B}}{k}\right| \left\|\frac{\partial \mathbf{b}_n^s}{\partial \nu}\right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} \leqslant c_4\{c_5 n^\alpha + c_3 n^{1/2}\} + c_6, \tag{8.9 b}$$

wobei $c_6 = c_2 \max\{|\frac{\alpha_\mathbf{A}}{k}|, |\frac{\alpha_\mathbf{B}}{k}|\}$ ist.

Andererseits gilt aber

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial \Phi_\kappa(.,x_n)}{\partial \nu}\right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} &\geqslant |\nu(x_0)\cdot \operatorname{grad}\Phi_\kappa(x_0,x_n)|\\ &= \frac{\kappa}{4}\left|H_1^1(\kappa|x_0-x_n|)\,\nu(x_0)\cdot\frac{x_0-x_n}{|x_0-x_n|}\right| = \frac{\kappa}{4}\left|H_1^1\left(\frac{\kappa h}{n}\right)\right| \geqslant c_7' n,\end{aligned}$$

da $H_1^1(t)$ sich bei $t=0$ wie t^{-1} verhält.

Falls nun $\alpha_\mathbf{A} \neq k\xi$ beziehungsweise $\alpha_\mathbf{B} \neq k\xi$ erfüllt ist, so gibt es wegen (8.4 a), (8.4 b) eine Konstante $c_7 > 0$, so daß

$$\left|\tilde{N}_{\mathbf{a},n}(x_0)\right| \geqslant c_7 n \qquad \text{bzw.} \qquad \left|\tilde{N}_{\mathbf{b},n}(x_0)\right| \geqslant c_7 n \tag{8.10}$$

gilt. Dies steht aber im Widerspruch zu (8.9 a) oder (8.9 b).

Damit ist die Annahme der Existenz zweier verschiedener Streukörper mit gleichen Fernfeldern zum Widerspruch geführt und alles gezeigt. **q. e. d.**

Lemma 8.5 *Seien D, Γ und x_n, $n \in \mathbb{N}_0$, wie im vorangegangenen Satz und $k, \kappa > 0$. Dann gilt*

$$a) \qquad \left\| \frac{\partial \Phi_\kappa(.,x_n)}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\partial D)} \leqslant cn^{1/2}, \qquad n = 1,2,...,$$

und

$$b) \qquad \|\Phi_\kappa(.,x_n) - \Phi_k(.,x_n)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \leqslant cn^{\alpha}, \qquad n = 1,2,...,$$

mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$.

Beweis

a) Es gilt für $n = 1,2,...$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial \Phi_\kappa(.,x_n)}{\partial \nu} \right\|^2_{L^2(\partial D)} &= \int_{\partial D} |\nu(y) \cdot \operatorname{grad}_y \Phi_\kappa(y,x_n)|^2 \, \mathrm{d}s(y) \\
&= \int_{\partial D} \frac{\kappa^2}{16} \left| H_1^1(\kappa|y-x_n|) \frac{\nu(y)\cdot(y-x_n)}{|y-x_n|} \right|^2 \mathrm{d}s(y) \\
&\leqslant \int_{\partial D} \frac{\kappa^2}{16} \left| H_1^1(\kappa|y-x_n|) \right|^2 \mathrm{d}s(y) \\
&\leqslant c_1 + c_2 \int_{\partial D \cap U(x_0)} \frac{\mathrm{d}s(y)}{|y-x_n|^2},
\end{aligned}$$

wobei $U(x_0) = \{z(t) | t \in [-\delta, \delta]\}$ eine Umgebung von x_0 ist, in der

$$|z(t) - x_n|^2 \geqslant \frac{1}{2} \left(t^2 + \left(\frac{h}{n} \right)^2 \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei bezeichnet $z(.)$ die Parametrisierung des Randes nach der Bogenlänge. Solch eine Umgebung existiert wegen der vorausgesetzten C^2-Glätte von ∂D.

Dann folgt

$$\int_{\partial D \cap U(x_0)} \frac{\mathrm{d}s(y)}{|y-x_n|^2} \leqslant 4 \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \left(\frac{h}{n}\right)^2} = \frac{4n}{h} \left[\arctan \frac{nt}{h} \right]_{-\delta}^{\delta} \leqslant c_3 n.$$

Insgesamt ergibt sich also die Behauptung a).

b) Nach der Wahl von Γ gilt $\nu(x_0) \cdot \nu(y) \geqslant \frac{1}{2}$ für alle $y \in \Gamma$. Mit geometrischen Überlegungen folgt $\operatorname{dist}(x_n, \Gamma) \geqslant \frac{h}{2n}$, $n = 1,2,....$ Weiter gilt

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_\kappa(.,x_n) - \Phi_k(.,x_n)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \\
&\leqslant c_1 \Big\{ \|\Phi_\kappa(.,x_n) - \Phi_k(.,x_n)\|_{C(\Gamma)} + \|\operatorname{grad}[\Phi_\kappa(.,x_n) - \Phi_k(.,x_n)]\|_{C(\Gamma)} \\
&\qquad + |\operatorname{grad}[\Phi_\kappa(.,x_n) - \Phi_k(.,x_n)]|_{\alpha,\Gamma} \Big\},
\end{aligned}$$

wobei die ersten beiden Summanden gleichmäßig für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt bleiben und $|.|_{\alpha,\Gamma}$ die α-Halbnorm auf Γ bezeichnet. Für diese gilt

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{grad}\,[\Phi_\kappa(.,x_n) - \Phi_k(.,x_n)]|_{\alpha,\Gamma} \\
&= \sup_{\substack{y\neq z \\ y,z\in\Gamma}} \frac{|\mathrm{grad}\,\{[\Phi_\kappa(y,x_n) - \Phi_k(y,x_n)] - [\Phi_\kappa(z,x_n) - \Phi_k(z,x_n)]\}|}{|y-z|^\alpha} \\
&\leqslant \left(\frac{h}{4n}\right)^{1-\alpha} \sup_{x\in S_n} |\mathrm{grad}\,\mathrm{grad}\,[\Phi_\kappa(x,x_n) - \Phi_k(x,x_n)]| \\
&\quad +2\left(\frac{h}{4n}\right)^{-\alpha} \sup_{x\in\Gamma, n\in\mathbb{N}} |\mathrm{grad}\,[\Phi_\kappa(x,x_n) - \Phi_k(x,x_n)]|,
\end{aligned}$$

wobei für die Supremumbildung die Menge $\{(y,z) \in \Gamma \times \Gamma \mid y \neq z\}$ zerlegt wurde in $\{(y,z) \in \Gamma \times \Gamma \mid |y-z| < h/4n\}$ und $\{(y,z) \in \Gamma \times \Gamma \mid |y-z| \geqslant h/4n\}$. Für den hier entstehenden ersten Anteil wurde der Mittelwertsatz angewendet. Dabei bezeichnet

$$S_n := \cup_{x\in\Gamma} B(x, h/4n)$$

und garantiert, daß für $y, z \in \Gamma$, $|y-z| < h/4n$ die Verbindungsstrecke zwischen y und z ganz in S_n liegt. Eine detailliertere Betrachtung der Ableitungen der Grundlösung zeigt, daß dann

$$|\mathrm{grad}\,[\Phi_\kappa(.,x_n) - \Phi_k(.,x_n)|_{\alpha,\Gamma} \leqslant \left(\frac{h}{4n}\right)^{1-\alpha} \sup_{x\in S_n} \frac{c_2}{|x-x_n|} + c_3\left(\frac{h}{4n}\right)^{-\alpha}$$

gilt. Nach der Wahl von Γ ist für alle $x \in S_n$ und ein zugehöriges $y_x \in \Gamma$ mit $x \in B(y_x, h/4n)$ die Abschätzung

$$|x-x_n| \geqslant \Big||x_n - y_x| - |x-y_x|\Big| \geqslant \frac{h}{2n} - \frac{h}{4n} = \frac{h}{4n},$$

erfüllt, was

$$\sup_{x\in S_n} \frac{1}{|x-x_n|} \leqslant \frac{4n}{h}$$

impliziert. Insgesamt folgt also

$$|\mathrm{grad}\,(\Phi_\kappa(.,x_n) - \Phi_k(.,x_n))|_{\alpha,\Gamma} \leqslant c_2\left(\frac{h}{4n}\right)^{1-\alpha} \frac{4n}{h} + c_3\left(\frac{h}{4n}\right)^{-\alpha} \leqslant c_4 n^\alpha$$

mit einer nur von $\Gamma, x_0, h, k, \kappa$ abhängenden Konstanten c_4. Daraus ergibt sich sofort die Behauptung. **q. e. d.**

9 Numerische Ergebnisse für das inverse Problem im $\mathbb{R}^2$

In diesem Kapitel wird demonstriert, wie man mit einem regularisierten Newton-Verfahren unter Ausnutzung der in Abschnitt 6.3 gewonnenen Aussagen über die Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators aus „gemessenen“ Fernfelddaten, das Streugebiet rekonstruieren kann. Dazu wird hier lediglich der transversalmagnetische Fall untersucht, eine Übertragung auf das transversalelektrische Problem ist aber evident.

9.1 Newtonverfahren und Regularisierung

Ausgangspunkt für das hier zu beschreibende Verfahren ist die nichtlineare und schlecht gestellte Operatorgleichung[1]

$$\mathfrak{F}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\infty^m \\ \mathbf{b}_\infty^m \end{pmatrix}$$

für die Randparametrisierung z des entsprechenden unbekannten Streugebietes. Dabei sind $\mathbf{a}_\infty^m$, $\mathbf{b}_\infty^m$ gegebene Größen, die z.B. aus Messungen bekannt sind. Diese Gleichung wird durch die linearisierte Gleichung

$$\mathfrak{F}(z) + \mathfrak{F}'(z;h) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\infty^m \\ \mathbf{b}_\infty^m \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

für h bei gegebenem z ersetzt, so daß sich ein Iterationsverfahren

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}'(z_p;h_p) &= (\mathbf{a}_\infty^m, \mathbf{b}_\infty^m)^\top - \mathfrak{F}(z_p), \\ z_{p+1} &= z_p + h_p, \quad p = 0, 1, ..., \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Startparametrisierung z_0 ergibt.

Die linearisierte Gleichung soll nun in einem Unterraum $\mathbb{Q}_N = \operatorname{span}\{q_1, ..., q_N\} \subset RP$ der Dimension N approximativ gelöst werden. Um aus der daraus entstehenden semidiskreten Gleichung ein Gleichungssystem zu erhalten, wird eine Kollokation in den M Punkten $\hat{x}_1, ..., \hat{x}_M \in \Omega$ durchgeführt. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem für die N Unbekannten $a_1^{(p)}, ..., a_N^{(p)} \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^{N} a_j^{(p)} \mathfrak{F}'(z_p;q_j)(\hat{x}_i) = (\mathbf{a}_\infty^m, \mathbf{b}_\infty^m)^\top(\hat{x}_i) - \mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_i), \quad i = 1, ..., M, \tag{9.2}$$

[1] Zu den Bezeichnungen vergleiche Abschnitt 6.3.

wobei

$$h_p := \sum_{j=1}^{N} a_j^{(p)} q_j$$

die gesuchte Näherungslösung von (9.1) ist.

Da man an reellen Lösungen $a_1^{(p)}, ..., a_N^{(p)}$ interessiert ist, entspricht (9.2) $2M$ reellen Gleichungen mit zwei Komponenten. In der Regel wird $4M > N$ sein, so daß das Gleichungssystem überbestimmt ist, es wird demzufolge eine Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate ermittelt. Da das Problem zudem schlecht gestellt ist[2], wird eine Tikhonov-Regularisierung durchgeführt.

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
c_{ij}^{(p)} &= \mathrm{Re}\left((\mathfrak{F}'(z_p;q_j)(\hat{x}_i))_a\right), && i=1,...,M,\ j=1,...,N,\\
c_{ij}^{(p)} &= \mathrm{Re}\left((\mathfrak{F}'(z_p;q_j)(\hat{x}_{i-M}))_b\right), && i=M+1,...,2M,\ j=1,...,N,\\
c_{ij}^{(p)} &= \mathrm{Im}\left((\mathfrak{F}'(z_p;q_j)(\hat{x}_{i-2M}))_a\right), && i=2M+1,...,3M,\ j=1,...,N,\\
c_{ij}^{(p)} &= \mathrm{Im}\left((\mathfrak{F}'(z_p;q_j)(\hat{x}_{i-3M}))_b\right), && i=3M+1,...,4M,\ j=1,...,N,\\
C^{(p)} &= (c_{ij}^{(p)})_{\substack{i=1,...,4M\\ j=1,...,N}} \in \mathbb{R}^{4M\times N},\\
g_i^{(p)} &= \mathrm{Re}\left(\mathbf{a}_\infty^m(\hat{x}_i) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_i))_a\right), && i=1,...,M,\\
g_i^{(p)} &= \mathrm{Re}\left(\mathbf{b}_\infty^m(\hat{x}_{i-M}) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_{i-M}))_b\right), && i=M+1,...,2M,\\
g_i^{(p)} &= \mathrm{Im}\left(\mathbf{a}_\infty^m(\hat{x}_{i-2M}) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_{i-2M}))_a\right), && i=2M+1,...,3M,\\
g_i^{(p)} &= \mathrm{Im}\left(\mathbf{b}_\infty^m(\hat{x}_{i-3M}) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_{i-3M}))_b\right), && i=3M+1,...,4M,\\
g^{(p)} &= (g_i^{(p)})_{i=1,...,4M},\\
a^{(p)} &= (a_j^{(p)})_{j=1,...,N},
\end{aligned}$$

wobei sich die Indizes a und b auf die jeweilige zum Fernfeld von $\mathbf{a}$ bzw. $\mathbf{b}$ gehörige Komponente beziehen, lautet der zu minimierende Ausdruck mit einem geeigneten Regularisierungsparameter $\alpha_p > 0$

$$\|C^{(p)}a^{(p)} - g^{(p)}\|^2 + \alpha_p\|a^{(p)}\|^2 = \sum_{i=1}^{4M}\left|\sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{(p)}a_j^{(p)} - g_i^{(p)}\right|^2 + \alpha_p\sum_{j=1}^{N}\left(a_j^{(p)}\right)^2,$$

was äquivalent[3] zur Lösung von

$$\left(\alpha_p I + {C^{(p)}}^\top C^{(p)}\right)a^{(p)} = {C^{(p)}}^\top g^{(p)} \tag{9.3}$$

mit der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ist.

[2]Die Kompaktheit von $\mathfrak{F}$ überträgt sich auf $\mathfrak{F}'$.

[3]Vergleiche [22, Th. 16.1].

Verfügt man über Daten zu D Einfallsrichtungen $d_1, ..., d_D \in \Omega$, so kann das System einfach erweitert werden. Man setzt $c_{ij,l}^{(p)}$, $g_{i,l}^{(p)}$ wie oben, wobei der Index $l = 1, ..., D$ die Abhängigkeit von d_l kennzeichnet. Mit

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(p)} &= c_{(i-4(l-1)M)\,j,l}^{(p)}\,, \quad i = 1, ..., 4DM,\ j = 1, ..., N, \\ C^{(p)} &= (c_{ij}^{(p)})_{\substack{i=1,...,4DM \\ j=1,...,N}} \in \mathbb{R}^{4DM \times N}, \\ g_i^{(p)} &= g_{(i-4(l-1)M),\,l}^{(p)}\,, \quad i = 1, ..., 4DM, \\ g^{(p)} &= (g_i^{(p)})_{i=1,...,4DM} \end{aligned}$$

ist dann das Gleichungssystem (9.3) zu lösen.

Ein Newton-Schritt für eine Einfallsrichtung läßt sich nun wie folgt beschreiben

- Bestimme für eine gegebene Kurve z_p die zum Operator $E + A(z_p)$ gehörige Matrix gemäß (7.13) und deren LU-Zerlegung.
  Zu dem gegebenenen einfallenden Feld $(\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^i)^\top$ bestimme die rechte Seite U gemäß (7.8).
  Bestimme die Lösung $\chi_i^{(n)}$, $i = 0, ..., 2n-1$ vom zugehörigen linearen Gleichungssystem (7.13).
  Für $i = 1, ..., M$ berechne $\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_i)$ mit Hilfe von (7.14 a), (7.14 b) und daraus $g_i^{(p)}$, $i = 1, ..., 4M$.

- Zur Berechnung von $\mathfrak{F}'(z_p; q_j)$ ermittle die rechten Seiten gemäß (6.20 a) - (6.20 d) für $h = q_1, ..., q_N$. (Siehe dazu den Abschnitt 9.3.)
  Zu diesen rechten Seiten ermittle mit der oben gewonnenen LU-Zerlegung die Fernfelder dieser N direkten Probleme an den Kollokationspunkten $\hat{x}_1, ..., \hat{x}_M$, dies sind die Werte $\mathfrak{F}'(z_p; q_j)(\hat{x}_i)$. Berechne daraus $c_{ij}^{(p)}$, $i = 1, ..., 4M$, $j = 1, ..., N$.

- Berechne $a_j^{(p)}$ durch Lösen von (9.3). Bestimme eine neue Kurve durch $z_{p+1} = z_p + \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} q_j$.
  Brich ab, falls das Residuum

$$Res := \frac{\sum_{i=1}^M \left| \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{a}_\infty^m \\ \mathbf{b}_\infty^m \end{smallmatrix}\right)(\hat{x}_i) - \mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_i) \right|}{\sum_{i=1}^M \left| \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{a}^m \\ \mathbf{b}^m \end{smallmatrix}\right)(\hat{x}_i) \right|}$$

  hinreichend klein.

Man sieht, daß in jedem Newton-Schritt $N + 1$ direkte Probleme zu lösen sind, wobei aber die zu invertierende Matrix $E + A$ stets die gleiche ist, so daß der einmalige Aufwand einer LU-Zerlegung sinnvoll erscheint. Bei D Einfallsrichtungen sind $D(N+1)$ direkte Probleme mit gleicher Koeffizientenmatrix zu lösen.

Zum Testen der Methode ist die Erzeugung von synthetischen Fernfelddaten $(\mathbf{a}_\infty^m, \mathbf{b}_\infty^m)$ erforderlich. Um dabei „Inverse Crimes“ zu vermeiden, werden hierfür eine andere Stützstellenzahl und ein anderer Satz von Kopplungsparametern m_1, m_2, c_1, c_2 im Ansatz (4.15 a)-(4.15 d) benutzt als bei der Lösung der direkten Probleme im Newton-Algorithmus. Außerdem ist darauf zu achten, daß die gesuchte (in den Testbeispielen natürlich bekannte) Berandung z nicht im Ansatzraum $\mathbb{Q}_N$ liegt.

Für die hier durchgeführten Untersuchungen soll nur der Fall sternförmiger Gebiete betrachtet werden. Die Basisfunktionen lassen sich in der Form

$$q_j(t) = r_j(t)\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad j = 1, ..., N \tag{9.4}$$

mit linear unabhängigen Radialfunktionen r_j schreiben. Es wird $\tilde{\mathbb{Q}}_N = \text{span}\,\{r_1, ..., r_N\}$ gesetzt.

9.2 Modifikation in der Regularisierung

Im Gegensatz zu der bisher beschriebenen Tikhonov-Regularisierung sollen jetzt auch zusätzliche Glätteeigenschaften in den Rekonstruktionen durch eine „Bestrafung“ von Ableitungen der Störung berücksichtigt werden.

Dies wird erreicht, indem die Minimierungsaufgabe

$$\|\mathfrak{F}'(z_p; h_p) + \mathfrak{F}(z_p) - (\mathbf{a}_\infty^m, \mathbf{b}_\infty^m)\|_{L^2}^2 + \alpha_p \|h_p\|_{H^s}^2 = \text{ min !} \tag{9.5}$$

unter Verwendung einer geeigneten Sobolev-Norm ($s \in \mathbb{N}$) gelöst wird.

Mit dem bereits vorgestellten Ansatz

$$h_p := \sum_{j=1}^{N} a_j^{(p)} q_j$$

läßt sich dieses Minimierungsproblem in die Form

$$\text{Min } \left\| \sum_{j=1}^{N} a_j^{(p)} \mathfrak{F}'(z_p; q_j) + \mathfrak{F}(z_p) - \begin{pmatrix}\mathbf{a}_\infty^m\\ \mathbf{b}_\infty^m\end{pmatrix} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \sqrt{\alpha_p} \sum_{j=1}^{N} a_j^{(p)} q_j \right\|_{L^2}^2 + \left\| \sqrt{\alpha_p} \sum_{j=1}^{N} a_j^{(p)} q_j^{(s)} \right\|_{L^2}^2 !$$

bringen und durch

$$\|Ca - g\|^2 = \text{ min !} \qquad \text{bzw.} \quad C^\top C a = C^\top g$$

diskretisieren, wobei folgende Bezeichnungen verwendet werden.

$$
\begin{aligned}
c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Re}\left((\mathfrak{F}'(z_p;q_j)(\hat{x}_i))_a\right), && i=1,...,M,\ j=1,...,N,\\
c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Re}\left((\mathfrak{F}'(z_p;q_j)(\hat{x}_{i-M}))_b\right), && i=M+1,...,2M,\ j=1,...,N,\\
c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Im}\left((\mathfrak{F}'(z_p;q_j)(\hat{x}_{i-2M}))_a\right), && i=2M+1,...,3M,\ j=1,...,N,\\
c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Im}\left((\mathfrak{F}'(z_p;q_j)(\hat{x}_{i-3M}))_b\right), && i=3M+1,...,4M,\ j=1,...,N,\\
c_{ij}^{(p)} &= \sqrt{\alpha_p N/K}\, r_j(t_{i-4M}^K), && i=4M+1,...,4M+K,\ j=1,...,N,\\
c_{ij}^{(p)} &= \sqrt{\alpha_p N/K}\, r_j^{(s)}(t_{i-4M-K}^K), && i=4M+K+1,...,4M+2K,\ j=1,...,N,\\
C^{(p)} &= (c_{ij}^{(p)})_{\substack{i=1,...,4M+2K\\ j=1,...,N}} \in \mathbb{R}^{(4M+2K)\times N},\\
g_i^{(p)} &= \operatorname{Re}\left(\mathbf{a}_\infty^m(\hat{x}_i) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_i))_a\right), && i=1,...,M,\\
g_i^{(p)} &= \operatorname{Re}\left(\mathbf{b}_\infty^m(\hat{x}_{i-M}) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_{i-M}))_b\right), && i=M+1,...,2M,\\
g_i^{(p)} &= \operatorname{Im}\left(\mathbf{a}_\infty^m(\hat{x}_{i-2M}) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_{i-2M}))_a\right), && i=2M+1,...,3M,\\
g_i^{(p)} &= \operatorname{Im}\left(\mathbf{b}_\infty^m(\hat{x}_{i-3M}) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_{i-3M}))_b\right), && i=3M+1,...,4M,\\
g_i^{(p)} &= 0, && i=4M+1,...,4M+2K,\\
g^{(p)} &= (g_i^{(p)})_{i=1,...,4M+2K},\\
a^{(p)} &= (a_j^{(p)})_{j=1,...,N},\\
t_i^K &= 2\pi i/K.
\end{aligned}
$$

Dabei sind die in der Definition von $c_{ij}^{(p)}$, $i=4M+1,...,4M+2K$ auftretenden Funktionen r_j durch (9.4) erklärt.

Durch diese Art der Regularisierung ist es möglich, bei der Berechnung des von der Sobolev-Norm stammenden Anteils eine andere Stüztstellenauswahl t_i^K zu treffen und dadurch den Rand der Rekonstruktion auch unabhängig von den Beobachungsrichtungen $\hat{x}_i$ zu kontrollieren.

9.3 Die rechte Seite und der hypersinguläre Operator T

Um die Randwerte für die Berechnung der Fréchet-Ableitung nach (6.21 a) - (6.21 d) zu bestimmen, ist neben der numerischen Auswertung der Operatoren[4] S_κ, K_κ, K_κ^*, $\kappa \in \{\alpha_{\mathbf{A}}, \alpha_{\mathbf{B}}\}$ auch eine des hypersingulären Operarors T_κ erforderlich. Für diesen gilt mit der in (7.1) eingeführten Bezeichnung $T_\kappa = \tilde{T}_\kappa + T_0$, so daß es für die weiteren Betrachtungen ausreichend wäre, nur noch den Hauptbestandteil

$$(T_0\varphi)(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\int_{\partial D}\varphi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\ln\frac{1}{|x-y|}\,\mathrm{d}s(y), \quad x\in\partial D$$

[4] Dies ist in Abschnitt 7.1 beschrieben.

in parametrisierte Form zu überführen und anschließend zu diskretisieren.[5]. Hier soll aber gleich der gesamte Operator T_κ entsprechend der Darstellung in [25, Abschn. 2] untersucht werden. Es gilt die Beziehung

$$T_\kappa \varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} S_\kappa \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} + \kappa^2 \nu \cdot S(\nu\varphi).$$

Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 7.1 gilt

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} S_\kappa \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)(z(t)) = \frac{1}{|z'(t)|} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \cot\frac{\tau - t}{2} \, \frac{\mathrm{d}\varphi(z(\tau))}{\mathrm{d}\tau} - \hat{N}_\kappa(t,\tau)\varphi(z(\tau)) \right\} \mathrm{d}\tau$$

mit

$$\begin{aligned}
\hat{N}_\kappa(t,\tau) \;=\; & \frac{i}{2} \frac{(z'(t), z(t) - z(\tau))\,(z'(\tau), z(t) - z(\tau))}{[r(t,\tau)]^2} \left\{ \kappa^2 H_0^1(\kappa r(t,\tau)) - 2\kappa \frac{H_1^1(\kappa r(t,\tau))}{r(t,\tau)} \right\} \\
& + \frac{i\kappa}{2} \frac{(z'(t), z'(\tau))}{r(t,\tau)} H_1^1(\kappa r(t,\tau)) + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{t-\tau}{2}}.
\end{aligned}$$

Durch Abspalten der logarithmischen Singularität erhält man die analytischen Funktionen

$$\begin{aligned}
\hat{N}_\kappa^1(t,\tau) \;=\; & \frac{-1}{2\pi} \frac{(z'(t), z(t) - z(\tau))\,(z'(\tau), z(t) - z(\tau))}{[r(t,\tau)]^2} \left\{ \kappa^2 J_0(\kappa r(t,\tau)) - 2\kappa \frac{J_1(\kappa r(t,\tau))}{r(t,\tau)} \right\} \\
& - \frac{\kappa}{2\pi} \frac{(z'(t), z'(\tau))}{r(t,\tau)} J_1(\kappa r(t,\tau)), \\
\hat{N}_\kappa^2(t,\tau) \;=\; & \hat{N}_\kappa(t,\tau) - \hat{N}_\kappa^1(t,\tau) \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right)
\end{aligned}$$

mit Diagonaltermen

$$\begin{aligned}
\hat{N}_\kappa^1(t,t) \;=\; & -\frac{\kappa^2 |z'(t)|^2}{4\pi}, \\
\hat{N}_\kappa^2(t,t) \;=\; & \left(\pi i - 1 - 2C_E - 2\ln\frac{\kappa|z'(t)|}{2}\right) \frac{\kappa^2 |z'(t)|^2}{4\pi} \\
& + \frac{1}{12\pi} + \frac{(z'(t), z''(t))^2}{2\pi |z'(t)|^4} - \frac{|z''(t)|^2}{4\pi |z'(t)|^2} - \frac{(z'(t), z'''(t))}{6\pi |z'(t)|^2}.
\end{aligned}$$

Es wird nun neben (7.9) und (7.11) die folgende Quadraturformel verwendet, die man ebenfalls als Interpolationsquadratur mit trigonometrischen Polynomen erhält[6]

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cot\frac{\tau - t}{2} \, f'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} T_j^{(n)}(t) f(t_j) \tag{9.6}$$

[5] Vergleiche etwa [33, S.26].

[6] Vergleiche [34, Abschn. 3.1].

mit Quadraturgewichten

$$T_j^{(n)}(t) := -\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-1} l\cos(l(t-t_j)) - \frac{1}{2}\cos(n(t-t_j)), \quad j = 0, ..., 2n-1. \tag{9.7}$$

Dabei bezeichnet wieder $t_j = \pi j/n$ für $j = 0, ..., 2n-1$. Auch hier werden später, wie in (7.13), nur

$$T_{|i-j|}^{(n)} := T_{|i-j|}^{(n)}(0) = T_j^{(n)}(t_i)$$

benötigt, wofür

$$T_l^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{2n\sin^2(\pi l/2n)}, & l \text{ ungerade}, \\ 0, & l \text{ gerade}, l \neq 0, \\ -\frac{n}{2}, & l = 0 \end{cases}$$

gilt. Mit diesen Überlegungen ist es nun möglich, die Bestimmung von $\mathcal{U}$ in (6.19) zu beschreiben.

Exemplarisch erhält man für die Normalenableitung von $\mathbf{a}_0$, die für (6.20 c), (6.20 d) benötigt wird, gemäß (6.21 c)

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu}(z(t)) &= \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}(T_{\alpha_{\mathbf{A}}}\psi_1)(t) + m_1((K^*_{\alpha_{\mathbf{A}}} + I)\varphi_1)(t) \\
&\approx \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\left(\frac{1}{|z'(t)|}\left\{\sum_{j=0}^{2n-1} T_j^{(n)}(t)\psi_1(t_j) - \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t)\hat{N}^1_{\alpha_{\mathbf{A}}}(t,t_j)\psi_1(t_j)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{2n-1}\hat{N}^2_{\alpha_{\mathbf{A}}}(t,t_j)\psi_1(t_j)\right\}\right. \\
&\quad +{\alpha_{\mathbf{A}}}^2\left\{\nu_1(t)\left[\sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t)M^1_{\alpha_{\mathbf{A}}}(t,t_j)\nu_1(t_j)\psi_1(t_j) + \frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} M^2_{\alpha_{\mathbf{A}}}(t,t_j)\nu_1(t_j)\psi_1(t_j)\right]\right. \\
&\qquad \left.\left. + \nu_2(t)\left[\sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t)M^1_{\alpha_{\mathbf{A}}}(t,t_j)\nu_2(t_j)\psi_1(t_j) + \frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} M^2_{\alpha_{\mathbf{A}}}(t,t_j)\nu_2(t_j)\psi_1(t_j)\right]\right\}\right) \\
&\quad + m_1\left\{\sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t)L^{*\,1}_{\alpha_{\mathbf{A}}}(t,t_j)\varphi_1(t_j) + \frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{2n-1} L^{*\,2}_{\alpha_{\mathbf{A}}}(t,t_j)\varphi_1(t_j) + \varphi_1(t)\right\},
\end{aligned}$$

wobei wieder bei den Dichten φ_1, ψ_1 die gleiche Symbolik für die parametrisiete Form (auf der rechten Seite) wie für die nicht parametrisierte (auf der linken) verwendet wird. Dabei gilt $\nu_1(t) = z_2'(t)/|z'(t)|$ und $\nu_2(t) = -z_1'(t)/|z'(t)|$.

Daraus ergeben sich dann unmittelbar die Werte

$$\mathbf{a}_j^{\text{Neum}} := \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu}(z(t_j)), \qquad \mathbf{b}_j^{\text{Neum}} := \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu}(z(t_j)), \qquad j = 0, ..., 2n-1$$

an den Stützstellen t_j.

Die Dirichletdaten nach (6.21 a), (6.21 b) können unmittelbar an den Stützstellen gemäß

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_j^{\text{Diri}} := \mathbf{a}_0(z(t_j)) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}(K_{\alpha_{\mathbf{A}}} - I)\psi_1 + m_1 S_{\alpha_{\mathbf{A}}}\varphi_1\right)(t_j),\\ \mathbf{b}_j^{\text{Diri}} := \mathbf{b}_0(z(t_j)) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}(K_{\alpha_{\mathbf{B}}} - I)\psi_2 + m_2 S_{\alpha_{\mathbf{B}}}\varphi_2\right)(t_j)\end{aligned}$$

mit dem in Abschnitt 7.1 beschriebenen Verfahren ermittelt werden.

Um die erforderlichen Ableitungen in (6.20 a), (6.20 b) zu berechnen, wird zunächst trigonometrisch interpoliert

$$\mathbf{a}_0^{\text{tr.int.}}(t) = \sum_{j=0}^{2n-1} \mathbf{a}_j^{\text{Diri}}\, l_j(t), \qquad \mathbf{b}_0^{\text{tr.int.}}(t) = \sum_{j=0}^{2n-1} \mathbf{b}_j^{\text{Diri}}\, l_j(t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

mit den trigonometrischen Polynomen

$$l_j(t) = \frac{1}{2n}\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\cos k(t - t_j) + \cos n(t - t_j)\right\}, \qquad j = 0, ..., 2n-1,$$

als Lagrange-Funktionen[7].

$\mathbf{a}_0 \circ z$ und $\mathbf{b}_0 \circ z$ in (6.20 a), (6.20 b) werden durch $\mathbf{a}_0^{\text{tr.int.}}$ beziehungsweise $\mathbf{b}_0^{\text{tr.int.}}$ substituiert. In dieser Darstellung kann dann die Differentiation nach dem Randparameter unmittelbar durchgeführt werden. Es wird lediglich von den Ableitungen

$$\begin{aligned} l_j'(t) &= -\frac{1}{2n}\left\{2\sum_{k=1}^{n-1} k \sin k(t - t_j) + n \sin n(t - t_j)\right\},\\ l_j''(t) &= -\frac{1}{2n}\left\{2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \cos k(t - t_j) + n^2 \cos n(t - t_j)\right\}\end{aligned}$$

Gebrauch gemacht, die nur in den Punkten t_i benötigt werden.

So ergibt sich exemplarisch

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1(t_i) \;=\; & -\alpha_{\mathbf{A}}(\nu(z), h)|_{t=t_i}\ \left((k\xi_+ - \alpha_{\mathbf{A}})\mathbf{a}_i^{\text{Diri}} - k\xi_-\mathbf{b}_i^{\text{Diri}}\right)\\ & -\frac{1}{|z'(t_i)|}\sum_{j=0}^{2n-1}\left\{\left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\xi_+ - 1\right)\mathbf{a}_j^{\text{Diri}} - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\xi_-\mathbf{b}_j^{\text{Diri}}\right\}\left[\left(\frac{(\nu(z), h)}{|z'|}\right)' l_j' + \frac{(\nu(z), h)}{|z'|} l_j''\right]_{t=t_i}.\end{aligned}$$

[7] Siehe [22, (11.13)].

9.4 Rekonstruktionen

Trigonometrische Polynome als Ansatzfunktionen

Zunächst wird als Approximationsraum der Raum der trigonometrischen Polynome

$$\tilde{\mathbb{Q}}_N^{trig} := T_{\tilde{N}} = \left\{ \sum_{j=0}^{\tilde{N}} c_j \cos(j\,.) + \sum_{j=1}^{\tilde{N}} s_j \sin(j\,.) \;\middle|\; c_0, ..., c_{\tilde{N}}, s_1, ..., s_{\tilde{N}} \in \mathbb{R} \right\}$$

mit $N = 2\tilde{N} + 1$ verwendet.

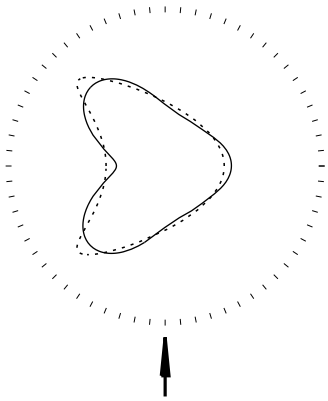
Als Startkurve z_0 dient der Einheitskreis

$$z_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

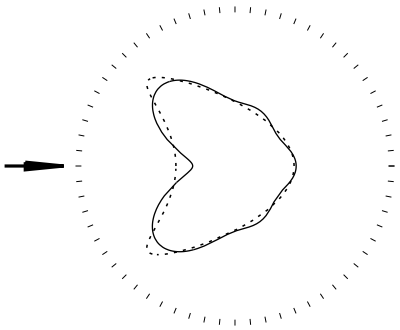
Die synthetischen Fernfelddaten des direkten Streuroblems wurden mit der Parameterwahl $c_1 = c_2 = m_1 = m_2 = 1.0$ und halber Stützstellenzahl $n = 64$ bestimmt. Dabei waren $\varepsilon = 1.0$, $\varepsilon_0 = 1.4$, $\mu = 1.0$, $\mu_0 = 1.2$, $\omega = 1.0$, $\beta = 0.1$.

Für den inversen Löser wurde $c_1 = c_2 = 2.0$, $m_1 = m_2 = 0.5$ sowie $n = 98$ gewählt. Die gezeigten Beispiele sollen demonstrieren, daß das beschriebene Verfahren prinzipiell zur Gebietsrekonstruktion geeignet ist. Es besteht hier allerdings nicht der Anspruch, eine möglichst hohe Rekonstruktionsgüte zu erzielen. Vielmehr haben die numerischen Test gezeigt, daß der Wahl insbesondere des Regularisierungsparameters eine große Rolle zukommt.

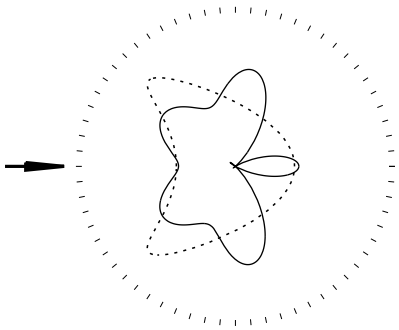
Bei der Tikhonov-Regularisierung wird dies an den dargestellten Kurven deutlich. Die beiden Rekonstruktionen zum Regularisierungsparameter 10 liefern rechte gute Darstellungen, die Kurve zum Regularisierungsparameter 1 hingegen ist nicht zulässig. Die Pfeile zeigen die Einfallsrichtung und die kurzen Striche die benutzten Beobachtungsrichtungen an, die gestrichelte Linie ist der zu rekonstruierende Drachen, die durchgezogene Linie die Rekonstruktion.



$\alpha = 10.0$, $N = 5$, $n = 98$
$Res = 2.3 \cdot 10^{-5}$, $p_{end} = 59$

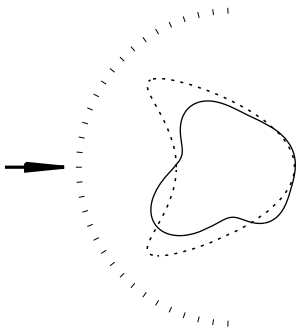


$\alpha = 10.0$, $N = 5$, $n = 98$
$Res = 1.7 \cdot 10^{-5}$, $p_{end} = 100$

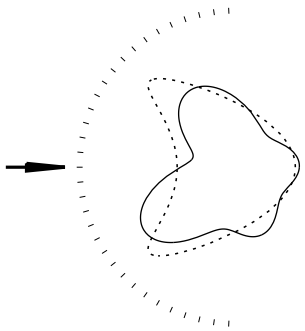


$\alpha = 1.0$, $N = 5$, $n = 98$,
$Res = 2.4 \cdot 10^{-2}$, $p_{end} = 12$

Bei eingeschränktem Meßbereich, wie in den folgenden beiden Bildern demonstriert, ist das Residuum größer, aber die Konturen werden weiterhin teilweise approximiert.

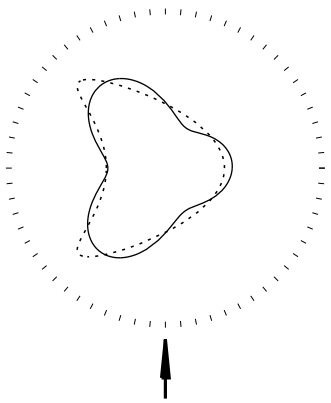


$\alpha = 10.0$, $N = 5$, $n = 98$
$Res = 3.9 \cdot 10^{-2}$, $p_{end} = 100$

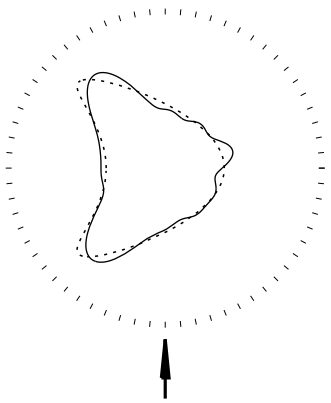


$\alpha = 1.0$, $N = 5$, $n = 98$
$Res = 3.8 \cdot 10^{-2}$, $p_{end} = 41$

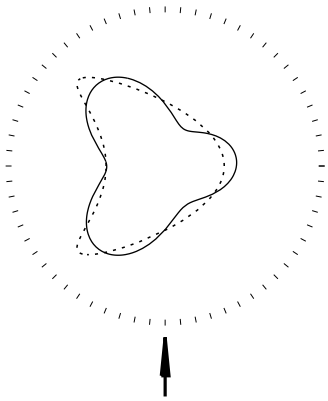
Besser verhielt sich das Verfahren bei der modifizierten Regularisierung. Mit den gleichen Parametern wie eben, jedoch zusätzlich $K = 100$ erhält man bei unterschiedlichen Werten von s die folgenden Resultate. Dabei war die Zahl der Iterationen zu $n = 48$, $N = 5$ geringer, bezüglich der Rechenzeit und der erzielten Genauigkeit waren die Experimente mit geringerer Stützstellenzahl $n = 24$ und höherer Anzahl von Ansatzfunktionen $N = 10$ aber deutlich im Vorteil. Eventuell sollte man also zunächst mit niedriger Stützstellenzahl rechnen und das erzielte Resultat als neue Startkurve für einige Schritte mit höherer Stützstellenzahl nutzen.



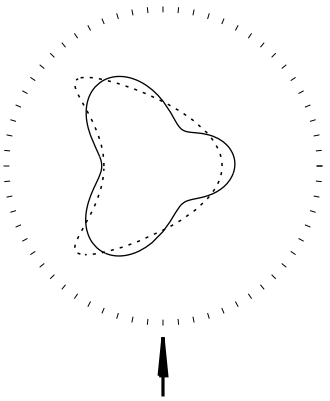
$\alpha = 1.0 \cdot 0.8^p$, $s = 1$, $N = 5$, $n = 48$,
$Res = 2.1 \cdot 10^{-4}$, $p_{end} = 19$



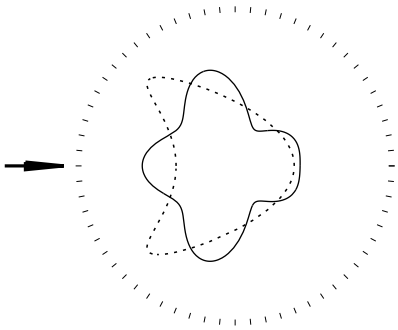
$\alpha = 10.0 \cdot 0.8^p$, $s = 1$, $N = 10$, $n = 24$,
$Res = 1.5 \cdot 10^{-5}$, $p_{end} = 53$



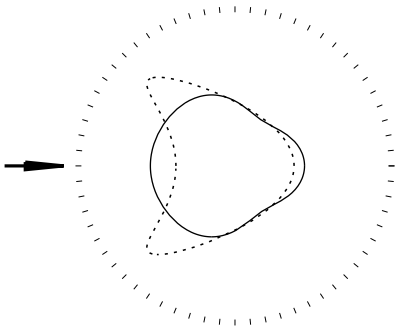
$\alpha = 10.0 \cdot 0.5^p$, $s = 2$, $N = 5$, $n = 48$,
$Res = 1.2 \cdot 10^{-4}$, $p_{end} = 17$



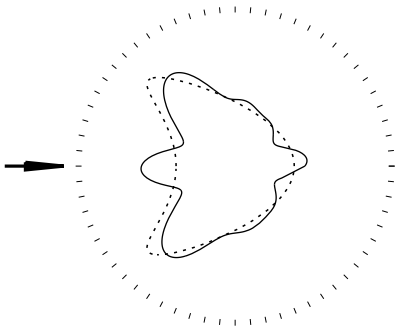
$\alpha = 10.0 \cdot 0.5^p$, $s = 3$, $N = 5$, $n = 48$,
$Res = 2.7 \cdot 10^{-4}$, $p_{end} = 19$



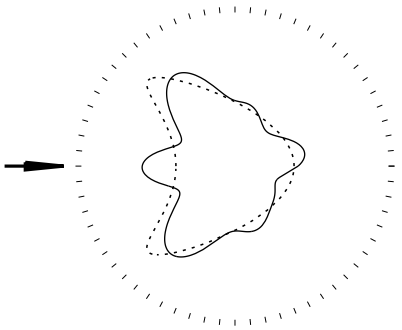
$\alpha = 10.0 \cdot 0.5^p$, $s = 2$, $N = 5$, $n = 48$,
$Res = 5.2 \cdot 10^{-4}$, $p_{end} = 21$



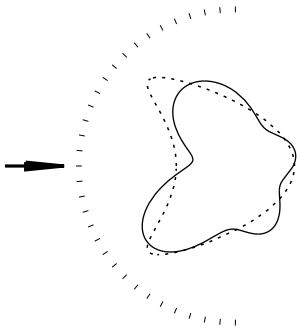
$\alpha = 10.0 \cdot 0.5^p$, $s = 3$, $N = 5$, $n = 48$,
$Res = 1.4 \cdot 10^{-3}$, $p_{end} = 19$



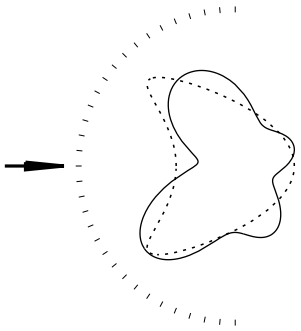
$\alpha = 10.0 \cdot 0.8^p$, $s = 1$, $N = 10$, $n = 24$,
$Res = 9.9 \cdot 10^{-5}$, $p_{end} = 49$



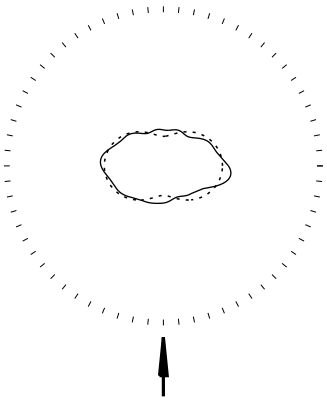
$\alpha = 10.0 \cdot 0.8^p$, $s = 2$, $N = 10$, $n = 24$,
$Res = 1.4 \cdot 10^{-4}$, $p_{end} = 63$



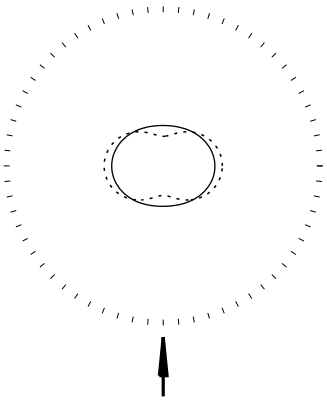
$\alpha = 10.0 \cdot 0.5^p$, $s = 1$, $N = 5$, $n = 48$,
$Res = 3.8 \cdot 10^{-2}$, $p_{end} = 16$



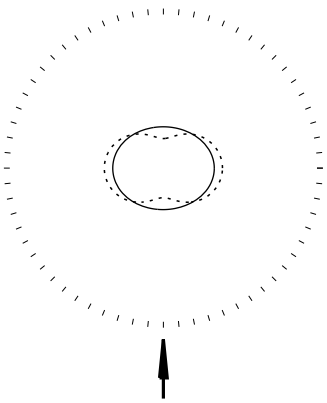
$\alpha = 10.0 \cdot 0.5^p$, $s = 3$, $N = 5$, $n = 48$,
$Res = 3.8 \cdot 10^{-2}$, $p_{end} = 24$



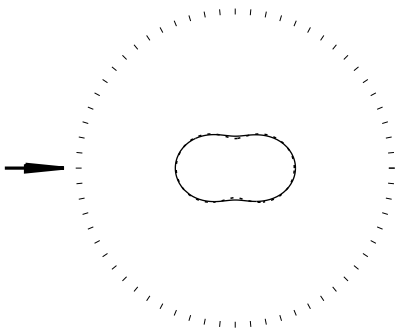
$\alpha = 10.0 \cdot 0.8^p$, $s = 1$, $N = 10$, $n = 24$,
$Res = 4.8 \cdot 10^{-6}$, $p_{end} = 60$



$\alpha = 10.0 \cdot 0.8^p$, $s = 3$, $N = 10$, $n = 24$,
$Res = 2.1 \cdot 10^{-4}$, $p_{end} = 49$



$\alpha = 1.0 \cdot 0.8^p$, $s = 2$, $N = 5$, $n = 48$,
$Res = 2.8 \cdot 10^{-4}$, $p_{end} = 27$



$\alpha = 1.0 \cdot 0.8^p$, $s = 2$, $N = 5$, $n = 48$,
$Res = 1.1 \cdot 10^{-5}$, $p_{end} = 26$

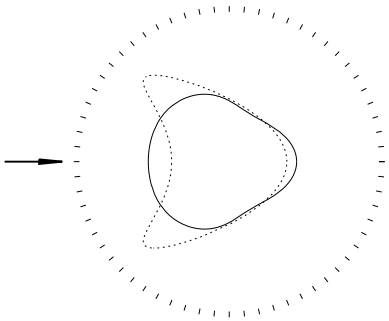
Bei den Beispielen mit Einfallsrichtung in den konkaven Teil ist zu erkennen, daß sich diese Struktur nicht voll ausbildet (dies war bei allen gerechneten Test zu beobachten). Die Residuuen in den Fernfeldern, der einzige Maßstab, an dem man die Rekonstruktionsgüte objektiv messen kann, werden hiervon aber wenig beeinflußt. Zum Teil läßt sich dieser Effekt sicher durch das zusätzliche „Bestrafen“ der Ableitungen erklären.

Radiale Basisfunktionen als Ansatzfunktionen

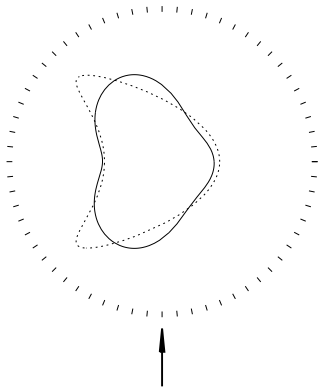
Hier dienen radiale Basisfunktionen als Ansatzfunktionen

$$\tilde{\mathbb{Q}}_{N+1}^{RBF} := \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^{N} a_j e^{\gamma(\cos(t-2\pi j/N)-1)} \cos(\sin(t-2\pi j/N)) \;\middle|\; a_0, ..., a_N \in \mathbb{R} \right\}$$

mit geeignetem Parameter $\gamma > 0$. Die auftretenden Funktionen sind 2π-periodisch und unendlich oft differenzierbar.[8] Realisiert wurde das Verfahren für die Tikhonov-Regularisierung, die Zahl der Stützstellen betrug $2n = 160$.



$\alpha = 10.0$, $\gamma = 5.0$, $N = 10$,
$Res = 1.3 \cdot 10^{-3}$, $p_{end} = 100$



$\alpha = 10.0$, $\gamma = 4.0$, $N = 10$,
$Res = 1.1 \cdot 10^{-3}$, $p_{end} = 100$

Hier läßt sich bei Einstrahlung von links das gleiche Phänomen wie zuvor beobachten, die Konvergenz ist sehr langsam, so daß jeweils nach höchstens 100 Iterationen abgebrochen wurde.

Insgesamt läßt sich einschätzen, daß das beschriebene Rekonstruktionsverfahren geeignet ist, um aus den Fernfelddaten auf den Gebietsrand zu schließen. Allerdings werden auch Schwierigkeiten hierbei deutlich, wie man an den graphischen Darstellungen erkennt. Durch eine Verfeinerung bei der Parameterauswahl und eine effektivere Programmierung sowie gemischte Strategien, wie sie bereits angedeutet wurden, könnten die Resultate sicher noch verbessert werden.

[8] Vergleiche [32, S. 33].

A Anhang

A.1 Beweis zu Satz 6.8

Satz 6.8 *Das elektrische Fernfeld* $\mathbf{e}_\infty$ *für die Streuung einer ebenen elektromagnetischen Welle am chiralen Gebiet beim transversalmagnetischen Problem erfüllt die Reziprozitätsrelation*

$$\mathbf{e}_\infty(\hat{x};d) = \mathbf{e}_\infty(-d;-\hat{x})$$

und das magnetische Fernfeld $\mathbf{h}_\infty$ *für die Streuung einer ebenen elektromagnetischen Welle am chiralen Gebiet beim transversalelektrischen Problem*

$$\mathbf{h}_\infty(\hat{x};d) = \mathbf{h}_\infty(-d;-\hat{x})$$

für alle $\hat{x}, d \in \Omega$.

Beweis Sei $d \in \Omega$, es bezeichne $u^i(x;d) = e^{ikx\cdot d}$, $c_a = c_b = ik(\mu_0/\mu)^{1/2}$ für das transversalmagnetische und $-c_a = c_b = k(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}$ für das transversalelektrische Problem, so daß also

$$\mathbf{a}^i(x;d) = c_a u^i(x;d), \qquad \mathbf{b}^i(x;d) = c_b u^i(x;d)$$

gilt. Weiter seien $\mathbf{a}_0(.;d)$, $\mathbf{b}_0(.;d)$, $\mathbf{a}^s(.;d)$, $\mathbf{b}^s(.;d)$ die Lösungen des zugehörigen Streuproblems, $\mathbf{a}_\infty(.;d)$, $\mathbf{b}_\infty(.;d)$ die zu $\mathbf{a}^s$ beziehungsweise $\mathbf{b}^s$ gehörigen Fernfelder und $\mathbf{a}(.;d) = \mathbf{a}^i(.;d) + \mathbf{a}^s(.;d)$, $\mathbf{b}(.;d) = \mathbf{b}^i(.;d) + \mathbf{b}^s(.;d)$. Mit $m = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}$ gilt[1]

$$\mathbf{a}_\infty(\hat{x};d) = m\int_{\partial D}\left\{\mathbf{a}^s(y;d)\frac{\partial u^i(y;-\hat{x})}{\partial\nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}^s(y;d)}{\partial\nu(y)}u^i(y;-\hat{x})\right\}\mathrm{d}s(y), \quad \text{(A.1 a)}$$

$$\mathbf{b}_\infty(\hat{x};d) = m\int_{\partial D}\left\{\mathbf{b}^s(y;d)\frac{\partial u^i(y;-\hat{x})}{\partial\nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}^s(y;d)}{\partial\nu(y)}u^i(y;-\hat{x})\right\}\mathrm{d}s(y) \quad \text{(A.1 b)}$$

und analog

$$\mathbf{a}_\infty(-d,-\hat{x}) = m\int_{\partial D}\left\{\mathbf{a}^s(y;-\hat{x})\frac{\partial u^i(y;d)}{\partial\nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}^s(y;-\hat{x})}{\partial\nu(y)}u^i(y;d)\right\}\mathrm{d}s(y), \quad \text{(A.2 a)}$$

$$\mathbf{b}_\infty(-d,-\hat{x}) = m\int_{\partial D}\left\{\mathbf{b}^s(y;-\hat{x})\frac{\partial u^i(y;d)}{\partial\nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}^s(y;-\hat{x})}{\partial\nu(y)}u^i(y;d)\right\}\mathrm{d}s(y). \quad \text{(A.2 b)}$$

[1] Vergleiche [3, Th. 2.5].

Weiter gilt nach dem Greenschen Satz, angewendet auf das Außengebiet, unter Ausnutzung der Helmholtzgleichung und der (SAB)

$$0 = \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}^s(y;d) \frac{\partial \mathbf{a}^s(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}^s(y;d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}^s(y;-\hat{x}) \right\} \mathrm{d}s(y), \tag{A.3 a}$$

$$0 = \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}^s(y;d) \frac{\partial \mathbf{b}^s(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}^s(y;d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{b}^s(y;-\hat{x}) \right\} \mathrm{d}s(y), \tag{A.3 b}$$

$$0 = \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}^s(y;d) \frac{\partial \mathbf{b}^s(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}^s(y;d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{b}^s(y;-\hat{x}) \right\} \mathrm{d}s(y), \tag{A.3 c}$$

$$0 = \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}^s(y;d) \frac{\partial \mathbf{a}^s(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}^s(y;d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}^s(y;-\hat{x}) \right\} \mathrm{d}s(y) \tag{A.3 d}$$

und bei Anwendung auf das Innengebiet

$$0 = \int_{\partial D} \left\{ u^i(y;d) \frac{\partial u^i(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^i(y;d)}{\partial \nu(y)} u^i(y;-\hat{x}) \right\} \mathrm{d}s(y). \tag{A.4}$$

Addition von (A.1 a) und dem $\frac{m}{c_a}$-fachen von (A.3 a) führt auf

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\infty(\hat{x};d) &= \frac{m}{c_a} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}^s(y;d) \frac{\partial \mathbf{a}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}^s(y;d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}(y;-\hat{x}) \right\} \mathrm{d}s(y) \\ &= \frac{m}{c_a} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}(y;d) \frac{\partial \mathbf{a}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y;d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}(y;-\hat{x}) \right\} \mathrm{d}s(y) \\ &\quad -m \int_{\partial D} \left\{ u^i(y;d) \frac{\partial \mathbf{a}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^i(y;d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}(y;-\hat{x}) \right\} \mathrm{d}s(y). \end{aligned}$$

Weiterhin ergibt Subtraktion des mc_a-fachen von (A.4) von (A.2 a)

$$\mathbf{a}_\infty(-d;-\hat{x}) = m \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}(y;-\hat{x}) \frac{\partial u^i(y;d)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} u^i(y;d) \right\} \mathrm{d}s(y),$$

so daß

$$\mathbf{a}_\infty(\hat{x};d) = \mathbf{a}_\infty(-d;-\hat{x}) + \frac{m}{c_a} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}(y;d) \frac{\partial \mathbf{a}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y;d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}(y;-\hat{x}) \right\} \mathrm{d}s(y) \tag{A.5 a}$$

folgt. Analog kann man auch für $\mathbf{b}$ rechnen und erhält

$$\mathbf{b}_\infty(\hat{x};d) = \mathbf{b}_\infty(-d;-\hat{x}) + \frac{m}{c_b} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}(y;d) \frac{\partial \mathbf{b}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}(y;d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{b}(y;-\hat{x}) \right\} \mathrm{d}s(y). \tag{A.5 b}$$

Addition von (A.1 a) und dem $\frac{m}{c_b}$-fachen von (A.3 b) führt auf

$$\mathbf{a}_\infty(\hat{x};d) = \frac{m}{c_b} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}^s(y;d) \frac{\partial \mathbf{b}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}^s(y;d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{b}(y;-\hat{x}) \right\} \mathrm{d}s(y)$$

$$= \frac{m}{c_b}\int_{\partial D}\left\{\mathbf{a}(y;d)\frac{\partial \mathbf{b}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y;d)}{\partial \nu(y)}\mathbf{b}(y;-\hat{x})\right\}\,\mathrm{d}s(y)$$
$$-\frac{mc_a}{c_b}\int_{\partial D}\left\{u^i(y;d)\frac{\partial \mathbf{b}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^i(y;d)}{\partial \nu(y)}\mathbf{b}(y;-\hat{x})\right\}\,\mathrm{d}s(y).$$

Weiterhin ergibt Subtraktion des mc_b-fachen von (A.4) von (A.2 b)

$$\mathbf{b}_\infty(-d;-\hat{x}) = m\int_{\partial D}\left\{\mathbf{b}(y;-\hat{x})\frac{\partial u^i(y;d)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)}u^i(y;d)\right\}\,\mathrm{d}s(y),$$

so daß

$$c_b\mathbf{a}_\infty(\hat{x};d) = c_a\mathbf{b}_\infty(-d;-\hat{x}) + m\int_{\partial D}\left\{\mathbf{a}(y;d)\frac{\partial \mathbf{b}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y;d)}{\partial \nu(y)}\mathbf{b}(y;-\hat{x})\right\}\,\mathrm{d}s(y) \tag{A.6 a}$$

gilt. Eine ganz ähnliche Rechnung führt auf

$$c_a\mathbf{b}_\infty(\hat{x};d) = c_b\mathbf{a}_\infty(-d;-\hat{x}) + m\int_{\partial D}\left\{\mathbf{b}(y,d)\frac{\partial \mathbf{a}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}(y;d)}{\partial \nu(y)}\mathbf{a}(y;-\hat{x})\right\}\,\mathrm{d}s(y). \tag{A.6 b}$$

Es werden nun die Randbedingungen

$$\mathbf{a} = \xi_+\mathbf{a}_0 - \xi_-\mathbf{b}_0, \quad \mathbf{b} = \xi_+\mathbf{b}_0 - \xi_-\mathbf{a}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu} = \frac{k}{\alpha_{\mathbf{A}}}\frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu} = \frac{k}{\alpha_{\mathbf{B}}}\frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu}$$

und der Greensche Satz benutzt, um die Beziehungen

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D}\left\{\mathbf{a}(y;d)\frac{\partial \mathbf{a}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y;d)}{\partial \nu(y)}\mathbf{a}(y;-\hat{x})\right\}\,\mathrm{d}s(y)\\
&= \frac{k}{\alpha_{\mathbf{A}}}\int_{\partial D}\left\{\left(\xi_+\mathbf{a}_0(y;d) - \xi_-\mathbf{b}_0(y;d)\right)\frac{\partial \mathbf{a}_0(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)}\right.\\
&\qquad\left. -\frac{\partial \mathbf{a}_0(y;d)}{\partial \nu(y)}\left(\xi_+\mathbf{a}_0(y;-\hat{x}) - \xi_-\mathbf{b}_0(y;-\hat{x})\right)\right\}\,\mathrm{d}s(y)\\
&= -\frac{k\xi_-}{\alpha_{\mathbf{A}}}\int_{\partial D}\left\{\mathbf{b}_0(y;d)\frac{\partial \mathbf{a}_0(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \mathbf{b}_0(y;-\hat{x})\frac{\partial \mathbf{a}_0(y;d)}{\partial \nu(y)}\right\}\,\mathrm{d}s(y)\\
&= -\frac{k\xi_-}{\alpha_{\mathbf{A}}}\int_D\left\{\left(\operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;d),\operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;-\hat{x})\right) - \left(\operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;-\hat{x}),\operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;d)\right)\right.\\
&\qquad\left. -\alpha_{\mathbf{A}}^2\left[\mathbf{b}_0(y;d)\mathbf{a}_0(y;-\hat{x}) - \mathbf{b}_0(y;-\hat{x})\mathbf{a}_0(y;d)\right]\right\}\,\mathrm{d}y,
\end{aligned} \tag{A.7 a}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D}\left\{\mathbf{b}(y;d)\frac{\partial \mathbf{b}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}(y;d)}{\partial \nu(y)}\mathbf{b}(y;-\hat{x})\right\}\,\mathrm{d}s(y)\\
&= \frac{k}{\alpha_{\mathbf{B}}}\int_{\partial D}\left\{\left(\xi_+\mathbf{b}_0(y;d) - \xi_-\mathbf{a}_0(y;d)\right)\frac{\partial \mathbf{b}_0(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)}\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad -\frac{\partial \mathbf{b}_0(y;d)}{\partial \nu(y)}\left(\xi_+ \mathbf{b}_0(y;-\hat{x}) - \xi_- \mathbf{a}_0(y;-\hat{x})\right)\Big\}\, \mathrm{d}s(y)\\
&= -\frac{k\xi_-}{\alpha_{\mathbf{B}}}\int_D \{(\operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;d), \operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;-\hat{x})) - (\operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;-\hat{x}), \operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;d))\\
&\qquad -\alpha_{\mathbf{B}}^2\left[\mathbf{a}_0(y;d)\mathbf{b}_0(y;-\hat{x}) - \mathbf{a}_0(y;-\hat{x})\mathbf{b}_0(y;d)\right]\Big\}\, \mathrm{d}y, \qquad \text{(A.7 b)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial D}\left\{\mathbf{a}(y;d)\frac{\partial \mathbf{b}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y;d)}{\partial \nu(y)}\mathbf{b}(y;-\hat{x})\right\}\mathrm{d}s(y)\\
&= k\int_{\partial D}\left\{\frac{1}{\alpha_{\mathbf{B}}}\left(\xi_+\mathbf{a}_0(y;d) - \xi_-\mathbf{b}_0(y;d)\right)\frac{\partial \mathbf{b}_0(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)}\right.\\
&\qquad \left. -\frac{1}{\alpha_{\mathbf{A}}}\frac{\partial \mathbf{a}_0(y;d)}{\partial \nu(y)}\left(\xi_+\mathbf{b}_0(y;-\hat{x}) - \xi_-\mathbf{a}_0(y;-\hat{x})\right)\right\}\mathrm{d}s(y)\\
&= k\int_D \{\xi_+(\alpha_{\mathbf{A}} - \alpha_{\mathbf{B}})\mathbf{a}_0(y;d)\mathbf{b}_0(y;-\hat{x})\\
&\qquad + \xi_-\left[\alpha_{\mathbf{B}}\mathbf{b}_0(y;d)\mathbf{b}_0(y;-\hat{x}) - \alpha_{\mathbf{A}}\mathbf{a}_0(y;d)\mathbf{a}_0(y;-\hat{x})\right]\\
&\qquad + \xi_+(\alpha_{\mathbf{B}}^{-1} - \alpha_{\mathbf{A}}^{-1})\left(\operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;d), \operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;-\hat{x})\right)\\
&\qquad - \xi_-\left[\alpha_{\mathbf{B}}^{-1}\left(\operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;d), \operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;-\hat{x})\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left. -\alpha_{\mathbf{A}}^{-1}\left(\operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;d), \operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;-\hat{x})\right)\right]\}\,\mathrm{d}y, \qquad \text{(A.7 c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial D}\left\{\mathbf{b}(y;d)\frac{\partial \mathbf{a}(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}(y;d)}{\partial \nu(y)}\mathbf{a}(y;-\hat{x})\right\}\mathrm{d}s(y)\\
&= k\int_{\partial D}\left\{\frac{1}{\alpha_{\mathbf{A}}}\left(\xi_+\mathbf{b}_0(y;d) - \xi_-\mathbf{a}_0(y;d)\right)\frac{\partial \mathbf{a}_0(y;-\hat{x})}{\partial \nu(y)}\right.\\
&\qquad \left. -\frac{1}{\alpha_{\mathbf{B}}}\frac{\partial \mathbf{b}_0(y;d)}{\partial \nu(y)}\left(\xi_+\mathbf{a}_0(y;-\hat{x}) - \xi_-\mathbf{b}_0(y;-\hat{x})\right)\right\}\mathrm{d}s(y)\\
&= k\int_D \{\xi_+(\alpha_{\mathbf{B}} - \alpha_{\mathbf{A}})\mathbf{b}_0(y,d)\mathbf{a}_0(y;-\hat{x})\\
&\qquad + \xi_-\left[\alpha_{\mathbf{A}}\mathbf{a}_0(y,d)\mathbf{a}_0(y;-\hat{x}) - \alpha_{\mathbf{B}}\mathbf{b}_0(y,d)\mathbf{b}_0(y;-\hat{x})\right]\\
&\qquad + \xi_+(\alpha_{\mathbf{A}}^{-1} - \alpha_{\mathbf{B}}^{-1})\left(\operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;d), \operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;-\hat{x})\right)\\
&\qquad - \xi_-\left[\alpha_{\mathbf{A}}^{-1}\left(\operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;d), \operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;-\hat{x})\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left. -\alpha_{\mathbf{B}}^{-1}\left(\operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;d), \operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;-\hat{x})\right)\right]\}\,\mathrm{d}y \qquad \text{(A.7 d)}
\end{aligned}
$$

zu erhalten. Addition von (A.6 a) und (A.6 b) ergibt wegen (A.7 c) und (A.7 d)

$$\begin{aligned} & c_b(\mathbf{a}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{a}_\infty(-d;-\hat{x}))+c_a(\mathbf{b}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{b}_\infty(-d;-\hat{x})) \\ = \;& mk\int_D \{\xi_+(\alpha_\mathbf{A}-\alpha_\mathbf{B})\,[\mathbf{a}_0(y;d)\mathbf{b}_0(y;-\hat{x})-\mathbf{b}_0(y;d)\mathbf{a}_0(y;-\hat{x})] \\ & \quad -\xi_+(\alpha_\mathbf{A}^{-1}-\alpha_\mathbf{B}^{-1})\,[(\operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;d),\operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;-\hat{x})) \\ & \qquad -(\operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;d),\operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;-\hat{x}))]\}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Addition des $c_a\alpha_\mathbf{A}$-fachen von (A.5 a) und des $c_b\alpha_\mathbf{B}$-fachen von (A.5 b) ergibt wegen (A.7 a) und (A.7 b)

$$\begin{aligned} & c_a\alpha_\mathbf{A}(\mathbf{a}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{a}_\infty(-d;-\hat{x}))+c_b\alpha_\mathbf{B}(\mathbf{b}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{b}_\infty(-d;-\hat{x})) \\ = \;& mk\xi_-\int_D \{(\alpha_\mathbf{A}^2-\alpha_\mathbf{B}^2)\,[\mathbf{b}_0(y;d)\mathbf{a}_0(y;-\hat{x})-\mathbf{a}_0(y;d)\mathbf{b}_0(y;-\hat{x})]\}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Weiter liefert Addition des $\frac{c_a}{\alpha_\mathbf{A}}$-fachen von (A.5 a) und des $\frac{c_b}{\alpha_\mathbf{B}}$-fachen von (A.5 b) mit (A.7 a) und (A.7 b)

$$\begin{aligned} & c_a\alpha_\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{a}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{a}_\infty(-d;-\hat{x}))+c_b\alpha_\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{b}_\infty(-d;-\hat{x})) \\ = \;& mk\xi_-\int_D \{(\alpha_\mathbf{A}^{-2}-\alpha_\mathbf{B}^{-2})\,[(\operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;d),\operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;-\hat{x})) \\ & \qquad -(\operatorname{grad}\mathbf{b}_0(y;d),\operatorname{grad}\mathbf{a}_0(y;-\hat{x}))]\}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Die Bildung einer geeigneten Linearkombination der letzten drei Beziehungen führt auf

$$\begin{aligned} & \left\{c_b+c_a\alpha_\mathbf{A}\frac{\xi_+(\alpha_\mathbf{A}-\alpha_\mathbf{B})}{\xi_-(\alpha_\mathbf{A}^2-\alpha_\mathbf{B}^2)}+c_a\alpha_\mathbf{A}^{-1}\frac{\xi_+(\alpha_\mathbf{A}^{-1}-\alpha_\mathbf{B}^{-1})}{\xi_-(\alpha_\mathbf{A}^{-2}-\alpha_\mathbf{B}^{-2})}\right\}(\mathbf{a}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{a}_\infty(-d;-\hat{x})) \\ + & \left\{c_a+c_b\alpha_\mathbf{B}\frac{\xi_+(\alpha_\mathbf{A}-\alpha_\mathbf{B})}{\xi_-(\alpha_\mathbf{A}^2-\alpha_\mathbf{B}^2)}+c_b\alpha_\mathbf{B}^{-1}\frac{\xi_+(\alpha_\mathbf{A}^{-1}-\alpha_\mathbf{B}^{-1})}{\xi_-(\alpha_\mathbf{A}^{-2}-\alpha_\mathbf{B}^{-2})}\right\}(\mathbf{b}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{b}_\infty(-d;-\hat{x})) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Dies vereinfacht sich wegen

$$\alpha_\mathbf{A}\frac{\alpha_\mathbf{A}-\alpha_\mathbf{B}}{\alpha_\mathbf{A}^2-\alpha_\mathbf{B}^2}+\alpha_\mathbf{A}^{-1}\frac{\alpha_\mathbf{A}^{-1}-\alpha_\mathbf{B}^{-1}}{\alpha_\mathbf{A}^{-2}-\alpha_\mathbf{B}^{-2}}=\alpha_\mathbf{B}\frac{\alpha_\mathbf{A}-\alpha_\mathbf{B}}{\alpha_\mathbf{A}^2-\alpha_\mathbf{B}^2}+\alpha_\mathbf{B}^{-1}\frac{\alpha_\mathbf{A}^{-1}-\alpha_\mathbf{B}^{-1}}{\alpha_\mathbf{A}^{-2}-\alpha_\mathbf{B}^{-2}}=1$$

zu

$$\{\xi_-c_b+\xi_+c_a\}\,(\mathbf{a}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{a}_\infty(-d;-\hat{x}))+\{\xi_-c_a+\xi_+c_b\}\,(\mathbf{b}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{b}_\infty(-d;-\hat{x}))=0,$$

also im Falle des (TM), hier gilt $\xi_-c_b+\xi_+c_a=\xi_-c_a+\xi_+c_b$, zu

$$(\mathbf{a}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{a}_\infty(-d;-\hat{x}))+(\mathbf{b}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{b}_\infty(-d;-\hat{x}))=0$$

und im Falle des (TE), es gilt $\xi_-c_b+\xi_+c_a=-(\xi_-c_a+\xi_+c_b)$, zu

$$(\mathbf{a}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{a}_\infty(-d;-\hat{x}))-(\mathbf{b}_\infty(\hat{x};d)-\mathbf{b}_\infty(-d;-\hat{x}))=0.$$

Dies bedeutet, daß im tranversalmagnetischen Fall die Reziprozitätseigenschaft für $\mathbf{e}$ gilt, also

$$\mathbf{e}_\infty(\hat{x};d) = \mathbf{e}_\infty(-d;-\hat{x}),$$

und im transversalelektrischen für $\mathbf{h}$

$$\mathbf{h}_\infty(\hat{x};d) = \mathbf{h}_\infty(-d;-\hat{x}).$$

q. e. d.

A.2 Ein Alternativ-Beweis zu Satz 8.4

Beweis Es seien die Überlegungen bis zur Gleichung (8.3) wie im Beweis zu Satz 8.4 auf Seite 64ff durchgeführt. Jetzt sei aber statt (8.3)

$$s = i\alpha_{\mathbf{A}}(\mu/\mu_0)^{1/2}, \qquad t = i\alpha_{\mathbf{B}}(\mu/\mu_0)^{1/2}$$

gewählt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{\mathbf{a};n} &= i\alpha_{\mathbf{A}}(\mu/\mu_0)^{1/2}\left\{\frac{\partial\Phi_k(.,x_n)}{\partial\nu} - \frac{\partial\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(.,x_n)}{\partial\nu}\right\},\\
\tilde{N}_{\mathbf{b};n} &= i\alpha_{\mathbf{B}}(\mu/\mu_0)^{1/2}\left\{\frac{\partial\Phi_k(.,x_n)}{\partial\nu} - \frac{\partial\Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(.,x_n)}{\partial\nu}\right\},\\
\tilde{D}_{\mathbf{a};n} &= i(\mu/\mu_0)^{1/2}\left\{k\xi\Phi_k(.,x_n) - \alpha_{\mathbf{A}}\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(.,x_n)\right\},\\
\tilde{D}_{\mathbf{b};n} &= i(\mu/\mu_0)^{1/2}\left\{k\xi\Phi_k(.,x_n) - \alpha_{\mathbf{B}}\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(.,x_n)\right\}.
\end{aligned}$$

Dabei sind die Differenzen

$$\frac{\partial\Phi_k(.,x_n)}{\partial\nu} - \frac{\partial\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(.,x_n)}{\partial\nu}, \qquad \frac{\partial\Phi_k(.,x_n)}{\partial\nu} - \frac{\partial\Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(.,x_n)}{\partial\nu}$$

gleichmäßig für alle $n \in \mathbb{N}$ an der Stelle x_0 beschränkt, $\tilde{D}_{\mathbf{a};n}$, $\tilde{D}_{\mathbf{b};n}$ haben dort Singularitäten der Ordnung $\ln n$.

Wie in der Ableitung der Abschätzung (8.6) mit Hilfe von (8.5) folgt unter Ausnutzung der Tatsache, daß alle zu betrachtenden Höldernormen wie auch die L^2-Normen gleichmäßig beschränkt sind, die Beziehung

$$\|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_r)} + \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_r)} \leqslant c_3, \quad n = 1,2,...$$

für eine hinreichend kleine Kugel $B_r = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z - x_0| < r\}$. Dabei benutzt man für die „kritischen“ Terme $\tilde{D}_{\mathbf{a};n}$ und $\tilde{D}_{\mathbf{b};n}$ im wesentlichen die Beziehung $\int(\ln\tau)^2\,\mathrm{d}\tau = \tau(\ln\tau)^2 - 2\tau\ln\tau + 2\tau$ und die Beschränktheit von $(\ln n)^2/n$, $(\ln n)/n$ und $1/n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Insbesondere folgt hieraus

$$\|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C(\partial D\setminus B_r)} + \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C(\partial D\setminus B_r)} + \left\|\frac{\partial\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial\nu}\right\|_{C(\partial D\setminus B_r)} + \left\|\frac{\partial\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial\nu}\right\|_{C(\partial D\setminus B_r)} \leqslant 2c_3. \quad \text{(A.8)}$$

Nach [15, Lemma 4.4] ist

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C(\partial D)} &\leqslant c_4' \left\{ \|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C(\partial D\setminus B_r)} + \left\|\tfrac{\partial\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial\nu}\right\|_{C(\partial D)} \right\}, \\
\|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C(\partial D)} &\leqslant c_4' \left\{ \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C(\partial D\setminus B_r)} + \left\|\tfrac{\partial\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial\nu}\right\|_{C(\partial D)} \right\}.
\end{aligned}$$

Dabei gilt mit (8.2)

$$\begin{aligned}
\left\|\tfrac{\partial\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial\nu}\right\|_{C(\partial D\cap B_r)} &= \left\|\tfrac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\left\{\tfrac{\partial\mathbf{a}_n^s}{\partial\nu} + \tilde{N}_{\mathbf{a};n}\right\}\right\|_{C(\partial D\cap B_r)} \leqslant \left|\tfrac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}\right|(c_2+\tilde{c}) \leqslant c_4'', \\
\left\|\tfrac{\partial\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial\nu}\right\|_{C(\partial D\cap B_r)} &= \left\|\tfrac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\left\{\tfrac{\partial\mathbf{b}_n^s}{\partial\nu} + \tilde{N}_{\mathbf{b};n}\right\}\right\|_{C(\partial D\cap B_r)} \leqslant \left|\tfrac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}\right|(c_2+\tilde{c}) \leqslant c_4'',
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{c}$ eine obere Schranke für $\tilde{N}_{\mathbf{a},n}$, $\tilde{N}_{\mathbf{b},n}$ ist, so daß zusammen mit (A.8)

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C(\partial D)} &\leqslant c_4'\{2c_3 + c_4''\} \leqslant c_4, \\
\|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C(\partial D)} &\leqslant c_4'\{2c_3 + c_4''\} \leqslant c_4
\end{aligned}$$

folgt. Hiermit ergibt sich für

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{\mathbf{a};n} &= \tilde{\mathbf{a}}_{0;n} - \xi_+\mathbf{a}_n^s - \xi_-\mathbf{b}_n^s, \\
\tilde{D}_{\mathbf{b};n} &= \tilde{\mathbf{b}}_{0;n} - \xi_-\mathbf{a}_n^s - \xi_+\mathbf{b}_n^s
\end{aligned}$$

die gleichmäßige Beschränktheit auf dem Rand in einer Umgebung von x_0

$$\|\tilde{D}_{\mathbf{a};n}\|_{C(\partial D\cap B_r)} + \|\tilde{D}_{\mathbf{b};n}\|_{C(\partial D\cap B_r)} \leqslant c_5, \quad n = 1, 2, ...$$

Eine direkte Auswertung bei x_0 ergibt aber, da $k\xi \neq \alpha_{\mathbf{A}}$ beziehungsweise $k\xi \neq \alpha_{\mathbf{B}}$ vorausgesetzt ist, ein singuläres Verhalten der Ordnung $\ln n$. Dies ist ein Widerspruch zur gleichmäßigen Beschränktheit durch c_5. Damit ist alles gezeigt. **q. e. d.**

A.3 Fréchet-Ableitung

A.3.1 Allgemeines zur Fréchet-Differenzierbarkeit

Zunächst soll der Begriff der Fréchet-Ableitung eingeführt werden, der eine Verallgemeinerung des Differenzierbarkeitsbegriffes auf normierte Räume darstellt. Ziel ist es dabei, nichtlineare Operatorgleichungen lokal durch lineare zu ersetzen.

Definition A.1 *Es seien X, Y normierte Räume und $X' \subset X$ eine offene Teilmenge. Ein Operator $A : X' \to Y$ heißt Fréchet-differenzierbar an der Stelle $\varphi \in X'$, wenn es einen beschränkten linearen Operator $A'(\varphi) : X \to Y$ gibt, derart daß*

$$\|A(\varphi + h) - A(\varphi) - A'(\varphi)h\| = o(\|h\|). \tag{A.9}$$

Der Operator $A'(\varphi)$ heißt Fréchet-Ableitung von A an der Stelle φ. Existiert die Fréchet-Ableitung für alle $\varphi \in X'$, dann heißt die Abbildung $A' : X' \to L(X, Y)$ mit $\varphi \mapsto A'(\varphi)$ die Fréchet-Ableitung von A auf X' und wird auch mit $\frac{\partial A}{\partial \varphi}$ bezeichnet. Für $A'(\varphi)h$ wird auch die Bezeichnung $A'(\varphi; h)$ verwendet.

Es gelten folgende Rechenregeln für die Fréchet-Ableitung.

Satz A.2
(i) (Kettenregel) *Es seien X, Y, Z normierte Räume, $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ offen und $A : X' \to Y'$, $B : Y' \to Z$ Fréchet-differenzierbare Abbildungen. Dann ist $B \circ A : X' \to Z$ Fréchet-differenzierbar mit*

$$(B \circ A)'(\varphi) = B'(A\varphi) \circ A'(\varphi)$$

beziehungsweise

$$(B \circ A)'(\varphi; h) = B'(A\varphi; A'(\varphi; h)), \quad \varphi \in X', h \in X.$$

(ii) (Produktregel) *Es seien X_1, X_2, Y, Z normierte Räume und $[.,.] : X_1 \times X_2 \to Y$, $(x_1, x_2) \mapsto [x_1, x_2]$ eine beschränkte bilineare Abbildung. Weiter seien $Z' \subset Z$ eine offene Teilmenge und $A_1 : Z' \to X_1$, $A_2 : Z' \to X_2$ Fréchet-differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch $[A_1, A_2] : Z' \to Y$, $\varphi \mapsto [A_1\varphi, A_2\varphi]$ Fréchet-differenzierbar mit*

$$[A_1, A_2]'(\varphi; h) = [A_1'(\varphi; h), A_2\varphi] + [A_1\varphi, A_2(\varphi; h)], \quad \varphi \in Z', h \in Z.$$

(iii) (Quotientenregel) *Es seien X ein Banach-Raum, Y ein normierter Raum und $Y' \subset Y$ offen. Die Abbildung $A : Y' \to L(X, X)$ sei Fréchet-differenzierbar in $\varphi_0 \in Y'$ und $A\varphi$ sei beschränkt invertierbar für alle $\varphi \in Y'$. Dann ist*

$$\begin{aligned} A^{-1} \quad : \quad & U \to L(X, X) \\ & \varphi \mapsto (A\varphi)^{-1} \end{aligned}$$

Fréchet-differenzierbar in φ_0 mit der Ableitung

$$A^{-1\prime}(\varphi_0; h) = -A^{-1}(\varphi_0) \circ A'(\varphi_0; h) \circ A^{-1}(\varphi_0), \quad h \in Y.$$

A.3.2 Ein Differentiationssatz

Es soll hier ein allgemeiner Differentiationssatz angegeben werden, der die Fréchetdifferenzierbarkeit von Integraloperatoren auf die Ableitung der Kerne zurückführt.

Satz A.3 *Es seien $G_2 \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $G_1 \subset \mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter sei X ein normierter Raum und $X' \subset X$ offen. Für $m \neq n$ bezeichne $Q := G_1 \times G_2$ und für $m = n$ sei $Q := \{(t,\tau) \in G_1 \times G_2 \mid t \neq \tau\}$. Die Funktion $f : Q \times X' \to \mathbb{C}$ sei für festes (t,τ) zweimal stetig Fréchet-differenzierbar nach der dritten Variable. Weiter gebe es integrierbare Funktionen $g_j : Q \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2$ und Konstanten $r, C > 0$ mit*

$$\begin{aligned} \int_{G_2} g_j(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau &\leqslant C \text{ für alle } t \in G_1, j = 1,2 \\ \left|\frac{\partial^j f}{\partial z^j}(t,\tau,z;h)\right| &\leqslant g_j(t,\tau)\|h\|_X^j \text{ für alle } (t,\tau) \in Q,\ z \in B[z_0,r] \subset X',\ h \in X. \end{aligned}$$

Die Abbildungen

$$\begin{aligned} A(z) &: C(G_2) \to C(G_1), \quad (A(z)\varphi)(t) := \int_{G_2} f(t,\tau,z)\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \\ A^1(z;h) &: C(G_2) \to C(G_1), \quad \left(A^1(z;h)\varphi\right)(t) := \int_{G_2} \frac{\partial f}{\partial z}(t,\tau,z;h)\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

seien für alle $z \in X'$ und alle $h \in X$ wohldefiniert. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} A : X' &\to L(C(G_2), C(G_1)) \\ z &\mapsto A(z) \end{aligned}$$

Fréchet-differenzierbar in z_0 mit der Ableitung $A'(z_0;h) = A^1(z_0;h)$.

Beweis Vergleiche [40, Satz 4.8] oder auch [38, Th. 1].

A.3.3 Behandlung des zweidimensionalen Falles

Für die Behandlung des zweidimensionalen Problems soll wieder eine 2π-periodische Parametrisierung des Randes zugrunde gelegt werden, der hier als $C^{2,\alpha}$-glatt vorausgesetzt wird.

Definition A.4 *Es sei $\alpha \in (0,1)$. Es bezeichnet $C^{2,\alpha}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$ den Raum der 2π-periodischen $C^{2,\alpha}$-glatten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$, versehen mit der Norm $\|z\| := \max\{\|z\|_\infty, \|z'\|_\infty, \|z''\|_{0,\alpha}\}$. Weiter wird mit*

$$RP := \left\{ z \in C^{2,\alpha}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2) \mid z|_{[0,2\pi)} \text{ injektiv, } |z'(t)| > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}, \ z \text{ linksorientiert} \right\}$$

der Raum der zulässigen Parametrisierungen bezeichnet.

Lemma A.5 *RP ist offene Teilmenge von $C^{2,\alpha}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$.*

Beweis Siehe [10, Lemma 3.7].

Es bezeichnen $S_\kappa, K_\kappa, K_\kappa^*, \tilde{T}_\kappa$ die Potentialoperatoren gemäß (4.16)-(4.18), (7.1) in parametrisierter Form jeweils zur Wellenzahl κ. Es gilt dann für die Fréchet-Differenzierbarkeit dieser Operatoren das folgende Resultat.

Satz A.6 *Sei $L \in \{S_\kappa, K_\kappa, K_\kappa^*, \tilde{T}_\kappa\}$ mit*

$$(L(z)\chi)(t) = \int_0^{2\pi} f_L(t,\tau,z)\chi(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

wobei $z \in RP$, $\chi \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. So ist L Fréchet-differenzierbar mit der Ableitung

$$(L'(z;h)\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f_L}{\partial z}(t,\tau,z;h)\varphi(\tau).$$

Beweis Siehe [40, Satz 4.11].

Bemerkung A.7 *Es gilt mit der Abkürzung $r(t,\tau,z) = |z(t) - z(\tau)|$*

$$\begin{aligned}
f_{S_\kappa}(t,\tau,z) &= \frac{i}{2} H_0^1(\kappa r(t,\tau,z))|z'(\tau)|,\\
f_{K_\kappa}(t,\tau,z) &= \frac{i\kappa}{2}\left\{z_2'(\tau)[z_1(t)-z_1(\tau)] - z_1'(\tau)[z_2(t)-z_2(\tau)]\right\}\frac{H_1^1(\kappa r(t,\tau,z))}{r(t,\tau,z)},\\
f_{K_\kappa^*}(t,\tau,z) &= -\frac{|z'(\tau)|}{|z'(t)|} f_{K_\kappa}(t,\tau,z),\\
f_{\tilde{T}_\kappa}(t,\tau,z) &= \{z_2'(t)[z_1(\tau)-z_1(t)] - z_1'(t)[z_2(\tau)-z_2(t)]\}\\
&\quad \times \{z_2'(\tau)[z_1(\tau)-z_1(t)] - z_1'(\tau)[z_2(\tau)-z_2(t)]\}\\
&\quad \times \frac{1}{|z'(t)|[r(t,\tau,z)]^4}\\
&\quad \times \left(\frac{i\kappa^2}{2} H_0^1(\kappa r(t,\tau,z))[r(t,\tau,z)]^2 - i\kappa H_1^1(\kappa r(t,\tau,z)) r(t,\tau,z) + \frac{2}{\pi}\right)\\
&\quad + \frac{z_1'(t)z_1'(\tau) + z_2'(t)z_2'(\tau)}{|z'(t)|[r(t,\tau,z)]^2}\left(\frac{i\kappa}{2} H_1^1(k\kappa(t,\tau,z)) r(t,\tau,z) - \frac{1}{\pi}\right).
\end{aligned}$$

Es seien $\mathfrak{E}_\kappa$ und $\mathfrak{D}_\kappa$ der jeweils zur Wellenzahl κ definierte Einfach- bzw Doppelschichtpotentialoperator

$$\begin{aligned}(\mathfrak{E}_\kappa(z)\varphi)(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{i}{4} H_0^1(\kappa|x-z(\tau)|)|z'(\tau)|\,\varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ x \notin \partial D,\\ (\mathfrak{D}_\kappa(z)\psi)(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{i\kappa}{4} \left(\begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix}, x-z(\tau) \right) \frac{H_1^1(\kappa|x-z(\tau)|)}{|x-z(\tau)|}\,\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ x \notin \partial D.\end{aligned}$$

Auch hier gilt, daß sich die Fréchet-Ableitung des Potentials durch die Ableitung des Kernes ausdrücken läßt.

Satz A.8 *Sei z_0 Parametrisierung eines Gebietes mit Rand ∂D_0, $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $\bar{G} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \partial D_0$ und $r > 0$ so, daß für*

$$\begin{aligned} RP_r &:= \left\{ z \in RP \mid \|z - z_0\|_{C^{2,\alpha}_{2\pi}} < r \right\},\\ S_r &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in RP_r \text{ und } \exists t \in [0,2\pi) : x = z(t) \right\}\end{aligned}$$

die Inklusion $\bar{G} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bar{S}_r$ gilt, G liege also außerhalb einer Umgebung des Randes ∂D_0. Dann sind die Operatoren[2] *$L : RP_r \to L(C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}), C_b(G))$, $L \in \{\mathfrak{E}_\kappa, \mathfrak{D}_\kappa\}$ mit*

$$(L(z)\chi)(x) = \int_0^{2\pi} f_L(x,\tau,z)\chi(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

Fréchet-differenzierbar mit der Ableitung

$$(L'(z;h)\chi)(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f_L}{\partial z}(x,\tau,z;h)\chi(\tau).$$

Beweis Vergleiche [40, Satz 4.13].

Es seien φ, ψ Dichten entsprechender Regularität und $u(x) = (\mathfrak{E}_\kappa(z)\varphi)(x)$, $v(x) = (\mathfrak{D}_\kappa(z)\psi)(x)$ die dazu definierten Potentiale sowie $u'(x) = (\mathfrak{E}_\kappa'(z;h)\varphi)(x)$, $v'(x) = (\mathfrak{D}_\kappa'(z;h)\psi)(x)$ die entsprechenden Fréchet-Ableitungen nach dem Rand. Diese sind in $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ wohldefiniert. Es können dann Sprungbeziehungen, wie sie für u und v bekannt sind, auch für u' und v' hergeleitet werden.

Satz A.9 *Sei $z \in RP$ Parametrisierung von ∂D und $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $\varphi \in C^{0,\alpha}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$*

$$u_\pm'(z(t)) = \frac{1}{2}(S_\kappa'(z;h)\varphi)(t) - (\operatorname{grad} u_\pm(z(t)), h(t))\,,$$

[2] Dabei bezeichnet $C_b(G)$ die Menge der beschränkten stetigen Funktionen auf G.

für $\psi \in C^{1,\alpha}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$$v'_{\pm}(z(t)) = \frac{1}{2}(K'_{\kappa}(z;h)\psi)(t) - (\operatorname{grad} v_{\pm}(z(t)), h(t))\,,$$

für $\varphi \in C^{1,\alpha}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'_{\pm}}{\partial \nu}(z(t)) &= \frac{1}{2}(K^{*\prime}_{\kappa}(z;h)\varphi)(t) - \left(\operatorname{grad} u_{\pm}(z(t)), \frac{\partial \nu}{\partial z}(z(t);h)\right) \\ &\quad - \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 u_{\pm}(z(t))}{\partial x_j \partial x_k} h_j(t)\nu_k(z(t)),\end{aligned}$$

und für $\psi \in C^{2,\alpha}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v'_{\pm}}{\partial \nu}(z(t)) &= \frac{1}{2}(T'_{\kappa}(z;h)\varphi)(t) - \left(\operatorname{grad} v_{\pm}(z(t)), \frac{\partial \nu}{\partial z}(z(t);h)\right) \\ &\quad - \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 v_{\pm}(z(t))}{\partial x_j \partial x_k} h_j(t)\nu_k(z(t)).\end{aligned}$$

Beweis Siehe [40, Sätze 4.14 und 4.16].

Literaturverzeichnis

[1] C. F. Bohren, Light scattering by optically active particles, *Chem. Phys. Lett.* 29 (1974), 458

[2] D. Colton and R. Kress, *Integral equation methods in scattering theory*, Wiley-Interscience Publication, New York, 1983

[3] D. Colton and R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1992

[4] D. Colton, R. Kress, and P. Monk, Inverse scattering from an orthotropic medium *J. Comp. Appl. Math.* 81 (1997), 269-298

[5] A. G. Dmitrienko, A. I. Mukomolov, and V. V. Fisanov, A Numerical Method for Solving the Problem of Electromagnetic Scattering by a Three-Dimensional Chiral Body, *J. Communications Technology Electronics*, 43.8 (1998), 910-914

[6] A. I. Fedorenko, Solution of the Problem of Electromagnetic Wave Scattering by a Homogeneous Chiral Cylinder Using the Surface Integral Equation Method, *J. Communications Technology Electronics*, 40.4 (1995), 134-145

[7] T. Gerlach, *Zur Eindeutigkeit beim inversen Randwertproblem zur Helmholtzgleichung bei konduktiven und resistiven Randbedingungen*, Diplomarbeit, NAM Universität Göttingen 1995

[8] T. Gerlach and R. Kress, Uniqueness in inverse obstacle scattering with conductive boundary condition, *Inverse Problems* 12 (1996), 619-625,1075

[9] P. Hähner, A uniqueness theorem for a transmission problem in inverse electromagnetic scattering, *Inverse Problems* 9 (1993), 667-678

[10] T. Hohage, *Newton-Verfahren beim inversen Neumann-Problem zur Helmholtz-Gleichung*, Diplomarbeit, NAM Universität Göttingen 1996

[11] T. Hohage and C. Schormann, A Newton-type method for a transmission problem in inverse scattering, *Inverse Problems* 14 (1998), 1207-1228

[12] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter, Berlin New York 1983

[13] G. Jost, *Integralgleichungsmethoden mit kombiniertem einfachen und doppelten Potentialansatz beim gemischten Außenraumproblem bei der Helmholtzgleichung*, Diplomarbeit, NAM Universität Göttingen, 1983

[14] A. Kirsch, Surface Gradients and Continuity Properties for Some Integral Operators in Classical Scattering Theory, *Math. Methods Appl. Sciences* 11 (1989), 789-804

[15] A. Kirsch and R. Kress, Uniqueness in inverse obstacle scattering, *Inverse Problems* 9 (1993), 285-299

[16] R. E. Kleinman and G. F. Roach, Boundary integral equations for the three-dimensional Helmholtz equation, *SIAM Review* 16.2 (1974), 214-236

[17] W. Knauff and R. Kress, On the Exterior Boundary-Value Problem for the Time-Harmonic Maxwell-Equation, *J. Math. Anal. Appl.* 72 (1979), 215-235

[18] R. Kress, A Remark on a Boundary Value Problem for Force-free Fields, *J. Appl. Math. Phys. ZAMP* 28 (1977), 715-722

[19] R. Kress, The treatment of a Neumann boundary value problem for force-free fields by an integral equation method, *Proc. Roy. Soc. Edinb.* 82A (1978), 71-86

[20] R. Kress, A boundary integral equation method for a Neumann boundary problem for force-free fields, *J. Engeneering Math.* 15 (1981), 29-48

[21] R. Kress, On the boundary operator in electromagnetic scattering, *Proc. Roy. Soc. Edinb.* 103A (1986), 91-98

[22] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1989

[23] R. Kress, A Newton Method in inverse obstacle scattering, In: *Inverse Problems in Engeneering Mechanics*, (Bui et al, eds), Balkema, Rotterdam 1994

[24] R. Kress, Integral equation methods in inverse obstacle scattering, *Engeneering Anal. with Boundary Elements* 15 (1995), 171-179

[25] R. Kress, On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory, *J. Comput. Appl. Math* 61 (1995), 345-360

[26] R. Kress, *Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York 1998

[27] R. Kress and G. F. Roach, Transmission problems for the Helmholtz equation, *J. Math. Phys.* 19.6 (1978), 1433-1437

[28] R. Kussmaul, Ein numerisches Verfahren zur Lösung des Neumannschen Aussenraumproblems für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung, *Computing* 4 (1969), 246-273

[29] A. Lakhtakia, V. K. Varadan, and V. V. Varadan, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media*, Lecture Notes in Physics 335, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York 1989

[30] I. V. Lindell, A. H. Sihvola, S. A. Tretyakov, A. J. Viitanen, *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*, Artech House, Boston London 1994

[31] P. A. Martin and P. Ola, Boundary integral equations for the scattering of electromagnettic waves by a homogeneous dielectric obstacle, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 123A (1993), 185-208

[32] A. Meyenburg, *Interpolation mit Translaten einer geraden, 2π-periodischen, stetigen Funktion*, Hausarbeit im Rahmen der 1. Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien, Universität Göttingen, 1996

[33] L. Mönch, *Ein Quadraturformelverfahren für eine hypersinguläre Integralgleichung bei der Helmholtzgleichung im $\mathbb{R}^2$*, Diplomarbeit, Universität Göttingen, 1994

[34] L. Mönch, *Die numerische Lösung des inversen akustischen Streuproblems am schallharten Kurvenbogen*, Dissertation, Universität Göttingen 1996

[35] C. Müller, *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1969

[36] P. Ola, Boundary integral equations for the scattering of electromagnetic waves by a homogenous chiral obstacle, *J. Math. Phys.* 35.8 (1994), 3969-3980

[37] R. Potthast, *Fréchet Differenzierbarkeit von Randintegraloperatoren und Randwertproblemen zur Helmholtzgleichung und den zeitharmonischen Maxwellgleichungen*, Dissertation, Universität Göttingen 1994

[38] R. Potthast, Domain Derivatives in Electromagnetic Scattering, *Math. Meth. Appl. Sciences* 19 (1996), 1157-1175

[39] A. Priou, A. Sihvola, S. Tretyakov, and A. Vinogradov, *Advances in Complex Electromagnetic Materials*, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Electromagnetism of Chiral, Bi-isotropic, and Bi-anisotropic Media, Kluwer Academic, Dordrecht 1997

[40] C. Schormann, *Newton-Verfahren für ein inverses Transmissionsproblem bei elektromagnetischen Wellen*, Diplomarbeit, NAM Universität Göttingen 1996

[41] A. Sihvola and I. V. Lindell, Bi-isotropicconstitutive relations, *Microwave Opt. Tech. Lett.* 5 (1992), 79-81

[42] W. Sternberg, Anwendung der Integralgleichungen in der elektromagnetischen Lichttheorie, *Composito Mathematica* 3 (1936), 254-275

[43] P. Wilde, *Über Transmissionsprobleme bei der vektoriellen Helmholtzgleichung*, Dissertation, Universität Göttingen 1985

[44] P. Wilde, Transmission problems for the vector Helmholtz equation, *Proc. Roy. Soc. Edinb.* 105A (1987), 61-76

Lebenslauf

persönliche Daten

Name	Thomas Gerlach
Geburtstag	27. Juli 1971
Geburtsort	Bleicherode
Eltern	Lenore Gerlach, geb. Gerbach, Lehrerin Otto Gerlach, Lehrer
Anschrift	Königsstieg 3, 37081 Göttingen
email	thomas.gerlach@usa.net

Ausbildung

1978 - 1986	Polytechnische Oberschule Haynrode
1986 - 1990	Spezialschule mathematisch – naturwissenschaftlich – technischer Richtung Erfurt, Abitur Juli 1990
WS 90/91 - SS 92	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Universität Leipzig, Vordiplom Juli 1992
WS 92/93 - WS 95/96	Studium der Mathematik mit Nebenfach Theoretische Physik an der Universität Göttingen, Diplom Mai 1996
seit SS 96	Promotionsstudium in Mathematik, Betriebswirtschaftslehre und Theoretische Physik als Nebenfächer

Tätigkeiten

seit 1991	Korrektor, Koordinator und Juror bei mathematischen Schülerwettbewerben auf Landes- und Bundesebene (Mathematikolympiaden)
WS 93/94, 94/95, 95/96, WS 96/97 - WS 97/98	wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen
seit April 1998	wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen