Fortsetzungsaussagen für Kohomologieklassen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fachbereiche
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Ulrich Armbrüster
aus Bremen

Göttingen 1996

D7
Referent: Prof. Dr. H. Grauert
Korreferent: Prof. Dr. U. Stuhler
Tag der mündlichen Prüfung: 20.6.1996

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **2**

Vorbereitungen 4

1 Fortsetzungen und Singularität von Kohomologieklassen **7**

1.1 Lokale Fortsetzung 7

1.2 Gleichzeitige Fortsetzung 14

1.3 Existenz singulärer Klassen 17

1.4 Gestalt der Kohomologiegruppen 20

1.5 Fortsetzung beschränkter Formen 21

2 Mittag-Leffler-Kohomologie **25**

2.1 Bijektivität der Restriktionsabbildungen 29

2.2 Elementare Abschätzungen 31

2.3 Abschätzungen in der Weierstraßnorm 35

Literaturverzeichnis **40**

Einleitung

In dieser Arbeit werden Fortsetzungseigenschaften von Kohomologiegruppen bzw. -klassen mit Werten in einer kohärenten analytischen Garbe $\mathcal{S}$ untersucht. Wir wollen von einer Fortsetzbarkeit der Kohomologiegruppen mit Werten in $\mathcal{S}$ von einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$ in ein größeres Gebiet $\hat{G} \subset \mathbb{C}^n$ sprechen, wenn der Restriktionshomomorphismus

$$(*) \qquad H^q(\hat{G}, \mathcal{S}) \to H^q(G, \mathcal{S})$$

bijektiv ist. Lassen sich bestimmte Kohomologiegruppen von G nach $\hat{G}$ fortsetzen, so haben G und $\hat{G}$ vergleichbare analytische Eigenschaften, beispielsweise im Hinblick auf die Existenz von am Rande singulären holomorphen Funktionen und auf die Lösbarkeit der Cousin- bzw. Poincaré-Probleme. Daher ist es interessant, dies näher zu untersuchen.

Abbildung $(*)$ beinhaltet den Fall $q = 0$ und $\mathcal{S} = \mathcal{O}_{\hat{G}}$, also die Fortsetzung holomorpher Funktionen. Dies hat weite Anwendungen, nicht zuletzt in der theoretischen Physik. So kann in der Quantenfeldtheorie das CPT-Theorem mit Hilfe holomorpher Fortsetzungen streng mathematisch aus den Wightmanschen Axiomen gefolgert werden.
Die Verallgemeinerung der für diese Theorie wesentlichen Begriffe wie pseudokonvex, lokale Fortsetzbarkeit und singulärer Punkt auf höhere Kohomologieklassen hat ihre Grundlagen in den Artikeln [AnGr62] und [AnNo66]. Aus der Pseudokonvexität wird eine q-Konvexität. Hierfür existieren in der Literatur verschiedene Definitionen, man vergleiche nur einmal diese Begriffe in [AnGr62], [HeLe2], [AnNo66] und [Gra82]. Als Standard haben sich wohl die Bezeichnungen aus [AnGr62] durchgesetzt; diese sollen auch hier benutzt werden.

Einige Begriffe lassen sich jedoch nicht verallgemeinern. So gibt es für $q > 0$ kein Pendant zur Holomorphiehülle eines Gebietes. Dies hängt damit zusammen, daß für $G_1 \subset G_2 \subset G_3$ die Fortsetzbarkeit der Kohomologiegruppen von G_1 nach G_3 keineswegs die von G_1 nach G_2 oder von G_2 nach G_3 impliziert; man denke nur an den Fall, in dem G_1 und G_3 Steinsch sind, während es G_2 nicht ist.
Man kann sich fragen, inwieweit wenigstens eine partielle Verallgemeinerung möglich ist. Ein konkretes Resultat dafür findet man in Kapitel 1. Vieles ist dabei schon in [Gra81] oder [Gra82] enthalten. Die hier verwendeten Beweise sollten aber -trotz aller notwendigen Technik- etwas einfacher zu verstehen sein. Dabei geht es um feste Gebiete $G_0 \subset \cdots \subset G_{n-1} \subset \mathbb{C}^n$, die eine Fortsetzung der q-ten Kohomologiegruppen mit Werten in $\mathcal{O}$ von G_0 nach G_{n-q-1} zulassen. G_{n-q-1} bildet gewissermaßen sogar eine natürliche Grenze dieser Fortsetzbarkeit, da es immer Klassen gibt, die auf den wesentlichen Teilen des Randes von G_{n-q-1} singulär sind. Aus den hier auftretenden Techniken ergeben sich noch einige weitere Resultate.

Im weiteren ist dann das Ziel, in dem konkreten Fall dieser Gebiete Abschätzungen für die Fortsetzungen zu finden. Zunächst wird dabei das Supremum der die Klassen in der Dolbeaultkohomologie repräsentierenden Formen betrachtet. Die lokale Technik stammt aus [Ker71], dort wird allerdings immer nur in eine ϵ-Umgebung fortgesetzt, während hier ein echt größeres Gebiet auftritt.

In Kapitel 2 wird die Mittag-Leffler-Kohomologie als Teilmenge von $H^q(G, \mathcal{O})$ eingeführt. Auch die q-ten Mittag-Leffler-Kohomologiegruppen können von G_0 nach G_{n-q-1} fortgesetzt werden. Kohomologieklassen können dabei durch holomorphe Funktionen auf gewissen q-kodimensionalen komplexen Unterräumen der G_i repräsentiert werden. Für diese Funktionen können Abschätzungen bewiesen werden, und zwar bezüglich ihres Maximums und auch für polynomiale Beschränktheit. Letzterer Begriff ist nützlich für die Konstruktion von Holomorphiehüllen bestimmter Gebiete im $\mathbb{C}^n$, beispielsweise im Zusammenhang mit dem Edge-of-the-Wedge-Theorem. Es ist daher sinnvoll, ihn auf komplexe Unterräume von Gebieten im $\mathbb{C}^n$ auszudehnen.

Holomorphe Funktionen können auf den hier auftretenden q-kodimensionalen komplexen Unterräumen von Gebieten im $\mathbb{C}^n$ -wie im Weierstraßschen Divisionssatz für $q = 1$- lokal als Pseudopolynom dargestellt werden. Die Koeffizienten sind holomorphe Funktionen auf bestimmten Gebieten im $\mathbb{C}^{n-q}$, durch sie kann eine Norm eingeführt werden, die hier als Weierstraßnorm bezeichnet wird. Unter bestimmten Voraussetzungen an die Unterräume wird dann bezüglich der Weierstraßnorm eine Abschätzung für die Fortsetzung von G_0 nach G_{n-q-1} bewiesen.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Prof. H. Grauert für die Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit bedanken.
Darüberhinaus gebührt mein Dank Dr. Th. Lehmkuhl und einigen weiteren Kollegen, die mir durch zahlreiche Diskussionen geholfen haben.

Vorbereitungen

Hier sollen zunächst die Gebiete $G_0, \ldots, G_{n-1} \subset \mathbb{C}^n$ definiert werden, die der gesamten Arbeit zugrundeliegen.

Es sei Q eine positiv definite quadratische Form der Art

$$Q(z) = Re \sum_{\nu,\mu=1}^{m} a_{\nu\mu}\, z_\nu z_\mu \; + \sum_{\nu=1}^{m} z_\nu \overline{z_\nu}.$$

$$t(z) := \sum_{\lambda=1}^{m} c_\lambda\, z_\lambda \overline{z_\lambda}$$

mit $0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_m$ sei eine weitere positiv definite hermitesche Form. Weiterhin sei

$$D := \{z \in \mathbb{C}^m \mid Q(z) < 1\}.$$

Wir setzen

$$G_0 := \{(w,z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m \mid z \in D,\, \log|w| < t(z)\} \; \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{m+1}.$$

Dies ist so zu verstehen, daß $\{0\} \times D \subset G_0$.
G_0 ist dann ein *Hartogsscher Körper* über D (zur Definition dieses Begriffs s. [BeTh]).
Sei $t_q(z) := t(z) - c_q\,(Q(z) - 1)$. Dann ist

$$t(z) =: t_0(z) < t_1(z) < \cdots < t_m(z) \qquad \text{auf } D.$$

Für $G_q := \{(w,z) \in \mathbb{C}^n \mid z \in D,\, \log|w| < t_q(z)\}$ gilt dann die erwähnte Inklusion:

$$G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_m.$$

Die G_q sind ebenfalls Hartogssche Körper.
Genauer ausgeschrieben:

$$\boxed{G_0 = \{(w,z) \mid z \in D, \log|w| < \sum_{i=1}^{m} c_i\, z_i \overline{z_i}\}}$$

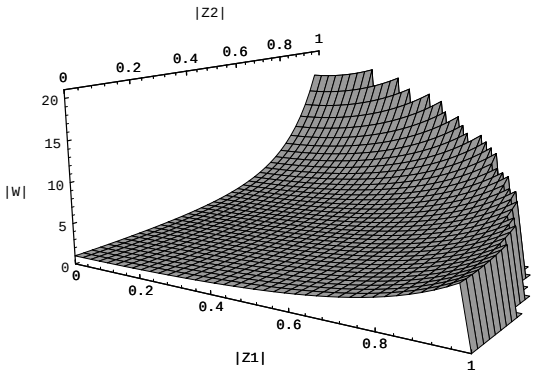
sowie für $q = 1, \ldots, m$:

$$\boxed{G_q = \{(w,z) \mid z \in D, \log|w| < \sum_{i=1}^{q-1} (c_i - c_q) z_i \overline{z_i} \; + \sum_{i=q+1}^{m} (c_i - c_q) z_i \overline{z_i} \; + c_q\,(1 - Re \sum_{\nu,\mu=1}^{m} a_{\nu\mu} z_\nu z_\mu)\}.}$$

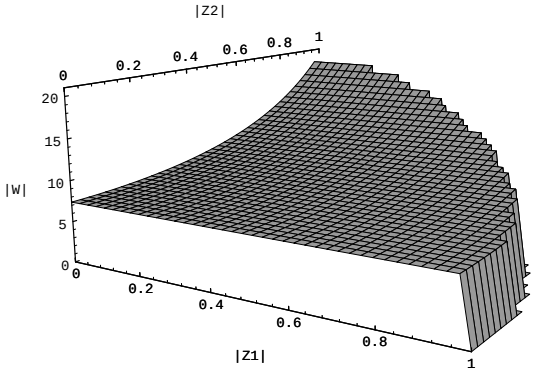
Beispiel 0.1 *Wir betrachten die folgende Situation im* $\mathbb{C}^3$ *(also* $n = 3, m = 2$*):*

$$Q(z) := |z_1|^2 + |z_2|^2, \quad t(z) := 2|z_1|^2 + 3|z_2|^2.$$

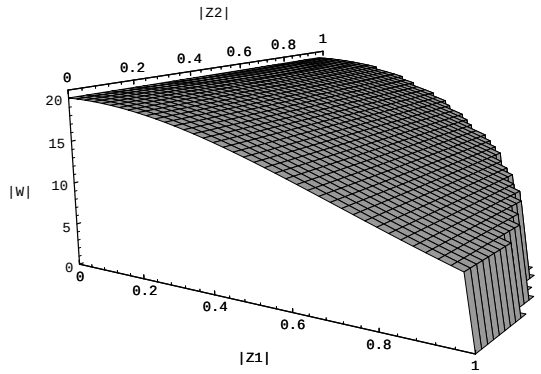
Die Gebiete G_0, G_1, G_2 *sind dann durch ihre Bilder im absoluten Raum charakterisiert. Es ist*



$$G_0 = \{(w, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1,\ \log|w| < 2|z_1|^2 + 3|z_2|^2\},$$



$$G_1 = \{(w, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1,\ \log|w| < 2 + |z_2|^2\},$$



und $G_2 = \{(w, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1,\ \log|w| < 3 - |z_1|^2\}$.

Für diese Gebiete $G_0 \subset G_1 \subset G_2$ gelten die Sätze 1.15 und 1.20; G_2 ist die Holomorphiehülle von G_0.

Ist ϕ eine reellwertige, zweimal stetig differenzierbare Funktion in einer Umgebung des Punktes $z_0 \in \mathbb{C}^n$, so bezeichnet man

$$L_\phi(w) := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_i \partial \overline{z_j}}(z_0)\ w_i \overline{w_j}$$

als Leviform von ϕ in z_0.

Definition 0.2 *Ist z_0 Randpunkt eines Gebietes $G \subset \mathbb{C}^n$, U eine Umgebung von z_0, ϕ eine reellwertige C^2-Funktion auf U mit $d\phi \neq 0$ überall in U und $G \cap U = \{z \in U \mid \phi(z) > 0\}$, so heißt G in z_0* q-konvex*, falls $L_\phi|T_{z_0}$ mindestens $n-q$ negative Eigenwerte hat, und* q-konkav*, falls $L_\phi|T_{z_0}$ mindestens $n-q$ positive Eigenwerte hat. Entsprechend heißt G in z_0* schwach q-konvex *bzw.* schwach q-konkav*, wenn $L_\phi|T_{z_0}$ mindestens n-q nichtpositive bzw. nichtnegative Eigenwerte hat.*

1-konvex ist hier also das Gleiche wie in der Literatur streng pseudokonvex, schwach 1-konvex entspricht pseudokonvex.
Ist G in z_0 definiert durch ϕ und dort q-konkav, so kann man $\tilde{\phi}$ so wählen, daß $L_{\tilde{\phi}}$ in z_0 $n-q+1$ positive Eigenwerte hat und G in z_0 auch durch $\tilde{\phi}$ definiert wird (s. [HeLe2]).

Man rechnet für $q > 0$ nach: G_q ist im Rand schwach $(n-q)$-konvex (außer an den Stellen $\log|w| = t_q(z),\ z \in \partial D$), G_m ist sogar ein Holomorphiegebiet. In $\partial G_q \cap (\mathbb{C} \times D)$ ist G_q (q+1)-konkav sowie schwach q-konkav.
G_0 ist in $\partial G_0 \cap (\mathbb{C} \times D)$ 1-konkav.

1 Fortsetzungen und Singularität von Kohomologieklassen

In diesem Kapitel wird zunächst die Fortsetzbarkeit der q-ten Kohomologiegruppen mit Werten in $\mathcal{O}$ von G_0 nach G_{n-q-1} bewiesen. Lokal werden dabei q-Hartogsfiguren benutzt, die an q-konkaven Randpunkten immer existieren. Es wird auch gezeigt, daß G_{n-q-1} eine natürliche Grenze der Fortsetzbarkeit darstellt, da es q-Klassen gibt, die in $\partial G_{n-q-1} \cap (\mathbb{C} \times D)$ singulär sind.
Es wird dann die Gestalt der $H^q(G_0, \mathcal{O})$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum bestimmt. Ferner können wir noch Gebiete angeben, in denen ganz ähnliche Fortsetzungssätze gelten. Danach beschäftigen wir uns mit der Abschätzung der die einzelnen Klassen in der Dolbeaultkohomologie repräsentierenden Formen und zeigen damit eine Beschränktheitsaussage für die Fortsetzung dieser Klassen.

1.1 Lokale Fortsetzung

In diesem Abschnitt soll zu einem Randpunkt eines dort q-konkaven Gebietes B eine lokale Fortsetzung für ν-Klassen konstruiert werden ($\nu < n-q$). Genauer bedeutet dies: Ist $z \in \partial B$, so gibt es für $0 < \nu < n-q$ beliebig kleine Steinsche Umgebungen $U(z)$, so daß : $H^\nu(\bar{U} \cap B, \mathcal{O}) = 0$.
Im Fall $\nu = 0$ erhält man für diese U die eindeutige Fortsetzbarkeit holomorpher Funktionen von $\bar{U} \cap B$ nach $\bar{U}$. U soll hier explizit konstruiert werden.
Die hier bewiesene Aussage ist sogar noch etwas allgemeiner: Statt $\mathcal{O}$ wird hier eine beliebige kohärente Garbe $\mathcal{S}$ genommen; die Kohomologiegruppen verschwinden dann für $0 < \nu < n - q - hd(\mathcal{S})$. Dafür sind jedoch noch einige Vorbereitungen nötig.

Es sei $M \subset \mathbb{C}^m$ eine nicht leere Menge. Mit $\mathcal{O}(M)$ bezeichnen wir die Menge der Keime von in einer offenen Umgebung von M holomorphen Funktionen. Unter einer biholomorphen Einbettung $M \longrightarrow N \subset \mathbb{C}^n$ verstehen wir den Keim von biholomorphen Einbettungen einer Umgebung von M in einer Umgebung von N.

Unter einem *Produktbereich* im $\mathbb{C}^n$ versteht man den Abschluß eines kartesischen Produkts von komplex 1-dim. offenen Mengen ($\emptyset$ ist dabei zugelassen).
Eine *Zackenfunktion* auf einer Menge $G \subset \mathbb{C}^n$ ist eine reellwertige Funktion, die auf einem Produktbereich $P \subset G$ identisch gleich ρ $(0 < \rho < 1)$ und in $G \setminus P$ gleich 1 ist.
Z bezeichne im folgenden den Produktbereich $Z := \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_\nu| \leq 1,\ 1 \leq \nu \leq n\}$.
Man bezeichnet:
$Z' := \{z' = (z_1, ..., z_{q-1}) \mid |z_\nu| \leq 1,\ \nu = 1, ..., q-1\}$,
$Z'' := \{z'' = (z_q, ..., z_n) \mid |z_\nu| \leq 1,\ \nu = q, ..., n\}$.
$\overset{\circ}{Z}'$ bzw. $\overset{\circ}{Z}''$ bezeichnen die analogen Mengen, bei denen $<$ statt $\leq$ steht. Es ist $Z = Z' \times Z''$.

Definition 1.1 *Für $n+2 \leq m$ seien $\rho_{n+2}, ..., \rho_m$ Zackenfunktionen auf Z', ρ sei eine Zahl mit $0 < \rho < 1$. Dann heißt*

$$H_r := \{z \in \mathbb{C}^m \mid |z_\nu| \leq 1,\ \nu = 1, ..., m;\ |z_q| \leq \rho\} \cup \bigcup_{\mu=n+2}^{m} \{z \in \mathbb{C}^m \mid |z_\nu| \leq 1,\ \nu = 1, ..., m;\ \rho_\mu(z') \leq |z_\mu|\}$$

mit $r = (\rho, \rho_{n+2}, ..., \rho_m)$ eine verallgemeinerte q-Hartogsfigur.

ϕ sei eine reellwertige C^2-Funktion auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^n$, es sei $d\phi \neq 0$ überall in G, ferner sei $S := \{z \in G \mid \phi(z) = 0\} \neq \emptyset$ und $B := \{z \in G \mid \phi(z) > 0\}$ sei in jedem Punkt von S q-konkav. Der Einheitspolyzylinder um einen beliebigen Punkt $z_0 \in G$ werde nun auch mit Z bezeichnet. Man kann annehmen: $Z \subset G$ (andernfalls verkleinert man Z linear und nimmt eine Koordinatentransformation vor).
Die Leviformen von $\phi | z' \times Z''$ seien für $z' \in Z'$ immer positiv definit. Ist

$$Q_{z_0,\phi}(z) := \phi(z_0) + 2\sum_{\nu=q}^{n} \phi_{z_\nu}(z_0)\,(z_\nu - z_\nu^{(0)}) + \sum_{\nu,\mu=q}^{n} \phi_{z_\nu z_\mu}(z_0)\,(z_\nu - z_\nu^{(0)})(z_\mu - z_\mu^{(0)}),$$

so verschwindet $h(z) := \phi(z) - Re\, Q_{z_0,\phi}(z) - L_{\phi|z_0' \times Z''}(z - z_0)$ in $z_0' \times Z''$ bis zur 2. Ableitung.

Definition 1.2 *Mit den vorhergehenden Bezeichnungen sei $\phi(z) - Re\, Q_{z_0,\phi}(z) > 0$ für alle $z \in (z_0' \times Z'') \setminus \{z_0\}$. Ferner sei $\rho \in]0,1[$ und $f \in \mathcal{O}(Z)$ gegeben. (Z, ρ, f) heißt dann* q-Hartogsfigur zu (ϕ, z_0), *wenn gilt:*
1) $z_0 \in \{z \in Z \mid |f(z)| < 1\}$
2) $\{z \in Z \mid |f(z)| \leq \rho\} \subset B$
3) $(G \setminus B) \cap \{z \in Z \mid |f(z)| \leq 1\} \subset Z' \times \overset{\circ}{Z}{}''$.

Bemerkung 1.3 *$Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}$ ist Steinsch*

Beweis: $\overset{\circ}{Z} \cap \{|f(z)| < 1\}$ ist Holomorphiegebiet, denn zu jedem Randpunkt z^* kann man dort singuläre Funktionen angeben. Ist $z^* \in \partial(\overset{\circ}{Z} \cap \{|f| < 1\})$ mit $f(z^*) = 1$, so betrachte man die Funktion $g(z) := \frac{1}{f(z) - f(z^*)}$. g ist holomorph in $\{|f(z)| < 1\}$ und singulär in z^*. Die anderen Randpunkte sind Randpunkte des Holomorphiegebiets $\overset{\circ}{Z}$. Daher ist auch $\overset{\circ}{Z} \cap \{|f| < 1\}$ ein Holomorphiegebiet (also Steinsch). Ebenso gibt es beliebig kleine offene Umgebungen von $Z \cap \{|f| \leq 1\}$, die Steinsch sind. Als induktiver Limes dieser offenen Umgebungen ist mit [God], Théorème 2.4.11.1 dann auch $Z \cap \{|f| \leq 1\}$ Steinsch. ■

Lemma 1.4 *Ist B in $z_0 \in \partial B$ q-konkav, so gibt es immer beliebig kleine Polyzylinder, die nach einer umkehrbar linearen Koordinatentransformation q-Hartogsfiguren zu (ϕ, z_0) sind.*

Beweis: Es werden die obigen Bezeichnungen benutzt. $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(z) := e^{-2Q_{z_0,\phi}(z)}$ ist holomorph in $\mathbb{C}^n$ und es gilt $\tilde{f}(z_0) = 1$. Der abgeschlossene $(n - q + 1)$-dim. Polyzylinder P'' um z_0 sei so klein gewählt, daß $z_0' \times P'' \subset G$ und $L_{\phi|z_o' \times P''} + h$ in $P'' \setminus \{z_0\}$ stets positiv ist. Nach umkehrbar linearer Koordinatentransformation kann man annehmen, daß $P'' = Z''$.
Da h bis zur 2. Ordnung verschwindet, ist $|\tilde{f}(z)| > 1$ für $z \in (z_0' \times \partial Z'') \cap \{\phi \leq 0\}$. Wir wählen einen $(q-1)$-dim. Polyzylinder P' um z_0' so, daß $P' \times P'' \subset G$ und $|\tilde{f}(z)| > 1$ in ganz $(P' \times \partial Z'') \cap \{\phi \leq 0\}$. $\rho < 1$ sei nun so bestimmt, daß dort auch $|f| > 1$ mit $f := \sqrt{\rho}\,\tilde{f}$. Da h bis zur 2. Ordnung verschwindet, ist $|f| \geq \sqrt{\rho}$ in $(z_0' \times Z'') \cap \{\phi \leq 0\}$. Man verkleinert P' soweit, daß $|f| > \rho$ in $(P' \times Z'') \cap \{\phi \leq 0\}$. Nun werden die Koordinaten umkehrbar linear so verändert, daß $P' = Z'$, also $P' \times P'' = Z$.
(Z, ρ, f) ist jetzt eine q-Hartogsfigur zu (ϕ, z_0). ■

Lemma 1.5 *Es sei $z \in \partial B$ und ∂B dort q-konkav. Dann existieren nach einer umkehrbaren linearen Koordinatentransformation ein $w \in \partial B$, eine q-Hartogsfigur (Z, ρ, f) zu (ϕ, w) und Funktionen $\Psi^+ \geq \phi, \Psi^- \leq \phi$, so daß gilt:*

1) $\emptyset \neq \{z \mid \phi(z) \leq 0 < \Psi^+(z)\} \subset Z \cap \{|f| \leq 1\}$
$\emptyset \neq \{z \mid \phi(z) > 0 \geq \Psi^-(z)\} \subset Z \cap \{|f| \leq 1\}$

2) (Z, ρ, f) ist auch noch q-Hartogsfigur zu (Ψ^+, w) und (Ψ^-, w).

Beweis: $(\tilde{Z}, \tilde{\rho}, \tilde{f})$ sei q-Hartogsfigur zu (ϕ, z).
Man kann dann in $\tilde{Z} \cap \{|\tilde{f}| \leq 1\}$ ein $w \in \partial B$ finden und eine q-Hartogsfigur (Z, ρ, f) zu (ϕ, w), so daß noch $z \in (Z \cap \{|f| \leq 1\})^\circ$.
$U \subset Z \cap \{|f| \leq 1\}$ sei eine Umgebung von z mit $w \notin U$. Es sei Ψ eine nicht negative C^∞-Funktion mit $\Psi \geq 0$ und $supp\ \Psi \subset U$. Setze $\Psi^\pm := \phi \pm \epsilon\Psi$ mit hinreichend kleinem $\epsilon > 0$. Dieses erfüllt die behaupteten Eigenschaften. ■

Lemma 1.6 *(Z, ρ, f) sei eine q-Hartogsfigur zu (ϕ, z_0). Dann gibt es dazu ein $m \in \mathbb{N}$ und eine biholomorphe Einbettung $h : Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \hookrightarrow W$ in den abgeschlossenen m-dim. Einheitspolyzylinder W. Weiterhin existiert eine verallgemeinerte q-Hartogsfigur $H_r \subset W$ mit $r_1 = \rho$, so daß $h^{-1}(H_r) \subset B$.*
Die Menge $Z \cap B \cap \{|f(z)| \leq 1\}$ ist durch eine Folge (Z_ν) mit $Z_\nu := h_\nu^{-1}(H_{r_\nu})$ ausschöpfbar.

Beweis: Wir konstruieren holomorphe Funktionen $h_{n+2}, ..., h_m$ auf $Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}$ und Zackenfunktionen $\rho_{n+2}, ..., \rho_m$ auf Z', so daß $h = (z_1, ..., z_{q-1}, f, z_q, ..., z_n, h_{n+2}, ..., h_m)$ und $r = (\rho, \rho_{n+2}, ..., \rho_m)$ die geforderten Eigenschaften haben.

Sei $\tilde{z} \in Z \cap B$. Dann ist $\phi(\tilde{z}) > 0$. Wir setzen

$$F(z') := \sup_{(z' \times Z'') \cap \{\phi \leq 0\}} (2Re\, Q_{\tilde{z},\phi}(z)).$$

F ist stetig in Z', also auch halbstetig nach oben. Es ist $F(\tilde{z}') \leq 0$. Daher kann man einen Produktbereich $\hat{Z} \subset Z'$ mit $\tilde{z}' \in \overset{\circ}{\hat{Z}}$ finden, so daß für $z' \in \hat{Z}$ gilt:

$$F(z') \ < R \ < 2Re\, Q_{\tilde{z},\phi}(\tilde{z}).$$

$R > 0$ ist dabei eine feste Zahl.
Wir definieren die Funktion $\rho_{\tilde{z}}$ in Z' durch $\rho_{\tilde{z}}(z') := \begin{cases} ae^R & \text{falls } z' \in \hat{Z} \\ 1 & \text{falls } z' \in Z' \setminus \hat{Z}. \end{cases}$
$a \in \mathbb{R}$ sei dabei so klein gewählt, daß $ae^R < 1$. $\rho_{\tilde{z}}$ ist dann eine Zackenfunktion in Z'.
Sei $h_{\tilde{z}}(z) := ae^{2Q_{\tilde{z},\phi}(z)}$ und $a > 0$ so klein, daß in Z gilt: $|h_{\tilde{z}}(z)| < 1$. Dann ist

$$K_{\tilde{z}} := \{z \in Z \mid |h_{\tilde{z}}(z)| \geq \rho_{\tilde{z}}(z')\} \subset (\hat{Z} \times Z'') \cap \{\phi > 0\} \subset Z \cap B.$$

$K_{\tilde{z}}$ ist kompakt und $\overset{\circ}{K}_{\tilde{z}}$ eine Umgebung von $\tilde{z}$.
Dies kann man auch für andere Punkte aus $Z \cap B$ durchführen. Da $\bigcup_{\tilde{z} \in Z \cap B} \overset{\circ}{K}_{\tilde{z}} = Z \cap B$ und $Z \cap B$ ein Lindelöfraum ist, kann man $Z \cap B$ durch eine Folge von endlichen Vereinigungen von auf diese Weise konstruierten $K_{\tilde{z}}$ ausschöpfen.

Eine endliche Vereinigung K sei jetzt fest gewählt, und es gehören $h_{n+2}, ..., h_m$ und $\rho_{n+2}, ..., \rho_m$ dazu:

$$K = \bigcup_{\mu=n+2}^{m} \{z \in Z \mid \rho_\mu(z') \leq |h_\mu(z)|\}.$$

Damit haben wir eine biholomorphe Einbettung $h = (z_1, ..., z_{q-1}, f, z_q, ..., z_n, h_{n+2}, ..., h_m)$ von $Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}$ in den m-dim. Einheitspolyzylinder W gefunden.
Es ist (mit $r = (\rho, \rho_{n+2}, ..., \rho_m)$):

$$\begin{aligned} h^{-1}(H_r) &= \{z \in Z \mid |f(z)| \leq \rho\} \cup \bigcup_{\mu=n+2}^{m} \{z \in Z \mid |h_\mu(z)| \geq \rho_\mu(z'),\ |f(z)| \leq 1\} \\ &\subset B \cap Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}. \end{aligned}$$

und

$$h^{-1}(H_r) \supset K \cap \{|f(z)| \leq 1\}.$$

Die Vereinigungen K können auch so gewählt werden, daß $h_\nu^{-1}(H_{r_\nu}) \subset (h_{\nu+1}^{-1}(H_{r_{\nu+1}}))^\circ\ \forall \nu$ gilt, wobei offen in der Topologie von $B \cap Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}$ zu verstehen ist. ■

Lemma 1.7 *H_r sei eine verallgemeinerte q-Hartogsfigur, W der Einheitspolyzylinder im $\mathbb{C}^m$ und $\mathcal{S}$ eine kohärente Garbe über W. Dann gilt im Falle $m - q - hd(\mathcal{S}) > 0$:*

1. $H^\nu(H_r, \mathcal{S}) \cong 0$ *für* $0 < \nu < m - q - hd(\mathcal{S})$
2. *die Restriktionsabbildung* $H^0(W, \mathcal{S}) \to H^0(H_r, \mathcal{S})$ *ist bijektiv.*

Beweis: Ist $M \subset Z'$ ein Steinsches Kompaktum, also z.B. ein endlicher Durchschnitt von Produktbereichen, und sind $0 \leq c_\lambda \leq 1$ für $\lambda = q, ..., m$, dann setzen wir

$$M^* := \{z \in W \mid z' \in M,\ |z_q| \leq c_q\} \cup \bigcup_{\lambda=q+1}^{m} \{z \in W \mid z' \in M,\ c_\lambda \leq |z_\lambda| \leq 1\}.$$

Behauptung : $1) H^\nu(M^*, \mathcal{S}) = 0$ fr. $0 < \nu < m - q - hd(\mathcal{S})$
$2) H^0(M^*, \mathcal{S}) \cong H^0(M \times W'', \mathcal{S})$

mit $W'' := \{(z_q, \ldots, z_m) \mid |z_i| \leq 1,\ i = q, \ldots, m\}$.
Beweis der Behauptung durch vollständige Induktion über $hd(\mathcal{S})$:
$hd(\mathcal{S}) = 0$, d.h. $\mathcal{S} \cong \mathcal{O}^p$.
Man definiert

$$\begin{aligned} M_\epsilon^* : &= \{z \mid |z_\nu| < 1 + \epsilon,\ \nu = q, ..., m;\ z' \in U(M),\ |z_q| < c_q + \epsilon\} \\ &\cup \bigcup_{\lambda=q+1}^{m} \{z \mid |z_\nu| < 1 + \epsilon,\ \nu = q, .., m;\ z' \in U(M),\ c_\lambda - \epsilon < |z_\lambda| < 1 + \epsilon\}, \end{aligned}$$

wobei $U(M)$ eine kleine Steinsche Umgebung von M ist.
Mit Frenkels Lemma (s. [AnGr62], Abschnitt 11, lemme 1) erhält man für $0 < \nu < m - q$ und hinreichend kleines ϵ: $H^\nu(M_\epsilon^*, \mathcal{O}) = 0$. Durch Übergang zum induktiven Limes ([God], Théorème 2.4.11.1) folgt dann auch: $H^\nu(M^*, \mathcal{O}) = 0$ für $0 < \nu < m - q$.

Ferner gilt: $H^0(M^*, \mathcal{O}) \cong H^0(M \times W'', \mathcal{O})$ aufgrund der geometrischen Form von M^*.
Mit den langen exakten Kohomologiesequenzen zu

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^\nu \to \mathcal{O}^{\nu-1} \to 0 \quad (\nu = 2, \ldots, p)$$

folgt die Behauptung auch für $\mathcal{O}^p$ (Garbe der Keime von p-tupeln holomorpher Funktionen).

Die Behauptung gelte jetzt für alle Garben $\mathcal{G}$ mit $hd(\mathcal{G}) < hd(\mathcal{S})$.
Nach Theorem A gibt es eine exakte Sequenz über W:

$$0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O}^p \to \mathcal{S} \to 0 \qquad (*).$$

Gemäß [AnGr62] ist dann: $hd(\mathcal{J}) = hd(\mathcal{S}) - 1$, laut Induktionsvoraussetzung gilt die Behauptung für $\mathcal{J}$.
Man erhält die Aussage für $\mathcal{S}$, indem man die zu $(*)$ gehörigen langen exakten Sequenzen über M^* und $M \times W''$ betrachtet. (Im Fall $m - q - hd(\mathcal{S}) = 0$, der ja in der Voraussetzung zum Lemma ausgeschlossen ist, kann dieser Schluß jedoch nicht mehr durchgeführt werden.) Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

Man kann Z' mit endlich vielen Produktbereichen W_i überdecken, so daß die ρ_λ, $\lambda = n+2, ..., m$, die ja Zackenfunktionen sind, auf $\overset{\circ}{W}_i$ gleich c^i_λ sind. Man bezeichnet (für $r \geq 1$) $W_{i_0 \ldots i_r} := \overline{\overset{\circ}{W}_{i_0} \cap \ldots \cap \overset{\circ}{W}_{i_r}}$ und für $r \geq 0$

$$\begin{aligned} W^*_{i_0 \ldots i_r} : \; &= \{z \in W \mid z' \in W_{i_0 \ldots i_r}, |z_q| \leq \max\{c^{i_0}_q, ..., c^{i_r}_q\}\} \\ &\cup \bigcup_{\lambda=n+2}^{m} \{z \in W \mid z' \in W_{i_0 \ldots i_r}, \min\{c^{i_0}_\lambda, ..., c^{i_r}_\lambda\} \leq |z_\lambda| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Diese Aufspaltung in eine Vereinigungsmenge ist eine Steinsche Überdeckung von $W^*_{i_0 \ldots i_r}$. Es gilt: $H_r = \bigcup_i W^*_i$, wie man an der Definition von H_r nachprüft. Gemäß [God], théorème 2.5.2.4., erhält man in dieser Situation eine Spektralsequenz mit

$$E_2^{p,s} = H^p(\{W^*_i\}, \mathcal{H}^s(\mathcal{S})),$$

wobei $\mathcal{H}^s(\mathcal{S})$ das Koeffizientensystem mit $\mathcal{H}^s(\mathcal{S})(W^*_{i_0 \ldots i_r}) = H^s(W^*_{i_0 \ldots i_r}, \mathcal{S})$ bezeichnet. Es ist also $\mathcal{H}^s(\mathcal{S}) = 0$ für $0 < s < m - q - hd(\mathcal{S})$. Daher ist auch $E^{p,s}_\infty = E^{p,s}_2 = 0$ für $0 < s < m - q - hd(\mathcal{S})$. Für $s = 0$ erhält man wegen $\mathcal{H}^0(\mathcal{S})(W^*_{i_0 \ldots i_r}) = H^0(W^*_{i_0 \ldots i_r}, \mathcal{S}) \cong H^0(W_{i_0 \ldots i_r} \times W'', \mathcal{S}) = \mathcal{H}^0(\mathcal{S})(W_{i_0 \ldots i_r} \times W'')$:

$$H^p(\{W^*_i\}, \mathcal{H}^0(\mathcal{S})) = H^p(\{W_i \times W'', \mathcal{H}^0(\mathcal{S})).$$

Für die zu $\{W_i \times W''\}$ gehörige Spektralsequenz $\overline{E}^{p,0}_r$ gilt deswegen: $\overline{E}^{p,0}_r = E^{p,0}_r$. Da W Steinsch ist, erhält man: $0 = H^k(W, \mathcal{S}) = \sum_{p+s=k} \overline{E}^{p,s}_\infty$. Also ist auch $E^{p,0}_\infty = \overline{E}^{p,0}_\infty = 0$.
Das bedeutet:

$$H^k(H_r, \mathcal{S}) = \sum_{p+s=k} E^{p,s}_\infty = 0 \qquad \text{für } 0 < k < m - q - hd(\mathcal{S}).$$

Dies ist Teil 1 der Behauptung.
Genauso erhält man: $H^0(H_r, \mathcal{S}) = E^{0,0}_\infty = \overline{E}^{0,0}_\infty = H^0(W, \mathcal{S})$. Teil 2 der Behauptung ist damit auch bewiesen. ■

Nun zum Beweis des schon zu Anfang angekündigten Satzes.

Satz 1.8 *(Z, ρ, f) sei eine q-Hartogsfigur zu (ϕ, z_0). Dann gilt für jede kohärente Garbe $\mathcal{S}$ im Falle $n - q - hd(\mathcal{S}) > 0$:*

1. *Die Restriktionsabbildung $H^0(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}, \mathcal{S}) \to H^0(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap B, \mathcal{S})$ ist bijektiv*
2. *$H^\nu(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap B, \mathcal{S}) = 0 \quad$ für $0 < \nu < n - q - hd(\mathcal{S})$.*

Beweis: Nach Lemma 1.6 kann man $Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}$ mittels h biholomorph in den m-dim. Einheitspolyzylinder W einbetten. Ferner existiert eine verallgemeinerte q-Hartogsfigur $H_r \subset W$ mit $h^{-1}(H_r) \subset Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap B$. $h_*(\mathcal{S})$ ist kohärent und hat dieselbe homologische Kodimension wie $\mathcal{S}$, es gilt also $m - hd(h_*\mathcal{S}) = n - hd(\mathcal{S})$.
Mittels der Lerayschen Spektralsequenzen $\overline{E}_r^{p,q}, E_r^{p,q}$ zu

$$\begin{aligned} h: \quad Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \quad &\longrightarrow W \\ h|h^{-1}(H_r): \qquad\qquad h^{-1}(H_r) \quad &\longrightarrow H_r \end{aligned}$$

erhält man:

$$H^\nu(h^{-1}(H_r), \mathcal{S}) = \sum_{p+s=\nu} E_\infty^{p,s}$$

mit $E_\infty^{p,s} = E_2^{p,s} = H^p(H_r, R^s h_* \mathcal{S})$. Nach [Gun3], Theorem M2, folgt $H^p(H_r, R^s h_* \mathcal{S}) = 0$ für $s > 0$. Daher erhält man:

$$H^\nu(h^{-1}(H_r), \mathcal{S}) = H^\nu(H_r, h_* \mathcal{S}) = 0$$

nach Lemma 1.7 für $0 < \nu < n - q - hd(\mathcal{S})$.
Desweiteren gilt:

$$H^0(h^{-1}(H_r), \mathcal{S}) \cong E_2^{0,0} \cong H^0(H_r, h_*\mathcal{S}) \cong H^0(W, h_*\mathcal{S}) \cong \overline{E}_2^{0,0} \cong H^0(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}, \mathcal{S}).$$

Laut Lemma 1.6 kann man $Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap B$ durch eine Folge $Z_\nu = h_\nu^{-1}(H_{r_\nu})$ ausschöpfen. Das bedeutet: $H^0(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap B, \mathcal{S}) \cong H^0(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}, \mathcal{S})$, also Teil 1) der Behauptung.

Für $\nu \geq 1$ sei jetzt

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}_0 \xrightarrow{d} \mathcal{T}_1 \xrightarrow{d} \ldots$$

eine welke Auflösung von $\mathcal{S}$ (über G), und es sei $\xi \in \mathcal{T}_\nu(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap B)$ mit $d\xi = 0$ für ein ν mit $0 < \nu < n - q - hd(\mathcal{S})$.
Jetzt wird eine Folge (η_μ) mit $\eta_\mu \in \mathcal{T}_{\nu-1}(Z_\mu)$ konstruiert (stets in einer Umgebung definiert), so daß $d\eta_\mu = \xi | Z_\mu$. Hat man η_μ bereits, so kann man es zu einem $\beta_{\mu+1} \in \mathcal{T}_{\nu-1}(Z_{\mu+1})$ fortsetzen mit $d\beta_{\mu+1} - \xi | Z_{\mu+1} = d\alpha$ mit $\alpha \in \mathcal{T}_{\nu-1}(Z_{\mu+1})$, denn $\mathcal{T}_{\nu-1}$ ist welk und $H^\nu(Z_{\mu+1}, \mathcal{S}) = H^\nu(h_{\mu+1}^{-1}(H_{r_{\mu+1}}), \mathcal{S}) = 0$. Es sei: $\tilde{\eta}_{\mu+1} := \beta_{\mu+1} - \alpha$ auf $Z_{\mu+1}$ definiert.
Es ist dann $d\tilde{\eta}_{\mu+1} = \xi | Z_{\mu+1}$ und auf Z_μ gilt: $d(\eta_\mu - \tilde{\eta}_{\mu+1}) = 0$.
$\eta_\mu - \tilde{\eta}_{\mu+1}$ soll nun nach $Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap B$ fortgesetzt werden. Im Fall $\nu = 1$ ist $\eta_\mu - \tilde{\eta}_{\mu+1} \in \mathcal{S}(Z_\mu)$, daher gibt es nach den obigen Bemerkungen eine Fortsetzung $\hat{\eta}_{\mu+1} \in \mathcal{T}_0(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap B)$ mit $d\hat{\eta}_{\mu+1} = 0$.
Für $\nu > 1$ gibt es ein $\gamma_\mu \in \mathcal{T}_{\nu-2}(Z_\mu)$ mit $d\gamma_\mu = \eta_\mu - \tilde{\eta}_{\mu+1}$. Da $\mathcal{T}_{\nu-2}$ welk ist, kann man γ_μ aus einer Umgebung von Z_μ nach $Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap B$ fortsetzen und erhält somit eine Fortsetzung von $\eta_\mu - \tilde{\eta}_{\mu+1}$ zu einem $\hat{\eta}_{\mu+1} \in \mathcal{T}_{\nu-1}(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap B)$ mit $d\hat{\eta}_{\mu+1} = 0$.

In beiden Fällen gilt dann für $\eta_{\mu+1} := \tilde{\eta}_{\mu+1} + \hat{\eta}_{\mu+1}$ (auf $Z_{\mu+1}$ definiert): $d\eta_{\mu+1} = \xi | Z_{\mu+1}$ und $\eta_{\mu+1} | Z_\mu = \eta_\mu$.

Da $H^\nu(h^{-1}(H_r), \mathcal{S}) = 0$, kann man mit η_0 bei einem beliebigen H_{r_0} anfangen. Setzt man jetzt $\eta := \lim\ \eta_\mu$ (gemäß [TSS],IV.1.3.), so ist $\eta \in \mathcal{T}_{\nu-1}(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap B)$ und $\xi = d\eta$. Damit erhält man Teil 2) der Behauptung. ■

Bemerkung 1.9 *Ist B pseudokonvex, so kann der Fall $q = n$ auftreten, der ja in der Voraussetzung zu Satz 1.8 ausgeschlossen ist. Eine zu 1) entsprechende Aussage darf nicht gelten, denn über den Rand von B ist dann keine Fortsetzung möglich. Dies geht auch aus dem Beweis hervor, denn man darf nicht mehr schließen: $H^0(H_r, h_*\mathcal{S}) \cong H^0(W, h_*\mathcal{S})$.*

Die folgende Aussage ist auf die Erfordernisse des nächsten Abschnitts zugeschnitten.

Satz 1.10 *z_0 sei ein Randpunkt von $B = \{z \mid \phi(z) > 0\} \subset \mathbb{C}^n$. B sei dort q-konkav ($q < n$). Nach Lemma 1.5 existiert dann nach einer umkehrbaren linearen Koordinatentransformation ein $w \in \partial B$ und eine q-Hartogsfigur (Z, ρ, f) zu (ϕ, w); es seien ψ^+, ψ^- die in Lemma 1.5 definierten Funktionen. Dann sind die Restriktionsabbildungen*

$$\begin{array}{lrcll} (1) & H^{\kappa,\mu}(\{z \mid \psi^+(z) > 0\}) & \to & H^{\kappa,\mu}(B) & \text{und} \\ (2) & H^{\kappa,\mu}(B) & \to & H^{\kappa,\mu}(\{z \mid \psi^-(z) > 0\}) & \end{array}$$

bijektiv für $\mu < n - q$.

Beweis: Nach Lemma 1.5 kann man annehmen, daß für dieses $w \in \partial B$ (Z, ρ, f) auch noch q-Hartogsfigur zu (ψ^+, w) und (ψ^-, w) ist. Dann ist nach Satz 1.8 jede Kohomologieklasse aus $H^{\kappa,\mu}(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap \{\phi > 0\})$ nach $Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}$ fortsetzbar (für $\mu < n - q$).
Es gilt (mit $A^{\kappa,\mu} = 0$ für $\mu < 0$): Ist $\xi \in H^{\kappa,\mu}(\{\phi > 0\})$ eine Klasse und $\beta \in A^{\kappa,\mu}(\{\phi > 0\})$ eine geschlossene Form, die ξ repräsentiert, dann gibt es eine geschlossene Form $\tilde{\beta} \in A^{\kappa,\mu}(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\})$ und ein $\alpha \in A^{\kappa,\mu-1}(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap \{\phi > 0\})$
mit $\tilde{\beta} = \beta + \overline{\partial}\alpha$ auf $Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap \{\phi > 0\}$, d.h. dort ist $\tilde{\beta} - \beta = \overline{\partial}\alpha \equiv 0$.
Man kann α von $Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \cap \{\phi > 0\}$ wegen der Weichheit der Garbe $A^{\kappa,\mu-1}$ zu einer Form $\tilde{\alpha} \in A^{\kappa,\mu-1}(\{\phi > 0\})$ fortsetzen. Dann definiert

$$\hat{\beta} := \begin{cases} \beta + \overline{\partial}\tilde{\alpha} & \text{in } \{\phi > 0\} \\ \tilde{\beta} & \text{in } Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \end{cases}$$

eine Fortsetzung $\hat{\xi}$ von ξ nach $(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}) \cup \{\phi > 0\}$. Diese ist eindeutig bestimmt, was für $\mu = 0$ klar ist und für $\mu \geq 1$ so folgt:
Ist ξ' eine durch β' definierte andere Fortsetzung, so gilt für $b := \hat{\beta} - \beta'$:
$b|\{\phi > 0\} = \overline{\partial}\alpha_1$ mit $\alpha_1 \in A^{\kappa,\mu-1}(\{\phi > 0\})$
und wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung von $\{\phi > 0\} \cap Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}$ nach $Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}$:
$b|Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} = \overline{\partial}\alpha_2$ mit $\alpha_2 \in A^{\kappa,\mu-1}(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\})$.
In $\{\phi > 0\} \cap Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}$ ist dann für $\mu > 1$: $\alpha_1 = \alpha_2 + \overline{\partial}\gamma$ mit $\gamma \in A^{\kappa,\mu-2}(\{\phi > 0\} \cap Z \cap \{|f(z)| \leq 1\})$, da die Kohomologieklassen verschwinden. Für $\mu = 1$ ist $\alpha_1 - \alpha_2 = h \in \Omega^\kappa(\{\phi > 0\} \cap Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}) \cong \Omega^\kappa(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\})$.

Man kann jetzt wieder wie oben γ zu $\tilde{\gamma} \in A^{\kappa,\mu-2}(\{\phi > 0\})$ fortsetzen und setzt für $\mu > 1$:

$$a := \begin{cases} \alpha_1 - \overline{\partial}\tilde{\gamma} & \text{in } \{\phi > 0\} \\ \alpha_2 & \text{in } Z \cap \{|f(z)| \leq 1\} \end{cases}$$

und für $\mu = 1$:

$$a := \begin{cases} \alpha_1 & \text{in } \{\phi > 0\} \\ \alpha_2 + h & \text{in } Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}. \end{cases}$$

Jetzt gilt: $b = \overline{\partial}a$ in $(Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}) \cup \{\phi > 0\}$, die Eindeutigkeit der Fortsetzung ist also gezeigt.

(Z, ρ, f) ist aber auch noch q-Hartogsfigur zu (ψ^+, w). Die Fortsetzung von $\{\psi^+ > 0\}$ nach $\{\psi^+ > 0\} \cup (Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}) = \{\phi > 0\} \cup (Z \cap \{|f(z)| \leq 1\})$ ist also auch eindeutig bestimmt. Aus diesem Grund gibt es auch nur genau eine Fortsetzung von $\{\phi > 0\}$ nach $\{\psi^+ > 0\}$, Aussage (1) ist daher bewiesen.
Aussage (2) folgt mit vertauschten Rollen $\phi \rightsquigarrow \phi^-, \phi^+ \rightsquigarrow \phi$. ∎

1.2 Gleichzeitige Fortsetzung

In diesem Abschnitt wird zu den bereits eingeführten Gebieten $G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{n-1} \subset \mathbb{C}^n$ gezeigt, daß sich jede q-Klasse der Kohomologiegruppen mit Werten in $\mathcal{O}$ von G_0 nach G_{n-q-1} fortsetzen läßt. Im Falle $q = 0$ erhält man sogar, daß G_{n-1} die Holomorphiehülle von G_0 ist. Im nächsten Abschnitt wird dann gezeigt werden, daß G_{n-q-1} auch für $q > 0$ in einem gewissen Sinne das maximale gleichzeitige Existenzgebiet der q-Klassen aus G_0 ist.

Wir beginnen mit einem

Lemma 1.11 *$(G^k)_{k\geq 0}$ sei eine aufsteigende Folge von offenen Teilmengen einer n-dim. parakompakten komplexen Mannigfaltigkeit X mit $\bigcup_{k\geq 0} G^k = G$, so daß die Restriktionsabbildung $H^{\kappa,l}(G^{k+1}) \longrightarrow H^{\kappa,l}(G^k)$ für alle k bijektiv ist; ferner sei die Restriktionsabbildung $H^{\kappa,l-1}(G^{k+1}) \longrightarrow H^{\kappa,l-1}(G^k)$ für alle k surjektiv. Dann ist auch $H^{\kappa,l}(G) \longrightarrow H^{\kappa,l}(G^0)$ bijektiv.*

Bemerkung 1.12 *Ein ganz ähnliches Lemma aus [AnGr62] (Abschnitt 18) impliziert, daß unter diesen Voraussetzungen auch $H^{\kappa,l-1}(G) \longrightarrow H^{\kappa,l-1}(G^k)$ stets surjektiv ist.*

Beweis: Sei $\xi \in H^{\kappa,l}(G^0)$ durch eine $\overline{\partial}$-geschlossene Form $\beta \in A^{\kappa,l}(G^0)$ gegeben. Für $\mu < 0$ sei $A^{\kappa,\mu} := 0$ definiert. Es gibt dann eine Folge (β_k) mit $\beta_0 = \beta$ und $\beta_k \in A^{\kappa,l}(G^k)$ sowie $\alpha_k \in A^{\kappa,l-1}(G^k)$ mit $\beta_{k+1} = \beta_k + \overline{\partial}\alpha_k$ auf G^k, denn jedes $\xi_k \in H^{\kappa,l}(G^k)$ läßt sich eindeutig bestimmt nach G^{k+1} fortsetzen, laut Voraussetzung.
Durch das Shrinking Theorem (s. [TSS]), finden wir eine Folge $(\tilde{G}^k)$ mit $\tilde{G}^k \subset\subset G^k$ sowie $\tilde{G}^k \subset \tilde{G}^{k+1}$ und $\bigcup_k \tilde{G}^k = G$ und setzen $\alpha_k|\overline{\tilde{G}^k}$ zu einer Form $\tilde{\alpha_k} \in A^{\kappa,l-1}(X)$ fort; evtl. singuläre Stellen werden dabei vermieden.
Ist $\tilde{\beta}_{k+1} := \beta_{k+1} - \sum_{\nu=1}^{k} \overline{\partial}\tilde{\alpha_\nu}$, so repräsentieren β_{k+1} und $\tilde{\beta}_{k+1}$ dieselbe Klasse in $H^{\kappa,l}(G^{k+1})$. In $\tilde{G}^k$ gilt: $\tilde{\beta}_{k+1} - \tilde{\beta}_k = \beta_{k+1} - \beta_k - \overline{\partial}\tilde{\alpha_k} = 0$.

$\Longrightarrow$ $\tilde{\beta} := \lim_{k\to\infty} \tilde{\beta_k}$ ist in G wohldefiniert.
In G^0 gilt: $\tilde{\beta}_{k+1} = \beta_{k+1} - \sum_{\nu=1}^{k} \overline{\partial}\tilde{\alpha_\nu} = \beta_0 + \sum_{\nu=1}^{k} \overline{\partial}\alpha_\nu - \sum_{\nu=1}^{k} \overline{\partial}\tilde{\alpha_\nu} = \beta_0 + \overline{\partial} \sum_{\nu=1}^{k} (\alpha_\nu - \tilde{\alpha_\nu})$.
Daher ist $\tilde{\beta}|G^0 = \beta_0 + \overline{\partial}a$ mit einem $a \in A^{\kappa,l-1}(G^0)$, dessen Existenz als Limes von $\sum_{\nu=1}^{k}(\alpha_\nu - \tilde{\alpha}_\nu)$ für $k \to \infty$ man sich analog überlegt wie die von $\tilde{\beta}$. $\tilde{\beta}$ repräsentiert daher eine Fortsetzung von ξ nach G.

Nun muß noch deren Eindeutigkeit gezeigt werden. Sei also $\tilde{\xi}$ eine Fortsetzung mit $\tilde{\xi}|G^0 = 0$.
Die Fortsetzung der Klasse von G^0 nach G^k ist eindeutig bestimmt: $\tilde{\xi}|G^{k-1} = 0 \implies \exists \alpha_k \in A^{\kappa,l-1}(G^k)$ s.d. $\overline{\partial}\alpha_k = \tilde{\beta}$ auf G^k.
Auf G^k gilt dabei: $\overline{\partial}(\alpha_{k+1} - \alpha_k) = 0$. $\alpha_{k+1} - \alpha_k$ repräsentiert ein Element aus $H^{\kappa,l-1}(G^k)$. Dieses Element kann gemäß der Bemerkung nach G fortgesetzt werden und werde dort durch eine Form $\eta_k \in A^{\kappa,l-1}(G)$ mit $\overline{\partial}\eta_k = 0$ repräsentiert. Auf G^k ist dabei: $\eta_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k + \overline{\partial}\gamma_k$ mit einem $\gamma_k \in H^{\kappa,l-2}(G^k)$.
Wie oben bildet man $(\tilde{G^k})$ mit $\tilde{G^k} \subset\subset G^k$ und $\tilde{\gamma}_k \in A^{\kappa,l-2}(X)$ mit $\tilde{\gamma_k}|\tilde{G^k} = \gamma_k|\tilde{G^k}$. Jetzt sei $\overline{\alpha}_{k+1} := \alpha_{k+1} - \sum_{\nu=1}^{k} (\eta_\nu - \overline{\partial}\tilde{\gamma_\nu})$ auf G^{k+1} definiert. Es gilt auf $\tilde{G^k}$:
$\overline{\alpha}_{k+1} - \overline{\alpha_k} = \alpha_{k+1} - \alpha_k - \eta_k + \overline{\partial}\tilde{\gamma_k} = 0$.

Mit $\alpha := \lim_{k\to\infty} \overline{\alpha_k}$ auf G gilt daher $\overline{\partial}\alpha = \tilde{\beta}$ auf G, da es auf jedem $\tilde{G^k}$ gilt. Deshalb ist $\tilde{\xi} = 0$.
■

Korollar 1.13 *Ist in Lemma 1.11 X Steinsch und sind alle G^k Steinsch, so gilt:*
G Steinsch $\iff$ $\dim_{\mathbb{C}} H^1(G, \mathcal{O}) < \infty$.

Beweis: Nach [Lau66] reicht es zu zeigen: $\dim_{\mathbb{C}} H^q(G, \mathcal{O}) < \infty$ für $q = 1, \ldots, n-1$.
Für $q = 1$ ist dies vorausgesetzt und für $q = 2, \ldots, n-1$ folgt es aus Lemma 1.11. ■

Bemerkungen 1.14 *1) Die erste Kohomologiegruppe spielt hier also eine besondere Rolle. Eine Verallgemeinerung von Korollar 1.13 findet man in [Mar77].*
2) Lemma 1.11 bietet in bestimmten Fällen die Möglichkeit, Kohomologiegruppen explizit zu berechnen. Ein Beispiel dafür findet man in Abschnitt 1.4.

Wir kommen nun zu Aussagen über die Gebiete $G_0 \subset \cdots \subset G_m \subset \mathbb{C}^n$ (mit $m = n-1$), die im Abschnitt Vorbereitungen eingeführt worden sind. Es soll gezeigt werden, daß $H^l(G_{m-l}, \mathcal{O}) \to H^l(G_0, \mathcal{O})$ bijektiv ist. Dies ist jedoch ein Spezialfall von

Satz 1.15 *Die Beschränkungsabbildung $H^{\kappa,l}(G_{m-l}) \longrightarrow H^{\kappa,l}(G_0)$ ist bijektiv (für $0 \le l \le m$).*

Beweis: Für $l = m$ ist $G_{m-l} = G_0$; in diesem Fall ist nichts zu beweisen. Nun sei $l < m$.
Es gibt eine Folge $(r_k) \subset C^\infty(D)$ von reellen Funktionen auf D mit folgenden Eigenschaften:
1) $r_0(z) = c_q\,(Q(z) - 1)$ mit $q := m - l$
2) $r_k(z) \le r_{k+1}(z) < 0 \;\; \forall z \in D$
3) $\lim_{k\to\infty} r_k = 0$ (gleichmäßige Konvergenz)
4) r_k ist streng konvex
5) $\overline{\{z \in D \mid r_{k+1}(z) - r_k(z) \neq 0\}} \subset \overset{\circ}{D}$.
Dies widerspricht sich nicht, da r_0 streng konvex und < 0 in D ist. Die Existenz solcher r_k sieht

man wie folgt ein:
Durch eine reelle lineare Koordinatentransformation (der Real- und Imaginärteile) erhält man: $Q(z) = |z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2$. Es reicht daher, die r_k in einer reellen Dimension zu konstruieren. Dies ist beispielsweise mit den in [Bes24] angegebenen Funktionen möglich (bei geeigneter Wahl der dort auftretenden Konstanten).

Die Leviform von $t_q(z) + r_k(z) - \log|w|$ ist in bezug auf $(w, z_q, \ldots, z_m)$ positiv definit (auf der komplexen Tangente), denn $\frac{\partial^2}{\partial w \partial \overline{w}} \log|w| = 0$.

Nun wird eine Folge (G^k) von Gebieten eingeführt:

$$G^k := \{(w,z) \in \mathbb{C} \times D \mid \log|w| < r_k(z) + t_q(z)\}.$$

Es ist dann:
a) $G^0 = G_0$, denn $r_0(z) = c_q\,(Q(z) - 1)$ und $r_0(z) + t_q(z) = t(z) = t_0(z)$.
b) $G^k \subset G^{k+1}$, denn $r_k \leq r_{k+1}$.
c) $\bigcup_{k=0}^{\infty} G^k = G_{m-l}$ mit $l = m - q$.

Behauptung: $H^{\kappa,l}(G^{k+1}) \longrightarrow H^{\kappa,l}(G^k)$ ist stets bijektiv.

Wir bezeichnen $B_k := G^{k+1} \setminus G^k$. Dann ist $\overline{\partial G^k \cap B_k}$ kompakt. Zu jedem Punkt $z \in \overline{\partial G^k \cap B_k}$ kann man nach umkehrbar linearer Koordinatentransformation eine q-Hartogsfigur (Z, ρ, f) zu $(r_k + t_q - log|.|, z)$ finden. Um $\partial G^k \cap B_k$ zu überdecken, reichen endlich viele dieser q-Hartogsfiguren aus. Es sei $w = |w|\, e^{i\theta}$. Genau wie in [AnGr62], Abschnitt 17, lemme, zeigt man: Es gibt bei geeigneter Wahl der q-Hartogsfiguren reellwertige C^∞-Funktionen $r_k^p(\theta, z)$ (für $p = 0, \ldots, p_k$), für die gilt:

1. $r_k^0 = r_k$, $r_{k+1}(z) \geq r_k^{p+1}(\theta, z) \geq r_k^p(\theta, z)$, und, falls $z \in \{z \mid r_{k+1}(z) - r_k(z) > 0\}$: $r_k^{p_k}(\theta, z) > r_k(\theta, z) = r_k^0(\theta, z)$.

2. $r_k^p(\theta, z) = r_k^p(\theta + 2\pi, z)$.

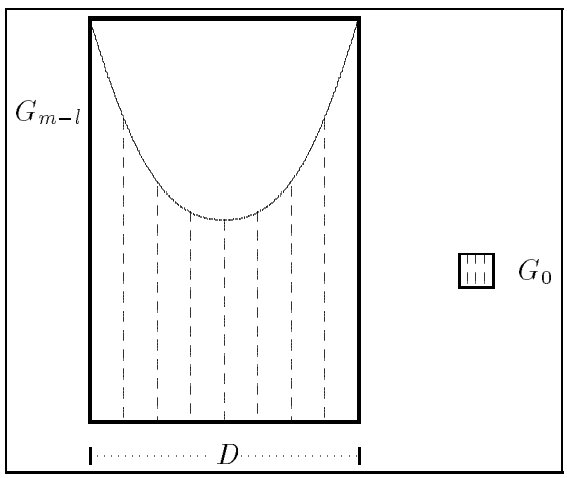


Abbildung 1: Schematische Darstellung der in Satz 1.15 auftretenden Gebiete

3. Es sei $\phi_k^p(w,z) := t_q(z) + r_k^p(\theta,z) - log|w|$. Dann ist $\{\phi_k^p > 0\}$ q-konkav in den Punkten von $\partial\{\phi_k^p > 0\} \cap (\mathbb{C} \times D)$.

4. Es gibt eine der endlich vielen q-Hartogsfiguren (diese sei (Z,ρ,f)), so daß $\{(w,z) \in \mathbb{C} \times D \mid \phi_k^p(w,z) \leq 0 < \phi_k^{p+1}(w,z)\} \subset Z \cap \{|f(z)| \leq 1\}$. Dabei soll es einen Punkt (w_0,z_0) mit $\phi_k^p(w_0,z_0) = \phi_k^{p+1}(w_0,z_0) = 0$ geben, so daß (Z,ρ,f) eine q-Hartogsfigur zu $(\phi_k^p,(w_0,z_0))$ und $(\phi_k^{p+1},(w_0,z_0))$ ist.

Nach Satz 1.10 ist $H^{\kappa,l}(\{(w,z) \mid z \in D, \phi_k^{p+1} > 0\}) \longrightarrow H^{\kappa,l}(\{(w,z) \mid z \in D, \phi_k^p > 0\})$ bijektiv. Genauso wie dort können wir zeigen:
(1) Ist $\Delta := \sup_{z\in D,\theta\in[0,2\pi]} |r_{k+1}(z) - r_k^{p_k}(\theta,z)| > 0$,
so gibt es ein $r_k^{p_k'+p_k}$ und ein $\epsilon > 0$, so daß
$\sup_{z\in D,\theta\in[0,2\pi]} |r_{k+1}(z) - r_k^{p_k'+p_k}(\theta,z)| < \Delta - \epsilon$
und $H^{\kappa,l}(\{r_k^{p_k'+p_k}(\theta,z) + t_q(z) - log|w| > 0\}) \longrightarrow H^{\kappa,l}(\{r_k(z) + t_q(z) - log|w| > 0\})$ bijektiv ist.

Auf diese Weise erhält man also eine Folge von sich r_{k+1} annähernden Funktionen (r_k^x). Es ist jedoch noch keineswegs klar, daß die r_k^x gegen r_{k+1} konvergieren.

Mit Lemma 1.11 erhält man aber:
(2) Ist $(M_\nu)_{\nu\geq 0}$ eine so konstruierte Folge von Gebieten mit $M_\nu = \{r_k^\nu(\theta,z) + t_q(z) - log|w| > 0\}$ und $G^k \subset M_\nu \subset G^{k+1}$ $\forall\nu$ sowie $\bigcup_{\nu\geq 0} M_\nu = M$, so ist auch $H^{\kappa,l}(M) \longrightarrow H^{\kappa,l}(G^k)$ bijektiv. Die Surjektivität der $H^{\kappa,l-1}$-Abbildungen folgt dabei aus Satz 1.10 durch die gleiche Argumentation wie für die Bijektivität der $H^{\kappa,l}$-Abbildungen. M ist in den Randpunkten $\partial M \cap (\mathbb{C} \times D)$ immer noch q-konkav.

Auf M kann man die Aussage (1) wieder anwenden. Aus (1) und (2) ergibt sich nun zusammen mit Lemma 1.11 die Zwischenbehauptung.

Erneute Anwendung von Lemma 1.11, diesmal auf (G^k), beweist den Satz. Die Surjektivität von $H^{\kappa,l-1}(G^{k+1}) \longrightarrow H^{\kappa,l-1}(G^k)$ folgt wieder durch die gleiche Argumentation wie für die Bijektivität von $H^{\kappa,l}(G^{k+1}) \longrightarrow H^{\kappa,l}(G^k)$. ■

Bemerkung 1.16 *D ist ein Ellipsoid. Man kann hier keine allgemeinere Form voraussetzen, da man sich dann bei der Konstruktion der r_k nicht mehr auf eine reelle Dimension beschränken könnte.*

1.3 Existenz singulärer Klassen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß es zu jedem Randpunkt $z \in \partial G_{m-l} \cap (\mathbb{C} \times D)$ eine Kohomologieklasse $\xi \in H^{0,l}(G_{m-l})$ gibt, die in z singulär ist. Das bedeutet, daß eine Fortsetzung innerhalb von $\mathbb{C} \times D$ über ∂G_{m-l} hinaus im allgemeinen nicht möglich ist.

Definition 1.17 *$B \subset \mathbb{C}^n$ sei offen; es sei $\xi \in H^{0,l}(B)$. Es soll erklärt werden, wann ξ in $z \in \partial B$ singulär ist. Für $l = 0$ ist ξ eine holomorphe Funktion. Hier wird der übliche Begriff verwendet, wie er beispielsweise in [GrFr] definiert ist. Für $l > 0$ wird ξ durch eine geschlossene*

Differentialform $\beta \in A^{0,l}(B)$ repräsentiert. ξ heißt dann singulär *in z, wenn es keine Umgebung $U(z)$ und Form $\alpha \in A^{0,l-1}(U \cap B)$ gibt mit $\overline{\partial}\alpha = \beta | U \cap B$.*
ξ heißt singulär in $S \subset \partial B$, wenn es in jedem Punkt von S singulär ist.

Definition 1.17 ist offensichtlich unabhängig davon, welche ξ repräsentierende Form β man wählt.

Für die Singularität einer Klasse gibt es folgende hinreichende Bedingung:

Satz 1.18 *Es seien $D \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $f \in A^{0,l}(D)$ mit $\overline{\partial} f = 0$ und $0 \leq l \leq n$, und $y \in \partial D$. Es gebe eine Umgebung U von y und eine Folge (Y_k) von l-dim. abgeschlossenen komplexen Untermannigfaltigkeiten von $U \cap D$, die gegen eine abgeschlossene komplexe Untermannigfaltigkeit Y von U konvergiert mit $Y \cap \partial D = \{y\}$. Weiterhin gelte: Zu jeder Umgbung $V(y) \subset\subset U$ gibt es ein $g \in A^{l,0}(V \cap D)$ mit $\overline{\partial} g = 0$ und*

$$\sup_k \left| \int\limits_{Y_k \cap V} f \wedge g \right| = \infty.$$

Dann ist die von f repräsentierte Klasse singulär in y.
Konvergenz der Mannigfaltigkeiten bedeutet dabei: Es gibt holomorphe Abbildungen h und h_k in einer Umgebung von Y, so daß $Y = \{h = 0\}, Y_k = \{h_k = 0\}$, $dh(z)$ hat maximalen Rang $\forall z \in Y$, und h_k konvergiert gegen h einschließlich der ersten Ableitungen gleichmäßig auf kompakten Teilmengen.

Beweis: 1.Fall: $l = 0$. Die Y_k sind Punkte, Integration von (0,0)-Formen darüber soll wie bei [GrLi3] Funktionsauswertung bedeuten. f ist holomorph in D und es ist $\lim_{k\to\infty} f(Y_k) = \infty$; f ist in y daher singulär.
2. Fall: $l \geq 1$. Wir nehmen an, die von f repräsentierte Klasse sei nicht singulär in y. Dann gibt es eine Umgebung $V(y)$ und $u \in A^{0,l-1}(V \cap D)$ mit $\overline{\partial} u = f | V \cap D$. Wir wählen eine offene Kugel $B \subset\subset V \cap U$ um y, deren Rand Y transversal schneidet. Dies ist möglich, wenn man B genügend klein wählt.
Für große k schneidet ∂B auch Y_k transversal. Es sei jetzt $g \in A^{l,0}(V \cap D)$ mit $\overline{\partial} g = 0$. Auf Y_k ist dann $\partial(u \wedge g) = 0$, denn $u \wedge g$ ist eine (l,l-1)-Form. Mit dem Satz von Stokes ist daher:

$$\left| \int\limits_{Y_k \cap B} f \wedge g \right| = \left| \int\limits_{Y_k \cap \partial B} u \wedge g \right| \longrightarrow \left| \int\limits_{Y \cap \partial B} u \wedge g \right| < \infty.$$

Dies ist ein Widerspruch. ∎

Damit sind wir in der Lage, die folgende Aussage zu beweisen:

Satz 1.19 *$B \subset \mathbb{C}^n$ sei ein Gebiet. f sei eine komplexwertige C^∞-Funktion über $\bigcup\limits_{\zeta \in S} E(\zeta) \times \zeta$ mit $S \subset \partial B$ und $E(\zeta) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_\nu = \zeta_\nu$ für $\nu = q+1, \ldots, n\}$ für $q \geq 1$. Es gelte weiterhin:*

1. *f ist für festes $\zeta \in S$ in $(z_1, \ldots, z_q)$ holomorph*
2. *$(\frac{\partial f}{\partial z_1}(\zeta, \zeta), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_q}(\zeta, \zeta)) \neq 0$ in jedem Punkt $\zeta \in S$*

3. $\{z \mid z \in E(\zeta) \cap S \text{ mit } f(z,\zeta) = 0\} = \{\zeta\}$; $\{z \mid z \in E(\zeta) \cap B \text{ mit } f(z,\zeta) = 0\} = \emptyset$

4. *B ist in jedem Punkt von S q-konkav*

5. *$E(\zeta)$ schneidet S transversal.*

Dann gibt es eine Klasse in $H^{0,n-q}(B)$, die in S singulär ist.

Beweis: Zunächst soll eine Klasse aus $H^{0,n-q}(B)$ konstruiert werden, die im Punkt $\zeta \in S$ singulär ist.
$T(\zeta)$ sei eine (n-q)-dim. Tangentialebene an S im Punkt ζ, die in einer Umgebung U von ζ außer in ζ ganz in B liegt. Sie existiert, da S q-konkav ist, also die Leviform n-q positive Eigenwerte hat.
Unter $T(\zeta) + \frac{1}{k}$ sei eine Ebene verstanden, die aus $T(\zeta)$ entsteht, indem man sie um $1/k$ ins Innere von B hinein verschiebt. Dieses Verschieben soll dabei für alle k entlang einer festen Richtung erfolgen. Es gilt also:

$$\lim_{k\to\infty} (T(\zeta) + \frac{1}{k}) = T(\zeta).$$

Man kann o.E. davon ausgehen, daß ein Punkt aus $S \cap U$ durch Angabge der 2n-1 reellen Werte $(Re\, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ eindeutig bestimmt ist. Es gibt also eine Abbildung $h : \overline{B} \cap U \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß für $z \in \overline{B} \cap U$ stets $\tilde{z} := (Re\, z_1 + i\, h(z), z_2, \ldots, z_n) \in S$. Jeder Punkt $z \in \overline{B} \cap U$ bestimmt also ein $\tilde{z} \in S$ und ein $E(\tilde{z})$ mit $z \in E(\tilde{z})$. Auf diese Weise wird f auch auf $E(\tilde{z}) \times z$ definiert.
Aufgrund der Transversalität von $E(\zeta)$ und S kann man davon ausgehen, daß $z_{q+1}, \ldots, z_n$ Koordinaten auf jedem $T(\zeta) + \frac{1}{k}$ und auf $T(\zeta)$ sind.
Aus Bedingung (3) folgt, daß $f(\zeta,\zeta) = 0\ \forall \zeta \in S$. Anhand der Taylorentwicklung von f macht man sich daher klar, daß f auf $T(\zeta)$ in ζ von zweiter Ordnung verschwindet, d.h. es gibt eine Umgebung V von ζ und ein $c > 0$, so daß für alle $z \in V \cap T(\zeta) \setminus \{\zeta\}$ gilt: $\frac{1}{\|f(z,\tilde{z})\|} \geq \frac{c}{\|z-\zeta\|^2}$.
Mit $\alpha := dz_{q+1} \wedge \ldots \wedge dz_n$ gilt dann:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{U\cap(T(\zeta)+\frac{1}{k})} \alpha \wedge \frac{d\overline{z}_{q+1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_n}{(f(z,\tilde{z}))^{n-q}} = \infty.$$

Die Klasse, die von $\frac{d\overline{z}_{q+1}\wedge\ldots\wedge d\overline{z}_n}{(f(z,\tilde{z}))^{n-q}}$ repräsentiert wird, ist also nach Satz 1.18 in ζ singulär.

Jetzt sei $\{\zeta_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dicht in S. Zu jedem dieser ζ_i kann man wie oben beschrieben eine Form $\Psi_i \in A^{0,n-q}(B)$ finden, deren Klasse in ζ_i singulär ist.
Genau wie in [AnNo66], Beweis von théorème 3, Abschnitte δ und ϵ, zeigt man jetzt, daß für hinreichend kleine $r_i \in \mathbb{R}^+$ die Reihe $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} r_i\Psi_i$ gegen ein Element $\Psi \in A^{0,n-q}(B)$ mit $\overline{\partial}\Psi = 0$ konvergiert, dessen zugehörige Kohomologieklasse in jedem Punkt von S singulär ist. ■

Wir kommen nun zur eigentlichen Aussage dieses Abschnitts:

Satz 1.20 *Es gibt eine Kohomologieklasse $\xi \in H^{0,l}(G_{m-l})$, die in jedem Punkt von $\partial G_{m-l} \cap (\mathbb{C} \times D)$ singulär ist.*

Beweis: Zunächst sei $l < m$. Es soll Satz 1.19 angewendet werden.
Wir betrachten G_q. Es ist also $q = m - l$, $l = m - q = n - q - 1$. Es sei $S := \partial G_{m-l} \cap (\mathbb{C} \times D)$.
G_q ist in S dann (q+1)-konkav. Für einen Punkt $(\eta,\zeta) \in S$ haben wir:

$$E(\eta,\zeta) = \{(w,z) \in \mathbb{C}^n \mid z_\nu = \zeta_\nu \text{ für } \nu = q+1, \ldots, m\}.$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned} g(z,\zeta) := \quad & -\sum_{\nu=1}^{q-1}(c_q - c_\nu)\zeta_\nu\overline{\zeta}_\nu \; - 2\sum_{\nu=1}^{q-1}(c_q - c_\nu)(z_\nu - \zeta_\nu)\overline{\zeta}_\nu \; + c_q \; + \sum_{\nu=q+1}^{m}(c_\nu - c_q)\zeta_\nu\overline{\zeta}_\nu \\ & -c_q\sum_{\nu,\mu=1}^{q-1} a_{\nu\mu}z_\nu z_\mu - 2c_q\sum_{\nu=1}^{q-1}\sum_{\mu=q}^{m} a_{\nu\mu}z_\nu\zeta_\mu \; - c_q\sum_{\nu,\mu=q}^{m} a_{\nu\mu}\zeta_\nu\zeta_\mu \end{aligned}$$

und

$$f(\eta,\zeta,w,z) := w - e^{g(z,\zeta)+i\theta(\eta,\zeta)}.$$

Offensichtlich ist f in $(w, z_1, \ldots, z_q)$ holomorph; wegen $\frac{\partial f}{\partial w} = 1$ ist auch der Gradient nirgends Null.
Wählt man

$$\theta(\eta,\zeta) := arc\,\eta \; + c_q\, Im \sum_{\nu,\mu=1}^{m} a_{\nu\mu}\zeta_\nu\zeta_\mu,$$

so bestätigt man Bedingung 3) aus Satz 1.19 durch Nachrechnen. $E(\eta,\zeta)$ ist in (η,ζ) auch transversal zu S. Damit sind alle Voraussetzungen aus Satz 1.19 gezeigt.
Im Fall $l = m$ kann man proposition 6 und lemme 2 aus [AnNo66] verbinden und erhält zu jedem Punkt $\zeta \in \partial G_0 \cap (\mathbb{C} \times D)$ eine dort singuläre Klasse aus $H^{0,m}(G_0)$. Diese werden dann wie im Beweis von Satz 1.19 über Punkte einer in S dichten Teilmenge aufsummiert. ■

1.4 Gestalt der Kohomologiegruppen

Satz 1.21 *$H^l(G_0, \mathcal{O})$ ist für $0 \leq l \leq m$ ein überabzählbar-unendlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum.*

Beweis: Für $l = 0$ handelt es sich um den Vektorraum der holomorphen Funktionen und die Behauptung ist klar.
Daher sei jetzt $1 \leq l \leq m$. Es gilt nach Satz 1.15: $H^{0,l}(G_0) \cong H^{0,l}(G_{m-l})$ (als $\mathbb{C}$-Vektorraum), darum betrachten wir G_{m-l}.
Im Beweis von Satz 1.19 wird eine Folge $(\Psi_i) \subset A^{0,l}(B)$ konstruiert von Formen, deren zugehörige Klassen singulär sind. Die Ψ_i sind also nicht kohomolog zu Null. Satz 1.20 zeigt, daß man $B = G_{m-l}$ wählen kann.
Für eine geeignete holomorphe Funktion f_j sind Ψ_i und $f_j\Psi_j$ dann stets Repräsentanten von linear unabhängigen Klassen. Auf diese Weise lassen sich unendlich viele linear unabhängige Klassen finden. Es ist also $\dim_{\mathbb{C}} H^{0,l}(G_{m-l}) = \infty$.
Aufgrund eines Satzes von Siu (s. [Siu67]) sind die Dimensionen dann stets überabzählbar unendlich. ■

Wir setzen jetzt: $B_k := \mathbb{C}^n \setminus \{z \mid \|z\| \leq \frac{1}{k}\}$.

Satz 1.22 *Es gilt für alle $k > 0$:*

$$H^q(B_k, \mathcal{O}) \begin{cases} \text{ist } \infty - \text{dim.} & \text{für } q = 0 \text{ und } n-1 \\ = 0 & \text{für } q = 1, \ldots, n-2. \end{cases}$$

Beweis: Der Rand von B_k ist 1-konkav und kompakt. Mit Lemma 1.5 und genau wie im Beweis von Satz 1.15 erhält man, daß es ein $\epsilon > 0$ gibt, so daß die Restriktionsabbildung $H^{0,q}(B_{k+\epsilon}) \longrightarrow H^{0,q}(B_k)$ bijektiv ist. (Eventuell wiederholte) Anwendung von Lemma 1.11

liefert dann, daß auch die Restriktionsabbildung $H^{0,q}(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow H^{0,q}(B_k)$ bijektiv ist. In [TSS] sind diese Kohomologiegruppen berechnet worden, und es folgt die Behauptung. ■

Die B_k bilden also ein anderes Beispiel für die Fortsetzung von Kohomologiegruppen mit den Methoden aus Abschnitt 1.1 und 1.2. Da aber die meisten Kohomologiegruppen verschwinden, sind sie nicht so interessant wie die G_i und werden daher im folgenden nicht weiter betrachtet.

Bemerkung 1.23 *Satz 1.22 gilt allgemeiner für Gebiete der Form $\mathbb{C}^n \setminus B$, wobei $B = \{z \mid \psi(z) > 0\}$ streng pseudokonvex ist und ψ eine C^2-Funktion, die in einer Umgebung von ∂B immer $d\psi \neq 0$ erfüllt.*

1.5 Fortsetzung beschränkter Formen

Definition 1.24 *Es sei $G \subset \mathbb{C}^n$ und $\beta \in A^{0,l}(G)$ mit*

$$\beta = \sum_{i_1<\ldots<i_l} a_{i_1\ldots i_l}\, d\overline{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{i_l}.$$

Unter $\|\beta\|_G$ verstehen wir den Ausdruck

$$\|\beta\|_G := \max_{i_1<\ldots<i_l} \sup_{z\in G} |a_{i_1\ldots i_l}(z)|.$$

β heißt beschränkt *auf G, wenn $\|\beta\|_G < \infty$.*

Ziel ist es jetzt, für $l \geq 1$ die Bijektion $H^l(G_0, \mathcal{O}) \longleftrightarrow H^l(G_{m-l}, \mathcal{O})$ aus Satz 1.15 dahingehend zu verallgemeinern, daß eine in der Dolbeaultkohomologie durch eine beschränkte Form β repräsentierte Klasse in $H^{0,l}(G_0) = H^l(G_0, \mathcal{O})$ mittels der Bijektion in eine Klasse übergeht, die durch eine Form repräsentiert werden kann, die auf G_{m-l} bis auf eine Konstante durch $\|\beta\|_{G_0}$ beschränkt ist. Dieses Ziel wird allerdings mit der hier angegebenen Technik nicht ganz erreicht werden können, und es wird auch klar aus welchem Grund.
Für $l = 0$ ist eine solche Aussage jedoch selbstverständlich, denn holomorphe Funktionen nehmen in der Holomorphiehülle keine anderen Werte an als im Ausgangsgebiet.

Es bezeichne $C^{p,q}(B)$ die Menge der (p,q)-Formen mit stetigen Koeffizienten auf $B \subset \mathbb{C}^n$.
An dieser Stelle benötigen wir

Lemma 1.25 *Es sei $G \subset\subset \mathbb{C}^n$. In der Umgebung U des Punktes $z \in \partial G$ gebe es eine C^2-Funktion ϕ mit $G \cap U = \{z \mid \phi(z) > 0\}$; G sei in $\partial G \cap U$ q-konkav.*
Dann existieren Umgebungen $V(z) \subset\subset W(z) \subset U$ und eine Konstante $C < \infty$, so daß es für $l = n - q - 1$ zu jedem $\overline{\partial}$-geschlossenen $\beta \in A^{0,l}(G \cap W) \cap C^{0,l}(\overline{G} \cap W)$ ein $\gamma \in A^{0,l-1}(G \cap W)$ gibt mit $\beta = \overline{\partial}\gamma$ und der Abschätzung

$$\|\gamma\|_{G\cap V} \leq C\|\beta\|_{G\cap W}.$$

Beweis: S. [HeLe2], Abschnitt 14. ■

Wir setzen jetzt:

$$G_q^\epsilon := \{(w,z) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^m \mid z \in D, \log|w| < t_q(z) - \epsilon\}.$$

Satz 1.26 *Es sei $\xi \in H^{0,l}(G_0)$ durch die Form β repräsentiert. Zu jedem $\epsilon > 0$ kann dann die Fortsetzung $\hat{\xi} \in H^{0,l}(G_{m-l})$ durch eine Form $\hat{\beta}$ repräsentiert werden mit $\hat{\beta}|G_0 = \beta + \overline{\partial}\alpha$ und $\alpha \in A^{0,l-1}(G_0)$, so daß gilt:*

$$(1) \quad \|\hat{\beta}|_{G_0 \cup G^{\epsilon}_{m-l}}\|_{G_0 \cup G^{\epsilon}_{m-l}} \leq C \, \|\beta\|_{G_0}$$

$$(2) \quad \|\alpha\|_{G_0} \leq C \, \|\beta\|_{G_0}.$$

Die Zahl $C < \infty$ hängt dabei nicht von $\alpha, \beta, \hat{\beta}, \xi, \hat{\xi}$ ab.

Beweis: Im Beweis von Satz 1.15 wird die Situation aus Satz 1.8 unendlich oft ausgenutzt, um eine Fortsetzung von G_0 nach G_{m-l} zu konstruieren. Hier sollen nur endlich viele Schritte gemacht werden, daher ist eine zusätzliche Überlegung notwendig.

1. Schritt Wir nehmen an, es gelte $\beta \in C^{0,l}(\overline{G_0 \cap G^{\epsilon}_{m-l}} \cap (\mathbb{C} \times D))$.
Es sei $(\Theta_k)_{k=1}^N$ eine endliche Teilung der Eins auf (einer kleinen Umgebung U von) $\overline{\partial G_0 \cap (\mathbb{C} \times D) \cap G^{\epsilon}_{m-l}}$. Der Träger von θ_k liege jeweils in einer Menge U_k, so daß $\beta|_{U_k \cap G_0}$ $\overline{\partial}$-exakt ist. U_k kann immer so gewählt werden, daß es die Rolle von W aus Lemma 1.25 einnimmt. Definiere

$$B_i := (G_0 \setminus U) \cup \{z \in U \mid (\phi + \delta \sum_{k=1}^{i} \Theta_k)(w,z) > 0\}.$$

B_i ist dann für hinreichend kleines δ in $\partial B_i \cap (\mathbb{C} \times D)$ immer noch q-konkav. Die Θ_k seien so gewählt, daß jeweils $H^{0,l}(B_{i+1}) \cong H^{0,l}(B_i)$. Dies ist wegen Lemma 1.5 und Satz 1.10 immer möglich.

Es sei η_k eine C^∞-Funktion, deren Träger in derselben offenen Menge U_k liegt wie der von Θ_k und die auf einer kleinen Umgebung von supp Θ_k identisch Eins ist. Dies kann o.E. so geschehen, daß supp η_k die Rolle von V aus Lemma 1.25 einnimmt.
Darüberhinaus seien die η_k so gewählt, daß es eine Konstante $M < \infty$ gibt mit

$$\|\overline{\partial}\eta_k\|_{U_k \cap B_{k-1}} < M \quad \forall \, k = 1, \ldots, N.$$

Setze $\beta_0 := \beta$ und

$$\beta_{i+1} := \begin{cases} \beta_i - \overline{\partial}(\eta_{i+1}\gamma_i) & \text{auf } B_i \cap U_{i+1} \\ \beta_i & \text{auf } B_i \setminus U_{i+1} \\ 0 & \text{auf } B_{i+1} \setminus B_i. \end{cases}$$

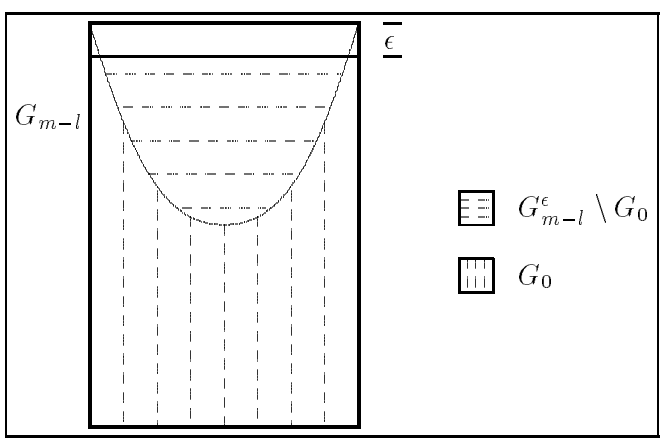


Abbildung 2: Schematische Darstellung der in Satz 1.26 auftretenden Gebiete

$\gamma_i \in A^{0,l-1}(B_i \cap U_{i+1})$ sei dabei so gewählt, daß dort $\beta_i = \overline{\partial}\gamma_i$ mit $\|\gamma_i\|_{B_i \cap \text{supp } \eta_{i+1}} \leq c\,\|\beta_i\|_{B_i \cap U_{i+1}}$, was nach Lemma 1.25 immer möglich ist. β_{i+1} ist dann wohldefiniert.

Es ist auf $B_i \cap U_{i+1}$:

$$\overline{\partial}(\eta_{i+1}\gamma_i) = \overline{\partial}\eta_{i+1} \wedge \gamma_i + \eta_{i+1}\beta_i.$$

Daher folgt:

$$\|\beta_{i+1}\|_{B_{i+1}} \leq \|\beta_i\|_{B_i} + \|\overline{\partial}(\eta_{i+1}\gamma_i)\|_{B_i \cap U_{i+1}} \leq \|\beta_i\|_{B_i} + M\|\gamma_i\|_{B_i \cap \text{supp } \eta_{i+1}} + \|\beta_i\|_{B_i} \leq \overline{c}\,\|\beta_i\|_{B_i}$$

und damit

$$\|\beta_N\|_{B_N} \leq \hat{C}\|\beta\|_{G_0}$$

mit einem $\hat{C} < \infty$.
Es ist $\beta_N|_{G_0} = \beta + \overline{\partial}\alpha$ mit $\alpha = \sum \eta_{i+1}\gamma_i$. Man hat daher auch immer eine Abschätzung

$$\|\alpha\|_{G_o} \leq \hat{C}\|\beta\|_{G_0}.$$

Wegen der Eindeutigkeit in jedem Schritt folgt auch:

$$[\hat{\beta}|B_N] = [\beta_N] \qquad \text{in } H^{0,l}(B_N).$$

2. Schritt Man kann o.E. annehmen, daß $\beta \in C^{0,l}(\overline{G_0 \cap G^{\epsilon}_{m-l}} \cap (\mathbb{C} \times D))$.
Beweis hierfür: Zu jedem Punkt $z \in \partial G_0 \cap (\mathbb{C} \times D) \cap \overline{G^{\epsilon}_{m-l}}$ kann man nach umkehrbar linearer Koordinatentransformation wegen Lemma 1.5 eine q-Hartogsfigur (Z, ρ, f) zu einem (ϕ, w) finden und eine Funktion Ψ^-, so daß (Z, ρ, f) auch noch q-Hartogsfigur zu (Ψ^-, w) ist. Die Restriktion $H^{0,l}(\{\phi > 0\}) \longrightarrow H^{0,l}(\{\Psi^- > 0\})$ ist dann nach Satz 1.10 bijektiv. Wegen der Kompaktheit von $\partial G_0 \cap (\mathbb{C} \times D) \cap \overline{G^{\epsilon}_{m-l}}$ kann man mit endlich vielen dieser Schritte Bijektion zwischen $H^{0,l}(\{\phi > 0\})$ und einem $H^{0,l}(\{\Psi > 0\})$ mit

$$\Psi(w,z) < \phi(w,z) \quad \forall\,(w,z) \in (G_0 \setminus G_0^{\epsilon/2}) \cap G^{\epsilon}_{m-l}$$

konstruieren.
Umgekehrt kann man auch bijektiv von $\{\Psi > 0\}$ nach $\{\phi > 0\}$ fortsetzen. Da $\beta|_{\{\Psi>0\}}$ auch noch stetig auf dem in Frage kommenden Rand ist, kann man wie im 1. Schritt mit Abschätzung fortsetzen zu einer Form $\tilde{\beta} \in A^{0,l}(\{\phi > 0\})$. Man benutzt dabei dieselben q-Hartogsfiguren wie auf dem Weg von $\{\phi > 0\}$ zu $\{\Psi > 0\}$. Diese seine o.E. so klein gewählt, daß man stets die Abschätzungen aus dem 1. Schritt durchführen kann. In jedem einzelnen Schritt kann man die fortgesetzte Form stetig auf dem Rand wählen, da man nach Lemma 1.5 nie maximal fortsetzt. Man hat die Abschätzung

$$\|\tilde{\beta}\|_{\{\phi>0\}} \leq \overline{C}\,\|\beta|_{\{\Psi>0\}}\|_{\{\Psi>0\}} \leq \overline{C}\,\|\beta\|_{G_0}.$$

Damit ist der 2. Schritt bewiesen (für $\tilde{\beta}$ an Stelle von β).

3. Schritt Man kann den 1. Schritt nicht nur für ∂G_0 durchführen, sondern allgemeiner für ein größeres Gebiet mit q-konkavem Rand. Es ist denkbar, daß diese bumping-Methode dann gegen ein $\{(w,z) \mid z \in D,\, \Psi(w,z) > 0\}$ konvergiert in dem Sinne, daß man mit endlich vielen Schritten beliebig nah an $\{\Psi > 0\}$ herankommt, dieses aber nie erreicht. Es ist klar, daß in dieser Situation $\{\Psi > 0\}$ noch q-konkav ist (außer dort, wo schon $\partial G_{m-l} = \{\Psi = 0\}$, diese Punkte interessieren

aber nicht weiter).
Man kann also wie im 2. Schritt $\overline{\partial\{\Psi > 0\} \cap G^{\epsilon}_{m-l}}$ mit endlich vielen q-Hartogsfiguren der Art (Z, ρ, f) überdecken und endlich viele Funktionen $\Psi_0, \ldots, \Psi_k$ finden mit $\Psi = \Psi_0$ und

$$\Psi_k(w,z) < \Psi(w,z) \qquad \forall (w,z) \in G^{\epsilon}_{m-l} \setminus G_0,$$

so daß jeweils $\{(w,z) \mid \Psi_{j+1}(w,z) > 0 \geq \Psi_j(w,z)\}$ in einer der endlich vielen q-Hartogsfiguren enthalten ist und alle $\{\Psi_j > 0\}$ im Rand q-konkav sind.
So ist klar, daß $\{\Psi > 0\}$ auch mit endlich vielen Schritten erreichbar ist. Mit Lemma 1.11 bleibt auch die Bijektivität der jeweiligen Kohomologiegruppen erhalten.

4. Schritt Da $\overline{G^{\epsilon}_{m-l} \setminus G_0}$ kompakt ist, reichen hier endlich viele dieser Schritte aus. In jedem Schritt ist Lemma 1.25 anwendbar. Damit ergeben sich die Abschätzungen (1) und (2).
Wegen Satz 1.10, also der Eindeutigkeit der Fortsetzung in jedem Schritt, folgt auch, daß die so auf G^{ϵ}_{m-l} konstruierte Form $\hat{\beta}$ dort $\hat{\xi}$ repräsentiert.
Es ist offenbar möglich, $\hat{\beta} \in A^{0,l}(G_{m-q})$ zu wählen, da das ϵ nicht minimal ist. ■

Bemerkungen 1.27 *1. Die im 1. Schritt verwendete Methode geht auf [Ker71] zurück.*

2. *Es gibt Klassen, die in den Punkten von $\partial G_{m-l} \cap (\mathbb{C} \times D)$ singulär sind, das heißt dort liegt nie die Situation $\beta = \overline{\partial}\alpha$ vor. Man kann daher nicht erwarten, daß die in diesem Abschnitt vorgestellte Methode Aussagen über beschränkte Fortsetzungen bis an den Rand liefert.*

2 Mittag-Leffler-Kohomologie

Es sei $G \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $G = Y_0 \supset Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots \supset Y_n$ seien komplexe Unterräume. Diese seien so konstruiert, daß es jeweils ein $f_{i+1} \in \mathcal{O}_{Y_i}(Y_i)$ gibt mit

$$Y_{i+1} = \{z \in Y_i \mid f_{i+1}(z) = 0\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{O}_{Y_{i+1}} = \Big(\mathcal{O}_{Y_i} \Big/ (f_{i+1})\Big)\Big|_{Y_{i+1}};$$

$(f_{i+1})_z$ sei dabei stets aktives Element in $\mathcal{O}_{Y_i,z}$ (dies ist in dieser Situation gleichbedeutend mit Nichtnullteiler). Die Y_i sind dann lokal vollständige Durchschnitte der Dimension $n-i$.

Beispiel 2.1 *In der Situation von Beispiel 0.1 betrachten wir den von $f_1(w,z_1,z_2) := z_2$ erzeugten komplexen Unterraum von G_1. Es ist*

$$Y_1 = \{(w,z_1) \mid |z_1|^2 < 1,\ \log|w| < 2\}$$

und

$$Y_1 \cap G_0 = \{(w,z_1) \mid |z_1|^2 < 1,\ \log|w| < 2|z_1|^2\}.$$

Y_1 ist Steinsch und, als Gebiet in $\mathbb{C}^2$ aufgefaßt, die Holomorphiehülle von $Y_1 \cap G_0$.

Beispiel 2.2 *Wiederum in der Situation von Beispiel 0.1 betrachten wir den von $f_1(w,z_1,z_2) := z_1$ erzeugten Unterraum Y_1 von G_1. Es ist*

$$Y_1 = \{(w,z_2) \mid |z_2|^2 < 1,\ \log|w| < |z_2|^2 + 2\}$$

und

$$Y_1 \cap G_0 = \{(w,z_2) \mid |z_2|^2 < 1,\ \log|w| < 3|z_2|^2\}.$$

Y_1 ist nicht Steinsch, aber man kann immer noch alle holomorphen Funktionen von $Y_1 \cap G_0$ nach Y_1 fortsetzen. Nach [TSS], Theorem 5.5.2, ist $H^1(Y_1, \mathcal{O}_{Y_1}) \neq 0$.

Später (Satz 2.10) werden wir beweisen, daß holomorphe Funktionen immer von $Y_q \cap G_0$ nach Y_q fortgesetzt werden können.

Mit $\mathcal{M}_{Y_i}$ werde die Garbe der Keime von meromorphen Funktionen auf Y_i bezeichnet. D_{i+1} sei der Cartierdivisor auf Y_i, der durch f_{i+1} repräsentiert wird. $\mathcal{O}_{Y_i}(D_{i+1})$ ist dann die von f_{i+1}^{-1} erzeugte analytische Untergarbe von $\mathcal{M}_{Y_i}$. Ist $\mathcal{S}$ eine weitere kohärente Garbe auf Y_i, so bezeichnen wir

$$\mathcal{S}(D_{i+1}) := \mathcal{S} \otimes \mathcal{O}_{Y_i}(D_{i+1}).$$

Ist

$$0 \to \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_3 \to 0$$

eine exakte Sequenz kohärenter Garben auf Y_i, so ist auch

$$0 \to \mathcal{S}_1(D_{i+1}) \to \mathcal{S}_2(D_{i+1}) \to \mathcal{S}_3(D_{i+1}) \to 0$$

exakt.

Wir definieren nun kohärente Garben $\mathcal{D}_i, \mathcal{M}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ auf G.
Es seien zunächst $\overline{\mathcal{D}_0} := \mathcal{O}_G$ und $\overline{\mathcal{M}_0} := \mathcal{O}_G(D_1)$. Wir setzen für $i = 1, \ldots, n-1$ auf Y_i:

$$\overline{\mathcal{D}_i} := det\, \mathcal{N}_{Y_i|G} \qquad \text{und} \qquad \overline{\mathcal{M}_i} := \overline{\mathcal{D}_i}(D_{i+1})$$

und auf Y_n sei: $\overline{\mathcal{M}_n} := \overline{\mathcal{D}_n} := det\, \mathcal{N}_{Y_n|G}$.
Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{Y_i}(-D_{i+1}) \to \mathcal{O}_{Y_i} \to \mathcal{O}_{Y_i}/(f_{i+1}) \to 0$$

erhält man die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{Y_i} \to \mathcal{O}_{Y_i}(D_{i+1}) \to \mathcal{O}_{Y_i}/(f_{i+1})(D_{i+1}) \to 0$$

und für $i \geq 1$ durch Tensorieren mit $\overline{\mathcal{D}_i}$:

$$0 \to det\, \mathcal{N}_{Y_i|G} \to det\, \mathcal{N}_{Y_i|G}(D_{i+1}) \to det\, \mathcal{N}_{Y_i|G} \otimes \mathcal{O}_{Y_i}/(f_{i+1})(D_{i+1}) \to 0.$$

Es ist $\mathcal{O}_{Y_i}/(f_{i+1})(D_{i+1})|_{Y_{i+1}} \cong \mathcal{N}_{Y_{i+1}|Y_i}$.
Da die Y_i lokal vollständige Durchschnitte sind, hat man die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{N}_{Y_{i+1}|Y_i} \to \mathcal{N}_{Y_{i+1}|G} \to \mathcal{N}_{Y_i|G}\big|_{Y_{i+1}} \to 0,$$

und daraus erhält man:

$$det\, \mathcal{N}_{Y_{i+1}|G} \cong det\, \mathcal{N}_{Y_i|G}\big|_{Y_{i+1}} \otimes \mathcal{N}_{Y_{i+1}|Y_i} \cong \left(det\, \mathcal{N}_{Y_i|G} \otimes \mathcal{O}_{Y_i}/(f_{i+1})(D_{i+1})\right)\big|_{Y_{i+1}}$$

und damit

$$\overline{\mathcal{D}_{i+1}} \cong \left(\overline{\mathcal{M}_i}/\overline{\mathcal{D}_i}\right)\big|_{Y_{i+1}}.$$

Dies gilt auch für $i = 0$.

Es bezeichne $\rho_i : Y_i \hookrightarrow G$ die Einbettung. Dann setzen wir $\mathcal{D}_i := (\rho_i)_*(\overline{\mathcal{D}_i})$ und entsprechend $\mathcal{M}_i := (\rho_i)_*(\overline{\mathcal{M}_i})$.

Lemma 2.3 *Es gilt für $i = 0, \ldots, n$:*

1. $\overline{\mathcal{D}_i} \cong \mathcal{O}_{Y_i}$
2. $hd(\mathcal{D}_i) = i$

Beweis:
Aussage (1) folgt per Induktion. Für $i = 0$ gilt sie per definitionem.
Für $i \geq 1$ hat man

$$\overline{\mathcal{D}_{i+1}} = \left(det\, \mathcal{N}_{Y_i|G}(D_{i+1})/det\, \mathcal{N}_{Y_i|G}\right)\big|_{Y_{i+1}}.$$

$\left(det\, \mathcal{N}_{Y_i|G}(D_{i+1})\right)_x$ ist die Menge der Ausdrücke $\frac{d_x}{(f_{i+1})_x}$ mit $d_x \in (\overline{\mathcal{D}_i})_x \cong \mathcal{O}_{Y_i,x}$ nach Induktionsvoraussetzung.
Es gilt $\frac{d_x}{(f_{i+1})_x} \equiv \frac{d'_x}{(f_{i+1})_x} \bmod \mathcal{O}_{Y_i,x}$ genau dann, wenn $d_x - d'_x \in (f_{i+1})_x \cdot \mathcal{O}_{Y_i,x}$. Daraus folgt $(\overline{\mathcal{D}_{i+1}})_x \cong \mathcal{O}_{Y_{i+1},x}$.

Der durch $\overline{\mathcal{D}_{i+1}}(U) \to \mathcal{O}_{Y_i}(U)$ mit $\frac{d}{f_{i+1}} \mapsto d$ erklärte Prägarbenhomomorphismus induziert also einen Garbenisomorphismus $\overline{\mathcal{D}_{i+1}} \to \mathcal{O}_{Y_i}$.
Aussage (2) folgt aus [AnGr62], Proposition 3. ■

Man hat also Homomorphismen $p_q : \mathcal{M}_q \twoheadrightarrow \mathcal{D}_{q+1}$ und $\iota_q : \mathcal{D}_{q+1} \hookrightarrow \mathcal{M}_{q+1}$ und setzt jetzt $d_q := \iota_q \circ p_q : \mathcal{M}_q \to \mathcal{M}_{q+1}$.
Es gilt stets: $d_{q-1}(\mathcal{M}_{q-1}) = \ker d_q = \mathcal{D}_q$, damit erhalten wir eine Auflösung von $\mathcal{O}_G$:

$$0 \to \mathcal{O}_G \to \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \to \cdots \to \mathcal{M}_n \to 0.$$

Die Auflösung ist aber im allgemeinen nicht azyklisch.
Der Einfachheit halber seien auch die von ι_q, p_q, d_q induzierten Abbildungen auf Schnittebene mit ι_q, p_q, d_q bezeichnet.

Satz 2.4 *Es gibt für $q = 0, \ldots, n$ einen Homomorphismus*

$$f_q : \quad ker(d_q : \mathcal{M}_q(G) \to \mathcal{M}_{q+1}(G))/d_{q-1}\mathcal{M}_{q-1}(G) \qquad \longrightarrow \qquad H^q(G, \mathcal{O}),$$

der bijektiv ist, falls $H^r(G, \mathcal{M}_{q-r}) = 0$ für $r = 1, \ldots, q$ (also insbesondere für $q = 0$ oder für Steinsches G), und der injektiv ist, falls $H^{r-1}(G, \mathcal{M}_{q-r}) = 0$ für $r = 2, \ldots, q$, also insbesondere für $q = 1$ (dabei sei $\mathcal{M}_{-1} = 0$).

Beweis: Aus der langen exakten Sequenz über G zu

$$0 \to \mathcal{D}_{q-r} \to \mathcal{M}_{q-r} \to \mathcal{D}_{q-r+1} \to 0$$

erhält man Homomorphismen

$$h_r : \; H^{r-1}(G, \mathcal{D}_{q-r+1}) \to H^r(G, \mathcal{D}_{q-r}).$$

Aus dem darin erhaltenen Ausschnitt für $r = 0$:

$$\cdots \to \mathcal{M}_{q-1}(G) \to \mathcal{D}_q(G) \to H^1(G, \mathcal{D}_{q-1}) \to \cdots$$

erhält man den Monomorphismus

$$m : \quad \mathcal{D}_q(G)/d_{q-1}\mathcal{M}_{q-1}(G) \qquad \to \qquad H^1(G, \mathcal{D}_{q-1}).$$

Es ist $f_1 := m$ und $f_q := h_q \circ h_{q-1} \circ \cdots \circ h_2 \circ m$. f_0 ist die Abbildung $\mathcal{O}_G(G) \to H^0(G, \mathcal{O})$.
Die Aussagen über Bijektivität und Injektivität folgen aus dem Rechnen mit den langen exakten Sequenzen. ■

Definition 2.5 *Man bezeichnet:*

$$H^q_{\mathcal{M}}(G, \mathcal{O}) := im\, f_q \subset H^q(G, \mathcal{O})$$

als Mittag-Leffler-Kohomologie *(bzgl. $Y_1, \ldots, Y_q$).*

Der Bezeichnung Mittag-Leffler rührt daher, daß im Fall $n = 1$ die Elemente von $\mathcal{D}_1 = \mathcal{M}_1$ Hauptteilverteilungen auf G sind.

Man hat die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{D}_q(G) \overset{\iota_{q-1}}{\hookrightarrow} \mathcal{M}_q(G) \overset{p_q}{\to} \mathcal{D}_{q+1}(G).$$

Ferner gilt: $0 = d_q \circ d_{q-1} : \mathcal{M}_{q-1}(G) \to \mathcal{M}_{q+1}(G)$. Dabei ist $d_q = \iota_q \circ p_q$ mit injektivem ι_q. Es ist daher

$$\ker d_q = \ker(\iota_q \circ p_q) = \ker p_q = \operatorname{im} \iota_{q-1} = \mathcal{D}_q(G) = \overline{\mathcal{D}_q}(Y_q) = \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q).$$

Die Mittag-Leffler-Kohomologieklassen werden also durch holomorphe Funktionen auf den Y_q repräsentiert.
Wir wollen zeigen, daß es in $H^q_{\mathcal{M}}(G, \mathcal{O})$ auch nicht triviale Klassen gibt. Die Abbildung $d_q : \mathcal{M}_q(G) \to \mathcal{D}_{q+1}(G)$ wird gegeben durch $\frac{h}{f_{q+1}} \mapsto \frac{[h]}{f_{q+1}}$ mit $h \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q)$ und $[h] \in \mathcal{O}_{Y_{q+1}}(Y_{q+1})$.
Da f_1 injektiv ist, reicht es, ein Element s aus $\mathcal{D}_1(G) = \mathcal{O}_{Y_1}(Y_1)$ anzugeben, das unter d_0 nicht von einem Element aus $\mathcal{M}_0(G)$ kommt, also nicht von einem $\hat{s} \in \mathcal{O}_G(G)$ kommt mit $\hat{s}|_{Y_1} = s$.

Beispiel 2.6 *In der Situation von Beispiel 0.1 betrachten wir den komplexen Unterraum von G_1, der durch $f_1 := z_2 - \frac{1}{2}$ gegeben wird. Es ist also*

$$Y_1 = \{(w, z_1) \mid |z_1|^2 < \frac{3}{4},\ \log|w| < \frac{9}{4}\}.$$

Mit $\tilde{w} := e^{\frac{5}{2}}$ gilt: $(\tilde{w}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \partial G_1 \cap (\mathbb{C} \times D)$.
Auf Y_1 kann man die Funktion $s := \frac{1}{w - \tilde{w}} \in \mathcal{O}_{Y_1}(Y_1)$ betrachten. s kann offenbar nicht als Einschränkung einer Funktion $\hat{s} \in \mathcal{O}(G_1)$ gegeben werden, denn $\hat{s}$ könnte dann fortgesetzt werden nach $G_2 = H(G_1)$. Im Punkt $(\tilde{w}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in G_2$ hat $\hat{s}$ aber offensichtlich eine Singularität.
$s \in \mathcal{O}_{Y_1}(Y_1)$ ist daher nicht kohomolog zu Null in $H^1_{\mathcal{M}}(G_1, \mathcal{O})$.

Wir benötigen noch den folgenden

Satz 2.7 *Es sei $G' \subset G$, $z \in \partial G' \cap G$ sei ein Randpunkt, in dem G' $(n - q - 1)$-konkav ist. Dann gibt es eine pseudokonvexe Umgebung U von z, so daß die Restriktionsabbildung $\mathcal{D}_q(U) \to \mathcal{D}_q(U \cap G')$ bijektiv ist.*

Beweis: Dies folgt aus Satz 1.8, denn $\operatorname{hd}(\mathcal{D}_q) = q$ und $n - (n - q - 1) = 1 > 0$. ∎

Bemerkung 2.8 *Die Mittag-Leffler-Kohomologie kann auch allgemeiner konstruiert werden für komplexe Räume X und eine beliebige kohärente Garbe $\mathcal{S}$ darauf. Es können dann die Grenzfälle auftreten: $H^q_{\mathcal{M}}(X, \mathcal{S}) = H^q(X, \mathcal{S})$ (gleich oder ungleich Null) bzw. $H^q_{\mathcal{M}}(X, \mathcal{S}) = 0, H^q(X, \mathcal{S}) \neq 0$. Im allgemeinen hat man aber $0 \neq H^q_{\mathcal{M}}(X, \mathcal{S}) \neq H^q(X, \mathcal{S})$, falls $H^q(X, \mathcal{S}) \neq 0$.*

2.1 Bijektivität der Restriktionsabbildungen

Nun soll die Mittag-Leffler-Kohomologie der Gebiete $G_0, \ldots, G_m \subset \mathbb{C}^n$ $(m = n-1)$ betrachtet werden. Da q-Klassen von G_0 nach G_{m-q} fortgesetzt werden, wird Y_q fortan immer nur als *Unterraum von* G_{m-q} aufgefaßt werden.
Es werde ab jetzt immer vorausgesetzt, daß die Y_q *reduziert* sind.

Lemma 2.9 *Jede irreduzible Komponente von Y_q hat nicht-leeren Durchschnitt mit G_0 (für $q \leq n-1$).*

Beweis: Im Fall $q = n-1$ ist nichts zu beweisen, da $Y_m \subset G_0$. Wir betrachten daher jetzt den Fall $q < n-1$.
Es sei $Y_q = \bigcup_{i \in I} X_i$ die Zerlegung von Y_q in irreduzible Komponenten. Man kann Satz 2.7 auch für die X_i formulieren. Annahme: $X_i \subset G_{m-q} \setminus G_0$.
Mit $r(z) := c_{m-q} \cdot (Q(z) - 1)$ setzen wir für $T \in [0,1]$:

$$G_{(m-q)T} := \{(w,z) \mid z \in D, \log|w| < t(z) - T\, r(z)\}.$$

Für $T = 0$ erhält man also G_0 , für $T = 1$ ergibt sich G_{m-q}. Es sei

$$\hat{T}_i := \min\{T \in [0,1] \mid \overline{G_{T(m-q)}} \cap X_i \neq \emptyset\}.$$

$\hat{z}$ sei ein beliebiger Punkt aus $\partial G_{\hat{T}_i(m-q)} \cap X_i$. $\partial G_{\hat{T}_i(m-q)}$ ist in $\hat{z}$ (n-q-1)-konkav. Es gibt nach Satz 2.7 also eine Umgebung U von $\hat{z}$ mit

$$\mathcal{O}_{X_i}(U \cap X_i \cap G_{\hat{T}_i(m-q)}) \cong \mathcal{O}_{X_i}(U \cap X_i).$$

Dies widerspricht sich, da die erste Menge leer ist und die zweite nicht. ■

Grundlegend für das folgende ist die Fortsetzungseigenschaft

Satz 2.10 *Die Restriktionsabbildung*

$$\mathcal{O}_{Y_q}(Y_q) \to \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q \cap G_0)$$

ist bijektiv.

Beweis: 1. Injektivität: Gilt für $s \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q)$: $s|_{Y_q \cap G_0} = 0$, so folgt $s = 0$ mit dem Identitätssatz, da jede irreduzible Komponente von Y_q nach Lemma 2.9 G_0 schneidet .

2. Surjektivität: Wir bedienen uns wieder (wie im Beweis von Satz 1.15) der reellwertigen Funktionen (r_k) auf D mit den Eigenschaften
1) $r_0(z) = c_q\,(Q(z) - 1)$ mit $q := m - l$
2) $r_k(z) \leq r_{k+1}(z) < 0 \;\; \forall z \in D$
3) $\lim_{k \to \infty} r_k = 0$ (gleichmäßige Konvergenz)
4) r_k ist streng konvex
5) $\overline{\{z \in D \mid r_{k+1}(z) - r_k(z) \neq 0\}} \subset \overset{\circ}{D}$.

Es sei wieder $G^k := \{(w,z) \in \mathbb{C} \times D \mid \log|w| < r_k(z) + t_q(z)\}$. Wir wollen zunächst zeigen, daß $\mathcal{O}_{Y_q}(Y_q \cap G^{k+1}) \to \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q \cap G^k)$ immer surjektiv ist.
G^k ist in $\partial G^k \cap (\mathbb{C} \times D)$ immer (n-q-1)-konkav, man kann also Satz 2.7 anwenden. Zu jedem Punkt aus $\partial G^k \cap (\mathbb{C} \times D)$ findet man eine Umgebung P, so daß $\mathcal{O}_{Y_q}(Y_q \cap G^k \cap P) \cong \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q \cap P)$. Hat man zwei dieser Umgebungen P_1, P_2, so kann man zu $s \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q \cap G^k)$ jeweils ein $s_i \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q \cap P_i)$ finden, das auf dem Durchschnitt übereinstimmt. Setze

$$\overline{s} := \begin{cases} s & \text{auf } G^k \cap Y_q \\ s_1 & \text{auf } P_1 \cap Y_q \\ s_2 & \text{auf } P_2 \cap Y_q. \end{cases}$$

Zur Wohldefiniertheit ist nur noch zu zeigen, daß $\overline{s}$ auf $P_1 \cap P_2$ eindeutig ist. Dies folgt aber nach dem Identitätssatz, weil jede irreduzible Komponente von $Y_q \cap P_i$ auch G^k schneidet (dies folgt wie im Beweis von Lemma 2.9, wenn die P_i hinreichend klein sind).

Mit endlich vielen dieser Schritte erhält man also eine Fortsetzung nach $Y_q \cap G^k_\lambda$ für ein $\lambda > 0$, wobei

$$G^k_\lambda := \{(w,z) \mid z \in D,\ \log|w| < (1-\lambda)\, r_k(z) + \lambda\, r_{k+1}(z) + t_q(z)\}.$$

Man kann das Verfahren iterieren und erhält eine Folge von $G^k_{\lambda_i}$, die gegen ein $G^k_{\overline{\lambda}}$ konvergieren. Bezeichne $U_i := Y_q \cap G^k_{\lambda_i}$. Mit dem Schrumpfungssatz überlegt man sich, daß es $\tilde{U}_i \subset\subset U_i$ gibt mit $\bigcup \tilde{U}_i = G^k_{\overline{\lambda}} \cap Y_q$.
s kann jeweils zu einem $s_i \in \mathcal{O}_{Y_q}(\overline{\tilde{U}_i})$ fortgesetzt werden, so daß gilt: $s_{i+1}|_{\overline{\tilde{U}_i}} = s_i$.
Es folgt die Existenz eines $\hat{s} \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q \cap G^k_{\overline{\lambda}})$ mit $\hat{s}|_{\overline{\tilde{U}_i}} = s_i$.

Man kann s dann mit dem gleichen Verfahren auch nach $Y_q \cap G^{k+1}$ fortsetzen.
Schließlich folgt auf die gleiche Weise, daß man jedes $f \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q \cap G_0)$ nach G_{m-q} fortsetzen kann. ∎

Man hat auch in der Mittag-Leffler-Kohomologie für $G \subset \hat{G}$ Restriktionsabbildungen

$$H^q_{\mathcal{M}}(\hat{G}, \mathcal{O}) \to H^q_{\mathcal{M}}(G, \mathcal{O}).$$

Aus [Gun3], Theorem F4, folgt, daß das Diagramm

$$(D) \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_q(\hat{G})/d_{q-1}\mathcal{M}_{q-1}(\hat{G}) & \xrightarrow{\hat{f}_q} & H^q(\hat{G}, \mathcal{O}) \\ \downarrow p & & \downarrow r \\ \mathcal{D}_q(G)/d_{q-1}\mathcal{M}_{q-1}(G) & \xrightarrow{f_q} & H^q(G, \mathcal{O}) \end{array}$$

kommutiert, wobei die senkrechten Abbildungen die üblichen Restriktionshomomorphismen sind.
Ist nun $s \in H^q_{\mathcal{M}}(\hat{G}, \mathcal{O}) = \text{im } \hat{f}_q$, so ist $r(s) = r \circ \hat{f}_q(x) = f_q \circ p(x) \in H^q_{\mathcal{M}}(G, \mathcal{O})$. Die Restriktionsabbildungen der Mittag-Leffler-Kohomologie sind also die Einschränkungen der Restriktionen der vollen Kohomologie auf die Mittag-Leffler-Kohomologie. Im allgemeinen werden sie weder injektiv noch surjektiv sein. Wir wollen hier aber zeigen:

Satz 2.11 *Die Restriktionsabbildungen $r : H^q_{\mathcal{M}}(G_{m-q}, \mathcal{O}) \to H^q_{\mathcal{M}}(G_0, \mathcal{O})$ sind bijektiv.*

Beweis: Wir wollen uns zuerst überlegen, daß die Restriktionsabbildung

$$p : \mathcal{D}_q(G_{m-q})/d_{q-1}\mathcal{M}_{q-1}(G_{m-q}) \to \mathcal{D}_q(G_0)/d_{q-1}\mathcal{M}_{q-1}(G_0)$$

bijektiv ist.
1. Surjektivität: Ein Element von $\mathcal{D}_q(G_0)/d_{q-1}\mathcal{M}_{q-1}(G_0)$ wird repräsentiert durch ein $s \in \mathcal{D}_q(G_0) \cong \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q \cap G_0)$. Dieses kann nach Satz 2.10 fortgesetzt werden zu einem $\hat{s} \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q) \cong \mathcal{D}_q(G_{m-q})$. Die Klasse von $\hat{s}$ wird dann auf die Klasse von s abgebildet.
2. Injektivität: Es sei $s \in \mathcal{D}_q(G_0)$ mit $s = d_{q-1}\, m$. Dies bedeutet, daß $s \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q \cap G_0)$ Einschränkung einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}_{Y_{q-1}}(Y_{q-1} \cap G_0)$ ist. s und f können zu $\hat{s} \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q)$ bzw. $\hat{f} \in \mathcal{O}_{Y_{q-1}}(Y_{q-1} \cap G_{m-q})$ fortgesetzt werden. Es gilt:

$$\hat{f}|_{Y_q \cap G_0} = s.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung nach Satz 2.10 gilt damit auch $\hat{s} = \hat{f}|_{Y_q}$.

Damit ist gezeigt, daß p bijektiv ist. Aus dem kommutativen Diagramm (D) liest man dann die Behauptung ab. ∎

2.2 Elementare Abschätzungen

Wie bereits erwähnt, werden die q-Klassen der Mittag-Leffler-Kohomologie durch holomorphe Funktionen auf Y_q repräsentiert. Diese sollen nun weiter untersucht werden. Es wird dabei gezeigt, daß das Betragsmaximum beschränkter Funktionen auf Y_q schon auf $Y_q \cap G_0$ angenommen wird und daß sich auf $Y_q \cap G_0$ polynomial beschränkte Funktionen zu polynomial beschränkten Funktionen auf Y_q fortsetzen.

Wir bezeichnen $\|s\|_M := \sup_{z \in M} |s(z)|$, falls s auf M eine holomorphe Funktion ist. Auch in diesem Abschnitt werden die Y_q als *reduziert* vorausgesetzt.

Satz 2.12 *Es sei $s \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q)$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt*

$$\|s\|_{Y_q} = \|s|_{Y_q \cap G_0}\|_{Y_q \cap G_0}.$$

Beweis: 1. Schritt: Es sei $z_0 \in Y_q \cap (\partial G_0 \cap (\mathbb{C} \times D))$. G_0 ist in z_0 $(n-q-1)$-konkav. Man findet daher ein komplex (q+1)-dim. analytisches Flächenstück F in einer Umgebung U von z_0, das in $G_0 \cup \{z_0\}$ liegt und z_0 schneidet.
$Y_q \cap F \cap U$ ist eine mindestens 1-dim. analytische Menge in U. Auf $Y_q \cap F \cap U$ gilt also das lokale Maximumprinzip. Es folgt:

$$(*) \qquad \|s|_{Y_q \cap F \cap U}\|_{Y_q \cap F \cap U} \leq \|s|_{Y_q \cap G_0}\|_{Y_q \cap G_0}.$$

Man findet dann eine evtl. kleinere Umgebung U von z_0, so daß man für jeden Punkt $w \in (Y_q \cap U) \setminus G_0$ die Menge F durch Translation um $w - z_0$ durch den Punkt w laufen läßt und durch das Maximumprinzip immer noch die Aussage $(*)$ gilt.
Dieses Argument liefert für das verkleinerte U:

$$\|s|_{Y_q \cap (G_0 \cup U)}\|_{Y_q \cap (G_0 \cup U)} \leq \|s|_{Y_q \cap G_0}\|_{Y_q \cap G_0}.$$

Dieses Verfahren ist für jeden Punkt von $Y_q \cap (\partial G_0 \cap (\mathbb{C} \times D))$ durchführbar.
Der Fall $U \cap G_0 \cap Y_q = \emptyset$ kann dabei nicht auftreten, denn ist z_0 der betreffende Randpunkt von G_0, so gibt es nach Satz 2.7 eine beliebig kleine pseudokonvexe Umgebung $P(z_0)$ mit

$$\mathcal{O}_{Y_q}(P \cap G_0 \cap Y_q) \cong \mathcal{D}_q(P \cap G_0) \cong \mathcal{D}_q(P) \cong \mathcal{O}_{Y_q}(P \cap Y_q).$$

Aus dem gleichen Grund kann auch nicht außerhalb von G_0 eine neue irreduzible Komponente auftreten.
Man findet also ein $\hat{G_0}$ mit $G_0 \subset \hat{G_0} \subset G_{m-q}$ und $\partial G_0 \cap (\mathbb{C} \times D) \subset \hat{G_0}$, so daß

$$\|s|_{Y_q \cap \hat{G_0}}\|_{Y_q \cap \hat{G_0}} = \|s|_{Y_q \cap G_0}\|_{Y_q \cap G_0}.$$

2. Schritt: Mit $r(z) := c_{m-q} \cdot (Q(z) - 1)$ hat man:

$$\begin{aligned} G_0 &= \{(w,z) \mid z \in D, \log|w| < t(z)\}, \\ G_{m-q} &= \{(w,z) \mid z \in D, \log|w| < t(z) - r(z)\}. \end{aligned}$$

Wir bilden jetzt für $T \in [0,1]$:

$$G_{(m-q)T} := \{(w,z) \mid z \in D, \log|w| < t(z) - T\,r(z)\}.$$

Für $T = 0$ erhält man also G_0 zurück, für $T = 1$ ergibt sich wieder G_{m-q}.
Es gilt:

$$G_{(m-q)T} = \{(w,z) \mid z \in D, \log|w| < \sum_{i=1}^{m}(c_i - Tc_{m-q})|z_i|^2 + Tc_{m-q}(1 - \mathrm{Re}\sum a_{\nu\mu}z_\nu z_\mu)\},$$

das heißt $G_{(m-q)T}$ ist in $\partial G_{(m-q)T} \cap (\mathbb{C} \times D)$ für $0 \leq T < 1$ $(n-q-1)$-konkav.

Es bezeichne X die Menge der Punkte in Y_q, in denen $|s|$ größere Werte annimmt als $\|s|_{Y_q \cap G_0}\|_{Y_q \cap G_0}$. X ist offen in Y_q und es ist trivialerweise $X \cap G_0 = \emptyset$.
Wir nehmen an, X sei nicht leer. Es gibt dann ein $z \in \partial X := \overline{X} \setminus X$ (der Abschluß ist bzgl. Y_q zu verstehen) und ein $T \in]0,1[$ mit $z \in \partial G_{(m-q)T} \cap (\mathbb{C} \times D)$ und $z \notin G_{(m-q)T'}$ für alle $T' < T$. Da $G_{(m-q)T}$ in z $(n-q-1)$-konkav ist, erhält man durch das Maximumprinzip wie im 1. Schritt einen Widerspruch. X ist also leer. ∎

Nun sollen *polynomial beschränkte* Funktionen eingeführt werden. Es sei $K(z;r)$ die offene Kugel um z mit Radius r. Den Randabstand eines Punktes $z \in G \subset \mathbb{C}^n$ definiert man als

$$\Delta_G(z) := \sup\{r > 0 \mid K(z;r) \subset G\}.$$

Definition 2.13 *Es sei Y ein abgeschlossener komplexer Unterraum eines Gebietes $G \subset \mathbb{C}^n$. Eine Funktion $s \in \mathrm{red}\,\mathcal{O}_Y(Y)$ heißt* polynomial beschränkt *in G (von der Ordnung N), falls es ein $C < \infty$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $y \in Y$ gilt:*

$$|s(y)| \leq C\ (\Delta_G(y))^{-N}.$$

Weiterhin bezeichnet man

$$G(\epsilon) := \{z \in G \mid \overline{K(z;\epsilon)} \subset G\}$$

als ϵ-*Schrumpfung* des Gebietes G.

Lemma 2.14 *Es gibt Zahlen $E \geq 1$ und $\epsilon_0 > 0$, so daß für alle $s \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q)$ gilt:*

$$\|s|_{Y_q \cap G_0(\epsilon)}\|_{Y_q \cap G_0(\epsilon)} = \|s|_{Y_q \cap (G_{m-q}(E\epsilon) \cup G_0(\epsilon))}\|_{Y_q \cap (G_{m-q}(E\epsilon) \cup G_0(\epsilon))} \quad \forall\, 0 < \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Beweis: Ein $\epsilon > 0$ sei fest gewählt. Es sei hinreichend klein, um alle im Beweis verlangten Eigenschaften zu erfüllen.
Wir bezeichnen $G_D := \{(w,z) \mid Q(z) < 1, \log|w| < t(z) - D\}$ für kleines D. Man wählt $K > 1$ so groß , daß für $D \geq \epsilon K$ alle Punkte aus $G_D \cap \{(w,z) \mid Q(z) < 1 - D\}$ mindestens den Randabstand ϵ in G_0 haben, das heißt $G_D \cap \{(w,z) \mid Q(z) < 1 - D\} \subset G_0(\epsilon)$. K hängt dabei nur von den Koeffizienten von Q und t ab.
Dann ist auch

$$\begin{aligned} Y_q \cap G_0(\epsilon) \supset & \quad Y_q \cap \{(w,z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \mid Q(z) < 1 - D, \log|w| < t(z) - D\} \\ = & \quad Y_q \cap \{(\tilde{w},\tilde{z}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \mid Q(\tilde{z}) < 1, \log|\tilde{w}| < (1-D)t(\tilde{z})\} \end{aligned}$$

für $\tilde{z}_\nu := z_\nu \frac{1}{\sqrt{1-D}}$, $\tilde{w} := e^D w$.
$(1-D)t(\tilde{z})$ hat im wesentlichen die gleiche Gestalt wie auch $t(z)$, daher kann Lemma 2.12 verwendet werden und man kann mit der gleichen Schranke fortsetzen nach
$Y_q \cap \{(\tilde{w},\tilde{z}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \mid Q(\tilde{z}) < 1, \log|\tilde{w}| < (1-D)t(\tilde{z}) - c_{m-q}(1-D)(Q(\tilde{z}) - 1)\}$
$= Y_q \cap \{(w,z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \mid Q(z) < 1 - D, \log|w| < t(z) - c_{m-q}Q(z) + c_{m-q}(1-D) - D\}$
Diese Menge enthält $Y_q \cap G_{m-q}(E\epsilon)$ für geeignetes $E > 1$, denn für kleines $\delta > 0$ gilt:

$$G_{m-q}(\delta) \subset \{(w,z) \mid Q(z) < 1 - d, \log|w| < t(z) - c_{m-q}(Q(z) - 1) - d\} =: M$$

mit $d(\delta) < k\delta$ und hinreichend kleinem k. Es folgt

$$M \subset H(G_D \cap \{(w,z) \mid Q(z) < 1 - D\}),$$

falls $d \geq (1 + c_m)D$, wie man nachrechnet.
Für $E = (1 + c_m)\frac{K}{k}$ und $\epsilon_0 := \epsilon$ gilt dann die Behauptung. ∎

Bemerkung 2.15 *Es sei*

$$B_{Y_q}(G_0(\epsilon)) := \{z \in Y_q \mid |s(z)| \leq \|s|_{G_0(\epsilon) \cap Y_q}\|_{G_0(\epsilon) \cap Y_q} \ \forall s \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q)\}.$$

Lemma 2.14 sagt jetzt: $Y_q \cap G_{m-q}(E\epsilon) \subset B_{Y_q}(G_0(\epsilon))$. Man kann ohne Einschränkung (evtl. Vergrößern von E) voraussetzen, daß es eine kompakte Menge $K \subset G_{m-q}$ gibt mit

$$Y_q \cap G_{m-q}(E\epsilon) \subset K \cap Y_q \subset B_{Y_q}(G_0(\epsilon)).$$

Definition 2.16 *Für einen abgeschlossenen komplexen Unterraum X eines Gebiets $G \subset \mathbb{C}^n$ setzen wir*

$$\|f\|_{N,X} := \sup_{z \in X} |f(z)|(\Delta_G(z))^N$$

für eine in G polynomial beschränkte Funktion $f \in \ red(\mathcal{O}_X)(X)$.

Damit erhält man den folgenden

Satz 2.17 *1) Es sei $s \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q)$. $s|_{Y_q \cap G_0}$ sei in G_0 polynomial beschränkt. Dann ist auch s in G_{m-q} polynomial beschränkt von derselben Ordnung (für $q = 0, \ldots, m$).*
2) Es gilt: $\|s\|_{N,Y_q} \leq C \, \|s|Y_q \cap G_0\|_{N,Y_q \cap G_0}$ mit einer nur von N abhängigen Konstante $C < \infty$.

Beweis: 1) s sei in G_0 polynomial beschränkt von der Ordnung N. Es sei $z_0 \in Y_q \cap (G_{m-q} \setminus G_{m-q}(E\frac{\epsilon_0}{2}))$.
Für $\epsilon := \frac{1}{2E}\Delta_{G_{m-q}}(z_0) < \epsilon_0$ gilt dann wegen Lemma 2.14 bzw. Bemerkung 2.15:

$$z_0 \in Y_q \cap G_{m-q}(E\epsilon) \subset B_{Y_q}(G_0(\epsilon)).$$

Für $z \in G_0(\epsilon) \cap Y_q$ ist dann:

$$|s(z)| \leq \sup_{w \in G_0(\epsilon) \cap Y_q} |s(w)| \, \left(\frac{\Delta_{G_0}(z)}{\epsilon}\right)^N \leq \|s|_{Y_q \cap G_0}\|_{N,Y_q \cap G_0} \, \epsilon^{-N}.$$

Da $z_0 \in B_{Y_q}(G_0(\epsilon))$, erhält man:

$$|s(z_0)| \leq \|s|_{Y_q \cap G_0}\|_{N,Y_q \cap G_0} \, \epsilon^{-N} = E^N 2^N (\Delta_{G_{m-q}}(z_0))^{-N} \|s|_{Y_q \cap G_0}\|_{N,Y_q \cap G_0}.$$

Da G_{m-q} beschränkt ist, gibt es eine kompakte Menge K mit $G_{m-q}(E\frac{\epsilon_0}{2}) \subset K \subset G_{m-q}$.
Für $s \not\equiv 0$ und mit

$$C(s) := \max\left\{1, \frac{\sup_{z \in Y_q \cap K} |s(z)| \;\; \sup_{z \in G_{m-q}(E\frac{\epsilon_0}{2})} (\Delta_{G_{m-q}}(z))^N}{\|s|_{Y_q \cap G_0}\|_{N,Y_q \cap G_0} 2^N E^N}\right\}$$

gilt dann: $|s(z)| \leq C(s) \, \|s|_{Y_q \cap G_0}\|_{N,Y_q \cap G_0} \, 2^N E^N (\Delta_{G_{m-q}}(z))^{-N}$ für alle $z \in G_{m-q} \cap Y_q$.
2) Wie in der Bemerkung 2.15 kann man es einrichten, daß $K \cap Y_q \subset B_{Y_q}(G_0(\epsilon_0))$.
$C(s)$ läßt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned}
C(s) &\leq 1 + \frac{\sup_{z \in Y_q \cap K} |s(z)| \;\; \sup_{z \in G_{m-q}(E\frac{\epsilon_0}{2})} (\Delta_{G_{m-q}}(z))^N}{\|s|_{Y_q \cap G_0}\|_{N,Y_q \cap G_0} \, 2^N E^N} \\
&\leq 1 + \frac{1}{(2E)^N} \frac{\sup_{z \in B_{Y_q}(G_0(\epsilon_0))} |s(z)|}{\sup_{z \in Y_q \cap G_0(\epsilon_0)} |s(z)\left(\Delta_{G_0}(z)\right)^N|} \, (\operatorname{diam}(G_{m-q}))^N \\
&\leq 1 + \frac{1}{(2E)^N} \frac{\sup_{z \in B_{Y_q}(G_0(\epsilon_0))} |s(z)|}{\sup_{z \in Y_q \cap G_0(\epsilon_0)} |s(z)| \, \epsilon_0^N} \, (\operatorname{diam}(G_{m-q}))^N \\
&= 1 + \frac{(\operatorname{diam}(G_{m-q}))^N}{(2E\epsilon_0)^N}.
\end{aligned}$$

Diese Konstante ist offensichtlich unabhängig von s. ∎

Bemerkungen 2.18 *1) Für $q = 0$ folgen die Aussagen aus Satz 2.17 auch aus [Pfl72].*
2) Ist $s \in \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q)$ polynomial beschränkt in G_{m-q}, so ist natürlich auch die Einschränkung von s auf $Y_q \cap G_0$ polynomial beschränkt, d.h. die polynomial beschränkten holomorphen Funktionen auf Y_q und $Y_q \cap G_0$ entsprechen sich bijektiv.

2.3 Abschätzungen in der Weierstraßnorm

Wir behalten weiterhin im Auge, daß q-Klassen der Mittag-Leffler-Kohomologie der G_i durch holomorphe Funktionen auf Y_q repräsentiert werden. Deren Eigenschaften sollen nun noch weiter untersucht werden.

Zu jeder konvergenten Potenzreihe $f = \sum f_\mu z^\mu$ (μ Multiindex) aus $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ assoziiert man das Newtondiagramm $N_f := \{\mu \in \mathbb{N}^n \mid f_\mu \neq 0\} \subset \mathbb{N}^n$.
Es bezeichne Δ die durch $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}_0^+)^n$ definierte Linearform auf $\mathbb{R}^n$ und $\nu_\Delta(f) := min\{\Delta(\mu) \mid \mu \in N_f\}$. Wir definieren $exp_\Delta(f)$ als das erste Element in der lexikographischen Ordnung von $\{\mu \in N_f \mid \Delta(\mu) = \nu_\Delta(f)\}$.

Zu jedem Ideal I von $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ assoziiert man die Menge $E_\Delta(I) := \{exp_\Delta(f) \mid f \in I\}$. Ist $\mu \in E_\Delta(I)$, so ist $\mu + \mathbb{N}^n \subset E_\Delta(I)$. Es gibt eine endliche Menge $F_\Delta(I) = \{\mu_1, \ldots, \mu_r\} \subset \mathbb{N}^n$, so daß $E_\Delta(I) = \cup_{i=1}^r (\mu_i + \mathbb{N}^n)$.

Man teilt $\mathbb{N}^n$ folgendermaßen: $D_1 := \mu_1 + \mathbb{N}^n$, $D_i := (\mu_i + \mathbb{N}^n) \setminus (D_1 \cup \ldots \cup D_{i-1})$ für $i = 2, \ldots, r$, und $D_{r+1} := \mathbb{N}^n \setminus E_\Delta(I)$. Die D_i sind disjunkt.
Die *Weierstraßdivision a la Hironaka* sagt jetzt folgendes: Jede Familie $(h_1, \ldots, h_r)$ von Elementen von I, so daß $exp_\Delta(h_i) = \mu_i$, erzeugt das Ideal I. Weiterhin existieren für jedes $f \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ eindeutig bestimmte Reihen $q_1, \ldots, q_{r+1} \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ mit

$$q_i = \sum_{\mu + \mu_i \in D_i} q_{i,\mu} z^\mu \text{ für } i = 1, \ldots, r \text{ und } q_{r+1} = \sum_{\mu \in D_{r+1}} q_{r+1,\mu} z^\mu,$$

so daß

$$f = \sum_i q_i h_i \; + \; q_{r+1}.$$

q_{r+1} hängt dabei nur von I ab, nicht jedoch von der Wahl der h_i.
Ist ferner D_{r+1} endlich, so bilden die Monome $\{z^\mu \mid \mu \in D_{r+1}\}$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}/I$.
Alle diese Aussagen entnimmt man [Bri73] oder [Gal74].

Mit der Weierstraßdivision a la Hironaka sollen jetzt holomorphe Funktionen aus $\mathcal{O}_{Y_q}(Y_q)$ lokal als Polynome in $z_{n-q+1}, \ldots, z_n$ geschrieben werden. Die Koeffizienten sind lokal holomorphe Funktionen auf Y_q, aus diesen wird eine Norm gebildet, und es wird eine Abschätzung bezüglich dieser Norm bewiesen. Dazu müssen allerdings einige Voraussetzungen an Y_q gemacht werden.

Auch hier seien die Y_q wieder *reduziert*, und es sei $q \geq 1$.

Satz 2.19 *Die Koordinaten $(z_1, \ldots, z_n)$ in einer Umgebung U von $x \in Y_q$ seien so gewählt, daß*

$$\{z \in U \mid f_1(z) = \cdots = f_q(z) = 0\} \cap \{z \in U \mid z_1 = \cdots = z_{n-q} = 0\} = \{x\}.$$

Dann gibt es eindeutig bestimmte Monome $m_1, \ldots, m_r$ in $z_{n-q+1}, \ldots, z_n$ und für jedes $s_x \in \mathcal{O}_{Y_q,x}$ eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$s_x = \sum_{i=1}^r g_i \, m_i$$

mit $g_i \in \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-q}\}$.

Beweis: Wir bezeichnen $A := \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-q}\}$ und $B := \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}/(f_1, \ldots, f_q)$. Nach [For],§9, Satz 8, ist B ein endlicher A-Modul. Nach [ASA], Kap. 3.1, Satz 10, ist B dann sogar frei über A. m_A bezeichne das maximale Ideal von A. Wir setzen $\overline{B} := B/m_A B$. Da $A/m_A = \mathbb{C}$, ist $\overline{B}$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. $\overline{B}$ wird dann von den Monomen $\{z_{n-q+1}^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\mu_q} \mid (\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{N}^n \setminus E_{\overline{\Delta}}(\overline{I})\}$ erzeugt. Dabei ist $\overline{I} = \mathbb{C}\{z_{n-q+1}, \ldots, z_n\}(\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_q})$ und $\overline{f_i}$ das Bild von f_i unter der Abbildung $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}\{z_{n-q+1}, \ldots, z_n\}$. $\overline{\Delta}$ ist die Linearform $(0, \ldots, 0)$.
Die hier auftretenden Monome seien mit $m_1, \ldots, m_r$ bezeichnet. Sie sind eindeutig bestimmt. Nach dem Lemma von Nakayama bilden dann $m_1, \ldots, m_r$ auch ein minimales Erzeugendensystem von B über A. Da B frei über A ist, bilden sie sogar eine Basis. Man hat also $B = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}/(f_1, \ldots, f_q) = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-q}\}(m_1, \ldots, m_r)$. ∎

Korollar 2.20 *Es gibt in der Situation von Satz 2.19 einen Polyzylinder* $P \subset G_{m-q}$ *um* x, *so daß die Projektion auf die ersten n-q Koordinaten eine r-blättrige analytische Überlagerung* $\pi : Y_q \cap P \twoheadrightarrow B \subset \mathbb{C}^{n-q}$ *induziert und dort* $\mathcal{O}_B^r \to \pi_* \mathcal{O}_{Y_q \cap P}$ *ein* $\mathcal{O}_B$*-Modulisomorphismus ist.*

Beweis: Man wähle eine Umgebung U um x mit $U \subset G_{m-q}$ so klein, daß $\pi : Y_q \cap U \twoheadrightarrow B$ eine r-blättrige Überlagerung ist.
Es sei V offen in B und $g = (g_1, \ldots, g_r) \in \mathcal{O}_B^r(V)$. Dann bestimmt das Polynom $\sum g_i m_i \in \mathcal{O}_B(V)[z_{n-q+1}, \ldots, z_n] \subset \mathcal{O}(V \times \mathbb{C}^{n-q})$ einen Schnitt $h \in \mathcal{O}_{Y_q \cap U}(\pi^{-1}(V)) = \pi_*(\mathcal{O}_{Y_q \cap U})(V)$.
Die Abbildung $\mathcal{O}_B^r(V) \to \pi_*(\mathcal{O}_{Y_q \cap U})(V)$, definiert durch $g \mapsto h$, ist ein $\mathcal{O}_B(V)$-Modulhomomorphismus. Diese Homomorphismen sind verträglich mit Einschränkungen, liefern also einen $\mathcal{O}_B$-Modulhomomorphismus $\overline{\pi} : \mathcal{O}_B^r \to \pi_* \mathcal{O}_{Y_q \cap U}$.
Nach Satz 2.19 sind die Halme im Punkt $\pi(x)$ isomorph. Es gibt daher einen Polyzylinder um $\pi(x)$, in dem $\overline{\pi}$ ein Isomorphismus ist. Daraus folgt die Behauptung. ∎

Bemerkung 2.21 *Mit den durch* $\Delta = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ *(n-q Mal 1, q Mal 0) und* $\overline{\Delta} = (0, \ldots, 0)$ *gegebenen Linearformen auf* $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{R}^q$ *erhält man in der Situation von Satz 2.19:* $E_\Delta(I) = \mathbb{N}^{n-q} \times (\mathbb{N}^q \setminus \{exp_{\overline{\Delta}}(m_1), \ldots, exp_{\overline{\Delta}}(m_r)\})$.

Beweis: Wir bezeichnen wieder für $i = 1, \ldots, q$ mit $\overline{f_i}$ das Bild von f_i unter der kanonischen Abbildung $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}\{z_{n-q+1}, \ldots, z_n\}$, und es sei $\overline{I} = (\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_q})$.
Nach der Weierstraßdivision a la Hironaka ist klar, daß gilt:

$$E_{\overline{\Delta}}(\overline{I}) = \mathbb{N}^q \setminus \{exp_{\overline{\Delta}}(m_1), \ldots, exp_{\overline{\Delta}}(m_r)\}.$$

Wegen $0 \times E_{\overline{\Delta}}(\overline{I}) \subset E_\Delta(I)$ und der Struktur von $E_\Delta(I)$ hat man auch die Inklusion $\mathbb{N}^{n-q} \times E_{\overline{\Delta}}(\overline{I}) \subset E_\Delta(I)$. Für die Umkehrung dieser Inklusion muß man sich überlegen, daß Elemente von I, deren kleinster Exponent bzgl. Δ ungleich Null ist, nicht minimal bzgl. Δ sind.
$z_1, \ldots, z_{n-q}, f_1, \ldots, f_q$ bilden eine $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$-Sequenz, da Y_q vollständiger Durchschnitt ist.
Behauptung: $(z_1, \ldots, z_{n-q}) \cap (f_1, \ldots, f_q) = (z_i f_j, i = 1, \ldots, , n-q; j = 1, \ldots, , q)$.
Ist nämlich

$$f = \sum_{i=1}^{n-q} h_i z_i = \sum_{i=1}^{q} k_i f_i,$$

so gilt in $\mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_n\}/(z_2,\ldots,z_{n-q},f_1,\ldots,f_q) : z_1\overline{h_1} = 0$, also

$$h_1 = \sum_{i=2}^{n-q} z_i l_i + \sum_{i=1}^{q} f_i l_{i+k}$$

mit gewissen l_i. Daraus folgt

$$f = z_1 \sum_{i=1}^{q} f_i l_{i+k} + \sum_{i=2}^{n-q} z_i \tilde{h_i}$$

mit gewissen $\tilde{h_i}$.
So fährt man fort und erhält $f = \sum_{i=1}^{n-q}\sum_{j=1}^{q} h_{ij} z_i f_j$ mit gewissen h_{ij}. Dies beweist die Zwischenbehauptung.
Steckt in jedem Summand von f also noch ein Element aus $(z_1,\ldots,z_{n-q})$, so ist $f = \sum_{i=1}^{n-q} z_i H_i$ mit $H_i \in I$. Daher erhält man ein Element von I, das bzgl. Δ kleiner ist als f.

In minimalen Elementen tauchen also $z_1,\ldots,z_{n-q}$ nicht mehr auf. Es folgt: $E_\Delta(I) \subset \mathbb{N}^{n-q} \times E_{\overline{\Delta}}(\overline{I})$. ■

Korollar 2.22 *In der Situation von Satz 2.19 gibt es eine Zariski-offene, nicht leere Menge $\mathcal{M} \subset GL(n,\mathbb{C})$, so daß nach jeder Koordinatentransformation M aus $\mathcal{M}$ für $(\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_n) = M \circ (z_1,\ldots,z_n)$ in einer (von M abhängigen) Umgebung U von x immer*

$$(*) \qquad \{\tilde{z} \in U \mid f_1(\tilde{z}) = \cdots = f_q(\tilde{z}) = 0\} \cap \{\tilde{z} \in U \mid \tilde{z}_1 = \cdots = \tilde{z}_{n-q} = 0\} = \{x\}$$

gilt und die Monome $\tilde{m}_1,\ldots,\tilde{m}_r$ in $\tilde{z}_{n-q+1},\ldots,\tilde{z}_n$, die nach Satz 2.19 auftreten, stets die Gleichen sind.

Beweis: Die Menge der Koordinatentransformationen, in denen Bedingung $(*)$ erhalten bleibt, ist Zariski-offen in $GL(n,\mathbb{C})$.
Führt man die Berechnung der Monome $\tilde{m}_1,\ldots,\tilde{m}_r$ wie im Beweis von Satz 2.19 durch, so stellt sich heraus, daß immer die gleichen Ausdrücke herauskommen, außer wenn gewisse (endlich viele) Koeffizienten der $f_i(\tilde{z}_1,\ldots,\tilde{z}_n)$ verschwinden. Diese Koeffizienten sind Polynome in den Matrixelementen von M. Dies führt dann auf eine Zariski-offene Menge. ■

Ab jetzt soll angenommen werden, daß $f_1,\ldots,f_q \in \mathcal{O}(\overline{G_{m-q}})$. $\hat{G}_{m-q}$ sei eine kleine Umgebung von $\overline{G_{m-q}}$, auf der $f_1,\ldots,f_q$ holomorph sind; wir bezeichnen

$$\hat{Y}_q := \{z \in \hat{G}_{m-q} \mid f_1(z) = \cdots = f_q(z) = 0\}$$

und versehen es mit der reduzierten Strukturgarbe. Keine irreduzible Komponente von $\hat{Y}_q$ liege ganz außerhalb von G_{m-q}.
Zu jedem $x \in \hat{Y}_q$ gibt es nach Satz 2.19 Koordinaten, so daß jeder Keim s_x dort Polynomgestalt hat. Wie in Korollar 2.20 existiert auch immer ein Polyzylinder P_x als Umgebung, in dem diese Darstellung eindeutig ist.

Da $Y_q \cap \overline{G_{m-q}}$ kompakt ist, kann man endlich viele dieser Polyzylinder $P_1,\ldots,P_N$ finden, die Y_q überdecken und so, daß $\pi_i : \hat{Y}_q \cap P_i \twoheadrightarrow B_i \subset \mathbb{C}^{n-q}$ eine analytische Überlagerung ist, wobei

π_i die Projektion auf die ersten n-q Komponenten in den Koordinaten von P_i bezeichnet.
Jedes $h \in \mathcal{O}_{\hat{Y}_q}(\hat{Y}_q)$ hat also auf P_i eine in diesen Koordinaten eindeutig bestimmte Darstellung

$$h = \sum_{i=1}^{r} g_i m_i.$$

Die Koeffizientenfunktionen $g_1, \ldots, g_s$ auf P_i sind holomorph auf dem Bereich $B_i \subset \mathbb{C}^{n-q}$. Durch Komposition mit π_i kann man $g_1 \circ \pi_i, \ldots, g_s \circ \pi_i$ als holomorphe Funktionen auf $\hat{Y}_q \cap P_i$ auffassen.

Eine solche endliche Überdeckung $(P_i)_{i \in I}$ von Y_q werde jetzt fixiert. Es gebe immer eine Umgebung $\hat{P}_i$ von $\overline{P_i}$, so daß die $g_k \circ \pi_i$ sogar auf $\hat{P}_i \cap \hat{Y}_q$ holomorph sind.
Man hat auf $\mathcal{O}_{\hat{Y}_q}(\hat{Y}_q)$ dann die *Weierstraßnormen*

$$\begin{aligned} \|h\|_{Y_q} &:= \max_i \max_k \sup_{x \in Y_q \cap P_i} |g_k \circ \pi_i(x)| \quad \text{und} \\ \|h\|_{Y_q \cap G_0} &:= \max_i \max_k \sup_{x \in Y_q \cap P_i \cap G_0} |g_k \circ \pi_i(x)|. \end{aligned}$$

Sowohl $\|\cdot\|_{Y_q}$ als auch $\|\cdot\|_{Y_q \cap G_0}$ sind Normen auf $\mathcal{O}_{\hat{Y}_q}(\hat{Y}_q)$, denn $\|h\|_{Y_q \cap G_0} = 0$ impliziert $h = 0$.
Offensichtlich gilt stets:

$$\|h\|_{Y_q \cap G_0} \leq \|h\|_{Y_q}.$$

Wir wollen untersuchen, unter welchen Umständen die beiden Normen äquivalent sind, wann also eine Ungleichung in der umgekehrten Richtung gilt.
Wir benötigen hierzu die folgende Bedingung:

(B) Für die Überdeckung $(P_i)_{i \in I}$ gelte:
Ist $\hat{Y}_q \cap P_i \cap (G_{m-q} \setminus G_0) \cap (\hat{G}_{m-q} \setminus G_{m-q}) \neq \emptyset$,
so ist $\pi_i : P_i \cap \hat{Y}_q \twoheadrightarrow B_i$ eine einblättrige Überlagerung.

In den Punkten aus $Y_q \cap G_{m-q}$ kann man Bedingung (B) erfüllen, indem man dort die Polyzylinder P_i so klein wählt, daß sie in G_{m-q} liegen. Für Polyzylinder um Punkte aus $\hat{Y}_q \cap \partial G_{m-q} \cap (\mathbb{C} \times D) = \hat{Y}_q \cap (\partial G_{m-q} \setminus \partial G_0)$ ist (B) allerdings auch eine Bedingung an den Raum $\hat{Y}_q$.

Satz 2.23 *$(P_i)_{i \in I}$ erfülle die Bedingung (B). Es gibt dann ein $C < \infty$, das nur von der Überdeckung $(P_i)_{i \in I}$ und den dazugehörigen Daten abhängt, so daß für alle $h \in \mathcal{O}_{\hat{Y}_q}(\hat{Y}_q)$ gilt:*

$$\|h\|_{Y_q} \leq C \, \|h\|_{Y_q \cap G_0}.$$

Beweis: Wir betrachten die Koeffizienten auf dem Polyzylinder P_k. Ihr Supremum nehmen sie auf ∂P_k an.
Fall 1: $P_k \cap \hat{Y}_q \subset G_{m-q}$.
Es sei $Z \in Y_q \cap \partial P_k$. Man kann um Z dann eine Umgebung $U \subset G_{m-q}$ finden, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:
1) Alle Koeffizientenfunktionen von P_k sind auf $\overline{\pi_k(U)}$ noch definiert.
2) Die Projektion $\pi_k(U)$ auf die ersten n-q Koordinaten ist nach einer affin-linearen Transformation dieser Koordinaten ein Polyzylinder P um $\pi_k(Z)$, dessen Sylovrand $\partial_0 P$ die dünne Menge $T \subset \pi_k(U)$, auf deren Urbild die analytische Überlagerung $Y_q \cap P_k \cap \pi_k^{-1}(\pi_k(U)) \to \pi_k(U)$ nicht

lokal biholomorph ist, nicht schneidet.
Die erste Eigenschaft ist erfüllt, wenn man U hinreichend klein wählt; darüberhinaus gibt es immer beliebig kleine Umgebungen, die Eigenschaft 2) genügen. Ist beispielsweise F eine in der Nähe von $\pi_k(Z)$ definierte holomorphe Funktion, die in den transformierten Koordinaten z_1-allgemein ist, und gilt um $\pi_k(Z)$: $N(F) \supset T$, so kann man in diesen Koordinaten stets einen Polyzylinder P und damit ein U finden, das 1) und 2) genügt.

Das Supremum der Beträge der Funktionen $g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{O}_{B_k}(P)$ auf P wird auf dem Sylovrand $\partial_0 P$ angenommen.
Ist $x \in \partial_0 P$, so ist $((\pi_k)_* \mathcal{O}_{Y_q \cap \hat{P}_k})_x$ ein freier $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n-q},x}$-Modul, $(\pi_k)_* \mathcal{O}_{Y_q \cap \hat{P}_k}$ dort also lokal-frei (vom Rang r).
$\pi_k : Y_q \cap \hat{P}_k \to B_k$ ist in der Nähe von $\pi_k^{-1}(x)$ immer lokal biholomorph. Bezeichnet man mit h_i, $i = 1, \ldots, r$, die r verschiedenen Kompositionen $h \circ \pi_k^{-1}$ in der Nähe von x, so gibt es immer eine invertierbare $r \times r$-Übergangsmatrix M mit holomorphen Funktionen als Einträgen, so daß in einer Umgebung von x gilt:

$$\begin{pmatrix} g_1(w) \\ \vdots \\ g_r(w) \end{pmatrix} = M \circ \begin{pmatrix} h_1(w) \\ \vdots \\ h_r(w) \end{pmatrix}.$$

Es gibt also eine nicht von h abhängige Konstante $C_x < \infty$, so daß für alle $i = 1, \ldots, r$: $|g_i(w)| \leq C_x \max |h(\pi_k^{-1}(w))|$ für jedes w in einer festen Umgebung von x ist.
Da $\partial_0 P$ kompakt ist, gibt es endlich viele dieser Umgebungen, die es überdecken. Daher ist für alle i

$$(*) \qquad \sup_{w \in P} |g_i(w)| \leq C_P \sup_{z \in \pi_k^{-1}(P) \cap Y_q} |h(z)|.$$

Nach Satz 2.12 ist $\sup_{z \in Y_q} |h(z)| = \sup_{z \in Y_q \cap G_0} |h(z)|$.

Ist $h = \sum \gamma_i \mu_i$ in den Koordinaten von P_j mit $P_j \cap Y_q \cap G_0 \neq \emptyset$, so ist für $z \in P_j$:

$$|h(z)| \leq C_{\mu.} \max_i |\gamma_i(\pi_j(z))|.$$

Da nur endlich viele P_i nicht leeren Durchschnitt mit G_0 haben, erhält man

$$\sup_{z \in Y_q \cap G_0} |h(z)| \leq \overline{C} \max_{i,k} \sup_{z \in Y_q \cap P_i \cap G_0} |g_k \circ \pi_i(z)|.$$

Dies liefert die Behauptung für Fall 1.

Fall 2: $P_k \cap \hat{Y}_q \cap (\hat{G}_{m-q} \setminus G_{m-q}) \neq \emptyset$.
Wegen Bedingung (B) gilt hier $h(z_1, \ldots, z_n) = g(z_1, \ldots, z_{n-q})$ in den Koordinaten von P_k. daher ist

$$\sup_{w \in \pi_k(P_k \cap Y_q)} |g(w)| = \sup_{z \in Y_q \cap P_k} |h(z)| \leq \sup_{z \in Y_q \cap G_0} |h(z)|,$$

und wie im 1. Fall folgt die Behauptung. ∎

Bemerkung 2.24 *Es ist notwendig, eine Voraussetzung wie (B) zu fordern, denn die Abschätzung* $(*)$ *im Beweis von Satz 2.23 führt im allgemeinen aus* G_{m-q} *heraus, falls* $Y_q \cap P_i \not\subset G_{m-q}$. *Dies muß ausgeschlossen werden.*

Literatur

[AnGr62] A. Andreotti, H. Grauert, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull.soc.math.France 90 (1962), S.193-254

[AnNo66] A. Andreotti, F. Norguet, Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie, Ann.Scuola norm.sup. Pisa 20 (1966), S. 197-241

[BeTh] H.Behnke, P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher, Springer 1970

[Bes24] A. Besikowitsch, Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Werten ihrer Ableitungen, Math.Z. 21 (1924), S. 111-18

[Bri73] J. Briançon, Weierstrass préparé a la Hironaka, Asterisque 7 (1973), S. 67-73

[For] O. Forster, Lokale analytische Geometrie, Vorlesungsausarbeitung, Münster 1974

[Gal74] A. Galligo, A propos du théorème de préparation de Weierstrass, Séminaire F. Norguet, Lecture Notes 409, 1974

[God] Godement, Topologie algèbrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris (1958)

[Gra81] H. Grauert, Kantenkohomologie, Compositio Mathematica 44 (1981), S. 79-101

[Gra82] H.Grauert, Kontinuitätssatz und Hüllen bei speziellen Hartogsschen Körpern, Abh. Math. Sem. Hamburg 52 (1982), S. 179-86

[GrFr] H. Grauert, K. Fritzsche, Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher, Springer 1974

[GrLi3] H. Grauert, I. Lieb, Differential- und Integralrechnung 3, Springer 1977

[GPR] H. Grauert, Th. Peternell, R. Remmert, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Several Complex Variables 7, Springer 1994

[ASA] H. Grauert, R. Remmert, Analytische Stellenalgebren, Springer 1971

[TSS] H. Grauert, R. Remmert, Theory of Stein Spaces, Springer 1977

[CAS] H. Grauert, R. Remmert, Coherent Analytic Sheaves, Springer 1984

[Gun3] R. Gunning, Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables, Vol. 3, Wadsworth 1990

[HeLe2] G. Henkin, J. Leiterer, Andreotti-Grauert theory by integral formulas, Birkhäuser 1988

[Lau66] H. Laufer, On sheaf cohomology and envelopes of holomorphy, Ann.Math. 84 (1966), S. 102-18

[KaKa] L. Kaup, B. Kaup, Holomorphic Functions of Several Variables, de Gruyter 1983

[Ker71] N. Kerzman, Hölder- and L^p-Estimates for Solutions of $\overline{\partial}u = f$ in Strongly Pseudokonvex Domains, Comm. Pure Appl. Math. 24 (1971), S. 301-79

[Mar77] A. Markoe, Runge Families and Inductive Limits of Stein Spaces, Ann.Inst.Fourier 27.3 (1977), S. 117-27

[Pfl72] P. Pflug, Eigenschaften der Fortsetzungen von in speziellen Gebieten holomorphen Funktionen in die Holomorphiehülle, Dissertation, Göttingen 1972

[Siu67] Y.T. Siu, Non-countable Dimensions of Cohomology Groups of Analytic Sheaves and Domains of Holomorphy, Math.Z. 102 (1967), S. 17-29

LEBENSLAUF

Persönliche Daten

Name	Ulrich Armbrüster
geboren	7. Juli 1966 in Bremen
Nationalität	deutsch
Familienstand	ledig
Adresse	Wiesenstraße 24
	37073 Göttingen
Telefon	0551-7702067

Schulbildung

1972-76	Grundschule Am Mönchshof in Bremen
1976-82	Schulverbund Bremen-Lesum
1982-85	Gymnasium Bördestraße in Bremen
Abschluß	Abitur

Wehrdienst

1985-86	Bundeswehr

Universitätsausbildung

1987-93	Universität Göttingen
1989	Vordiplom Mathematik
Abschluß	Diplom in Mathematik, Nebenfach
	Theoretische Physik

Wissenschaftliche Tätigkeiten

Juni 1993- Dez. 1995	Mitarbeiter am Sonderforschungsbereich
	„Geometrie und Analysis“ in Göttingen
seit Januar 1996	Mitarbeit in einem DFG-Projekt in Göttingen