Der Satz von Bott für Liesche Schleifenräume und die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fachbereiche
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Frank Neumann
aus Varel

Göttingen 1996

D7
Referent: **Prof. Larry Smith PhD**
Korreferent: **Prof. Dr. Dietrich Notbohm**
Tag der mündlichen Prüfung: **19. Juni 1996**

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **3**

1 Homologische Algebra von kohärenten Moduln **8**
1.1 Kohärente Ringe und Moduln in Algebra und Topologie . . . 8
1.2 Borel-Ideale, Koszul-Komplexe und Homologische Algebra . . 14
1.3 Cartan-Eilenberg-Spektralsequenzen und Torsionsprodukte von kohärenten Moduln 19

2 Eilenberg-Moore-Spektralsequenzen, Brown-Peterson-Spektren und der Satz von Bott **28**
2.1 Eilenberg-Moore-Spektralsequenzen und verschiedene Zusammenbruchsätze 29
2.2 Brown-Peterson-Spektren und die Konstruktion von Kane-Notbohm 35
2.3 Der Satz von Bott 47

3 Torsion in der Kohomologie Liescher Schleifenräume **53**
3.1 Die Sätze von Toda und Kac 53
3.2 Chow-Ringe und Torsion in der integralen Kohomologie . . . 56

Literaturverzeichnis **67**

Einleitung

Im Jahre 1956 bewies Bott [Bt] das folgende für die Theorie der kompakten Lieschen Gruppen grundlegende Resultat: *Ist G eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende kompakte Liesche Gruppe und T_G ein maximaler Torus in G, so ist die integrale Kohomologie des homogenen Raumes G/T_G in geraden Graden konzentriert und torsionsfrei.*

Der Beweis von Bott wird mit Morse-Theorie geführt und nutzt insbesondere die diffenzierbare Mannigfaltigkeitsstruktur der kompakten Lieschen Gruppe G aus.

Sehr viel später, im Jahre 1971, schlug Rector [R1], [R2] vor, kompakte Liesche Gruppen vom Standpunkt der Homotopietheorie aus zu betrachten und allein aus dem Homotopietyp die wesentlichen Eigenschaften und Resultate zu bekommen. Anstatt die Liesche Gruppe G zu studieren wird der klassifizierende Raum BG betrachtet und die Konzepte und Konstruktionen aus der klassischen Lietheorie in die Sprache der klassifizierenden Räume übertragen. Dies erlaubt dann, viele Konstruktionen und Resultate auf eine größere Kategorie topologischer Räume zu übertragen, die allein durch ihre homotopietheoretischen Eigenschaften definiert sind, nämlich auf die Kategorie der endlichen Schleifenräume mit maximalem Torus. Ein *Schleifenraum* $X = (X, BX, e)$ ist ein Tripel bestehend aus einem topologischen Raum X, einem punktierten topologischen Raum BX und einer Homotopieäquivalenz $e : \Omega BX \xrightarrow{\simeq} X$. Der Raum BX heißt der *klassifizierende Raum* von X. Ein Schleifenraum X ist *endlich*, falls $H^*(X, \mathbb{Z})$ ein endlich erzeugter graduierter $\mathbb{Z}$-Modul ist. Ein *maximaler Torus* T_X von X ist ein Morphismus von Schleifenräumen $f : T_X \to X$ eines Torus T_X nach X, so daß der *homogene Raum* $X/T_X = hofib(Bf)$ endlich erzeugte integrale Kohomologie hat und $rg(T_X) = rg(X)$ ist, wobei der Rang eines Schleifenraums der Transzendenzgrad des Polynomrings $H^*(BX, \mathbb{Q})$ über $\mathbb{Q}$ ist. Oft ist es sinnvoll Schleifenräume kohomologisch nur für eine feste Primzahl p zu betrachten. Ein $\mathbb{F}_p$-endlicher Schleifenraum ist ein Schleifenraum, so daß $H^*(X, \mathbb{F}_p)$ ein endlich dimensionaler graduierter $\mathbb{F}_p$-Vektorraum ist.

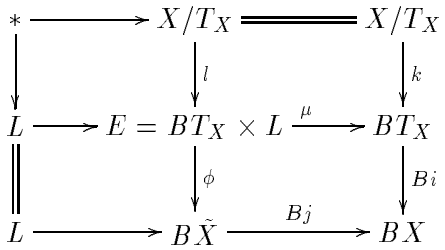
Alle Sätze, die wir in dieser größeren Kategorie beweisen, liefern wieder Sätze in der klassischen Theorie kompakter Liescher Gruppen mit neuen homotopietheoretischen Beweisen. Dadurch wird deutlich, welche Eigenschaften einer kompakten Lieschen Gruppe schon allein durch ihren Homotopietyp festgelegt sind und nicht von der differenzierbaren Struktur der Mannigfaltigkeit oder von der Liealgebra abhängen.

Rector definierte zuerst Untergruppen, maximale Tori und Weyl-Gruppen für endliche Schleifenräume und konnte einige grundlegende Tatsachen aus der Theorie der Lieschen Gruppen übertragen. Er konnte auch zeigen, daß

nicht jeder endliche Schleifenraum einen maximalen Torus besitzt und dies eine zusätzlich zu fordernde Eigenschaft ist [R1]. Die Theorie endlicher Schleifenräume mit maximalem Torus wurde schließlich von Dwyer und Wilkerson [D-W2] sowie Møller und Notbohm [Mø-N1] [Mø-N2] entscheidend weiterentwickelt. Dwyer und Wilkerson studierten statt integraler Schleifenräume deren p-adische Komplettierungen für eine feste Primzahl p im Sinne von Bousfield und Kan [Bou-Kan] und zeigten für diese *p-kompakten Gruppen*, daß sie immer einen maximalen Torus und eine Weyl-Gruppe haben, und sich in praktisch jeder Hinsicht wie kompakte Liesche Gruppen verhalten. Møller und Notbohm haben diese Theorie ausgebaut und aus der p-adischen Information grundlegende integrale Resultate für zusammenhängende endliche Schleifenräume mit maximalem Torus gewonnnen. Nach einer Vermutung von Wilkerson [Wi] ist jeder endliche Schleifenraum mit maximalem Torus isomorph zu einer kompakten Lieschen Gruppe, in dem Sinne, daß die klassifizierenden Räume homotopieäquivalente Räume sind.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, im Sinne dieser Philosophie den Satz von Bott für eine große Klasse von endlichen Schleifenräumen mit maximalem Torus zu beweisen, die wir *Liesche Schleifenräume* nennen. Diese werden zunächst für eine Primzahl p definiert. Ein *$\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum X* ist ein zusammenhängender, einfach zusammenhängender $\mathbb{F}_p$-endlicher Schleifenraum X, so daß $Q^{2n}H^*(X,\mathbb{F}_p) = 0$ mit Ausnahme von $n = p+1$, p^2+1 falls p ungerade und $Q^{2n}\xi H^*(X,\mathbb{F}_2) = 0$ mit Ausnahme von $n = 2^k+2$ mit $k \geq 2$ falls $p = 2$ und $H^3(X,\mathbb{F}_p)$ nicht trivial ist. Ein *Liescher Schleifenraum* ist ein zusammenhängender, einfach zusammenhängender endlicher Schleifenraum X, so daß die Bedingungen für jede Primzahl p erfüllt sind. Dabei ist $Q^*H^*(X,\mathbb{F}_p)$ der Modul der unzerlegbaren Elemente und für $p = 2$ ist $\xi H^*(X,\mathbb{F}_2)$ das Bild des Frobenius-Morphismus. Diese Einschränkungen an die Kohomologie müssen wir aus beweistechnischen Gründen machen. Für ungerade Primzahlen p ist dies für kompakte Liesche Gruppen keine Einschränkung, für $p = 2$ ist die erste Bedingung für die Spin-Gruppen $Spin(n)$ für $n \geq 15$ und die exzeptionelle Liegruppe E_8 nicht erfüllt. Da jedoch $Spin(n)$ die universelle Überlagerung von $SO(n)$ ist, und damit die homogenen Räume $Spin(n)/T$ und $SO(n)/T$ homotopieäquivalent sind, ist nur die exzeptionelle Gruppe E_8 wirklich eine Ausnahmegruppe.

Es ist nicht möglich direkt die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz über dem Körper $\mathbb{F}_p$ der Faserung $X/T_X \xrightarrow{k} BT_X \xrightarrow{Bi} BX$ für endliche Schleifenräume mit maximalem Torus zu studieren, denn im Fall, daß die integrale Kohomologie von X p-Torsion hat, ist die Kohomologie des klassifizierenden Raumes BX nicht polynomial und die Methoden von Baum [Ba] funktionieren nicht. Im torsionsfreien Fall hingegen bricht die Spektralsequenz im E_2-Term zusammen, und wir können die Aussage von Bott über die integrale Kohomologie des homogenen Raumes X/T_X zeigen. Die interessanten Schleifenräume sind also diejenigen, deren integrale Kohomologie p-Torsion besitzt. Im Fall von Lieschen Schleifenräumen können wir ein Pullback-Diagramm konstruieren



wobei die Pullback-Faserung die gewünschten Eigenschaften hat, nämlich, daß sowohl der Basisraum $B\tilde{X}$ als auch der Totalraum E polynomiale $\mathbb{F}_p$-Kohomologie haben. Sie sind jedoch nicht mehr noethersche, sondern kohärente Algebren, denn sie haben unendlich viele Erzeuger, allerdings in jedem Grad nur endlich viele. Der Schleifenraum $\tilde{X}$ wurde von Kane und Notbohm [K-N] mit Hilfe des Johnson-Wilson-Spektrums $BP\langle 1\rangle$ als Homotopiefaser der Abbildung

$$f : X \xrightarrow{\bar{f}} K = \prod_{i=1}^{k} K(\mathbb{Z}_{(p)}, 3) \xrightarrow{\bar{\Psi}} L = \prod_{i=1}^{k} BP\langle 1\rangle_{2p+2}$$

konstruiert, wobei $\bar{f}$ eine Basis von $H^3(X, \mathbb{Z}_{(p)})$ realisiert und die Abbildung $\bar{\Psi}$ sich aus der Brown-Peterson-Theorie ergibt [W]. Der Raum $BP\langle 1\rangle_{2p+2}$ des Ω-Spektrums $BP\langle 1\rangle$ ist eine kohärente Polynomalgebra, wobei $2p+2$ gerade der maximale Grad ist, für den dies noch der Fall ist [W], [Si]. Dies ist der wesentliche Grund für unsere Einschränkung auf die Kategorie der Lieschen Schleifenräume.

Anstatt die Faserung $X/T_X \xrightarrow{k} BT_X \xrightarrow{Bi} BX$ zu studieren, betrachten wir die Pullbackfaserung $X/T_X \xrightarrow{l} E \xrightarrow{\phi} B\tilde{X}$. Wir betrachten zunächst die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz über dem Körper $\mathbb{F}_p$ dieser Pullbackfaserung und zeigen, daß sie im E_2-Term zusammenbricht. Dazu müssen wir Torsionsprodukte über kohärenten Polynomalgebren berechnen, also Torsionsprodukte über Polynomalgebren mit unendlich vielen Erzeugern. Wir geben verschiedene algebraische Bedingungen und korrespondierende geometrische Situationen an, in denen dies möglich ist. Daraus lassen sich dann die notwendigen Zusammenbruchsätze für die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz gewinnen. Schließlich erhalten wir hieraus den Satz von Bott für Liesche Schleifenräume mit maximalem Torus:

Theorem *Sei X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Dann ist $H^*(X/T_X, \mathbb{Z})$ in geraden Graden konzentriert und torsionsfrei.*

Ist G eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende kompakte Liesche Gruppe, die nicht die exzeptionelle Gruppe E_8 ist, so liefert unser Beweis einen homotopietheoretischen Beweis des Satzes von Bott [Bt].

Nachdem wir wissen, das die integrale Kohomologie des homogenen Raumes X/T_X in geraden Graden konzentriert ist, können wir die Torsion in der integralen Kohomologie Liescher Schleifenräume mit maximalem Torus untersuchen und die Resultate der klassischen Theorie übertragen. Zunächst analysieren wir ausführlich das Pullback-Diagramm $\mathcal{D}$ und beweisen homotopietheoretisch Sätze von Toda und Kac für die Faserung $X/T_X \xrightarrow{k}$

$BT_X \xrightarrow{Bi} BX$ nämlich, daß $ker\, k^*$ von einer regulären Folge erzeugt ist [To] und $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ ein freier R^*-Modul ist, wobei R^* die Algebra ist, die von $im\, k^*$ erzeugt wird [Kc]. Der Beweis von Kac in [Kc] ist nicht vollständig und der Beweis von Toda nutzt die expliziten Berechnungen der Kohomologie kompakter Liescher Gruppen aus. Hieraus folgt dann, daß die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz der Faserung $X \xrightarrow{\pi} X/T_X \xrightarrow{k} BT_X$ im E_2-Term zusammenbricht. Als eine Anwendung davon beweisen wir eine weitere unbewiesene Behauptung von Kac, nämlich, daß die Leray-Serre-Spektralsequenz der Faserung $T_X \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/T_X$ im E_3-Term zusammenbricht. Dies verallgemeinert einen alten Satz von Leray [Le] für rationale Koeffizienten auf den Fall endlicher Körperkoeffizienten. Hieraus gewinnen wir schließlich weitreichende Folgerungen für die Existenz von Torsion in der integralen Kohomologie Liescher Schleifenräume mit maximalem Torus. Wir folgen dem Programm von Kac [Kc] und Demazure [De] und studieren den *Chow-Ring* $CH^*(X, \mathbb{F}_p)$. Dies ist die Unter-Hopf-Algebra der Hopf-Algebra $H^*(X, \mathbb{F}_p)$, welche von $im\, \pi^*$ erzeugt wird. Die Frage nach der Existenz von p-Torsion in $H^*(X, \mathbb{Z})$ ist äquivalent mit der Existenz eines nicht trivialen Chow-Rings über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$. Die Existen von p-Torsion für eine Primzahl p ist auch äquivalent mit der Existenz von Graden einer regulären Folge des Ideals $ker\, k^*$ über $\mathbb{Q}$, die nicht als Grade der entsprechenden regulären Folge des Ideals $ker\, k^*$ über $\mathbb{F}_p$ vorhanden sind, den sogenannten *p-exzeptionellen Graden*. Unsere Beweise sind wieder rein homotopietheoretisch. Lediglich die Strukturtheorie für Hopf-Algebren von Borel, Hopf und Leray wird benutzt [Mi-M]. Wir erhalten jetzt Verallgemeinerungen klassische Sätze von Borel [Bo1], [Bo2] und Leray [Le] aus der Theorie kompakter Liescher Gruppen.

Aufbau der Arbeit. Im ersten Kapitel studieren wir die homologische Algebra kohärenter Ringe und Moduln und geben einen kurzen Überblick über ihre Bedeutung in der Homotopietheorie (1.1). Wir verallgemeinern grundlegende Begriffe wie reguläre Folge, Borel-Ideale und Koszul-Komplexe für graduierte kohärente Algebren (1.2). Schließlich berechnen wir in verschiedenen algebraischen Situationen Torsionsprodukte über graduierten kohärenten Polynomalgebren mit Hilfe der Cartan-Elenberg-Spektralsequenz (1.3).

Im zweiten Kapitel beweisen wir den Satz von Bott für Liesche Schleifenräume mit maximalem Torus. Das Hauptwerkzeug diser Arbeit ist die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz und wir geben einen kurzen Überblick über deren Eigenschaften und beweisen verschiedene Zusammenbruchsätze (2.1). Nach der Bereitstellung der nötigen Konstruktionen aus der stabilen Homotopietheorie untersuchen wir die Faserungen von Kane und Notbohm (2.2), welche grundlegend für den Beweis des Satzes von Bott sind (2.3).

Im dritten Kapitel untersuchen wir die Torsion in der integralen Kohomologie Liescher Schleifenräume mit maximalem Torus. Wir beweisen zunächst die Sätze von Toda und Kac homotopietheoretisch (3.1) und folgern daraus abschließend verschiedene äquivalente Bedingungen für die Existenz von Torsion.

Danksagungen. Ich möchte mich zunächst einmal nachdrücklich bei Larry Smith für die stets fruchtbaren und anregenden Tutorien über die verschie-

densten Aspekte dieser Arbeit und das kontinuierliche persönliche Interesse bedanken. Seine engagierten Vorlesungen und Seminare haben einen sehr starken Einfluß auf mich gehabt und das Interesse für die reine Mathematik in mir geweckt. Dafür bin ich ihm sehr dankbar.

Ich möchte Dietrich Notbohm ausdrücklich für die vielen gewinnbringenden Diskussionen über Teile dieser Arbeit danken, und für seine engagierten Vorlesungen über klassifizierende Räume, die mich mit diesem faszinierenden Gebiet der Homotopietheorie in Berührung gebracht haben und in denen ich viel lernen konnte, aber auch für sein stetes Interesse an dieser Arbeit und die vielen wertvollen persönlichen Gespräche.

Die Idee zu dieser Arbeit ist aus dem Versuch entstanden die Arbeiten von Kac [Kc] und Demazure [De] zu verstehen, deren Lektüre Gegenstand des Oberseminars *Algebraische Topologie* im Wintersemester 1993/94 in Göttingen war. Ich möchte mich bei allen Beteiligten für ihr Interesse und ihre Bemerkungen bei Vorträgen von Teilen dieser Arbeit bedanken.

Viele Anregungen und Ideen sind bei der Diskussion dieser Materie in der Arbeitsgemeinschaft *Invariantentheorie* entstanden, aus der sich schließlich ein Arbeitsprogramm für die weitere Untersuchung des Zusammenhangs von Torsionsfragen endlicher Schleifenräume und modularer Invariantentheorie ergeben hat, wobei [Ne-Ns-Sm] ein erster Schritt ist. Für ihre wertvollen und kritischen Kommentare und ihr Interesse möchte ich mich nachdrücklich bei Mara D. Neusel und Larry Smith bedanken.

Herzlich Bedanken möchte ich mich schließlich auch bei Mara D. Neusel, Ulrike Reichenbach und Helmut Morgenroth für das geduldige Lesen der Arbeit und die konstruktiven Kommentare und Korrekturen.

Ohne die ideelle Unterstützung und den Zuspruch meiner Eltern wäre diese Arbeit mit Sicherheit nicht entstanden.

Kapitel 1

Homologische Algebra von kohärenten Moduln

Zusammenfassung

In diesem Kapitel studieren wir die homologische Algebra kohärenter Ringe und Moduln. In Abschnitt 1.1 zeigen wir, daß die Kategorie der kohärenten Moduln eine abelsche Kategorie ist. Kohärente Ringe und Moduln verallgemeinern noethersche Ringe und Moduln. Die wichtigsten Beispiele sind die Polynomringe in unendlich vielen Variablen. In der algebraischen Topologie spielen diese graduierten kohärenten Ringe eine bedeutende Rolle, wie beispielsweise der komplexe Bordismenring MU_*, oder diverse Lokalisierungen, wie der Brown-Peterson-Ring BP_*. Wir geben einen kurzen Überblick über die Anwendungen von graduierten kohärenten Ringen in der Algebra und der Topologie. Wir geben außerdem eine Charakterisierung von kohärenten Moduln über Polynomringen in unendlich vielen Variablen. In Abschnitt 1.2 stellen wir grundlegende Begriffe der homologischen Algebra zusammen, wie Borel-Ideale, reguläre Folgen und Koszul-Komplexe, und studieren Moduln über Polynomalgebren mit unendlich vielen Variablen. Wir verallgemeinern einige klassische Resultate über Koszul-Komplexe. Im Abschnitt 1.3 untersuchen wir verschiedene algebraische Situationen, in denen die Bestimmung von $Tor_A(B, C)$ möglich ist, wobei A und B graduierte kohärente Moduln über dem graduierten kohärenten Ring A sind. Dazu benutzen wir die „Change-of-Rings"-Spektralsequenz von Cartan und Eilenberg. Diese Berechnungen kohärenter Torsionsprodukte, insbesondere über kohärenten Polynomringen liefern algebraische Bedingungen für den Zusammenbruch der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz in verschiedenen geometrischen Situationen, die wir in den nächsten Kapiteln ausführlich studieren werden.

1.1 Kohärente Ringe und Moduln in Algebra und Topologie

Wir stellen zunächst fundamentale Eigenschaften kohärenter Ringe und Moduln zusammen. Diese Eigenschaften sind Spezialfälle von Serres Sätzen über kohärente Garben [S]. Wir folgen dabei der Darstellung des Materials in [Sm3]. Vieles findet sich in anderer Form auch in [A1] und [Co].

Kohärente Ringe und Moduln verallgemeinern noethersche Ringe und Moduln. Wir beginnen deshalb mit einer kurzen Darstellung wichtiger Eigenschaften noetherscher Ringe und Moduln.

Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

Definition 1.1.1. Ein R-Modul ist *noethersch*, wenn jeder Untermodul ein endlich erzeugter R-Modul ist. Ein Ring R ist *noethersch*, wenn er noethersch als R-Modul ist.

Ein R-Modul ist noethersch genau dann, wenn jede aufsteigende Kette von Untermoduln stabil wird. Jede endliche direkte Summe noetherscher Moduln ist noethersch. Jeder Untermodul und Quotientenmodul eines noetherschen Moduls ist wieder noethersch. Die Kategorie der noetherschen Moduln ist eine abelsche Kategorie.

Satz 1.1.2. *Ein R-Modul M über einem noetherschen Ring ist noethersch genau dann, wenn M ein endlich erzeugter R-Modul ist. Jeder Untermodul eines endlich erzeugten R-Moduls über einem noetherschen Ring R ist endlich erzeugt. Jeder endlich erzeugte Untermodul eines noetherschen Moduls ist noethersch.* □

Grundlegend für viele Anwendungen ist der *Hilbertsche Basissatz* [Sm4]

Theorem 1.1.3 (Hilbert). *Ist R ein noetherscher Ring, so auch $R[x]$.* □

Insbesondere ist also jeder Polynomring $R[x_1, ..., x_n]$ mit endlich vielen Erzeugern über einem noetherschen Ring R wieder noethersch.

In der stabilen Homotopietheorie haben wir oft die folgende Situation: Sei E eine verallgemeinerte Homologietheorie, beispielsweise dargestellt durch ein Spektrum, und der Koeffizientenring $E_* = E_*(S^0)$ ein noetherscher Ring. Dann ist für jeden X endlichen CW-Komplex X $E_*(X)$ ein endlich erzeugter E_*-Modul [A2]. Leider ist nicht jeder Koefizientenring E_* noethersch und somit sind Endlichkeitssätze nicht direkt zu folgern. Solche Aussagen sind aber für Berechnungen, insbesondere mit Spektralsequenzen, unentbehrlich. Beispielsweise ist der komplexe Bordismenring MU_* kein noetherscher Ring, denn $MU_* = \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n, ...]$ mit $deg\, x_n = 2n$. Es lassen sich dennoch Endlichkeitssätze für $MU_*(X)$ für endliche CW-Komplexe X beweisen. Dazu ist es notwendig zur Kategorie der kohärenten Moduln überzugehen. Dieses Programm haben Conner und Smith [C-Sm], [Sm3] durchgeführt.

Definition 1.1.4. Eine *Präsentierung eines R-Moduls M* ist eine exakte Sequenz von R-Moduln

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

wobei F ein freier R-Modul ist. Eine Präsentierung von M ist *endlich*, wenn F und B endlich erzeugte R-Moduln sind. Ein R-Modul ist kohärent, wenn M und alle endlich erzeugten Untermoduln eine endliche Präsentierung haben. Ein Ring R ist *kohärent*, wenn er kohärent als R-Modul ist.

Vom Standpunkt der homologischen Algebra ist kohärent ein angemessener Ersatz für noethersch. Direkt aus der Definition können wir folgern:

Satz 1.1.5. *Jeder kohärente R-Modul ist endlich erzeugt. Jeder endlich erzeugte Untermodul eines kohärenten R-Moduls ist kohärent.* □

Wir bemerken, daß jeder endlich erzeugte R-Modul über einem noetherschen Ring R kohärent ist. Somit ist insbesondere jeder noethersche Ring R ein kohärenter Ring, die Umkehrung ist aber falsch, denn

Satz 1.1.6. *Ist R ein noetherscher Ring, so ist jeder Polynomring über R kohärent, auch wenn er überabzählbar unendlich erzeugt ist. Insbesondere ist der Polynomring $R[x_1, ..., x_n, ...]$ ein kohärenter Ring.* □

Dieser Satz folgt direkt aus dem folgenden Lemma.

Lemma 1.1.7. *Ist jede endliche Untermenge eines Ringes R enthalten in einem noetherschen Unterring S, so daß R flach über S ist, so ist R ein kohärenter Ring.*

Beweis. Sei I endlich erzeugter Untermodul von R, also ein endlich erzeugtes Ideal in R. Wir müsen zeigen, daß I eine endliche Präsentierung hat. Die endliche Menge von Erzeugern liegt in einem noetherschen Unterring S, so daß R flach über S ist. Sei J das Ideal, welches sie in S erzeugen. Da S noethersch ist, ist J kohärent und es existiert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow J \longrightarrow 0$$

in der B und F endlich erzeugte S-Moduln sind und F ein freier S-Modul ist. Da R ein flacher S-Modul ist, also der Funktor $R\otimes_S ?$ exakt ist, ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow R \otimes_S B \longrightarrow R \otimes_S F \longrightarrow R \otimes_S J \longrightarrow 0$$

exakt mit $R \otimes_S B$ und $R \otimes_S F$ als endlich erzeugte R-Moduln und $R \otimes_S F$ als freier R-Modul. Da $R \otimes_S J \cong I$ folgt somit, daß I eine endliche Präsentierung besitzt. □

Die folgenden elementaren Eigenschaften kohärenter Moduln folgen aus der Definition mittels Diagrammjagd. Die Beweise finden sich größtenteils in [A1] und [Sm3].

Satz 1.1.8. *Ist*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \xrightarrow{f''} 0$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln und sind zwei der drei Moduln M', M, M'' kohärent, so ist es auch der dritte. □

Korollar 1.1.9. *Sind M' und M'' kohärente R-Moduln, so ist auch die direkte Summe $M' \oplus M''$ ein kohärenter R-Modul.* □

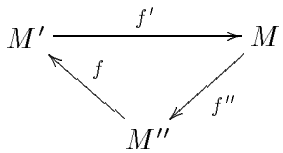
Korollar 1.1.10. *Sind M' und M'' kohärente R-Moduln und ist $f : M' \to M''$ ein R-Modulmorphismus, so sind $kerf$ und imf kohärente R-Moduln.* □

Beweis. Da M' kohärent, ist imf endlich erzeugter Untermodul von M'' und damit nach Satz 1.1.5 kohärent. Also gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow kerf \longrightarrow M' \longrightarrow imf \longrightarrow 0$$

wobei M' und imf kohärente R-Moduln sind. Also ist nach Satz 1.1.8 auch $kerf$ ein kohärenter R-Modul. □

Satz 1.1.11. *Ist*



ein exaktes Dreieck von R-Moduln und sind zwei der drei R-Moduln M',M,M'' kohärent, so ist es auch der dritte. □

Aus diesen Sätzen folgt nun direkt der folgende Struktursatz

Theorem 1.1.12. *Die Kategorie der kohärenten R-Moduln ist eine abelsche Unterkategorie der Kategorie der R-Moduln.* □

Ist R ein kohärenter Ring, so ist jeder endlich erzeugte freie R-Modul kohärent. Hat also ein R-Modul M eine endliche Präsentierung, so ist M kohärent. Wir haben die folgende Charakterisierung:

Satz 1.1.13. *Ein R-Modul M über einem kohärenten Ring R ist kohärent genau dann, wenn M eine endliche Präsentierung als R-Modul hat.* □

In der stabilen Homotopietheorie spielen graduierte kohärente Ringe eine Hauptrolle. Smith konnte den folgenden Endlichkeitssatz beweisen, welcher eine Folgerung aus den aufgeführten Eigenschaften kohärenter Ringe und Moduln ist [Sm3].

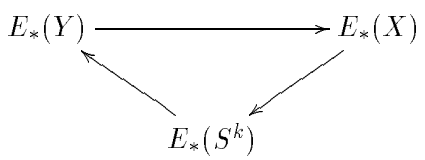
Theorem 1.1.14 (Smith). *Sei X ein endlicher CW-Komplex, $E_*(?)$ eine verallgemeinerte Homologietheorie und $E^*(?)$ eine verallgemeinerte Kohomologietheorie. Ist der Koeffizientenring $E_* = E^* = E_*(S^0)$ ein kohärenter Ring, so sind $E_*(X)$ und $E^*(X)$ kohärente E_*-Moduln. Insbesondere sind also $E_*(X)$ und $E^*(X)$ endlich erzeugte E_*-Moduln.*

Beweis. : Aus dem Ausschneidungsaxiom folgt $E_*(S^n) \cong E_* \oplus \Sigma^n E_*$ als E_*-Modul für $n \geq 1$. Ferner ist $E_*(S^0) \cong E_* \oplus E_*$ als E_*-Modul. Also ist $E_*(S^n)$ ein kohärenter E_*-Modul für alle $n \geq 0$.

Das Theorem folgt durch vollständige Induktion über die Anzahl der Zellen von X. Der Fall, daß X nur aus einer Zelle besteht ist trivial. Angenommen, X habe q Zellen und die Aussage ist wahr für alle CW-Komplexe mit weniger als q Zellen. Sei $X = Y \cup_f e^k$ und Y habe $q-1$ Zellen. Der Funktor $E_*(?)$ angewandt auf die Kofaserungssequenz

$$Y \longrightarrow X \longrightarrow S^k$$

ergibt ein exaktes Dreieck



mit $E_*(Y)$ als kohärenter E_*-Modul nach Induktionshypothese. Da auch $E_*(S^k)$ kohärenter E_*-Modul ist, folgt nach Satz 1.1.11, daß auch $E_*(X)$ kohärenter E_*-Modul ist. Der Beweis für die verallgemeinerte Kohomologietheorie verläuft entsprechend. □

Ein wichtiges Beispiel ist die komplexe Bordismentheorie $MU_*(?)$, dargestellt durch das Thom-Spektrum MU. Nach Milnor [Mi] ist der komplexe Bordismenring $MU_* = \mathbb{Z}[x_1, ..., x_n, ...]$ mit $deg\, x_n = 2n$, also ein graduierter kohärenter Ring und daher folgt aus dem Theorem 1.1.14 direkt, daß für endliche CW-Komplexe X der Modul $MU_*(X)$ ein graduierter kohärenter MU_*-Modul ist, also insbesondere endlich erzeugt.

Wir wollen jetzt noch einige Endlichkeitssätze für die homologische Dimension von kohärenten Moduln über Polynomringen beweisen. Dies sind leichte Verallgemeinerungen der Endlichkeitssätze von Conner und Smith [C-Sm].

Definition 1.1.15. Sei M ein R-Modul. Ist

$$(\mathcal{P}) \quad \cdots \longrightarrow P_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine projektive Auflösung von M als R-Modul, so hat $\mathcal{P}$ *endliche Länge* n, falls $P_n \neq 0$ und $P_s = 0$ für alle $s > n$. Hat M eine projektive Auflösung $\mathcal{P}$ der endlichen Länge n, so heißt das Minimum aller Längen die *projektive* oder *homologische Dimension von* M und wird mit $hom.dim_R M$ bezeichnet. Ist das Minimum nicht endlich, so setzen wir $hom.dim_R M = \infty$.

Wir haben zunächst folgenden Satz für Moduln über unendlichen Polynomringen. Der Beweis ist wörtlich derselbe wie in [C-Sm].

Satz 1.1.16. *Sei R ein noetherscher Ring, F ein freier $R[x_1, ..., x_n, ...]$-Modul und M sei ein endlich erzeugter Untermodul von F. Dann ist die homologische Dimension von M endlich, also $hom.dim_{R[x_1,...,x_n,...]} M < \infty$.* □

Korollar 1.1.17. *Sei R ein noetherscher Ring und sei M ein kohärenter $R[x_1, ..., x_n, ...]$-Modul. Dann ist die homologische Dimension von M endlich, also $hom.dim_{R[x_1,...,x_n,...]} M < \infty$.*

Beweis. Da M kohärent ist, gibt es eine exakte Sequenz von $R[x_1, ..., x_n, ...]$-Moduln

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

wobei F ein endlich erzeugter freier $R[x_1, ..., x_n, ...]$-Modul und B ein endlich erzeugter Untermodul ist. Daher gilt nach [C-E], VIII, 2.2

$$hom.dim_{R[x_1,...,x_n,...]} M \leq 1 + hom.dim_{R[x_1,...,x_n,...]} B,$$

wobei Gleichheit gilt, wenn M projektiv ist. Die Behauptung folgt nun mit Satz 1.1.15. □

Aus diesem Korollar folgt beispielsweise die Endlichkeit der homologischen Dimension $hom.dim_{MU_*} MU_*(X)$ für endliche CW-Komplexe X. Ähnliche Sätze wurden neben Conner und Smith auch von Adams und Novikov bewiesen.

Zum Abschluß dieses Abschnitts geben wir noch eine einfache Charakterisierung von Moduln über kohärenten Polynomringen an.

Theorem 1.1.18. *Sei $\mathbb{F}$ ein Körper, $R = \mathbb{F}[x_1, ..., x_n, ...]$ und M ein R-Modul. Dann ist M ein kohärenter R-Modul genau dann, wenn es eine natürliche Zahl m und einen endlich erzeugten Modul N über dem Polynomring $R(m) = \mathbb{F}[x_1, ..., x_m]$ gibt, so daß $M \cong R \otimes_{R(m)} N$.*

Beweis. Seien $m \in \mathbb{N}$ und N ein endlich erzeugter $R(m)$-Modul mit $M \cong R \otimes_{R(m)} N$. Sei $L \subset M$ ein endlich erzeugter R-Untermodul von M. Wir müssen zeigen, daß L eine endliche Präsentierung hat.

Wir wählen Erzeuger $f_1, ..., f_s$ in N. Dann erzeugen die Elemente

$$g_1 = 1 \otimes f_1, ..., g_s = 1 \otimes f_s$$

den R-Modul M. L ist endlich erzeugt, d.h. wir können Erzeuger $h_1, ..., h_t$ für L wählen. Es ist

$$h_i = \sum_{j=1}^{s} r_{ij} g_j, \quad r_{ij} \in R$$

und $deg\, r_{ij} \leq h_i$ für alle $i = 1, ..., t$ und $j = 1, ..., s$. Also gilt

$$deg\, r_{ij} \leq max\{deg\, h_i : \ i = 1, ..., t\}$$

für alle $i = 1, ..., t$ und $j = 1, ..., s$ und es gibt eine natürliche zahl $l \in \mathbb{N}$ so daß $r_{ij} \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_l]$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $l \geq m$ annehmen. Wir setzen nun

$$\tilde{N} = \mathbb{F}[x_1, ..., x_l] \otimes_{\mathbb{F}[x_1, ..., x_m]} N$$

Dann ist $M \cong R \otimes_{\mathbb{F}[x_1, ..., x_l]} \tilde{N}$ und $L \cong R \otimes_{\mathbb{F}[x_1, ..., x_l]} \tilde{L}$, wobei $\tilde{L}$ derjenige $\mathbb{F}[x_1, ..., x_l]$-Untermodul von $\tilde{N}$ ist, der von den Elementen aus $\tilde{N}$ der Form

$$\sum_{j=1}^{s} r_{ij}(1 \otimes f_j), \quad i = 1, ..., t$$

erzeugt wird. Der graduierte Ring $\mathbb{F}[x_1, ..., x_l]$ ist noethersch, also hat insbesondere der endlich erzeugte $\mathbb{F}[x_1, ..., x_l]$-Modul $\tilde{L}$ eine endliche Präsentierung

$$0 \longrightarrow \tilde{B} \longrightarrow \tilde{F} \longrightarrow \tilde{L} \longrightarrow 0,$$

wobei $\tilde{F}$ ein freier $\mathbb{F}[x_1, ..., x_l]$-Modul ist und $\tilde{F}$ und $\tilde{B}$ außerdem endlich erzeugte $\mathbb{F}[x_1, ..., x_l]$-Moduln sind. Da R ein freier $\mathbb{F}[x_1, ..., x_l]$-Modul ist, erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow R \otimes_{\mathbb{F}[x_1, ..., x_l]} \tilde{B} \longrightarrow R \otimes_{\mathbb{F}[x_1, ..., x_l]} \tilde{F} \longrightarrow R \otimes_{\mathbb{F}[x_1, ..., x_l]} \tilde{L} \longrightarrow 0$$

und da $L \cong R \otimes_{\mathbb{F}[x_1, ..., x_l]} \tilde{L}$ hat L eine endliche Präsentierung und M ist kohärenter R-Modul.

Sei nun umgekehrt M ein kohärenter R-Modul. Dann hat M eine endliche Präsentierung

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

wobei B und F endlich erzeugte R-Moduln sind und F ein freier R-Modul ist. Insbesondere ist auch F ein kohärenter R-Modul und da F freier R-Modul ist gilt

$$F \cong \bigoplus_{j=1}^{s} R \cdot f_j$$

mit Erzeugern $f_1, ..., f_s$. Seien nun $b_1, ..., b_q$ Erzeuger des endlich erzeugten R-Untermoduls B von F. Es ist daher

$$b_i = \sum_{j=1}^{s} r_{ij} f_j, \quad r_{ij} \in R$$

mit $deg\, r_{ij} \leq deg\, b_i$ für alle $i = 1, .., q$ und $j = 1, ..., s$. Daher gibt es eine natürliche Zahl m mit

$$r_{ij} \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_m]$$

für alle i und j. Sei nun

$$\tilde{F} \cong \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbb{F}[x_1, ..., x_m] \cdot f_j$$

und $\tilde{B}$ der endlich erzeugte $\mathbb{F}[x_1, ..., x_m]$-Untermodul von $\tilde{F}$, erzeugt von den Elementen $b_1, ..., b_s$. Definieren wir $\tilde{M} = \tilde{F}/\tilde{B}$ so erhalten wir eine endliche Präsentierung von $\tilde{M}$

$$0 \longrightarrow \tilde{B} \longrightarrow \tilde{F} \longrightarrow \tilde{M} \longrightarrow 0$$

Da R ein freier $\mathbb{F}[x_1, ..., x_m]$-Modul ist, ist der Funktor $R \otimes_{\mathbb{F}[x_1,...,x_m]}?$ exakt und wir erhalten die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow R \otimes_{\mathbb{F}[x_1,...,x_m]} \tilde{B} \longrightarrow R \otimes_{\mathbb{F}[x_1,...,x_m]} \tilde{F} \longrightarrow R \otimes_{\mathbb{F}[x_1,...,x_m]} \tilde{M} \longrightarrow 0$$

Nun ist aber nach Konstruktion $B \cong R \otimes_{\mathbb{F}[x_1,...,x_m]} \tilde{B}$ und $F \cong R \otimes_{\mathbb{F}[x_1,...,x_m]} \tilde{F}$ und demnach auch $M \cong R \otimes_{\mathbb{F}[x_1,...,x_m]} \tilde{M}$ und damit folgt die Behauptung. □

1.2 Borel-Ideale, Koszul-Komplexe und Homologische Algebra

In diesem Abschnitt stellen wir einige grundlegende Begriffe und Methoden der homologischen Algebra zusammen, die die Berechnung von $Tor_A(B, C)$ ermöglichen, wenn A,B und C kommutative Algebren über einem Körper $\mathbb{F}$ sind, insbesondere wenn A eine Polynomalgebra über $\mathbb{F}$ mit unendlich vielen Variablen ist. Dies ermöglicht die Bestimmung des E_2-Terms von Eilenberg-Moore-Spektralsequenzen für verschiedene geometrische Situationen. Wir folgen hier der Darstellung in [Sm2] und verallgemeinern einige Sätze aus [Sm4], Chapter 6 für Moduln über kohärenten Ringen.

In diesem Abschnitt ist der Grundring stets ein Körper $\mathbb{F}$ und alle graduierten Moduln und Algebren sind von *endlichem Typ*, d.h. in jedem Grad gibt es höchstens endlich viele Erzeuger.

Definition 1.2.1. Sei A eine graduierte zusammenhängende kommutative Algebra über $\mathbb{F}$. Eine Folge von Elementen $a_1, ..., a_n, ...$ aus A ist eine *reguläre Folge* in A, wenn a_1 kein Nullteiler in A ist und für alle $i > 1$ das Element a_i kein Nullteiler in $A/(a_1, ..., a_{i-1})$ ist. $(a_1, ..., a_n, ...)$ bezeichnet das Ideal, das von $a_1, ..., a_n, ...$ erzeugt wird. Ein Ideal I von A ist ein *Borel-Ideal*, wenn es eine reguläre Folge $a_1, ..., a_n, ...$ mit $deg\, a_i > 0$ für alle i in A gibt und $I = (a_1, ..., a_n, ...)$.

Definition 1.2.2. Sei A eine graduierte zusammenhängende kommutative Algebra über $\mathbb{F}$ und $a_1, ..., a_n, ...$ eine Folge von Elementen aus A. Der *Koszul-Komplex* von A bezüglich $a_1, ..., a_n, ...$ ist die differenzielle graduierte kommutative Algebra $(\mathcal{K}, \partial)$ über $\mathbb{F}$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_A(a_1, ..., a_n, ...) = A \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}a_1, ..., s^{-1}a_n, ...)$$

mit $deg\,(s^{-1}a_i) = deg\,(a_i) - 1$. Das Differential ∂ ist gegeben durch

$$\partial(a \otimes s^{-1}a_i) = aa_i \otimes 1$$

$$\partial(a \otimes 1) = 0$$

für alle $a \in A$ und die Forderung, daß ∂ eine Derivation von Algebren ist. $\mathcal{K}$ hat eine Bigraduierung durch

$$bideg\,(a \otimes s^{-1}a_{i_1}...s^{-1}a_{i_m}) = (-m, deg\,(a) + deg\,(a_{i_1}) + ... + deg\,(a_{i_m}))$$

mit $a \in A$. Die erste Komponente des Bigrades ist der *homologische Grad*, die zweite Komponente der *interne Grad*. Der *Totalgrad* ist die Sume aus beiden Graden.

Wir verwenden die negative homologische Graduierung, wie sie in der Algebraischen Topologie üblich ist und erhalten somit eine kohomologische Beschreibung, die mit der Graduierung in der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz übereinstimmt. Es ist leicht zu zeigen, daß gilt:

$$H^0(\mathcal{K}, \partial) \cong A/(a_1, ..., a_n, ...)$$

Reguläre Folgen in graduierten zusammenhängenden Algebren lassen sich mit Hilfe des Koszul-Komplexes in folgender Weise charakterisieren [Sm2]

Satz 1.2.3. *Sei A eine graduierte zusammenhängende kommutative Algebra über $\mathbb{F}$. Eine Folge $a_1, ..., a_n, ...$ aus A ist eine reguläre Folge genau dann, wenn der Koszul-Komplex $\mathcal{K} = \mathcal{K}_A(a_1, ..., a_n, ...)$ azyklisch ist.* □

Theorem 1.2.4 (Koszul). *Sei A eine graduierte zusammenhängende kommutative Algebra über $\mathbb{F}$ und die Folge $a_1, ..., a_n, ...$ aus A eine reguläre Folge. Dann liefert der Koszul-Komplex $\mathcal{K} = \mathcal{K}_A(a_1, ..., a_n, ...)$ eine freie azyklische Auflösung von $A/(a_1, ..., a_n, ...)$ als A-Moduln.*

Beweis. Wir betrachten $\mathcal{K}$ als Kettenkomplex graduierter A-Moduln mit der Augmentationsabbildung

$$\mathcal{K}_A(a_1, ..., a_n, ...) \xrightarrow{1\otimes\epsilon} A \xrightarrow{p} A/(a_1, ..., a_n, ...)$$

wobei ϵ die Augmentationsabbildung

$$\epsilon : E(s^{-1}a_1, ..., s^{-1}a_n, ...) \to k$$

und p die Quotientenabbildung ist. Die Behauptung folgt mit Satz 1.2.3. □

Aus dem Satz von Koszul lassen sich einige interessante Folgerungen ableiten.

Korollar 1.2.5. *Der Koszul-Komplex*

$$\mathcal{K} = \mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...] \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_n, ...)$$

mit Differential ∂ gegeben durch

$$\partial(z_i) = 0$$

$$\partial(s^{-1}z_i) = z_i$$

für alle $i \geq 1$ ist azyklisch und liefert eine freie azyklische Auflösung von $\mathbb{F}$ als $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$-Modul.

Beweis. Die Folge $z_1, ..., z_n, ...$ in $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$ ist eine reguläre Folge und die Behauptung folgt. □

Korollar 1.2.6. *Der Koszul-Komplex*

$$\mathcal{L} = \mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...] \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_n, ...) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[x_1, ..., x_n, ...]$$

mit Differential ∂ gegeben durch

$$\partial(1 \otimes z_i) = 0$$

$$\partial(z_i \otimes 1) = 0$$

$$\partial(s^{-1}z_i) = z_i \otimes 1 - 1 \otimes z_i$$

ist azyklisch und liefert eine freie azyklische Auflösung von $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$ als $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$-Bimodul, d.h. als $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...] \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$-Modul.

Beweis. Sei $A = \mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$. Die Multiplikationsabbildung

$$\mu : A \otimes_{\mathbb{F}} A \longrightarrow A$$

ist ein Epimorphismus und die Folge $z_1 \otimes 1 - 1 \otimes z_1, ..., z_n \otimes 1 - 1 \otimes z_n, ...$ aus $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...] \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$ ist eine reguläre Folge.

Sei $I = (z_1 \otimes 1 - 1 \otimes z_1, ..., z_n \otimes 1 - 1 \otimes z_n, ...)$. Es ist $A \otimes_{\mathbb{F}} A$ ein freier $\mathbb{F}[z_1 \otimes 1 - 1 \otimes z_1, ..., z_n \otimes 1 - 1 \otimes z_n, ...]$-Modul und es ist

$$\frac{A \otimes_{\mathbb{F}} A}{I} \cong \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}[z_1 \otimes 1 - 1 \otimes z_1, ..., z_n \otimes 1 - 1 \otimes z_n, ...]} A \otimes_{\mathbb{F}} A$$

Daher folgt für die Poincaré-Reihen insbesondere

$$P((A \otimes_{\mathbb{F}} A)/I, t) = \frac{P(A \otimes_{\mathbb{F}} A, t)}{P(\mathbb{F}[z_1 \otimes 1 - 1 \otimes z_1, ..., z_n \otimes 1 - 1 \otimes z_n, ...], t)} = P(A, t)$$

Die Algebren $(A \otimes_{\mathbb{F}} A)/I$ und A haben dieselbe endliche Vektorraumdimension in jedem Grad und da μ ein Epimorphismus ist, induziert μ einen Isomorphismus von Bimoduln

$$\frac{A \otimes_{\mathbb{F}} A}{I} \cong A$$

Wir geben $\mathcal{L}$ die folgende Bigraduierung

$$\begin{aligned} bideg\,(f' \otimes s^{-1}z_{i_1} \otimes ... \otimes s^{-1}z_{i_m} \otimes f'') &= (-m, deg\,(f') + deg\,(z_{i_1}) + ... \\ &+ deg\,(z_{i_m}) + deg\,(f'')) \end{aligned}$$

und schreiben $\mathcal{L}$ in anderer Form als einen Koszul-Komplex $\mathcal{K}$ und die Behauptung folgt. □

$\mathcal{L}$ heißt auch *zweiseitiger Koszul-Komplex* für die Algebra $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$.

Korollar 1.2.7. *Sei M ein $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$-Modul. Dann liefert der Komplex*

$$\mathcal{L}(M) = M \otimes_{\mathbb{F}[z_1,...,z_n,...]} \mathcal{L}$$

eine freie Auflösung von M als $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$-Modul.

Beweis. Der Komplex $\mathcal{L}$ ist ein Komplex freier $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$-Moduln und $H^*(\mathcal{L}, \partial)$ ist ebenfalls ein freier $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$-Modul. Der Komplex $(\mathcal{L}, \partial)$ ist azyklisch und seine Kohomologie ist isomorph zu

$$H^*(\mathcal{L}, \partial) \cong \frac{\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...] \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]}{(z_1 \otimes 1 - 1 \otimes z_1, ..., z_n \otimes 1 - 1 \otimes z_n, ...)} \cong \mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...].$$

Nach dem Künneth-Theorem und Satz 1.2.6 folgt daher

$$H^*(\mathcal{L}(M), \partial) \cong M \otimes_{\mathbb{F}[z_1,...,z_n,...]} H^*(\mathcal{L}, \partial) \cong M$$

Wir geben dem Komplex $(\mathcal{L}(M), \partial)$ eine Bigraduierung, indem wir für alle $x \in M$ festsetzen, daß $bideg\,(x) = (0, deg\,(x))$. Dies liefert dann die gewünschte Auflösung nach Satz 1.2.6 □

Wir erhalten folgende kohärente Version des *Hilbertschen Syzygiensatzes*

Korollar 1.2.8. *Ein graduierter Modul M über der graduierten Polynomalgebra $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$ hat eine freie Auflösung. Ist M ein kohärenter Modul über $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$, so ist die Auflösung endlich.*

Beweis. Nach Korollar 1.2.7 wissen wir, daß der Komplex $(\mathcal{L}(M), \partial)$ eine freie Auflösung liefert. Ist M ein kohärenter $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$-Modul, so folgt mit Korollar 1.1.17. die Endlichkeit der Auflösung. □

Korollar 1.2.9. *Sei M ein $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$-Modul. Dann ist*

$$Tor^*_{\mathbb{F}[z_1,...,z_n,...]}(\mathbb{F}, M) \cong H^*(M \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_n, ...), \partial)$$

mit dem Differential $\partial(x \otimes s^{-1}z_i) = az_i \otimes 1$.

Beweis. Der Koszul-Komplex

$$\mathcal{K} = \mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...] \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_n, ...)$$

liefert eine freie Auflösung von $\mathbb{F}$ als $\mathbb{F}[z_1, ..., z_n, ...]$-Modul und es folgt

$$\begin{aligned} Tor^*_{\mathbb{F}[z_1,...,z_n,...]}(\mathbb{F}, M) &\cong H^*(M \otimes_{\mathbb{F}[z_1,...,z_n,...]} \mathcal{K}) \\ &\cong H^*(M \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_n, ...)) \end{aligned}$$

□

Satz 1.2.10. *Sei A eine graduierte zusammenhängende kommutative Algebra über $\mathbb{F}$ und $a_1, ..., a_n, ...$ eine Folge aus A. Wir betrachten A als Modul über der Polynomalgebra $\mathbb{F}[\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n, ...]$ mit $deg\,(\bar{a}_i) = deg\,(a_i)$ für alle i, gegeben durch die Abbildung $f : \mathbb{F}[\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n, ...] \longrightarrow A$ mit $f(\bar{a}_i) = a_i$. Dann ist die Folge $a_1, ..., a_n, ...$ aus A eine reguläre Folge genau dann, wenn A ein freier $\mathbb{F}[\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n, ...]$-Modul ist.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß

$$Tor^{-1,*}_{\mathbb{F}[\bar{a}_1,...,\bar{a}_n,...]}(\mathbb{F}, A) = 0.$$

Der Koszul-Komplex

$$\mathcal{K} = \mathbb{F}[\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n, ...] \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}\bar{a}_1, ..., s^{-1}\bar{a}_n, ...)$$

liefert eine freie Auflösung von $\mathbb{F}$ als $\mathbb{F}[\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n, ...]$-Modul und nach Korollar 1.2.8 folgt

$$Tor^{-n,*}_{\mathbb{F}[\bar{a}_1,...,\bar{a}_n,...]}(\mathbb{F}, A) \cong H^n(\mathcal{K}_A(a_1, ..., a_n, ...), \partial)$$

Nach Satz 1.2.3 ist der Koszul-Komplex $(\mathcal{K}_A(a_1, ..., a_n, ...), \partial)$ genau dann azyklisch, wenn die Folge $a_1, ..., a_n, ...$ eine reguläre Folge in A ist. Damit folgt die Behauptung. □

Definition 1.2.11. Sei A eine graduierte zusammenhängende kommutative Algebra über $\mathbb{F}$. Eine Folge von Elementen $a_1, ..., a_n, ...$ aus A ist eine *algebraisch unabhängige Folge*, wenn die Abbildung $f : \mathbb{F}[a_1, ..., a_n, ...] \longrightarrow A$ mit $f(\bar{a}_i) = a_i$ ein Monomorphismus ist.

Wir notieren zum Ende dieses Abschnitts noch die folgenden einfachen Folgerungen.

Korollar 1.2.12. *Sei A eine graduierte zusammenhängende kommutative Algebra über $\mathbb{F}$. Ist die Folge von Elementen $a_1, ..., a_n, ...$ aus A eine reguläre Folge, so ist sie algebraisch unabhängig.* □

Korollar 1.2.13. *Sei A eine graduierte zusammenhängende kommutative Algebra über $\mathbb{F}$. Ist die Folge von Elementen $a_1, ..., a_n, ...$ aus A eine reguläre Folge, so ist die die von $a_1, ..., a_n, ...$ erzeugte Unteralgebra isomorph zu der Polynomalgebra $\mathbb{F}[\bar{a}_1, ..., \bar{a}_n, ...]$.* □

Oft ist es nützlich zu wissen, wie sich reguläre Folgen bezüglich Unteralgebren verhalten. Wir haben folgenden allgemeinen Satz

Satz 1.2.14. *Sei A eine graduierte zusammenhängende kommutative Algebra über $\mathbb{F}$ und B eine Unteralgebra von A und $b_1, ..., b_n, ...$ eine Folge von Elementen aus B, so daß gilt*

(1) A ist freier B-Modul.

(2) Die Folge $b_1, ..., b_n, ...$ ist eine reguläre Folge in A.

Dann ist $b_1, ..., b_n, ...$ auch in B eine reguläre Folge.

Beweis. Sei C die Unteralgebra von A, die von den Elementen $b_1, ..., b_n, ...$ erzeugt wird. Da $b_1, ..., b_n, ...$ eine reguläre Folge in A ist, folgt mit Korollar 1.2.13, daß $C \cong \mathbb{F}[\bar{b}_1, ..., \bar{b}_n, ...]$ isomorph zu einer Polynomalgebra über $\mathbb{F}$ ist und nach Satz 1.2.10 ist A ein freier C-Modul. Da A ein freier B-Modul ist, ist A eine direkte Summe von Kopien von B

$$A \cong \bigoplus_{j \in J} B$$

mit einer Indexmenge J. Damit folgt nun

$$\bigoplus_{j\in J} Tor_C^{-1,*}(\mathbb{F},B) \cong Tor_C^{-1,*}(\mathbb{F},\bigoplus_{j\in J} B) \cong Tor_C^{-1,*}(\mathbb{F},A) = 0$$

da $Tor_C^{-1,*}(\mathbb{F},?)$ ein additiver Funktor ist. Also ist $Tor_C^{-1,*}(\mathbb{F},B) = 0$ und B ist flacher, also freier C-Modul und nach dem Satz 1.2.10 ist somit $b_1, ..., b_n, ...$ eine reguläre Folge in B. □

1.3 Cartan-Eilenberg-Spektralsequenzen und Torsionsprodukte von kohärenten Moduln

Sei A eine graduierte zusammenhängende kommutative Algebra über $\mathbb{F}$ von endlichem Typ und I in A ein Borel-Ideal. Wie läßt sich eine reguläre Folge in A konstruieren, die I erzeugt? In einer graduierten Algebra läßt sich in natürlicher Weise eine minimale Menge von Erzeugern für I wählen. Dies geschieht durch folgenden Prozeß. Da I eine Graduierung von A erbt, betrachten wir den kleinsten Grad, in welchem I nicht trivial ist und wählen eine Vektorraumbasis $x_1, ..., x_p$. Ist $I = (x_1, ..., x_p)$ haben wir bereits eine minimale Idealbasis für I konstruiert. Ist $I \neq (x_1, ..., x_p)$ setzen wir $I_1 = (x_1, ..., x_p)$ und betrachten den kleinsten Grad in welchem $I \neq I_1$. In diesem Grad bestimmen wir eine direkte Summenzerlegung $I = I_1 \oplus \bar{I}_1$ und wählen eine Vektorraumbasis $x_{p+1}, ..., x_q$ für $\bar{I}_1$. Wir setzen $I_2 = (x_1, ..., x_q)$. Ist $I = I_2$ sind wir fertig, sonst wiederholen wir diesen Prozeß, bis wir eine Idealbasis für das Ideal I konstruiert haben. Wir erhalten so eine Idealbasis $x_1, ..., x_n, ..$ für das Ideal I mit einer minimalen Anzahl von Erzeugern. Außerdem lassen sich alle minimalen Idealbasen für I durch diesen Prozeß konstruieren. Dieser Prozeß wird in [Sm2] ausführlich beschrieben und es gilt der folgende Satz

Satz 1.3.1. *Sei A eine graduierte zusammenhängende kommutative Algebra über $\mathbb{F}$. Ist I ein Borel-Ideal in A und $x_1, ..., x_n, ...$ eine minimale Idealbasis für I, so ist $x_1, ..., x_n, ...$ eine reguläre Folge in A.* □

Ist I ein Borel-Ideal in A und $x_1, ..., x_n, ...$ eine minimale Idealbasis, so ist nach Satz 1.2.3 der Koszul-Komplex $(\mathcal{K}, \partial)$

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_A(x_1, ..., x_n, ...) = A \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}x_1, ..., s^{-1}x_n, ...)$$

azyklisch und liefert nach dem Satz von Koszul eine freie Auflösung von A-Moduln für A/I. Also folgt

Satz 1.3.2. *Sei A eine graduierte zusammenhängende kommutative Algebra über $\mathbb{F}$ und I ein Borel-Ideal in A. Dann gibt es einen Isomorphismus von Algebren*

$$Tor_A^*(\mathbb{F}, A/I) \cong E(s^{-1}x_1, ..., s^{-1}x_n, ...)$$

wobei $x_1, ..., x_n, ...$ eine minimale Idealbasis von I ist. □

Wir stellen nun einige grundlegende Sätze zusammen, die in verschiedenen algebraischen Situationen die Berechnung von $Tor_A(B,C)$ ermöglichen,

wobei A, B und C graduierte kommutative Algebren über dem Körper $\mathbb{F}$ und B und C außerdem A-Moduln sind. Diese Sätze werden mit Hilfe der „Change-of-Rings"-Spektralsequenz für den Tor-Funktor von Cartan und Eilenberg bewiesen. „Change-of-Rings"-Spektralsequenzen sind Spezialfälle der allgemeineren Grothendieck-Spektralsequenzen für die Komposition von Funktoren. Sei $\mathbb{F}$ ein Körper, A eine graduierte $\mathbb{F}$-Algebra und B eine graduierte $\mathbb{F}$-Unteralgebra von A, so ist $A//B$ die Algebra $A//B = A/\bar{B}\cdot A$, wobei $\bar{B}$ den Modul der Elemente von positivem Grad bezeichnet. Wir betrachten die folgende Version der *Cartan-Eilenberg-Spektralsequenz* [C-E], p.349f.

Theorem 1.3.3 (Cartan-Eilenberg). *Sei $\mathbb{F}$ ein Körper, A eine graduierte $\mathbb{F}$-Algebra und A' eine graduierte $\mathbb{F}$-Unteralgebra von A. Ist A ein projektiver A'-Modul, B rechter $A//A'$-Modul und C linker A'-Modul, so existiert eine Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ mit*

$$E_2^{p,q} \cong Tor^p_{A//A'}(B, Tor^q_{A'}(R, C))$$

$$E_r^{p,q} \Rightarrow Tor_A^{p+q}(B, C),$$

wobei p der homologische Grad und q der komplemantäre Grad ist. □

Die folgenden Sätze finden sich in [Sm2] und liefern algebraische Bedingungen für den Zusammenbruch der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz in verschiedenen geometrischen Situationen.

Satz 1.3.4 (Smith). *Sei A eine graduierte zusammenhängende kommutative Algebra über $\mathbb{F}$, $f : \mathbb{F}[x_1, ..., x_n, ...] \longrightarrow A$ ein Morphismus von Algebren und $J = (\overline{imf})$ ein Borel-Ideal in A. Dann gibt es einen Isomorphismus von Algebren*

$$Tor^*_{\mathbb{F}[x_1,...,x_n,...]}(\mathbb{F}, A) \cong A/J \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_m, ...)$$

mit bideg $(s^{-1}z_i) = (-1, *)$.

Beweis. Aus der Menge der Erzeuger $f(x_1), ..., f(x_n), ...$ von J wählen wir eine minimale Idealbasis. Durch Umordnung der $x_1, ..., x_n, ...$ können wir annehmen, daß

$$\mathbb{F}[x_1, ..., x_n, ...] = \mathbb{F}[y_1, ..., y_m, ..., z_1, ..., z_l, ...]$$

wobei $f(y_1), ..., f(y_m), ...$ eine minimale Idealbasis von J ist und daher eine reguläre Folge in A liefert. Es ist $\mathbb{F}[x_1, ..., x_n, ...]$ ein freier $\mathbb{F}[y_1, ..., y_m, ...]$-Modul und

$$\mathbb{F}[x_1, ..., x_n, ...]//\mathbb{F}[y_1, ..., y_m, ...] \cong \mathbb{F}[z_1, ..., z_l, ...]$$

Nach Satz 1.3.2 gibt es eine Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ mit

$$E_2^{p,q} \cong Tor^p_{\mathbb{F}[z_1,...,z_l,...]}(\mathbb{F}, Tor^q_{\mathbb{F}[y_1,...,y_m,...]}(\mathbb{F}, A))$$

$$E_r^{p,q} \Rightarrow Tor^{p+q}_{\mathbb{F}[x_1,...,x_n,...]}(\mathbb{F}, A).$$

Da $f(x_1), ..., f(x_n), ...$ eine reguläre Folge in A ist, folgt mit Satz 1.2.10, daß A ein freier $\mathbb{F}[y_1, ..., y_m, ...]$-Modul ist. Also folgt

$$Tor^*_{\mathbb{F}[y_1,...,y_m,...]}(\mathbb{F}, A) \cong A \otimes_{\mathbb{F}[y_1,...,y_m,...]} \mathbb{F} \cong A/J$$

also $E_2^{p,q} = 0$ für $q \neq 0$ und die Spektralsequenz bricht im E_2-Term zusammen. Wir erhalten den folgenden Isomorphismus von Algebren

$$Tor^*_{\mathbb{F}[x_1,...,x_n,...]}(\mathbb{F}, A) \cong Tor^*_{\mathbb{F}[z_1,...,z_m,...]}(\mathbb{F}, A/J).$$

Da A/J ein trivialer $\mathbb{F}[z_1, ..., z_m, ...]$-Modul ist, folgt mit einem Koszul-Komplex-Argument

$$\begin{aligned} Tor^*_{\mathbb{F}[x_1,...,x_n,...]}(\mathbb{F}, A) &\cong A/J \otimes_{\mathbb{F}[z_1,...,z_m,...]} Tor^*_{\mathbb{F}[z_1,...,z_m,...]}(\mathbb{F}, k) \\ &\cong A/J \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_m, ...), \end{aligned}$$

wobei $bideg\,(s^{-1}z_i) = (-1, deg\, z_i)$ □

Korollar 1.3.5. *Seien $A = \mathbb{F}[x_1, ..., x_n, ...]$ und $B = \mathbb{F}[y_1, ..., y_l, ...]$ Polynomalgebren über $\mathbb{F}$ und $f : A \longrightarrow B$ ein Epimorphismus von Algebren. Dann gibt es einen Isomorphismus von Algebren*

$$Tor^*_A(\mathbb{F}, B) \cong E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_m, ...)$$

mit $bideg\,(s^{-1}z_i) = (-1, *)$ □

Satz 1.3.6 (Smith). *Seien A, B und C graduierte zusammenhängende kommutative Algebren über $\mathbb{F}$ und $C \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} B$ Morphismen von Algebren, so daß gilt:*

(1) g ist ein Epimorphismus.

(2) $\ker g$ ist ein Borel-Ideal in A.

(3) $f(\ker g)$ erzeugt ein Borel-Ideal J in B.

Dann gibt es einen Isomorphismus von Algebren

$$Tor^*_A(B, C) \cong B/J \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}x_1, ..., s^{-1}x_n, ...)$$

mit $bideg\,(s^{-1}x_i) = (-1, *)$. □

Wir erhalten auch noch die folgende allgemeine Berechnung für den Quotienten einer kohärenten Polynomalgebra und einem Borel-Ideal. Dies ist eine kohärente Version eines Satzes von Tate [T].

Satz 1.3.7. *Sei $A = \mathbb{F}[x_1, ..., x_n, ...]$ eine graduierte zusammenhängende Polynomalgebra von endlichem Typ über $\mathbb{F}$ und I ein Borel-Ideal in A. Dann gibt es einen Isomorphismus von Algebren*

$$Tor^*_{A/I}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cong E(s^{-1}x_1, ..., s^{-1}x_n, ...) \otimes_{\mathbb{F}} \Gamma[z_1, ..., z_m, ...]$$

mit $bideg\,(s^{-1}x_i) = (-1, *)$ und $bideg\,(z_i) = (-2, *)$. Ist $char\,(\mathbb{F}) = 0$ so haben wir einen Isomorphismus von Algebren

$$Tor^*_{A/I}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cong E(s^{-1}x_1, ..., s^{-1}x_n, ...) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[z_1, ..., z_m, ...]$$

mit $bideg\,(s^{-1}x_i) = (-1, *)$ und $bideg\,(z_i) = (-2, *)$.

Beweis. Für das Borel-Ideal I wählen wir eine minimale Idealbasis $y_1, ..., y_m, ...$ und definieren den Komplex $(\mathcal{E}, \partial)$

$$\mathcal{E} = \frac{\mathbb{F}[x_1, ..., x_n, ...]}{(y_1, ..., y_m, ...)} \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}x_1, ..., s^{-1}x_n, ...)$$

mit $bideg\,(s^{-1}x_i) = (-1, deg\,x_j)$. Das Differential ∂ ist gegeben durch

$$\partial(x \otimes 1) = 0$$

$$\partial(x \otimes s^{-1}x_i) = xx_i \otimes 1$$

für $i \geq 1$ und $x \in A/I$ und ∂ soll eine Derivation von Algebren sein. Eine einfache Berechnung [T] zeigt

$$H^*(\mathcal{E}, \partial) \cong E(s^{-1}x_1, ..., s^{-1}x_n, ...)$$

mit $bideg\,(s^{-1}y_i) = (-1, deg\,y_i)$.

Wir betrachten nun den folgenden Komplex $(\mathcal{F}, d)$

$$\mathcal{F} = \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{F}} \Gamma[s^{-2}y_1, ..., s^{-2}y_m, ...]$$

mit $bideg\,(s^{-2}y_i) = (-2, deg\,(y_i))$ und dem Differential d gegeben durch

$$d|_{\mathcal{E}} = \partial$$

$$d(s^{-1}y_i) = [s^{-1}y_i]$$

wobei $[s^{-1}y_i]$ ein Kozykel ist, der $s^{-1}y_i$ in $H^*(\mathcal{E}, \partial)$ repräsentiert. Das Differential ∂ soll eine Derivation dividierter Potenzalgebren sein. Mit einer ähnlichen Rechnung wie in [T] folgt, daß der Komplex $(\mathcal{F}, d)$ eine A/I-freie Auflösung von $\mathbb{F}$ liefert und somit ist

$$Tor^*_{A/I}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cong E(s^{-1}x_1, ..., s^{-1}x_n, ...) \otimes_{\mathbb{F}} \Gamma[s^{-2}y_1, ..., s^{-2}y_m, ...]$$

mit $bideg\,(s^{-1}x_i) = (-1, deg\,x_i)$ und $bideg\,(s^{-2}y_i) = (-2, deg\,y_i)$ Ist $char\,(\mathbb{F}) = 0$, so ist $\Gamma[s^{-2}y_1, ..., s^{-2}y_m, ...] = \mathbb{F}[s^{-2}y_1, ..., s^{-2}y_m, ...]$ und damit folgt die Behauptung. □

Die folgende speziellere algebraische Situation wird in Kapitel 2 von entscheidender Bedeutung beim homotopietheoretischen Beweis des Satzes von Bott sein. Wir wollen $Tor_A(\mathbb{F}, B)$ bestimmen, wenn $A = \mathbb{F}[x_1, ..., x_n, ...]$ und $B = \mathbb{F}[y_1, ..., y_m, ...]$ graduierte Polynomalgebren von endlichem Typ über $\mathbb{F}$ sind und $f : A \to B$ ein Algebramorphismus ist, der B zu einem kohärenten, d.h. endlich erzeugten A-Modul macht.

Wir stellen zunächst einige grundlegende Fakten über unzerlegbare Elemente in graduierten Algebren zusammen [Sm4].

Definition 1.3.8. Ist A eine graduierte zusammenhängende Algebra über $\mathbb{F}$ und B ein graduierter A-Modul, so heißt $QB = B/(\bar{A} \cdot B)$ der *Modul der unzerlegbaren Elemente von* B. Der Modul der unzerlegbaren Elemente der Algebra A ist definiert als $Q\bar{A}$, wobei $\bar{A}$ als A-Modul betrachtet wird.

Ist A eine graduierte zusammenhängende Algebra über $\mathbb{F}$, so ist $A/\bar{A} \cong \mathbb{F}$ und es gilt $QB \cong \mathbb{F} \otimes_A B$ als $\mathbb{F}$-Vektorräume. Also ist QB insbesondere ein graduierter $\mathbb{F}$-Vektorraum. Wir haben zunächst das folgende Lemma

Lemma 1.3.9. *Seien $A = \mathbb{F}[x_1, ..., x_n, ...]$ und $B = \mathbb{F}[y_1, ..., y_m, ...]$ graduierte zusammenhängende Polynomalgebren von endlichem Typ über $\mathbb{F}$ und $f : A \to B$ ein Algebramorphismus, der B zu einem kohärenten A-Modul macht. Dann gibt es eine natürliche Zahl k, so daß der induzierte Vektorraummorphismus $(Qf)_i : (QA)_i \to (QB)_i$ ein Epimorphismus in jedem Grad $i > k$ ist.*

Beweis. Der Algebramorphismus $f : A \to B$ macht B zu einem kohärenten, d.h. insbesondere endlich erzeugten graduierten A-Modul. Daher ist die Totalisierung $Tot(\mathbb{F} \otimes_A B)$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum. Da die Algebren A und B von endlichem Typ sind, haben die graduierten $\mathbb{F}$-Vektorräume QA und QB endliche Dimension in jedem Grad.

Wir haben den folgenden Epimorphismus von graduierten $\mathbb{F}$-Vektorräumen

$$QA \xrightarrow{Qf} QB \cong \mathbb{F} \otimes_A B \xrightarrow{p} Coker(Qf) \longrightarrow 0$$

Nehmen wir an, $(Qf)_i$ ist in unendlich vielen Graden i kein Epimorphismus, so ist $Coker(Qf)_i \neq 0$ in unendlich vielen Graden i. Dann bildet aber die Totalisierung der Projektionsabbildung p

$$Tot(p) : Tot(QB) \cong Tot(\mathbb{F} \otimes_A B) \longrightarrow Tot(Coker(Qf))$$

den $\mathbb{F}$-Vektorraum $Tot(QB)$ surjektiv auf den unendlich dimensionalen $\mathbb{F}$-Vektorraum $Tot(Coker(Qf))$ ab, im Widerspruch zur endlichen Dimension von $Tot(QB)$.

Also gibt es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, so daß $(Qf)_i : (QA)_i \to (QB)_i$ ein Epimorphismus für alle Grade $i > k$ ist. □

Wir erhalten nun als wichtige Folgerung den folgenden algebraischen Schlüsselsatz, der uns in Kapitel 2 auf wichtige Zusammenbruchsätze für die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz führen wird.

Theorem 1.3.10. *Seien $A = \mathbb{F}[x_1, ..., x_n, ...]$ und $B = \mathbb{F}[y_1, ..., y_m, ...]$ graduierte zusammenhängende Polynomalgebren von endlichem Typ über $\mathbb{F}$ und $f : A \to B$ ein Algebramorphismus, der B zu einem kohärenten A-Modul macht. Dann gibt es einen Isomorphismus von Algebren*

$$Tor_A^*(\mathbb{F}, B) \cong B'/J \otimes_{\mathbb{I}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_r, ...)$$

wobei $B' = \mathbb{F}[y_1, ..., y_k]$ eine endlich erzeugte Unteralgebra von B und $J = (f(x_1), ..., f(x_k))$ ein Borel-Ideal in B' ist, welches von der regulären Folge $f(x_1), ..., f(x_k)$ erzeugt wird, wobei bideg $(s^{-1}z_i) = (-1, *)$.

Beweis. Der Algebramorphismus $f : A \to B$ macht B zu einem kohärenten, d.h. insbesondere endlich erzeugten graduierten A-Modul. Diesen Morphismus untersuchen wir nun im Detail. Nach Lemma 1.3.7 gibt es eine natürliche Zahl k, so daß der induzierte Vektorraummorphismus $(Qf)_i : (QA)_i \to (QB)_i$ ein Epimorphismus in jedem Grad $i > k$ ist. Wir wählen zunächst

Vektorraumbasen für $i > k$

$$x_1^{(i)}, ..., x_{m(i)}^{(i)} \text{ für das Urbild } (Qf)_i^{-1}((QB)_i)$$
$$y_1^{(i)}, ..., y_{m(i)}^{(i)} \text{ für } (QB)_i$$
$$z_1^{(i)}, ..., z_{r(i)}^{(i)} \text{ für den Kern } ker(Qf)_i$$

Diese Vektorraumbasen für $(QA)_i$ und $(QB)_i$ für $i > k$ liften zu Polynomerzeugern für die Polynomalgebren A und B und es gilt $f(x_l^{(i)}) = y_l^{(i)}$ für alle $l = 1, 2, ..., m(i)$ und die Elemente $f(z_s^{(i)})$ sind zerlegbare Elemente in der Algebra B für alle $s = 1, 2, ..., r(i)$.

Nun machen wir die entsprechende Buchhaltung in den Graden $i \leq k$. Für $i \leq k$ betrachten wir den induzierten Vektorraummorphismus $(Qf)_i : (QA)_i \to (QB)_i$. Wir wählen für den Kern $ker(Qf)_i$ eine Basis $z_1^{(i)}, ..., z_{r(i)}^{(i)}$ und erweitern diese Basiselemente durch die Erzeuger $x_1^{(i)}, ..., x_{s(i)}^{(i)}$, so daß wir eine Vektorraumbasis $z_1^{(i)}, ..., z_{r(i)}^{(i)}, x_1^{(i)}, ..., x_{s(i)}^{(i)}$ für den endlich dimensionalen Vektorraum $(QA)_i$ in den Graden $i < k$ erhalten. Abschließend wählen wir eine Vektoraumbasis $y_1^{(i)}, ..., y_{m(i)}^{(i)}$ für den endlich dimensionalen Vektorraum $(QB)_i$ in den Graden $i \leq k$

Für alle Grade $i \leq k$ gilt $s(i) \leq m(i)$ und definieren wir die natürlichen Zahlen

$$s := \sum_{i=1}^{k} s(i), \quad m := \sum_{i=1}^{k} m(i),$$

so folgt $s \leq m$.

Mit dieser sorgfältigen Buchführung können wir nun $Tor_A(\mathbb{F}, B)$ bestimmen. Dazu zerlegen wir die Algebren A und B in verschiedene Teile und benutzen wieder die Cartan-Eilenberg-Spektralsequenz.

Für die Algebra B haben wir eine Zerlegung $B = B' \otimes_{\mathbb{F}} B''$ mit

$$B' = \mathbb{F}[y_1^{(1)}, ..., y_{m(1)}^{(1)}, ..., y_1^{(k)}, ..., y_{m(k)}^{(k)}]$$
$$B'' = \mathbb{F}[y_1^{(k+1)}, ..., y_{m(k+1)}^{(k+1)}, ...].$$

Also verwaltet B' die Grade $i \leq k$ und B'' die Grade $i > k$.

Für die Algebra A haben wir eine Zerlegung $A = A' \otimes_{\mathbb{F}} A'' \otimes_{\mathbb{F}} A'''$ mit

$$A' = \mathbb{F}[x_1^{(1)}, ..., x_{s(1)}^{(1)}, ..., x_1^{(k)}, ..., x_{s(k)}^{(k)}]$$
$$A'' = \mathbb{F}[x_1^{(k+1)}, ..., x_{m(k+1)}^{(k+1)}, ...]$$
$$A''' = \mathbb{F}[z_1^{(1)}, ..., z_{r(k)}^{(k)}, ...].$$

Also verwaltet A' die Elemente in Graden $i \leq k$ verwaltet, die nicht im Kern liegen, A'' berücksichtigt die Elemente, in allen Graden $i > k$ und A''' verwaltet alle Elemente im Kern von Qf in beliebigen Graden.

Da nach Voraussetzung A und B von endlichem Typ sind, ist $B//A$ total endlich und daher auch der Quotient $B'//A'$ Demnach muß auch $s \leq m$ sein und damit $s = m$. Also ist die Folge $f(x_1^{(1)}), ..., f(x_{s(k)}^{(k)})$ ein System von Parametern und nach dem Satz von Macaulay (siehe [Sm4], Corollary 6.7.7)

eine reguläre Folge in B' und B nach [Sm4], Corollary 6.7.11 ein freier endlich erzeugter A'-Modul. Es folgt nach der ausführlichen Buchhaltung

$$B'//A' \cong \frac{\mathbb{F}[y_1^{(1)}, ..., y_{m(1)}^{(1)}, ..., y_1^{(k)}, ..., y_{m(k)}^{(k)}]}{(f(x_1^{(1)}), ..., f(x_{s(k)}^{(k)}))}.$$

Da A ein freier A'-Modul und A' eine $\mathbb{F}$-Unteralgebra von A ist, existiert nach Satz 1.3.2 eine Spektralsequenz $\{E^r, d^r\}$ mit

$$E_2^{p,q} \cong Tor^p_{A//A'}(\mathbb{F}, Tor^q_{A'}(\mathbb{F}, B))$$

$$E_r^{p,q} \Rightarrow Tor_A^{p+q}(\mathbb{F}, B).$$

Wir betrachten B als A'-Modul und erhalten für den E_2-Term

$$E_2^{p,q} \cong Tor^p_{A//A'}(\mathbb{F}, Tor^q_{A'}(\mathbb{F}, B)) \cong Tor^p_{A//A'}(\mathbb{F}, Tor^q_{A'}(\mathbb{F}, B') \otimes_{A'} B'').$$

Da B' ein freier A'-Modul ist, haben wir

$$Tor^*_{A'}(\mathbb{F}, B') \cong B' \otimes_{A'} \mathbb{F} \cong B'//A'$$

und $E_2^{p,q} = 0$ für $q \neq 0$, d.h. der einzige nichttriviale Term im E_2-Term ist $E_2^{p,0}$. Also bricht die Spektralsequenz im E_2-Term zusammen und wir erhalten einen Isomorphismus von Algebren

$$Tor^*_A(\mathbb{F}, B) \cong Tor^*_{A//A'}(\mathbb{F}, B'//A' \otimes_{A'} B'') \cong B'//A' \otimes_{A//A'} Tor^*_{A//A'}(\mathbb{F}, B''),$$

da $B'//A' \cong B' \otimes_{A'} \mathbb{F}$ ein trivialer $A//A'$-Modul ist. Wir bestimmen den Term $Tor^*_{A//A'}(\mathbb{F}, B'')$ mit einer weiteren Cartan-Eilenberg-Spektralsequenz. Da außerdem $A'' \otimes_{\mathbb{F}} A'''$ ein freier A''-Modul ist, gibt es wieder mit Satz 1.3.3 eine Spektralsequenz $\{E^r, d^r\}$ mit

$$E_2^{p,q} \cong Tor^p_{(A'' \otimes_{\mathbb{F}} A''')//A''}(\mathbb{F}, Tor^q_{A''}(\mathbb{F}, B''))$$

$$E_r^{p,q} \Rightarrow Tor^{p+q}_{A'' \otimes_{\mathbb{F}} A'''}(\mathbb{F}, B'').$$

Da B'' und A'' isomorph als Algebren sind, induziert durch die Einschränkung des Morphismus $f : A \to B$, folgt

$$Tor^q_{A''}(\mathbb{F}, B'') \cong \mathbb{F}.$$

Daher ist in unserer Spektralsequenz $E_2^{*,q} = 0$ für $q \neq 0$ und

$$E_2^{*,0} \cong Tor^*_{(A'' \otimes_{\mathbb{F}} A''')//A''}(\mathbb{F}, k)$$

also bricht auch diese Spektralsequenz im E_2-Term zusammen und wir erhalten den folgenden Isomorphismus von Algebren

$$\begin{aligned} Tor^*_{A//A'}(\mathbb{F}, B'') &\cong Tor^*_{A'' \otimes_{\mathbb{F}} A'''}(\mathbb{F}, B'') \cong Tor^*_{(A'' \otimes_{\mathbb{F}} A''')//A''}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \\ &\cong Tor^*_{A'''}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cong E(s^{-1} z_1^{(1)}, ..., s^{-1} z_{r(k)}^{(k)}, ...) \end{aligned}$$

Der letzte Isomorphismus folgt wieder mit einem Koszul-Komplex-Argument. Beide Spektralsequenzen liefern also zusammen schließlich den folgenden Isomorphismus von Algebren

$$\begin{aligned} Tor_A^*(\mathbb{F},B) &\cong B'//A' \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1^{(1)},...,s^{-1}z_{r(k)}^{(k)},...) \\ &\cong \frac{\mathbb{F}[y_1^{(1)},...,y_{m(1)}^{(1)},...,y_1^{(k)},...,y_{m(k)}^{(k)}]}{(f(x_1^{(1)}),...,f(x_{s(k)}^{(k)}))} \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1^{(1)},...,s^{-1}z_{r(k)}^{(k)},...) \end{aligned}$$

wobei die Folge $f(x_1^{(1)}),...,f(x_{s(k)}^{(k)})$ eine reguläre Folge in B mit m Elementen ist, die ein Borel-Ideal J in B' erzeugt und B' ein freier A'-Modul ist. Dies liefert die Behauptung. □

Ist der Algebramorphismus $f : A \to B$ ein *Epimorphismus*, so erhalten wir einen zweiten Beweis von Korollar 1.3.5 und einen Isomorphismus von Algebren

$$Tor_A^*(\mathbb{F},B) \cong E(s^{-1}z_1,...,s^{-1}z_r,...)$$

mit $bideg\,(s^{-1}z_i) = (-1,*)$. Die Elemente $z_1,...z_r,...$ sind gerade die gelifteten Polynomerzeuger einer Basis des graduierten $\mathbb{F}$-Vektorraums $ker\,(Qf)$. Ist $f : A \to B$ ein *Monomorphismus*, so gilt

Korollar 1.3.11. *Seien $A = \mathbb{F}[x_1,...,x_n,...]$ und $B = \mathbb{F}[y_1,...,y_m,...]$ graduierte zusammenhängende Polynomalgebren von endlichem Typ über $\mathbb{F}$ und $f : A \to B$ ein Monomorphismus von Algebren, der B zu einem kohärenten A-Modul macht. Dann gibt es einen Isomorphismus von Algebren*

$$Tor_A^*(\mathbb{F},B) \cong B'/J$$

wobei $B' = \mathbb{F}[y_1,...,y_k]$ eine endlich erzeugte Unteralgebra von B und $J = (f(x_1),...,f(x_k))$ ein Borel-Ideal in B' ist, welches von der regulären Folge $f(x_1),...,f(x_k)$ erzeugt wird. □

Aus Theorem 1.3.10 läßt sich auch noch folgendes allgemeine Theorem ableiten.

Theorem 1.3.12. *Seien A, B und C graduierte zusammenhängende kommutative Algebren von endlichem Typ über $\mathbb{F}$ und $C \xleftarrow{g} A \xrightarrow{f} B$ Morphismen von Algebren, so daß C kohärenter A-Modul ist und*

(1) C ist graduierte zusammenhängende Polynomalgebra über $\mathbb{F}$.

(2) $I = ker\,f$ ist ein Borel-Ideal in A.

(3) f ist ein Epimorphismus.

Dann gibt es einen Isomorphismus von Algebren

$$Tor_A^*(B,C) \cong C'/J \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1,...,s^{-1}z_r,...)$$

wobei $C' = \mathbb{F}[y_1,...,y_k]$ eine endlich erzeugte Unteralgebra von C und $J = (g(\bar{x}_1),...,g(\bar{x}_k))$ ein Borel-Ideal in C' ist, welches von der regulären Folge $g(\bar{x}_1),...,g(\bar{x}_k)$ erzeugt wird. Dabei ist $A' \cong \mathbb{F}[\bar{x}_1,...,\bar{x}_m,...]$ die Unteralgebra von A, die erzeugt wird von der regulären Folge $x_1,...,x_m,...$ mit $I = (x_1,...,x_m,...)$. Es ist $bideg\,(s^{-1}z_i) = (-1,*)$.

Beweis. Sei $x_1, ..., x_m, ...$ eine reguläre Folge in A, die das Borel-Ideal $I = ker\, f$ erzeugt und A' die entsprechende Unteralgebra von A, die von den Elementen $x_1, ..., x_m, ...$ erzeugt wird. Dann folgt mit Korollar 1.2.12

$$A' \cong \mathbb{F}[\bar{x}_1, ..., \bar{x}_m, ...]$$

und nach Satz 1.2.9 ist A ein freier A'-Modul. Nach Satz 1.3.2 gibt es eine Cartan-Eilenberg-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ mit

$$E_2 \cong Tor_{A//A'}(B, Tor_{A'}(\mathbb{F}, C))$$

$$E_r \Rightarrow Tor_A(B, C)$$

Da f ein Epimorphismus ist, gilt $A//A' \cong B$ und daher $E_2^{-p,*} = 0$ für $p > 0$ und $E_2^{0,*} = Tor^*_{A'}(\mathbb{F}, C)$. Also bricht die Spektralsequenz im E_2-Term zusammen und wir erhalten nach Theorem 1.3.10 einen Isomorphismus von Algebren

$$Tor_A(B, C) \cong Tor_{A'}(\mathbb{F}, C) \cong C'/J \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_r, ...)$$

wobei $C' = \mathbb{F}[y_1, ..., y_k]$ eine Unteralgebra von C und $J = (g(\bar{x}_1), ..., g(\bar{x}_k))$ ein Borel-Ideal in C' ist, welches von der regulären Folge $g(\bar{x}_1), ..., g(\bar{x}_k)$ erzeugt wird. Es ist $bideg\,(s^{-1}z_i) = (-1, *)$. □

Kapitel 2

Eilenberg-Moore-Spektralsequenzen, Brown-Peterson-Spektren und der Satz von Bott

Zusammenfassung

In diesem Kapitel studieren wir die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz und beweisen den Satz von Bott für Liesche Schleifenräume mit maximalem Torus. Im Abschnitt 2.1 geben wir einen kurzen Überblick über die wichtigsten Eigenschaften der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz. Wir beweisen für verschiedene geometrische Situationen allgemeine Zusammenbruchsätze für diese Spektralsequenz, die zu den algebraischen Situationen aus Abschnitt 1.3 korrespondieren. In Abschnitt 2.2 stellen wir einige grundlegende Konstruktionen aus der stabilen Homotopietheorie vor, insbesondere die Johnson-Wilson-Spektren der Brown-Peterson-Theorie. Diese sind grundlegend für die Konstruktionen von Kane und Notbohm zum Studium von Torsionsfragen kompakter Liescher Gruppen. Wir definieren eine neue Klasse endlicher Schleifenräume, die sogenannten Lieschen Schleifenräume, die allein durch den Modul der unzerlegbaren Elemente in mod p Kohomologie charakterisiert werden. Diese Schleifenräume sehen für ungerade Primzahlen kohomologisch aus wie kompakte Liesche Gruppen. Für die Primzahl 2 gibt es wenige Ausnahmen. Wir untersuchen ausführlich die Konstruktionen von Kane und Notbohm und studieren verschiedene Faserungen. In Abschnitt 2.3 beweisen wir dann mit der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz die Torsionsfreiheit gewisser homogener Räume von Lieschen Schleifenräumen mit maximalem Torus. Dies liefert dann einen homotopietheoretischen Beweis des Satzes von Bott für kompakte Liesche Gruppen, dessen ursprünglicher Beweis Morse-Theorie verwendet und somit die differenzierbare Struktur der Mannigfaltigkeit ausnutzt.

2.1 Eilenberg-Moore-Spektralsequenzen und verschiedene Zusammenbruchsätze

Wir stellen in diesem Abschnitt die *Eilenberg-Moore-Spektralsequenz* vor, wie sie von Eilenberg und Moore in [E-M] zum Studium der Kohomologie in Pullback-Diagrammen konstruiert wurde. Wir beweisen Zusammenbruchsätze für verschiedene geometrische Situationen, die mit den algebraischen Situationen aus Abschnitt 1.3 korrespondieren. Für die grundlegende Konstruktion der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz verweisen wir auf die exzellente Darstellung in [Sm2]. Wir geben zum besseren Verständnis einen kurzen Überblick über die wichtigsten Eigenschaften.

Wir betrachten die folgende allgemeine geometrische Situation. Sei $\mathcal{F}$ ein Pullback-Diagramm topologischer Räume

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

mit den Bedingungen

(a) $X \xrightarrow{f} Z$ ist eine Faserung.

(b) Z ist 1-zusammenhängend.

Sei $\mathbb{F}$ ein Körper und $H^*(?,\mathbb{F})$ die gewöhnliche Kohomologietheorie mit Koeffizienten in $\mathbb{F}$. Alle topologischen Räume seien vom Homotopietyp eines CW-Komplexes mit integraler Kohomologie von endlichem Typ.

Eilenberg und Moore haben in funktorieller Weise eine Spektralsequenz $\{E_r(\mathcal{F}), d_r(\mathcal{F})\}$ konstruiert, so daß

$$E_2^{p,q}(\mathcal{F}) \cong Tor^{p,q}_{H^*(Z,\mathbb{F})}(H^*(Y,\mathbb{F}), H^*(X,\mathbb{F}))$$

$$E_r(\mathcal{F}) \Rightarrow H^*(X \times_Z Y, \mathbb{F}).$$

Wir wollen zunächst den Term $E_2(\mathcal{F})$ ein wenig erläutern. Aus dem Pullback-Diagramm $\mathcal{F}$ erhalten wir durch Anwenden des Kohomologiefunktors $H^*(?,\mathbb{F})$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^*(X \times_Z Y, \mathbb{F}) & \xrightarrow{p^*} & H^*(X,\mathbb{F}) \\ {\scriptstyle q^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ H^*(Y,\mathbb{F}) & \xrightarrow{g^*} & H^*(Z,\mathbb{F}) \end{array}$$

Mit Hilfe dieses Diagramms erhalten wir eine $H^*(Z,\mathbb{F})$-Modulstruktur auf $H^*(Y,\mathbb{F})$ durch die Komposition

$$H^*(Y,\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} H^*(Z,\mathbb{F}) \xrightarrow{1\otimes g^*} H^*(Y,\mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} H^*(Y,\mathbb{F}) \xrightarrow{\Delta^*} H^*(Y,\mathbb{F})$$

wobei Δ^* die Multiplikation in der Algebra $H^*(Y,\mathbb{F})$ ist. Ähnlich erhalten wir eine $H^*(Z,\mathbb{F})$-Modulstruktur auf $H^*(X,\mathbb{F})$. Bezüglich dieser Modulstruktur betrachten wir das Torsionsprodukt

$$Tor^{*,*}_{H^*(Z,\mathbb{F})}(H^*(Y,\mathbb{F}), H^*(X,\mathbb{F})).$$

Das Torsionsprodukt ist bigraduiert, denn alle betrachteten Module und Algebren sind selbst graduiert. Der erste Grad ist der homologische Grad, der zweite Grad ist der interne Grad.

Alle im Torsionsprodukt vorkommenden graduierten $\mathbb{F}$-Algebren sind kommutativ und implementieren daher eine natürliche bigraduierte Algebrastruktur über $\mathbb{F}$. Die Spektralsequenz $\{E_r(\mathcal{F}), d_r(\mathcal{F})\}$ ist eine Spektralsequenz von $\mathbb{F}$-Algebren, die die kommutative graduierte $\mathbb{F}$-Algebra $H^*(X \times_Z Y, \mathbb{F})$ bestimmt.

Die Spektralsequenz $\{E_r(\mathcal{F}), d_r(\mathcal{F})\}$ ist eine 2. Quadrantspektralsequenz, d.h. es ist $E_2^{p,q}(\mathcal{F}) = 0$ für alle $p > 0$ oder $q < 0$. Die Differentiale $d_r(\mathcal{F})$ haben den Bigrad $bideg\, d_r(\mathcal{F}) = (r, 1-r)$ und sind Derivationen von Algebren. Der Morphismus $q^* \otimes p^*$

$$H^*(Y, \mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} H^*(X, \mathbb{F}) \to H^*(X \times_Z Y, \mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} H^*(X \times_Z Y, \mathbb{F}) \to H^*(X \times_Z Y, \mathbb{F})$$

faktorisiert über $H^*(Y, \mathbb{F}) \otimes_{H^*(Z,\mathbb{F})} H^*(X, \mathbb{F})$ und liefert einen Morphismus

$$q^* \overline{\otimes} p^* : H^*(Y, \mathbb{F}) \otimes_{H^*(Z,\mathbb{F})} H^*(X, \mathbb{F}) \longrightarrow H^*(X \times_Z Y, \mathbb{F}).$$

Die Spektralsequenz hat einen Kantenmorphismus

$$e : E_2^{0,*}(\mathcal{F}) \longrightarrow H^*(X \times_Z Y, \mathbb{F})$$

und wegen

$$E_2^{0,*}(\mathcal{F}) \cong H^*(Y, \mathbb{F}) \otimes_{H^*(Z,\mathbb{F})} H^*(X, \mathbb{F})$$

folgt $e = q^* \overline{\otimes} p^*$. Wir haben das folgende Theorem [E-M], [Sm2].

Theorem 2.1.1 (Eilenberg-Moore). *Sei das Pullback-Diagramm* $\mathcal{F}$

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

gegeben mit den Bedingungen

(a) $X \xrightarrow{f} Z$ *ist eine Faserung.*

(b) Z *ist* 1*-zusammenhängend.*

Dann existiert eine 2*. Quadrant Spektralsequenz* $\{E_r, d_r\}$ *von Algebren mit*

$$E_2 \cong Tor_{H^*(Z,\mathbb{F})}(H^*(Y, \mathbb{F}), H^*(X, \mathbb{F}))$$

$$E_r \Rightarrow H^*(X \times_Z Y, \mathbb{F})$$

Die Spektralsequenz ist natürlich für Pullback-Diagramme $\mathcal{F}$ □

Ein besonders wichtiger Spezialfall diser Spektralsequenz ist gegeben, wenn der Raum Y homotopieäquivalent zu einem Punkt ist. Dann haben wir $X \times_Z Y \simeq F$, wobei F die Faser der Faserung $X \xrightarrow{f} Z$ ist. Wir erhalten dann folgendes Korollar

Korollar 2.1.2 (Eilenberg-Moore). *Sei*

$$F \longrightarrow X \xrightarrow{f} Z$$

eine Faserung über dem 1-zusammenhängenden Raum Z. Dann existiert eine 2. Quadrant Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ von Algebren mit

$$E_2 \cong Tor_{H^*(Z,\mathbb{F})}(\mathbb{F}, H^*(X,\mathbb{F}))$$

$$E_r \Rightarrow H^*(F,\mathbb{F})$$

Die Spektralsequenz ist natürlich für Faserungen f $\square$

Wirklich brauchbar ist eine Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ nur, wenn sie zusammenbricht. Es ist daher wichtig algebraische und geometrische Situationen zu finden, in denen dies geschieht . Daraus lassen sich dann weitreichende Folgerungen ziehen. Wir notieren zunächst [Ba]

Satz 2.1.3 (Baum). *Sei*

$$F \xrightarrow{p} X \xrightarrow{f} Z$$

eine Faserung über dem 1-zusammenhängenden Raum Z, deren Eilenberg-Moore-Spektralsequenz zusammenbricht mit $E_2 \cong E_\infty$. Dann ist die Sequenz von Algebren

$$H^*(Z,\mathbb{F}) \xrightarrow{f^*} H^*(X,\mathbb{F}) \xrightarrow{p^*} H^*(F,\mathbb{F})$$

koexakt, d.h. $kerp^* \cong f^*(\overline{H^*(Z,\mathbb{F})}) \cdot H^*(X,\mathbb{F}) = (\overline{imf^*})$ $\square$

Wir notieren nun zwei wichtige Zusammenbruchsätze von Smith, die wichtig für viele Anwendungen sind. Sei $\mathcal{F}$ nun stets ein Pullback-Diagramm topologischer Räume

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{p} & X \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

mit den Bedingungen

(a) $X \xrightarrow{f} Z$ ist eine Faserung.

(b) Z ist 1-zusammenhängend.

Sei $\{E_r, d_r\}$ die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz des Diagramms $\mathcal{F}$ mit

$$E_2 \cong Tor_{H^*(Z,\mathbb{F})}(H^*(Y,\mathbb{F}), H^*(X,\mathbb{F}))$$

$$E_r \Rightarrow H^*(X \times_Z Y,\mathbb{F})$$

Dann haben wir zunächst folgenden allgemeinen Zusammenbruchsatz [Sm2]

Theorem 2.1.4 (Smith). *Sei $\mathcal{F}$ ein Pullback-Diagramm mit den Bedingungen*

(1) f^* ist ein Epimorphismus.

(2) $I = ker\, f^*$ ist ein Borel-Ideal in $H^*(Z,\mathbb{F})$.

(3) $g^*(I)$ erzeugt ein Borel-Ideal J in $H^*(Y,\mathbb{F})$.

Dann bricht die Eilenberg-Moore-Spektralseqenz $\{E_r, d_r\}$ von $\mathcal{F}$ im E_2-Term

zusammen und es gilt als Algebren

(a) $E_2 \cong E_\infty$.

(b) $E_2 \cong H^*(Y, \mathbb{F})/J \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}x_1, ..., s^{-1}x_n, ...)$

Außerdem ist $\ker q^* = J$. *Ist char* $(\mathbb{F}) \neq 2$, *so gibt es einen Isomorphismus von Algebren*

$$H^*(X \times_Z Y, \mathbb{F}) \cong H^*(Y, \mathbb{F})/J \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}x_1, ..., s^{-1}x_n, ...)$$

mit bideg $(s^{-1}x_i) = (-1, *)$. □

Ist wieder speziell der Raum Y homotopieäquivalent zu einem Punkt, so erhalten wir folgendes Korollar

Korollar 2.1.5 (Smith). *Sei*

$$F \longrightarrow X \xrightarrow{f} Z$$

eine Faserung über dem 1-zusammenhängenden Raum Z *mit den Bedingungen*

(1) f^* *ist ein Epimorphismus.*

(2) $I = \ker f^*$ *ist ein Borel-Ideal in* $H^*(Z, \mathbb{F})$.

Dann bricht die Eilenberg-Moore-Spektralseqenz $\{E_r, d_r\}$ *im* E_2*-Term zusammen und es gilt als Algebren*

(a) $E_2 \cong E_\infty$.

(b) $E_2 \cong E(s^{-1}x_1, ..., s^{-1}x_n, ...)$

Ist char $(\mathbb{F}) \neq 2$, *so gibt es einen Isomorphismus von Algebren*

$$H^*(F, \mathbb{F}) \cong E(s^{-1}x_1, ..., s^{-1}x_n, ...)$$

mit bideg $(s^{-1}x_i) = (-1, *)$. □

Für das Pullback-Diagramm $\mathcal{F}$ haben wir folgenden allgemeinen Zusammenbruchsatz, der weitreichende Konsequenzen hat.

Theorem 2.1.6. *Sei* $\mathcal{F}$ *ein Pullback-Diagramm mit den Bedingungen*

(1) $H^*(X, \mathbb{F})$ *ist eine graduierte zusammenhängende Polynomalgebra von endlichem Typ über* $\mathbb{F}$.

(2) f^* *ist ein Morphismus von Algebren, der* $H^*(X, \mathbb{F})$ *zu einem kohärenten* $H^*(Z, \mathbb{F})$*-Modul macht.*

(3) $I = \ker g^*$ *ist ein Borel-Ideal in* $H^*(Z, \mathbb{F})$

(4) g^* *ist ein Epimorphismus.*

Dann bricht die Eilenberg-Moore-Spektralseqenz $\{E_r, d_r\}$ *von* $\mathcal{F}$ *im* E_2*-Term zusammen und es gilt als Algebren* *(a)* $E_2 \cong E_\infty$. *(b)* $E_2 \cong A/J \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_r, ...)$ *wobei* $A = \mathbb{F}[y_1, ..., y_k]$ *eine endlich erzeugte Unteralgebra von* $H^*(X, \mathbb{F})$ *und* $J = (f^*(\bar{x}_1), ..., f^*(\bar{x}_k))$ *ein Borel-Ideal in* A *ist, welches von der regulären Folge* $f^*(\bar{x}_1), ..., f^*(\bar{x}_k)$ *erzeugt wird. Dabei ist* $B \cong \mathbb{F}[\bar{x}_1, ..., \bar{x}_m, ...]$ *die Unteralgebra von* $H^*(Z, \mathbb{F})$, *die erzeugt wird von der regulären Folge* $x_1, ..., x_m, ...$ *mit* $I = (x_1, ..., x_m, ...)$. *Es ist bideg* $(s^{-1}z_i) = (-1, *)$. *Ist char* $(\mathbb{F}) \neq 2$, *so gibt es einen Isomorphismus von Algebren*

$$H^*(X \times_Z Y, \mathbb{F}) \cong A/J \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_r, ...).$$

Beweis. Sei $x_1, ..., x_m, ...$ eine reguläre Folge in $H^*(Z, \mathbb{F})$, die das Borel-Ideal $I = ker\, g^*$ erzeugt und B die entsprechende Unteralgebra von $H^*(Z, \mathbb{F})$, die von $x_1, ..., x_m, ...$ erzeugt wird. Dann folgt mit Korollar 1.2.12

$$B \cong \mathbb{F}[\bar{x}_1, ..., \bar{x}_m, ...]$$

und nach Satz 1.2.10 ist $H^*(Z, \mathbb{F})$ ein freier B-Modul. Nach Satz 1.3.3 gibt es eine Cartan-Eilenberg-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ mit

$$E_2 \cong Tor_{H^*(Z,\mathbb{F})//B}(H^*(Y, \mathbb{F}), Tor_B(\mathbb{F}, H^*(X, \mathbb{F})))$$

$$E_r \Rightarrow Tor_{H^*(Z,\mathbb{F})}(H^*(Y, \mathbb{F}), H^*(X, \mathbb{F}))$$

Es ist aber, da g^* ein Epimorphismus ist $H^*(Z, \mathbb{F})//B \cong H^*(Y, \mathbb{F})$ und daher $E_2^{-p,*} = 0$ für $p > 0$ und $E_2^{0,*} = Tor_B^*(\mathbb{F}, H^*(X, \mathbb{F}))$. Also bricht die Spektralsequenz im E_2-Term zusammen und wir erhalten einen Isomorphismus von Algebren nach Theorem 1.3.10

$$\begin{aligned} Tor_{H^*(Z,\mathbb{F})}(H^*(Y, \mathbb{F}), H^*(X, \mathbb{F})) &\cong Tor_B(\mathbb{F}, H^*(X, \mathbb{F})) \\ &\cong A/J \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_r, ...). \end{aligned}$$

wobei $A = \mathbb{F}[y_1, ..., y_k]$ eine Unteralgebra von $H^*(X, \mathbb{F})$ und J ein Borel-Ideal in A ist, welches von der regulären Folge $f^*(\bar{x}_1), ..., f^*(\bar{x}_k)$ erzeugt wird. Es ist $bideg\,(s^{-1}z_i) = (-1, *)$. Für das Pullback-Diagramm $\mathcal{F}$ haben wir die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ mit

$$E_2 \cong Tor_{H^*(Z,\mathbb{F})}(H^*(Y, \mathbb{F}), H^*(X, \mathbb{F}))$$

$$E_r \Rightarrow H^*(X \times_Z Y, \mathbb{F}).$$

Für den E_2-Term haben wir also als Algebren

$$E_2 \cong Tor_{H^*(Z,\mathbb{F})}(H^*(Y, \mathbb{F}), H^*(X, \mathbb{F})) \cong A/J \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_r, ...)$$

mit A und J wie oben bestimmt. Für die Differentiale d_r in der Spektralsequenz gilt

$$0 = d_r : E_r^{-p,*} \to E_r^{-p+r,*}$$

für alle $p \leq 1$ und $r \geq 2$ und $E_2^{*,*}$ ist als Algebra erzeugt von den Termen $E_2^{0,*}$ und $E_2^{-1,*}$ und da die Differentiale d_r Derivationen von Algebren sind, folgt unmitelbar, daß die Spektralsequenz im E_2-Term zusammenbricht und $E_2 \cong E_\infty$. Das liefert die Behauptung. Ist $char\,(\mathbb{F}) \neq 2$, so gibt es keine Erweiterungsprobleme. □

Wir betrachten nun die geometrische Situation, in der die Kohomologiealgebren $H^*(Z, \mathbb{F})$ und $H^*(X, \mathbb{F})$ in der Faserung $X \xrightarrow{f} Z$ kohärente graduierte Polynomalgebren sind. Diese geometrische Situation korrespondiert mit der entsprechenden algebraischen Situation in Theorem 1.3.10. und wir erhalten folgenden Zusammenbruchsatz als Korollar zu Theorem 2.1.6.

Theorem 2.1.7. *Sei*

$$F \longrightarrow X \xrightarrow{f} Z$$

eine Faserung über dem 1*-zusammenhängenden Raum* Z *mit den Bedingungen*

(1) $H^*(Z,\mathbb{F})$ *und* $H^*(X,\mathbb{F})$ *sind graduierte zusammenhängende Polynomalgebren von endlichem Typ über* $\mathbb{F}$.

(2) $f^* : H^*(Z,\mathbb{F}) \longrightarrow H^*(X,\mathbb{F})$ *ist ein Morphismus von Algebren, der* $H^*(X,\mathbb{F})$ *zu einem kohärenten* $H^*(X,\mathbb{F})$*-Modul macht.*

Dann bricht die Eilenberg-Moore-Spektralseqenz $\{E_r, d_r\}$ *im* E_2*-Term zusammen und es gilt als Algebren (a)* $E_2 \cong E_\infty$. *(b)* $E_2 \cong A/J \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_r, ...)$ *wobei* $A = \mathbb{F}[y_1, ..., y_k]$ *eine endlich erzeugte Unteralgebra von* $H^*(X,\mathbb{F})$ *und* $J = (f^*(x_1), ..., f^*(x_k))$ *ein Borel-Ideal in* A *ist, das von der regulären Folge* $f^*(x_1), ..., f^*(x_k)$ *erzeugt wird. Es ist bideg* $(s^{-1}z_i) = (-1, *)$. *Ist char* $(\mathbb{F}) \neq 2$, *so gibt es einen Isomorphismus von Algebren*

$$H^*(F,\mathbb{F}) \cong A/J \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_r, ...).$$

Beweis. In dem Pullback-Diagramm $\mathcal{F}$ sei wieder der Raum Y homotopieäquivalent zu einem Punkt und $X \times_Z Y \simeq F$, wobei F die Faser der Faserung $X \xrightarrow{f} Z$ ist. Dann sind die Bedingungen von Theorem 2.1.6 erfüllt und mit $H^*(Z,\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}[x_1, ..., x_m, ...]$ und $H^*(X,\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}[y_1, ..., y_n, ...]$, folgt die Behauptung aus Theorem 2.1.6, wobei speziell in dieser Situation $I = (x_1, ..., x_m, ...)$ und $B \cong \mathbb{F}[x_1, ..., x_m, ...]$. ist. □

Wir haben wieder wie in der entsprechenden algebraischen Situation die folgenden wichtigen Spezialfälle.

Korollar 2.1.8. *Sei*

$$F \longrightarrow X \xrightarrow{f} Z$$

eine Faserung über dem 1*-zusammenhängenden Raum* Z *mit den Bedingungen*

(1) $H^*(Z,\mathbb{F})$ *und* $H^*(X,\mathbb{F})$ *sind graduierte zusammenhängende Polynomalgebren von endlichem Typ über* $\mathbb{F}$.

(2) $f^* : H^*(Z,\mathbb{F}) \longrightarrow H^*(X,\mathbb{F})$ *ist ein Epimorphismus von Algebren, der* $H^*(X,\mathbb{F})$ *zu einem kohärenten* $H^*(X,\mathbb{F})$*-Modul macht.*

Dann bricht die Eilenberg-Moore-Spektralseqenz $\{E_r, d_r\}$ *im* E_2*-Term zusammen und es gilt als Algebren*
(a) $E_2 \cong E_\infty$.
(b) $E_2 \cong E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_r, ...)$
mit bideg $(s^{-1}z_i) = (-1, *)$. *Ist char* $(\mathbb{F}) \neq 2$, *so gibt es einen Isomorphismus von Algebren* $H^*(F,\mathbb{F}) \cong E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_r, ...)$□

Korollar 2.1.9. *Sei*

$$F \longrightarrow X \xrightarrow{f} Z$$

eine Faserung über dem 1*-zusammenhängenden Raum* Z *mit den Bedingungen*

(1) $H^*(Z,\mathbb{F})$ *und* $H^*(X,\mathbb{F})$ *sind graduierte zusammenhängende Polynomalgebren von endlichem Typ über* $\mathbb{F}$.

(2) $f^* : H^*(Z,\mathbb{F}) \longrightarrow H^*(X,\mathbb{F})$ *ist ein Monomorphismus von Algebren, der* $H^*(X,\mathbb{F})$ *zu einem kohärenten* $H^*(X,\mathbb{F})$*-Modul macht.*

Dann bricht die Eilenberg-Moore-Spektralseqenz $\{E_r, d_r\}$ von im E_2-Term zusammen und es gilt als Algebren

(a) $E_2 \cong E_\infty$.

(b) $E_2 \cong A/J$

wobei $A = \mathbb{F}[y_1, ..., y_k]$ *eine endlich erzeugte Unteralgebra von* $H^*(X, \mathbb{F})$ *und* $J = (f^*(x_1), ..., f^*(x_k))$ *ein Borel-Ideal in A ist, welches von der regulären Folge* $f^*(x_1), ..., f^*(x_k)$ *erzeugt wird. Ist char* $(\mathbb{F}) \neq 2$*, so gibt es einen Isomorphismus von Algebren* $H^*(F, \mathbb{F}) \cong A/J$ □

2.2 Brown-Peterson-Spektren und die Konstruktion von Kane-Notbohm

Wir stellen zunächst einige grundlegende Fakten der Brown-Peterson-Theorie zusammen. Für die Begriffe und Konstruktionen aus der stabilen Homotopietheorie verweisen wir auf [A2] und [Ra]. Es bezeichnet $\mathbb{Z}_{(p)}$ stets die an der Primzahl p lokalisierten ganzen Zahlen.

Brown und Peterson zeigten, daß die Lokalisierung $MU_{(p)}$ des Thom-Spektrums MU an einer Primzahl p homotopieäquivalent zu einer unendlichen Einpunktvereinigung bestimmter Einhängungen eines kleineren Spektrums, dem *Brown-Peterson-Spektrum* Spektrum BP, ist [B-P].

$$MU_{(p)} \simeq \bigvee_\alpha \Sigma^{d(\alpha)} BP$$

Das Spektrum $BP = \{BP_k\}$ ist ein Ω-Spektrum, d.h. es gibt Homotopieäquivalenzen $f_k : BP_k \to \Omega BP_{k+1}$ für alle p. Das Brown-Peterson-Spektrum BP stellt die *Brown-Peterson-Homologietheorie* $BP_*(?)$ und die *Brown-Peterson-Kohomologietheorie* $BP^*(?)$ dar. Es gilt der folgende grundlegende Satz:

Theorem 2.2.1 (Brown-Peterson). *Sei BP das Brown-Peterson-Spektrum. Dann ist der Koeffizientenring BP_* ein kohärenter Polynomring über $\mathbb{Z}_{(p)}$ mit*

$$BP_* = \pi_*(BP) \cong \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, ..., v_i, ...]$$

wobei $\deg v_i = 2p^i - 2$*. Insbesondere sind $BP_*(X)$ und $BP^*(X)$ endlich erzeugte BP_*-Moduln für jeden endlichen CW-Komplex X.*

Beweis. Die erste Aussage findet sich in [B-P]. Die zweite Aussage folgt dann direkt aus Theorem 1.1.14. □

Mit $BP_*(?)$ kommen eine ganze Reihe weiterer verallgemeinerter Homologietheorien in die Welt, die sich mit Hilfe der Baas-Sullivan-Konstruktion als Bordismentheorien von Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten konstruieren lassen. Die für uns wichtigsten Fälle sind die *Johnson-Wilson-Theorien* $BP\langle n\rangle_*(?)$ und $BP\langle n\rangle^*(?)$, die durch die *Johnson-Wilson-Spektren* $BP\langle n\rangle$ dargestellt werden. Das Spektrum $BP\langle n\rangle$ entsteht aus BP und annuliert das Ideal $I_n = (v_{n+1}, v_{n+2}, ...)$ in $\pi_*(BP)$. $BP\langle n\rangle$ ist wieder als Ω-Spektrum aufzufassen, welches die Homologietheorie $BP\langle n\rangle_*(?)$ und die Kohomologietheorie $BP\langle n\rangle^*(?)$ darstellt. Es gilt der Satz

Theorem 2.2.2 (Johnson-Wilson). *Sei $BP\langle n\rangle$ das n-te Johnson-Wilson-Spektrum. Dann ist der Koeffizientenring $BP\langle n\rangle_*$ ein noetherscher Polynomring über $\mathbb{Z}_{(p)}$ mit*

$$BP\langle n\rangle_* = \pi_*(BP\langle n\rangle) \cong \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, ..., v_n]$$

wobei $\deg v_i = 2p^i - 2$. Insbesondere sind $BP\langle n\rangle_*(X)$ und $BP\langle n\rangle^*(X)$ endlich erzeugte $BP\langle n\rangle_*$-Moduln für jeden endlichen CW-Komplex X. □

Für jede natürliche Zahl n haben wir eine Faserung von Spektren

$$\Sigma^{2p^n-2} BP\langle n\rangle \xrightarrow{v_n} BP\langle n\rangle \longrightarrow BP\langle n-1\rangle$$

Dabei ist $BP\langle 0\rangle \cong H\mathbb{Z}_{(p)}$, wobei $H\mathbb{Z}_{(p)}$ die gewöhnliche Homologietheorie mit Koefizienten in $\mathbb{Z}_{(p)}$ darstellt und $BP\langle 1\rangle$ ist ein Summand von $bu_{(p)}$, der Lokalisierung des Spektrums bu der zusammenhängenden komplexen K-Theorie an der Primzahl p, welches die zusammenhängende komplexe K-Theorie $k_*(?) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ darstellt. Wir haben wieder eine Homotopieäquivalenz

$$bu_{(p)} \simeq \bigvee_{\beta} \Sigma^{d(\beta)} BP\langle 1\rangle$$

Wir interessieren uns hier nur für das Johnson-Wilson-Spektrum $l = BP\langle 1\rangle$ und schreiben $l = \{l_k\}$ mit $l_k = BP\langle 1\rangle_k$ für das assoziierte Ω-Spektrum. Wir haben also

$$\pi_* l \cong \mathbb{Z}_{(p)}[v]$$

mit $\deg v = 2p-2$. Die Ω-Spektren $BP\langle n\rangle$ werden ausführlich in [W] und [Si] studiert. Insbesondere wird die Struktur der Hopf-Algebra $H^*(BP\langle n\rangle_k, \mathbb{F}_p)$ über $\mathcal{A}^*(p)$ bestimmt.

Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt es eine Faserung von Räumen

$$K(\mathbb{Z}_{(p)}, n) \xrightarrow{\Psi} l_{n+2p-1} \xrightarrow{\Delta} l_{n+1}$$

und wir haben den folgenden Satz, der aus den Berechnungen in [W], [Si] folgt:

Theorem 2.2.3 (Sinkinson, Wilson). *Für alle $n \leq 2p+2$ ist $H^*(l_n, \mathbb{Z}_{(p)})$ torsionsfrei und von endlichem Typ über $\mathbb{Z}_{(p)}$. Es gilt als Algebren*

$$H^*(l_n, \mathbb{Z}_{(p)}) \cong \mathbb{Z}_{(p)}[x_1, ..., x_m, ...] \text{ falls } n \equiv 0(2)$$

$$H^*(l_n, \mathbb{Z}_{(p)}) \cong E(y_1, ..., y_m, ...) \text{ falls } n \equiv 1(2)$$

Insbesondere ist $H^*(l_n, \mathbb{Z}_{(p)})$ torsionsfrei. □

Für das Bild der Abbildung Ψ gilt außerdem

Satz 2.2.4. *Die Algebra im Ψ^* ist eine $\mathcal{A}^*(p)$-Unteralgebra der $\mathcal{A}^*(p)$-Algebra $H^*(K(\mathbb{Z}_{(p)}, n), \mathbb{F}_p)$, die erzeugt wird von $\beta\mathcal{P}^1\iota_n$, wobei ι_n die mod p-Fundamentalklasse ist.* □

Wir betrachten nun die Kategorie der endlichen Schleifenräume und geben zunächst die grundlegenden Begriffe und Konstruktionen der Theorie endlicher Schleifenräume an. Dies ist eine homotopietheoretische Version der Theorie kompakter Liescher Gruppen, wie sie zuerst von Rector [R2] betrachtet wurde und von Dwyer und Wilkerson [D-W2], sowie Møller und Notbohm [Mø-N1], [Mø-N2] weiterentwickelt worden ist. Für einen schönen Überblick sei der Übersichtsartikel von Notbohm [N] empfohlen.

Definition 2.2.5. Ein *Schleifenraum* $X = (X, BX, e)$ ist ein Tripel bestehend aus einem topologischen Raum X, einem punktierten topologischen Raum BX und einer Homotopieäquivalenz $e : \Omega BX \xrightarrow{\simeq} X$. Der Raum BX heißt der *klassifizierende Raum* von X. Ein Schleifenraum X ist n-zusammenhängend, falls X ein n-zusammenhängender Raum ist.

Ein topologischer Raum X ist *endlich* oder $\mathbb{Z}$*-endlich*, falls $H^*(X, \mathbb{Z})$ ein endlich erzeugter graduierter $\mathbb{Z}$-Modul ist.

Ein topologischer Raum X ist $\mathbb{F}_p$*-endlich*, falls $H^*(X, \mathbb{F}_p)$ ein endlich dimensionaler graduierter $\mathbb{F}_p$-Vektorraum ist.

Der *Rang* $rg(X)$ eines zusammenhängenden endlichen Schleifenraums X ist der Transzendenzgrad des Polynomrings $H^*(BX, \mathbb{Q})$ über dem Körper $\mathbb{Q}$.

Ein *Morphismus* $f : X \to Y$ von Schleifenräumen ist eine punktierte Abbildung $Bf : BX \to BY$. Die Homotopiefaser $Y/X = hofib(f)$ heißt *homogener Raum.*

Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schleifenräumen ist ein *Isomorphismus*, falls Bf eine Homotopieäquivalenz ist.

Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schleifenräumen ist ein *Monomorphismus*, falls Y/X $\mathbb{Z}$-endlich ist. X heißt dann auch *Unterschleifenraum* von Y.

Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schleifenräumen ist ein *Epimorphismus*, falls $(\Omega(Y/X), Y/X, id)$ ein Schleifenraum ist.

Ein *Torus* ist ein Schleifenraum (T, BT, e), so daß $BT \simeq K(\mathbb{Z}^n, 2)$.

Insbesondere interessieren wir uns für maximale Tori und zugehörige Weyl-Gruppen endlicher Schleifenräume.

Definition 2.2.6. Sei X ein zusammenhängender endlicher Schleifenraum. Ein *maximaler Torus* T_X von X ist ein Morphismus von Schleifenräumen $f : T_X \to X$ eines Torus T_X nach X, so daß gilt:

(1) Der homogene Raum X/T_X ist $\mathbb{Z}$-endlich.

(2) Für den Rang von T_X gilt $rg(T_X) = rg(X)$.

Die *Weyl-Gruppe* $W_X = W(T_X)$ eines maximalen Torus $f : T_X \to X$ ist die Gruppe

$$W(T_X) = \{[\omega : BT_X \xrightarrow{\cong} BT_X] : Bf \circ \omega \simeq Bf\}$$

aller Homotopieklassen von Selbsthomotopieäquivalenzen von BT_X, so daß das Diagramm

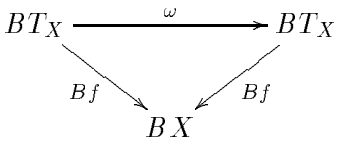
$$\begin{array}{ccc} BT_X & \xrightarrow{\omega} & BT_X \\ & {\scriptstyle Bf} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle Bf} & \\ & BX & \end{array}$$

homotopiekommutativ ist.

Nicht jeder endliche Schleifenraum hat einen maximalen Torus, wie schon Rector zeigen konnte [R1]. Das wichtigste Beispiel eines endlichen Schleifenraumes mit maximalem Torus ist eine kompakte Liesche Gruppe G. Das Tripel (G, BG, e) mit der kanonischen Homotopieäquivalenz $e : \Omega BG \xrightarrow{\simeq} G$ ist ein endlicher Schleifenraum. Der lietheoretische maximale Torus $T_G \to G$ einer zusammenhängenden kompakten Lieschen Gruppe liefert eine Faserung

$$G/T_G \longrightarrow BT_G \longrightarrow BG$$

und jedes Element $w \in W_G$ der Weylgruppe W_G von G liefert ein homotopiekommutatives Diagramm



Da sich viele Begriffe der klassischen Lietheorie homotopietheoretisch definieren lassen und somit für Schleifenräume verallgemeinert werden können, ist die folgende Vermutung naheliegend [Wi]

Vermutung 2.2.7 (Wilkerson). *Jeder zusammenhängende endliche Schleifenraum X mit maximalem Torus T_X ist isomorph zu einer zusammenhängenden kompakten Lieschen Gruppe.*

In [Mø-N2] haben Møller und Notbohm folgendes allgemeine Theorem bewiesen, welches diesen Zusammenhang noch stärker hervortreten läßt

Theorem 2.2.8 (Møller-Notbohm). *Sei X ein zusammenhängender endlicher Schleifenraum mit maximalem Torus $f : T_X \to X$. Dann gilt:*

(1) Die induzierte Operation von W_X auf $H^2(BT_X, \mathbb{Z})$ ist eine Darstellung von W_X als kristallographische Gruppe.

(2) $H^*(BX, \mathbb{Q}) \cong H^*(BT_X, \mathbb{Q})^{W_X}$

Anstatt Schleifenräume integral zu studieren, haben Dwyer und Wilkerson die p-adischen Komplettierungen à la Bousfield-Kan studiert. Die p-adische Komplettierung ist ein Funktor $(\mathbb{F}_p)_\infty(?)$ auf der Kategorie der topologischen Räume und ein Raum X heißt $\mathbb{F}_p$-komplett, falls $X \simeq (\mathbb{F}_p)_\infty X$ [Bou-Kan]. Dabei sind $\mathbb{Q}_p = (\mathbb{F}_p)_\infty \mathbb{Q}$ die p-adischen Zahlen und $\mathbb{Z}_p = (\mathbb{F}_p)_\infty \mathbb{Z}$ die p-adischen ganzen Zahlen. Dwyer und Wilkerson führten die folgende volle Unterkategorie der Kategorie der Schleifenräume ein [D-W2].

Definition 2.2.9. Eine *p-kompakte Gruppe* X ist ein Schleifenraum $X = (X, BX, e)$, so daß X $\mathbb{F}_p$-endlich und BX $\mathbb{F}_p$-komplett ist.

Ein Morphismus $f : X \to Y$ von p-kompakten Gruppen ist ein *Monomorphismus*, falls Y/X $\mathbb{F}_p$-endlich ist, oder äquivalent, falls $H^*(BX, \mathbb{F}_p)$ durch $(Bf)^*$ zu einem endlich erzeugten $H^*(BY, \mathbb{F}_p)$-Modul wird [D-W2], 9.11. X heißt dann auch *Untergruppe* von Y.

Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schleifenräumen ist ein *Epimorphismus*, falls $(\Omega(Y/X), Y/X, id)$ eine p-kompakte Gruppe ist.

Ein *p-kompakter Torus* ist eine p-kompakte Gruppe (T, BT, e), so daß $BT \simeq K((\mathbb{Z}_p)^n, 2)$.

Die Bedingung, daß BX $\mathbb{F}_p$-komplett ist, ist äquivalent damit, daß X $\mathbb{F}_p$-endlich ist und $\pi_0(X)$ eine endliche p-Gruppe ist. Wichtige Beispiele liefern wiederum kompakte Liesche Gruppen. Ist G eine kompakte Liesche Gruppe, so ist das Tripel $((\mathbb{F}_p)_\infty G, (\mathbb{F}_p)_\infty BG, e)$ genau dann eine p-kompakte Gruppe, falls $\pi_0(G)$ eine endliche p-Gruppe ist. Ebenso liefern die Bousfield-Kan-Komplettierungen endlicher Schleifenräume $((\mathbb{F}_p)_\infty X, (\mathbb{F}_p)_\infty BX, e)$ an einer Primzahl p Beispiele p-kompakter Gruppen, falls wieder $\pi_0(X)$ eine endliche p-Gruppe ist, also insbesondere, wenn X zusammenhängend ist. Andere Beispiele erhalten wir als Tripel der Form $(\Omega BX, BX, e)$, wobei BX polynomiale $\mathbb{F}_p$-Kohomologie hat. Die Theorie p-kompakter Gruppen ist wieder ein homotopietheoretisches Bild der Theorie kompakter Liescher Gruppen, nur jetzt lokal an einer bestimmten Primzahl p. Wir haben wieder maximale Tori und Weyl-Gruppen.

Definition 2.2.10. Die *Komponente der Eins* X_0 einer p-kompakten Gruppe X ist gegeben als eine Komponente von X oder als universelle Überlagerung von BX.

Eine p-kompakte Gruppe X heißt *p-toral*, falls X_0 ein p-kompakter Torus ist, sie heißt *endlich*, falls X homotopiediskret ist und *abelsch*, falls $map(BX, BX)_{id} \simeq BX$.

Der *Zentralisator* $C_Y(f(X))$ eines Morphismus $f : X \to Y$ p-kompakter Gruppen ist definiert durch $BC_Y(f(X)) = map(BX, BY)_{Bf}$.

Ein *maximaler Torus* T_X einer p-kompakten Gruppe X ist ein Monomorphismus $f : T_X \to X$ eines p-kompakten Torus nach X, so daß $C_X(f(T_X))$ eine p-kompakte torale Gruppe ist und der homogene Raum $C_X(f(T_X))/T_X$ homotopiediskret ist.

Dwyer und Wilkerson konnten zeigen, daß jede p-kompakte Gruppe einen maximalen Torus besitzt und je zwei zueinander konjugiert sind [D-W2]. Ist $f : T_X \to X$ ein maximaler Torus der p-kompakten Gruppe X, so denken wir uns $Bf : BT_X \to BX$ als Faserung und definieren den *Weyl-Raum* $\mathcal{W}_X$ von X als den Raum aller Faserabbildungen über der Identität. Dwyer und Wilkerson zeigten, daß $\mathcal{W}_X$ homotopiediskret und $W_X = \pi_o(\mathcal{W}_X)$ eine endliche Gruppe ist, die *Weyl-Gruppe* von X. Schließlich konnten sie folgendes fundamentale Theorem beweisen, das wieder die Analogie zur Theorie kompakter Liescher Gruppen aufzeigt [D-W2]

Theorem 2.2.11 (Dwyer-Wilkerson). *Sei X eine zusammenhängende p-kompakte Gruppe und $f : T_X \to X$ ein maximaler Torus von X vom Rang n. Dann gilt:*

(1) Die Ordnung der Weyl-Gruppe W_X ist gleich der Euler-Charakteristik von X/T_X, d.h. $ord(W_X) = \chi(X/T_X)$.

(2) Die Operation von W_X auf BT_X induziert eine volltreue Darstellung $W_X \to Gl(n, \mathbb{Q}_p)$, deren Bild von Pseudospiegelungen erzeugt wird, d.h. W_X ist eine p-adische Pseudospiegelungsgruppe.

(3) $H^*(BX, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q} \cong (H^*(BT_X, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q})^{W_X}$ □

Jeder endliche Schleifenraum und jede p-kompakte Gruppe X ist ein $\mathbb{F}_p$-endlicher Hopf-Raum für jede Primzahl p. Wir können daher die Strukturtheorie für endliche Hopf-Räume von Lin und Kane anwenden [L1], [K2].

Im folgenden bezeichnen $Q^{ger}A$ bzw. $Q^{unger}A$ jeweils die unzerlegbaren Elemente einer graduierten Hopf-Algebra A in geraden bzw. ungeraden Graden.

Die Algebra $H^*(X,\mathbb{F}_p)$ ist eine Hopf-Algebra über der Steenrod-Algebra $\mathcal{A}^*(p)$ und es existiert eine Erweiterung von Hopf-Algebren über $\mathcal{A}^*(p)$

$$\mathbb{F}_p \longrightarrow \Gamma \longrightarrow H^*(X,\mathbb{F}_p) \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{F}_p$$

mit $E = H^*(X,\mathbb{F}_p)//\Gamma$ und die Erweiterung spaltet als Erweiterung von Algebren über $\mathbb{F}_p$

$$H^*(X,\mathbb{F}_p) \cong \Gamma \otimes_{\mathbb{F}_p} E$$

wobei nach dem Struktursatz für Hopf-Algebren von Borel gilt:

$$E \cong E(x_1,...,x_n), \quad deg\, x_i \equiv 1(2)$$

$$\Gamma \cong \frac{\mathbb{F}_p[y_1,...,y_m]}{(y_1^{p^{r_1}},...y_m^{p^{rm}})}, \quad deg\, y_i \equiv 0(2)$$

und es ist $n = rg(X)$. Außerdem haben wir die folgende Aussage aus der Strukturtheorie.

(1) Γ ist eine primitiv erzeugte Hopf-Algebra mit $Q\Gamma \cong Q^{ger}H^*(X,\mathbb{F}_p)$.

(2) E ist eine primitive erzeugte Hopf-Algebra mit $QE \cong Q^{unger}H^*(X,\mathbb{F}_p)$.

Ist X ein 1-zusammenhängender $\mathbb{F}_p$-endlicher Hopf-Raum, so gilt für den graduierten Modul der unzerlegbaren Elemente $Q^*H^*(X,\mathbb{F}_p)$ für ungerade Primzahlen p:

(1) $Q^{ger}H^*(X,\mathbb{F}_p) = \sum_{n\geq 1} \beta\mathcal{P}^n Q^{2n+1}H^*(X,\mathbb{F}_p)$

(2) $Q^{2n}H^*(X,\mathbb{F}_p) = 0$ ausgenommen $n = p^k + p^{k-1} + \cdots + \widehat{p^i} + \cdots + p + 1$

(3) $Q^{2(p^k+\cdots+\widehat{p^i}+\cdots+p+1)}H^*(X,\mathbb{F}_p) = \mathcal{P}^{p^i}Q^{2(p^k+\cdots+\widehat{p^{i+1}}+\cdots+p+1)}H^*(X,\mathbb{F}_p)$

Ist $p = 2$, so modifizieren sich die Strukturaussagen. Ist der Raum X ein 1-zusammenhängender $\mathbb{F}_2$-endlicher Hopf-Raum, so gilt für den graduierten Modul der unzerlegbaren Elemente $Q^*H^*(X,\mathbb{F}_2)$ eine sehr starke Aussage [K1].

$$Q^{ger}H^*(X,\mathbb{F}_2) = 0$$

Für jeden $\mathbb{F}_2$-endlichen Hopf-Raum X haben wir den *Frobenius-Morphismus*

$$\xi : H^*(X,\mathbb{F}_2) \longrightarrow H^*(X,\mathbb{F}_2), \;\; \xi(x) = x^2$$

Insbesondere ist ξ ein Morphismus von Algebren und das Bild $\xi H^*(X,\mathbb{F}_2)$ von ξ ist eine Unteralgebra von $H^*(X,\mathbb{F}_2)$. Diese Unteralgebra haben wir im Fall $p = 2$ zu betrachten und insbesondere deren Modul unzerlegbarer Elemente $Q^*\xi H^*(X,\mathbb{F}_2)$. Es wird $Q^{ger}\xi H^*(X,\mathbb{F}_2)$ als $\mathcal{A}^*(2)$- Modul von $\sum_{k\geq 2} Q^{2^k+2}\xi H^*(X,\mathbb{F}_2)$ erzeugt [L2] [K2].

Ist X ein 1-zusammenhängender $\mathbb{F}_p$-endlicher Hopf-Raum, so ist nach einem Satz von Browder X sogar 2-zusammenhängend und $H^3(X,\mathbb{Z}_{(p)})$ torsionsfrei für jede Primzahl p [K2].

Ist G eine zusammenhängende, 1-zusammenhängende kompakte Liesche Gruppe, so ist für ungerade Primzahlen p sogar

$$Q^{2n}H^*(G,\mathbb{F}_p) = 0$$

mit Ausnahme von $n = p+1$, p^2+1. Für jede Primzahl p gibt es stets einen Erzeuger x_3 in dem Modul $H^3(G,\mathbb{F}_p)$, der von der *Killing-Form* kommt.

Wir definieren nun eine spezielle Klasse von Schleifenräumen, die durch kohomologische Bedingungen bestimmt werden, und für die alle unsere Konstruktionen durchführbar sind.

Definition 2.2.12. Sei p eine Primzahl. Ein *$\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum X* ist ein zusammenhängender, 1-zusammenhängender $\mathbb{F}_p$-endlicher Schleifenraum X, so daß gilt:

(1) Ist p ungerade, so $Q^{2n}H^*(X,\mathbb{F}_p) = 0$ mit Ausnahme von $n = p+1$, p^2+1. Ist p=2, so $Q^{2n}\xi H^*(X,\mathbb{F}_2) = 0$ mit Ausnahme von $n = 2^k+2$ mit $k \geq 2$.

(2) $H^3(X,\mathbb{F}_p)$ ist nicht trivial.

Ein *Liescher Schleifenraum* ist ein zusammenhängender, 1-zusammenhängender endlicher Schleifenraum X, so daß die Bedingungen (1) und (2) für jede Primzahl p erfüllt sind.

Jede zusamenhängende, 1-zusammenhängende kompakte Liesche Gruppe G ist also ein $\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum für p ungerade. Die Bedingung (1) für p ungerade ist erfüllt für alle bekannten 1-zusammenhängenden $\mathbb{F}_p$-endlichen Hopf-Räume. Für $p = 2$ ist die Bedingung (1) restriktiv für Liesche Gruppen. Sie ist erfüllt für alle 1-zusammenhängenden kompakten Lieschen Gruppen mit Ausnahme der Spin-Gruppen $Spin(n)$ für $n \geq 15$ und der exzeptionellen Gruppe E_8. Die Bedingung ist aber für die Struktur unseres Beweises im Falle $p = 2$ unverzichtbar.

Wir studieren jetzt ausführlich die Konstruktionen von Kane und Notbohm aus [K-N]. Im folgenden sei X stets ein $\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum und p eine ungerade Primzahl. Wir erhalten entsprechende Resultate für die Primzahl $p = 2$, falls wir strikt die oben genannten Modifikationen mit dem Frobenius-Morphismus berücksichtigen.

Ist X ein $\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum, so folgt aus den Struktursätzen von Lin sofort, daß die Abbildungen [L1]

$$Q^3H^*(X,\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\beta\mathcal{P}^1} Q^{2p+2}H^*(X,\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\mathcal{P}^p} Q^{2p^2+2}H^*(X,\mathbb{F}_p)$$

surjektiv sind.

Wir wählen eine Abbildung

$$\bar{f} : X \longrightarrow K = \prod_{i=1}^{k} K(\mathbb{Z}_{(p)},3)$$

die eine Basis des freien $\mathbb{Z}_{(p)}$-Moduls $H^3(X,\mathbb{Z}_{(p)})$ darstellt, wobei $\mathbb{F}$ der Rang von $H^3(X,\mathbb{Z}_{(p)})$ ist. Also induziert die Abbildung $\bar{f}^*$ einen Isomorphismus in $\mathbb{Z}_{(p)}$-Kohomologie

$$\bar{f}^* : H^3(K,\mathbb{Z}_{(p)}) \xrightarrow{\cong} H^3(X,\mathbb{Z}_{(p)})$$

Wir definieren die Abbildung f als Komposition

$$f : X \xrightarrow{\bar{f}} K = \prod_{i=1}^{k} K(\mathbb{Z}_{(p)}, 3) \xrightarrow{\bar{\Psi}} L = \prod_{i=1}^{k} l_{2p+2}$$

wobei $\bar{\Psi} = \prod_{i=1}^{k} \Psi$ und Ψ wieder die Abbildung

$$K(\mathbb{Z}_{(p)}, 3) \xrightarrow{\Psi} l_{2p+2} = BP\langle 1 \rangle_{2p+2}$$

ist. Wir definieren nun den *Kane-Notbohm-Raum* $\tilde{X}$ als Homotopiefaser der Abbildung f

$$\tilde{X} = hofib(X \xrightarrow{f} L).$$

Die Abbildung f ist eine Abbildung von Hopf-Räumen und die induzierte Abbildung

$$f^* : H^*(L, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(X, \mathbb{F}_p)$$

ist daher eine Abbildung von Hopf-Algebren.

Satz 2.2.13. *Sei X ein $\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum und*

$$f : X \longrightarrow L = \prod_{i=1}^{k} l_{2p+2}$$

die assozierte Abbildung. Dann ist $im\, f^* \cong \Gamma$ als Unter-Hopf-Algebra von $H^*(X, \mathbb{F}_p)$.

Beweis. Die Abbildung f ist die Komposition der Abbildungen

$$X \xrightarrow{\bar{f}} K = \prod_{i=1}^{k} K(\mathbb{Z}_{(p)}, 3) \xrightarrow{\bar{\Psi}} L = \prod_{i=1}^{k} l_{2p+2}.$$

Nach Satz 2.2.4 ist $im\, \bar{\Psi}^*$ die $\mathcal{A}^*(p)$-Unteralgebra von $H^*(K, \mathbb{F}_p)$ erzeugt von den Elementen $\{\beta\mathcal{P}^1\iota_1, ..., \beta\mathcal{P}^1\iota_k\}$ mit $deg\, \iota_i = 3$. Aus der Konstruktion von $\bar{f}$ folgt unmittelbar, daß $im\, f^*$ die $\mathcal{A}^*(p)$-Unteralgebra von $H^*(X, \mathbb{F}_p)$ ist, erzeugt von den Elementen $\{\beta\mathcal{P}^1 x_1, ..., \beta\mathcal{P}^1 x_k\}$ mit $deg\, x_i = 3$ und die Elemente $x_1, ..., x_k$ sind gerade die Basiselemente von $H^3(X, \mathbb{F}_p)$. Aufgrund der Surjektivität der Abbildungen

$$Q^3 H^*(X, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\beta\mathcal{P}^1} Q^{2p+2} H^*(X, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\mathcal{P}^p} Q^{2p^2+2} H^*(X, \mathbb{F}_p)$$

folgt, da $Q^3 H^*(X, \mathbb{F}_p) = H^3(X, \mathbb{F}_p)$, daß

$$Q\, im\, f^* \cong Q^{ger} H^*(X, \mathbb{F}_p) \cong Q\Gamma$$

und damit schließlich $im\, f^* \cong \Gamma$ als Unter-Hopf-Algebra von $H^*(X, \mathbb{F}_p)$. □

Wir studieren nun die *Kane-Notbohm-Faserung*

$$\tilde{X} \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} L$$

im Detail. Aus dem Theorem 2.2.3 von Sinkinson und Wilson folgt zunächst

Satz 2.2.14. *Die Algebra $H^*(L, \mathbb{F}_p)$ ist eine graduierte Polynomalgebra von endlichem Typ über $\mathbb{F}_p$ und es gilt als Hopf-Algebren*

$$H^*(L, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[z_1, ..., z_m, ...]$$

Insbesondere ist $H^*(L, \mathbb{F}_p)$ torsionsfrei. $\square$

Satz 2.2.15. *Die Algebra $H^*(\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$ ist eine äußere Algebra von endlichem Typ über $\mathbb{F}_p$ mit Erzeugern in ungeraden Graden*

$$H^*(\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \cong E(x_1, ..., x_n) \otimes_{\mathbb{F}_p} E(s^{-1}u_1, ..., s^{-1}u_r, ...)$$

und für die induzierte Abbildung

$$g^* : H^*(X, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$$

gilt, daß $im\, g^* = E(x_1, ..., x_n)$ und $ker\, g^* = (\overline{im\, f^*})$ ist, wobei $(\overline{im\, f^*})$ das Ideal ist, welches von den Elementen aus $im\, f^* \cong \Gamma$ mit positiven Graden erzeugt wird. Insbesondere ist $H^*(\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$ torsionsfrei.

Beweis. Wir betrachten die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der Faserung

$$\tilde{X} \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} L$$

Die Abbildung f^* ist eine Abbildung von Hopf-Algebren. Da der Raum L 1-zusammenhängend ist nach [W], p.104, konvergiert die Spektralsequenz im strengen Sinne und wir haben

$$E_2 \cong Tor_{H^*(L,\mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p, H^*(X, \mathbb{F}_p))$$

$$E_r \Rightarrow H^*(\tilde{X}, \mathbb{F}_p).$$

Das Ideal $ker\, f^*$ ist ein Hopf-Ideal in $H^*(L, \mathbb{F}_p)$. Sei A die Unter-Hopf-Algebra, die $ker\, f^*$ erzeugt, d.h. $ker\, f^* = (\bar{A})$. Dann gilt für den E_2-Term als Hopf-Algebren [Sm1]

$$\begin{aligned} E_2 &\cong H^*(X, \mathbb{F}_p)//im\, f^* \otimes_{\mathbb{F}_p} Tor_A(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \\ &\cong H^*(X, \mathbb{F}_p)//\Gamma \otimes_{\mathbb{F}_p} Tor_A(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \end{aligned}$$

Dabei ist $H^*(X, \mathbb{F}_p)//\Gamma \cong E(x_1, ..., x_n)$ eine äußere Algebra und A eine Unter-Hopf-Algebra der Polynomalgebra $H^*(L, \mathbb{F}_p)$, also nach dem Struktursatz von Borel wieder eine Polynomalgebra $A \cong \mathbb{F}_p[u_1, ..., u_r, ...]$. Mit einem Koszul-Komplex-Argument folgt

$$Tor_A(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \cong E(s^{-1}u_1, ..., s^{-1}u_r, ...)$$

und damit haben wir als Algebren

$$E_2 \cong E(x_1, ..., x_n) \otimes_{\mathbb{F}_p} E(s^{-1}u_1, ..., s^{-1}u_r, ...).$$

Für die Differentiale d_r in der Spektralsequenz gilt

$$0 = d_r : E_r^{-p,*} \to E_r^{-p+r,*}$$

für alle $p \leq 1$ und $r \geq 2$. Es ist daher $E_2^{*,*}$ als Algebra erzeugt von den Termen $E_2^{0,*}$ und $E_2^{-1,*}$. Da die Differentiale d_r Derivationen von Algebren sind, folgt unmitelbar, daß die Spektralsequenz im E_2-Term zusammenbricht. Es folgt als Algebren

$$H^*(\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \cong E(x_1, ..., x_n) \otimes_{\mathbb{F}_p} E(s^{-1}u_1, ..., s^{-1}u_r, ...)$$

Die induzierte Abbildung g^* faktorisiert wie folgt

$$\begin{array}{ccc} H^*(X, \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\quad g^* \quad} & H^*(\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \\ & {\scriptstyle \phi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle i^*} & \\ & E_2^{0,*} & \end{array}$$

wobei die Abbildung i^* eine Inklusion ist. Da die Abbildung

$$\phi : H^*(X, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(\tilde{X}, \mathbb{F}_p)//im\, f^* \otimes_{\mathbb{F}_p} E(x_1, ..., x_n)$$

den Kern $ker\, \phi \cong (\bar{\Gamma})$ hat, folgt somit auch

$$ker\, g^* \cong (\overline{im\, f^*}) \cong (\bar{\Gamma}).$$

Außerdem ist $im\, g^* \cong E(x_1, ..., x_n)$ als Algebren und damit insbesondere die Algebra $H^*(\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$ torsionsfrei. □

Ein alternativer Beweis dieser Aussage, läßt sich auch mit Hilfe der Leray-Serre-Spektralsequenz der Faserung

$$\Omega L \longrightarrow \tilde{X} \longrightarrow X$$

führen (siehe [K-N], Theorem 3.5). Die Abbildung $f : X \to L$ ist nicht nur eine Abbildung von Hopf-Räumen, sondern sogar von Schleifenräumen. Der Raum X ist 2-zusammenhängend, also der klassifizierende Raum BX 3-zusammenhängend und es folgt

$$\begin{aligned} H^4(BX, \mathbb{Z}_{(p)}) &\cong [BX, K(\mathbb{Z}_{(p)}, 4)] \cong [\Omega BX, K(\mathbb{Z}_{(p)}, 3)] \\ &\cong [X, K(\mathbb{Z}_{(p)}, 3)] \cong H^3(X, \mathbb{Z}_{(p)}) \end{aligned}$$

Die Abbildung $\bar{f}$ läßt sich ausschleifen und wir definieren die Ausschleifung Bf der Abbildung f als die Komposition

$$Bf : BX \xrightarrow{B\bar{f}} BK = \prod_{i=1}^{k} K(\mathbb{Z}_{(p)}, 4) \xrightarrow{B\bar{\Psi}} BL = \prod_{i=1}^{k} l_{2p+3}$$

Wir definieren nun den klassifizierenden Raum $B\tilde{X}$ als Homotopiefaser der Abbildung Bf.

$$B\tilde{X} = hofib(BX \xrightarrow{Bf} BL)$$

Satz 2.2.16. *Die Algebra $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$ ist eine Polynomalgebra von endlichem Typ über $\mathbb{F}_p$ mit Erzeugern in geraden Graden*

$$H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[sx_1, ..., sx_n] \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p[u_1, ..., u_r, ...]$$

Insbesondere ist $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$ torsionsfrei.

Beweis. Wir betrachten die *Milnor-Moore-Spektralsequenz* $\{E_r, d_r\}$ der Faserung

$$\tilde{X} \longrightarrow E\tilde{X} \longrightarrow B\tilde{X}.$$

wobei $E\tilde{X}$ homotopieäquivalent zu einem Punkt ist. Wir haben als Algebren

$$E_2 \cong Cotor_{H^*(\tilde{X},\mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$$

$$E_r \Rightarrow H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p).$$

Nach Satz 2.2.15 ist $H^*(\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$ eine äußere Algebra mit Erzeugern in ungeraden Graden

$$H^*(\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \cong E(x_1, ..., x_n) \otimes_{\mathbb{F}_p} E(s^{-1}u_1, ..., s^{-1}u_r, ...)$$

Nach dem Struktursatz von Borel gibt es eine Zerlegung als Algebren

$$H^*(\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \cong \bigotimes_{i=1}^{n} E(x_i) \otimes_{\mathbb{F}_p} \bigotimes_{j=1}^{\infty} E(s^{-1}u_j)$$

Für den E_2-Term der Spektralsequenz erhalten wir demnach

$$\begin{aligned}
E_2 &\cong Cotor_{E(x_1,...,x_n)\otimes_{\mathbb{F}_p} E(s^{-1}u_1,...,s^{-1}u_r,...)}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \\
&\cong \bigotimes_{i=1}^{n} Cotor_{E(x_i)}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} \bigotimes_{j=1}^{\infty} Cotor_{E(s^{-1}u_j)}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \\
&\cong \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{F}_p[sx_i] \otimes_{\mathbb{F}_p} \bigotimes_{j=1}^{\infty} \mathbb{F}_p[u_j] \\
&\cong \mathbb{F}_p[sx_1, ..., sx_n] \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p[u_1, ..., u_r, ...].
\end{aligned}$$

Der E_2-Term ist in geraden Graden konzentriert, und nach dem Schachbretteffekt folgt, daß die Spektralsequenz im E_2-Term zusammenbricht und wir haben einen Isomorphismus von Algebren

$$H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[sx_1, ..., sx_n] \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p[u_1, ..., u_r, ...]$$

und damit ist insbesondere die Algebra $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$ torsionsfrei. □

Da die Algebra $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$ in geraden Graden konzentriert ist, ist nach dem universellen Koeffiziententheorem auch $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{Z}_{(p)})$ in geraden Graden konzentriert und torsionsfrei.

Für die Primzahl $p = 2$ modifizieren sich die Beweise etwas, aber wir erhalten analoge Aussagen der Sätze 2.2.15 und 2.2.16, denn aus der Strukturtheorie von Lin [L2] folgt, daß $H^*(X, \mathbb{F}_2)//\Gamma$ mit $\Gamma = \xi H^*(X, \mathbb{F}_2)$ eine primitiv erzeugte Hopf-Algebra auf äußeren Erzeugern von ungeradem Grad ist.

Wir haben die folgende lange Fasersequenz

$$\cdots \longrightarrow \Omega L \xrightarrow{\Omega f} \tilde{X} \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} L \longrightarrow B\tilde{X} \xrightarrow{Bj} BX \xrightarrow{Bf} BL$$

Sei p eine Primzahl und X ein $\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Wir haben dann folgendes Pullback-Diagramm $\mathcal{D}$ von Faserungen, welches wir nun genauer studieren wollen

$$\begin{array}{ccccc}
* & \longrightarrow & X/T_X & = & X/T_X \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\
L & \longrightarrow & BT_X \times_{BX} B\tilde{X} & \longrightarrow & BT_X \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle Bi} \\
L & \longrightarrow & B\tilde{X} & \xrightarrow{Bj} & BX
\end{array}$$

Wir bestimmen den Homotopietyp des Pullbackraums $BT_X \times_{BX} B\tilde{X}$ und seine $\mathbb{F}_p$-Kohomologie.

Satz 2.2.17. *Die Algebra $H^*(BT_X \times_{BX} B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$ ist eine Polynomalgebra von endlichem Typ über $\mathbb{F}_p$ auf Erzeugern mit geraden Graden*

$$H^*(BT_X \times_{BX} B\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[t_1, ..., t_n] \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p[z_1, ..., z_m, ...]$$

wobei $\deg t_i = 2$ für alle $i = 1, 2, ...n$ und $n = rg(X)$ ist. Insbesondere ist $H^*(BT_X \times_{BX} B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$ torsionsfrei.

Beweis. Wir betrachten die Leray-Serre-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der Faserung

$$L \longrightarrow BT_X \times_{BX} B\tilde{X} \longrightarrow BT_X$$

und erhalten als Algebren

$$E_2 \cong H^*(BT_X, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H^*(L, \mathbb{F}_p)$$

$$E_r \Rightarrow H^*(BT_X \times_{BX} B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$$

Dabei ist $H^*(L, \mathbb{F}_p)$ eine Polynomalgebra mit Erzeugern in geraden Graden und $H^*(BT_X, \mathbb{F}_p)$ eine Polynomalgebra mit $rg(X)$ Erzeugern vom Grad 2. Also ist der E_2-Term in geraden Graden konzentriert. Nach dem Schachbretteffekt folgt wieder, daß die Spektralsequenz im E_2-Term zusammenbricht und wir erhalten schließlich als Algebren

$$\begin{aligned} H^*(BT_X \times_{BX} B\tilde{X}, \mathbb{F}_p) &\cong H^*(BT_X, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H^*(L, \mathbb{F}_p) \\ &\cong \mathbb{F}_p[t_1, ..., t_n] \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p[z_1, ..., z_m, ...] \end{aligned}$$

Hiermit folgen alle Behauptungen. □

Der folgende alternative Beweis liefert eine noch stärkere Aussage.

Satz 2.2.18. *Die Faserung*

$$L \longrightarrow BT_X \times_{BX} B\tilde{X} \longrightarrow BT_X$$

ist faserhomotopieäquivalent zu der trivialen Faserung

$$L \longrightarrow BT_X \times L \longrightarrow BT_X$$

Beweis. Wir betrachten das folgende Diagramm von Abbildungen und topologischen Räumen

$$\begin{array}{ccccc} B\tilde{X} & \xrightarrow{Bj} & BX & \xrightarrow{Bf} & BL \\ & & \uparrow{\scriptstyle Bi} & & \\ & & BT_X & & \end{array}$$

Der Pullback-Raum $BT_X \times_{BX} B\tilde{X}$ ist die Homotopiefaser der Komposition $Bi \circ Bf$. Die Homotopieklassen $[BT_X, BL]$ klassifizieren die Faserungen über dem Raum BT_X. Es ist

$$BL = \prod_{i=1}^{k} Bl_{2p+2} = \prod_{i=1}^{k} l_{2p+3}$$

und da $l^*(BT_X)$ in geraden Graden konzentriert ist, folgt insbesondere

$$[BT_X, Bl_{2p+2}] = [BT_X, l_{2p+3}] = l^{2p+3}(BT_X) = 0.$$

Also ist jede Abbildung $BT_X \to BL$ nullhomotop und damit folgt die Behauptung des Satzes. □

2.3 Der Satz von Bott

Sei p eine Primzahl und X ein $\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Im letzten Abschnitt haben wir mit Hilfe des Spektrums $BP\langle 1\rangle$ die folgende Faserung konstruiert:

$$X/T_X \xrightarrow{l} E = BT_X \times L \xrightarrow{\phi} B\tilde{X}$$

wobei $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$ und $H^*(E, \mathbb{F}_p)$ zusammenhängende graduierte Polynomalgebren von endlichem Typ über $\mathbb{F}_p$ sind. Wir wollen jetzt die induzierte Abbildung in $\mathbb{F}_p$-Kohomologie studieren

$$\phi^* : H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(E, \mathbb{F}_p).$$

Zunächst haben wir den folgenden Endlichkeitssatz:

Satz 2.3.1. *Die induzierte Abbildung ϕ^* macht $H^*(E, \mathbb{F}_p)$ zu einem kohärenten $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$-Modul, also ist insbesondere $H^*(E, \mathbb{F}_p)$ ein endlich erzeugter $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$-Modul.*

Beweis. Wir betrachten die Leray-Serre-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der Faserung

$$X/T_X \longrightarrow E \xrightarrow{\phi} B\tilde{X}.$$

Wir haben als Algebren

$$E_2 \cong H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$$

$$E_r \Rightarrow H^*(E, \mathbb{F}_p).$$

Der homogene Raum X/T_X ist $\mathbb{Z}$-endlich, also ist insbesondere der Modul $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ ein endlich dimensionaler graduierter $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. Daher ist E_2 ein freier endlich erzeugter Modul über $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$. Die Algebra $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$ ist eine Polynomalgebra, also ein kohärenter Ring. Also sind endlich erzeugte freie Moduln über $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$ kohärent und E_2 ein kohärenter $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$-Modul. Aus den grundlegenden Eigenschaften kohärenter Moduln aus Abschnitt 1.1 folgt, daß auch alle weiteren Terme $E_3, ..., E_r, ..., E_\infty$ der Spektralsequenz kohärente $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$-Moduln sind und aus denselben Gründen ist auch $H^*(E, \mathbb{F}_p)$ ein kohärenter Modul über $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$. □

Wir betrachten jetzt die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz der charakteristischen Faserung und bestimmen die $\mathbb{F}_p$-Kohomologie des homogenen Raums X/T_X eines $\mathbb{F}_p$-Lieschen Schleifenraums.

Theorem 2.3.2. *Sei p eine Primzahl und X ein $\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Dann bricht die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der Faserung*

$$X/T_X \longrightarrow E \xrightarrow{\phi} B\tilde{X}$$

im E_2-Term zusammen und es gilt als Algebren

(a) $E_2 \cong E_\infty$.

(b) $E_2 \cong A/J$

wobei $A = \mathbb{F}_p[y_1, ..., y_k]$ eine endlich erzeugte Unteralgebra von $H^*(E, \mathbb{F}_p)$ und $J = (\phi^*(x_1), ..., \phi^*(x_k))$ ein Borel-Ideal in A ist, welches von der regulären Folge $\phi^*(x_1), ..., \phi^*(x_k)$ erzeugt wird. Ist $p > 2$ eine ungerade Primzahl, so gibt es einen Isomorphismus von Algebren $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p) \cong A/J$. Ist $p = 2$ so gibt es einen Isomorphismus von Algebren $E^0H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p) \cong A/J$.

Beweis. Nach Satz 2.3.1 sind alle Voraussetzungen von Theorem 2.1.7 erfüllt und die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der Faserung

$$X/T_X \longrightarrow E \xrightarrow{\phi} B\tilde{X}$$

bricht im E_2-Term zusammen und wir haben folgende Isomorphismen von Algebren

(a) $E_2 \cong E_\infty$

(b) $E_2 \cong A/J \otimes_{\mathbb{F}_p} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_r, ...)$,

wobei $A = \mathbb{F}_p[y_1, ..., y_k]$ eine endlich erzeugte Unteralgebra von $H^*(E, \mathbb{F}_p)$ und $J = (\phi^*(x_1), ..., \phi^*(x_k))$ ein Borel-Ideal in A ist, welches von der regulären Folge $\phi^*(x_1), ..., \phi^*(x_k)$ erzeugt wird und $bideg\,(s^{-1}z_i) = (-1, *)$. Da $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ $\mathbb{F}_p$-endlich ist, muß insbesondere die äußere Algebra im E_2-Term endlich erzeugt sein, d.h. es muß gelten als Algebren

$$E_2 \cong A/J \otimes_{\mathbb{F}_p} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_l)$$

für eine natürliche Zahl l. Die Euler-Charakteristik von X/T_X ist endlich und der Beweis von [D-W2], 8.10 zeigt

$$\chi(X/T_X) > 0.$$

Angenommen, es wäre $E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_l) \neq \mathbb{F}_p$, so folgt

$$\begin{aligned}\chi(E_2) &= \chi(A/J \otimes_{\mathbb{F}_p} E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_l) \\ &= \chi(A/J) \cdot \chi(E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_l)) \\ &= 0\end{aligned}$$

im Widerspruch zum Zusammenbruch der Spektralsequenz, denn $\chi(E_\infty) \neq 0$. Also ist $E(s^{-1}z_1, ..., s^{-1}z_l) \cong \mathbb{F}_p$ und damit als Algebren $E_2 \cong A/J$ und ist $p > 2$ eine ungerade Primzahl, so gibt es einen Isomorphismus von Algebren

$$H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p) \cong A/J$$

Für $p = 2$ folgt die Behauptung in ähnlicher Weise. □

Wir können noch das folgende wichtige Korollar aus diesem Zusammenbruchsatz für die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz beweisen.

Korollar 2.3.3. *Sei p eine Primzahl und X ein $\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Die Leray-Serre-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der Faserung*

$$X/T_X \longrightarrow E \xrightarrow{\phi} B\tilde{X}$$

bricht im E_2-Term zusammen und es gilt als Algebren
(a) $E_2 \cong E_\infty$.
(b) $E_2 \cong H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$
Weiter ist $H^*(E, \mathbb{F}_p)$ ein freier $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$-Modul und es gilt:

$$H^*(E, \mathbb{F}_p) \cong H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$$

als $\mathbb{F}_p$-Vektorräume. Die Faser X/T_X ist total nicht homolog zu 0 bezüglich der Faserung ϕ.

Beweis. Nach dem Theorem 2.3.2 bricht die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der Faserung

$$X/T_X \xrightarrow{l} E \xrightarrow{\phi} B\tilde{X}$$

im E_2-Term zusammen, d.h. es ist insbesondere

$$E_2^{0,*} \cong E_\infty^{0,*} \cong im\, l^*$$

Weiterhin ist aber auch nach Theorem 2.3.2 $E_2^{p,*} = 0$ für alle $p \neq 0$, d.h. der Term $E^{*,*}$ ist nur im homologischen Grad 0 konzentriert, also

$$Tor^{-p,*}_{H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p, H^*(E, \mathbb{F}_p)) = 0$$

für alle $p \neq 0$. Also ist $H^*(E, \mathbb{F}_p)$ ein freier $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$-Modul. Betrachten wir die induzierte Filtrierung $\{F^s H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)\}$, so folgt außerdem

$$im\, l^* \cong F^0 H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p) \cong H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$$

Insbesondere ist also l^* ein Epimorphismus und die Faser X/T_X total nicht homolog zu 0, woraus die Behauptung folgt. □

Wir können nun die gewünschten Aussagen über die Torsion in der Kohomologie $H^*(X/T_X, \mathbb{Z})$ gewinnen und den Satz von Bott für Liesche Schleifenräume beweisen. Wir haben zunächst das folgende Resultat:

Satz 2.3.4. *Sei p eine Primzahl und X ein $\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Dann sind $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ und $H^*(X/T_X, \mathbb{Z}_{(p)})$ in geraden Graden konzentriert und $H^*(X/T_X, \mathbb{Z}_{(p)})$ ist torsionsfrei.*

Beweis. Nach Theorem 2.3.2 ist die Algebra $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ nur in geraden Graden konzentriert, also

$$H^{unger}(X/T_X, \mathbb{F}_p) = 0$$

Aus der exakten Koeffizientensequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow \mathbb{F}_p \longrightarrow 0$$

folgt mit dem universellen Koeffiziententheorem, daß $H^*(X/T_X, \mathbb{Z}_{(p)})$ in geraden Graden konzentriert und torsionsfrei ist, analog wie in [L1]. □

Theorem 2.3.5. *Sei X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Dann ist $H^*(X/T_X, \mathbb{Z})$ in geraden Graden konzentriert und torsionsfrei.*

Beweis. Da $f : T_X \to X$ ein Monomorphismus, ist $H^*(X/T_X, \mathbb{Z})$ ein endlich erzeugter graduierter $\mathbb{Z}$-Modul. Es reicht also zu zeigen, daß $H^*(X/T_X, \mathbb{Z})$ keine p-Torsion hat für jede Primzahl p. Nach Theorem 2.3.3 ist aber der Vektorraum $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ für jede Primzahl p in geraden Graden erzeugt. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{F}_p \longrightarrow 0$$

folgt dann, daß $H^*(X/T_X, \mathbb{Z})$ in geraden Graden konzentriert ist und aus dem universellen Koeffiziententheorem folgt wieder, daß $H^*(X/T_X, \mathbb{Z})$ keine p-Torsion hat. □

Für p-kompakte Gruppen erhalten wir entsprechende Aussagen, wobei wir wieder den Fall $p = 2$ extra betrachten müssen.

Korollar 2.3.6. *Sei p eine ungerade Primzahl und X eine zusammenhängende, 1-zusammenhängende p-kompakte Gruppe, so daß $Q^{2n}H^*(X, \mathbb{F}_p) = 0$ mit Ausnahme von $n = p + 1$, $p^2 + 1$ und $H^3(X, \mathbb{F}_p)$ nicht trivial ist. Dann ist $H^*(X/T_X, \mathbb{Z}_p)$ in geraden Graden konzentriert und torsionsfrei.* □

Korollar 2.3.7. *Sei X eine zusammenhängende, 1-zusammenhängende 2-kompakte Gruppe, so daß $Q^{2n}\xi H^*(X, \mathbb{F}_2) = 0$ mit Ausnahme von $n = 2^k + 2$ für $k \geq 2$ und $H^3(X, \mathbb{F}_2)$ nicht trivial ist. Dann ist $H^*(X/T_X, \mathbb{Z}_2)$ in geraden Graden konzentriert und torsionsfrei.* □

Die Existenz einer nichttrivialen Kohomologieklasse in $H^3(X, \mathbb{F}_2)$ ist restriktiv für 2-kompakte Gruppen. Dwyer und Wilkerson haben in [D-W1] eine 2-kompakte Gruppe $DI(4)$ konstruiert, die 6-zusammenhängend ist und 2-Torsion hat. Dabei ist $H^*(BDI(4), \mathbb{F}_2)$ als $\mathcal{A}^*(2)$-Algebra isomorph zum Ring der *mod 2-Dickson-Invarianten* vom Rang 4.

Da die Spin-Gruppe $Spin(n)$ die universelle Überlagerung von $SO(n)$ ist, folgt insbesondere, daß $Spin(n)/T \simeq SO(n)/T$, also sind die Spin-Gruppen $Spin(n)$ für $n \geq 15$ keine Ausnahmefälle in unserem Beweis des Satzes von Bott. Wir erhalten daher die folgenden Aussagen für kompakte Liesche Gruppen.

Korollar 2.3.8. *Sei G eine zusammenhängende, 1-zusamenhängende kompakte Liesche Gruppe und T_G ein maximaler Torus in G und p eine ungerade Primzahl. Dann sind $H^*(G/T_G, \mathbb{F}_p)$ und $H^*(G/T_G, \mathbb{Z}_{(p)})$ in geraden Graden konzentriert und $H^*(G/T_G, \mathbb{Z}_{(p)})$ ist torsionsfrei. Ist G nicht die exzeptionelle Gruppe E_8, so folgen diese Aussagen auch für $p = 2$.* □

Ist G eine zusammenhängende, 1-zusammenhängende kompakte Liesche Gruppe, die nicht die exzeptionelle Gruppe E_8 ist, so liefert unser Beweis von Theorem 2.3.6 einen Beweis des Satzes von Bott [Bt]. Unser Beweis ist ein rein homotopietheoretischer Beweis, der im Gegensatz zum ursprünglichen Beweis von Bott keine Morse-Theorie verwendet, also die differenzierbare Struktur der Mannigfaltigkeit G nicht ausnutzt.

Theorem 2.3.9 (Bott). *Sei G eine zusammenhängende, 1-zusamenhängende kompakte Liesche Gruppe und T_G ein maximaler Torus in G. Dann ist $H^*(G/T_G, \mathbb{Z})$ in geraden Graden konzentriert und torsionsfrei.*□

Für beliebige zusammenhängende, 1-zusammenhängende endliche Schleifenräume X mit maximalem Torus T_X, läßt sich die Existenz von p-Torsion mit dem Zusammenbruch der Eilenberg-Moore-Spektralsequenz in Verbindung bringen.

Satz 2.3.10. *Sei X ein zusammenhängender, 1-zusammenhängender endlicher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X und $H^*(X, \mathbb{Z})$ habe keine p-Torsion. Dann bricht die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der Faserung*

$$X/T_X \xrightarrow{k} BT_X \xrightarrow{Bi} BX$$

im E_2-Term zusammen und es gilt als Algebren

(a) $E_2 \cong E_\infty$.

(b) $E_2 \cong \mathbb{F}_p \otimes_{H^*(BX, \mathbb{F}_p)} H^*(BT_X, \mathbb{F}_p)$

und es gibt einen Isomorphismus

$$H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p \otimes_{H^*(BX, \mathbb{F}_p)} H^*(BT_X, \mathbb{F}_p)$$

als $\mathbb{F}_p$-Vektorräume.

Beweis. Hat $H^*(X, \mathbb{Z})$ keine p-Torsion, so hat auch $H^*(BX, \mathbb{Z})$ keine p-Torsion und es ist $H^*(BX, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[x_1, ..., x_n]$, wobei $n = rg(X)$. Außerdem ist $H^*(BT_X, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[t_1, ..., t_n]$ mit $deg\,(t_i) = 2$. Da $f : T_X \longrightarrow X$ ein Monomorphismus ist und der homogene Raum X/T_X $\mathbb{F}_p$-endlich, ist $H^*(BT_X, \mathbb{F}_p)$ ein endlich erzeugter $H^*(BX, \mathbb{F}_p)$-Modul. Da die Anzahl der Erzeuger beider Algebren gleich ist, folgt mit [Sm4], Corollary 6.7.11, daß $H^*(BT_X, \mathbb{F}_p)$ ein freier $H^*(BX, \mathbb{F}_p)$-Modul ist. Daher bricht die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ mit

$$E_2 \cong Tor_{H^*(BX, \mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p, H^*(BT_X, \mathbb{F}_p))$$

$$E_r \Rightarrow H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$$

im E_2-Term zusammen und es ist

$$E_2 \cong Tor_{H^*(BX,\mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p, H^*(BT_X, \mathbb{F}_p)) \cong \mathbb{F}_p \otimes_{H^*(BX,\mathbb{F}_p)} H^*(BT_X, \mathbb{F}_p)$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Dies liefert uns auch direkt den Satz von Bott für endliche Schleifenräume im torsionsfreien Fall.

Korollar 2.3.11. *Sei X ein zusammenhängender, 1-zusammenhängender endlicher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X und $H^*(X, \mathbb{Z})$ habe keine Torsion. Dann ist $H^*(X/T_X, \mathbb{Z})$ in geraden Graden konzentriert und torsionsfrei.*

Beweis. Aus Theorem 2.3.9 folgt, daß die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der Faserung

$$X/T_X \xrightarrow{k} BT_X \xrightarrow{Bi} BX$$

im E_2-Term zusammenbricht und es folgt als $\mathbb{F}_p$-Vektorräume

$$H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p \otimes_{H^*(BX,\mathbb{F}_p)} H^*(BT_X, \mathbb{F}_p)$$

und daher ist $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ in geraden Graden konzentriert für jede Primzahl p und mit dem universellen Koeffiziententheorem folgt wieder die Behauptung. □

Es liegt nahe die folgende Frage zu stellen. Enthält die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz genügend Information über die Existenz von p-Torsion in der integralen Kohomologie?

Vermutung 2.3.12. *Sei X ein zusammenhängender, 1-zusammenhängender endlicher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Bricht die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der Faserung*

$$X/T_X \xrightarrow{k} BT_X \xrightarrow{Bi} BX$$

im E_2-Term zusammen, so hat $H^*(X, \mathbb{Z})$ keine p-Torsion.

Kapitel 3

Torsion in der Kohomologie Liescher Schleifenräume

Zusammenfassung

In diesem Kapitel studieren wir die Torsion in der integralen Kohomologie Liescher Schleifenräume mit maximalem Torus. In Abschnitt 3.1 beweisen wir die Sätze von Toda und Kac für die Faserung $X/T_X \xrightarrow{k} BT_X \xrightarrow{Bi} BX$. Wir zeigen, daß $ker\, k^*$ ein Borel-Ideal ist und daß $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ ein freier R^*-Modul ist, wobei R^* die von $im\, k^*$ erzeugte Algebra ist. Diese Sätze beweisen wir homotopietheoretisch durch Vergleich mit der Faserung $X/T_X \xrightarrow{l} BT_X \times L \xrightarrow{\phi} B\tilde{X}$. Im Abschnitt 3.2 zeigen wir mit Hilfe dieser Sätze, daß die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz der Faserung $X \xrightarrow{\pi} X/T_X \xrightarrow{k} BT_X$ im E_2-Term zusammenbricht. Wir beweisen damit zunächst eine Behauptung von Kac, nämlich daß die Leray-Serre-Spektralsequenz der Faserung $T_X \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/T_X$ im E_3-Term zusammenbricht. Kac hatte dies für kompakte Liesche Gruppen behauptet. Daraus lassen sich dann Folgerungen über die Existenz von Torsion in der integralen Kohomologie ableiten. Wir studieren den Chow-Ring $CH^*(X, \mathbb{F}_p)$ als charakteristische Unter-Hopf-Algebra der Hopf-Algebra $H^*(X, \mathbb{F}_p)$. Die Frage nach der Existenz von p-Torsion in $H^*(X, \mathbb{Z})$ ist äquivalent mit der Existenz eines nicht trivialen Chow-Rings über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$. Wir studieren weiterhin für eine Primzahl p die p-exzeptionellen Grade von Kac, deren Existenz ebenfalls p-Torsion verursacht und geben verschiedene äquivalente Bedingungen für die Existenz von p-Torsion in der integralen Kohomologie an. Schließlich untersuchen wir den Torsionsindex von Demazure und geben weitere äquivalente Bedingungen für die Existenz von p-Torsion für eine Primzahl p an.

3.1 Die Sätze von Toda und Kac

Sei p eine Primzahl und X ein $\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. In disem Abschnitt untersuchen wir das Pullback-Diagramm $\mathcal{D}$

von Faserungen aus Kapitel 2

$$\begin{array}{ccccc}
* & \longrightarrow & X/T_X & = & X/T_X \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\
L & \longrightarrow & E = BT_X \times L & \xrightarrow{\mu} & BT_X \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle Bi} \\
L & \longrightarrow & B\tilde{X} & \xrightarrow{Bj} & BX
\end{array}$$

und untersuchen die induzierten Abbildungen in $\mathbb{F}_p$-Kohomologie. Wir haben zunächst die folgenden Sätze [K-N].

Satz 3.1.1. *Die induzierten Abbildungen*

$$\phi^* : H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(E, \mathbb{F}_p)$$

$$\mu^* : H^*(BT_X, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(E, \mathbb{F}_p)$$

sind Monomorphismen.

Beweis. Daß die induzierte Abbildung ϕ^* ein Monomorphismus ist, folgt aus Theorem 2.3.2. Die Behauptung für die induzierte Abbildung μ^* folgt aus Satz 2.2.18, denn danach bricht die Leray-Serre-Spektralsequenz der Faserung

$$L \longrightarrow E = BT_X \times L \longrightarrow BT_X$$

im E_2-Term zusammen. □

Korollar 3.1.2. *Für die induzierten Abbildungen $(Bi)^*$ und $(Bj)^*$ gilt, daß $ker\,(Bi)^* = ker\,(Bj)^*$.*

Beweis. Wir haben folgendes kommutative Diagramm von Faserungen

$$\begin{array}{ccccc}
E & \xrightarrow{\mu} & BT_X & \longrightarrow & BL \\
\downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle Bi} & & \| \\
B\tilde{X} & \xrightarrow{Bj} & BX & \xrightarrow{Bf} & L
\end{array}$$

Es ist also $Bi \circ \mu = Bj \circ \phi$, also gilt für die induzierten Abbildungen in $\mathbb{F}_p$-Kohomologie

$$\mu^* \circ (Bi)^* = \phi^* \circ (Bj)^*$$

Da μ^* und ϕ^* nach Satz 3.1.1 Monomorphismen sind, folgt unsere Behauptung. □

Wir betrachten nun wieder die induzierten Abbildungen l^* und k^* in $\mathbb{F}_p$-Kohomologie. Wir haben folgenden Satz

Satz 3.1.3. *Das Ideal $ker\, l^*$ ist ein Borel-Ideal in $H^*(E, \mathbb{F}_p)$.*

Beweis. Nach Theorem 2.3.2 bricht die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz der Faserung

$$X/T_X \longrightarrow E \xrightarrow{\phi} B\tilde{X}$$

im E_2-Term zusammen und die Sequenz

$$\mathbb{F}_p \longrightarrow H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\phi^*} H^*(E, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{l^*} H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p) \longrightarrow \mathbb{F}_p$$

ist nach Satz 1.1.3 koexakt, d.h. es gilt $ker\, l^* = (\overline{im\, \phi^*})$ Nach Theorem 2.3.2 und dem Beweis von Theorem 1.3.10 ist aber das Ideal $(\overline{im\, \phi^*})$ von einer regulären Folge erzeugt, nämlich

$$(\overline{im\, \phi^*}) = (\phi^*(x_1), ..., \phi^*(x_k), y_{k+1}, ...)$$

wobei $H^*(E, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[y_1, ..., y_k, y_{k+1}, ...]$. Also ist mit $(\overline{im\, \phi^*})$ auch $ker\, l^*$ ein Borel-Ideal. □

Wir können nun zwei wichtige Sätze für die Faserung

$$X/T_X \xrightarrow{k} BT_X \xrightarrow{Bi} BX$$

beweisen, die für den Fall kompakter Liesche Gruppen von Toda [To] und Kac [Kc] stammen. Der Beweis von Toda nutz die speziellen Berechnungen der $\mathbb{F}_p$-Kohomologie kompakter Liescher Gruppen aus. Wir geben hier homotopietheoretische Beweise dieser Sätze, durch Vergleich mit der charakteristischen Faserung über dem Kane-Notbohm-Raum $B\tilde{X}$.

Theorem 3.1.4 (Toda). *Sei p eine Primzahl und X ein $\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Das Ideal*

$$ker\, \{k^* : H^*(BT_X, \mathbb{F}_p) \to H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)\}$$

ist ein Borel-Ideal und wird von einer regulären Folge maximaler Länge erzeugt.

Beweis. Wir wählen nach dem Prozeß von Smith [Sm2], den wir zu Beginn von Abschnitt 1.3 beschrieben haben, eine minimale Idealbasis $h_1, ..., h_r, ...$ für das Ideal $ker\, k^*$. Nach Satz 3.1.1 ist die induzierte Abbildung μ^* ein Monomorphismus und wir können $h_1, ..., h_r, ...$ zu einer minimalen Idealbasis von $ker\, l^*$ erweitern.
Nach Satz 3.1.3 ist das Ideal $ker\, l^*$ ein Borel-Ideal und jede minimale Idealbasis von $ker\, l^*$ nach Satz 1.3.1 eine reguläre Folge. Also ist die Folge $h_1, ..., h_r, ...$ eine Teilfolge einer regulären Folge, also selbst eine reguläre Folge in $H^*(E, \mathbb{F}_p)$. Da $E = BT_X \times L$, ist $H^*(E, \mathbb{F}_p)$ ein freier graduierter $H^*(BT_X, \mathbb{F}_p)$-Modul. Nach Satz 1.2.19 folgt schließlich die Behauptung. □

Kac [Kc] behauptet für den Fall kompakter Liescher Gruppen, daß das Borel-Ideal von den verallgemeinerten Invarianten der Operation der Weyl-Gruppe erzeugt wird. Der in [Kc] gegebene Beweis ist jedoch falsch und es zeigt sich, daß ein sehr gründliches Studium der verallgemeinerten Invarianten notwendig ist, um zu einem wirklichen Verständnis der Situation im Falle der Existenz von p-Torsion zu kommen. Dies wird in [Ne-Ns-Sm] durchgeführt. Es ist immer noch eine offene Frage, ob die Behauptung von Kac richtig ist.

Theorem 3.1.5 (Kac). *Sei p eine Primzahl, X ein $\mathbb{F}_p$-Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X und R^* die Unteralgebra von $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$, die von*

$$im\,\{k^* : H^*(BT_X, \mathbb{F}_p) \to H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)\}$$

erzeugt wird. Dann ist $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ ein freier R^*-Modul.

Beweis. In dem Pullback-Diagramm $\mathcal{D}$ sind nach Satz 3.1.1 die induzierten Abbildungen μ^* und ϕ^* Monomorphismen. Außerdem ist $k^* = l^* \circ \mu^*$. Nach Korollar 2.3.3 wissen wir, daß $H^*(E, \mathbb{F}_p)$ ein freier $H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)$-Modul, und l^* ein Epimorphismus ist. Es gilbt einen Isomorphismus von $\mathbb{F}_p$-Vektorräumen

$$H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p \otimes_{H^*(B\tilde{X}, \mathbb{F}_p)} H^*(E, \mathbb{F}_p).$$

Ist P^* die Unteralgebra von $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$, die von $im\,l^*$ erzeugt wird, so folgt, daß $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ ein freier P^*-Modul ist und schließlich mit Satz 3.1.1, daß $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ ein freier R^*-Modul ist. □

3.2 Chow-Ringe und Torsion in der integralen Kohomologie

Sei X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. In diesem Abschnitt wollen wir die Kohomologie $H^*(X, \mathbb{Z})$ studieren und Kriterien für die Existenz von p-Torsion gewinnen. Wir betrachten die Faserung

$$X \xrightarrow{\pi} X/T_X \xrightarrow{k} BT_X$$

Es sei $\{E_r, d_r\}$ die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz dieser Faserung

$$E_2 \cong Tor_{H^*(BT_X, \mathbb{F})}(\mathbb{F}, H^*(X/T_X, \mathbb{F}))$$

$$E_r \Rightarrow H^*(X, \mathbb{F})$$

wobei der Körper $\mathbb{F}$ ein Körper ist. Es sei wieder R^* die Unteralgebra von $H^*(X/T_X, \mathbb{F})$, die von

$$im\,\{k^* : H^*(BT_X, \mathbb{F}) \to H^*(X/T_X, \mathbb{F})\}$$

erzeugt wird und wir setzen außerdem

$$S^* = H^*(X/T_X, \mathbb{F})//R^*$$

Der Hauptsatz in diesem Abschnitt ist das folgende Theorem

Theorem 3.2.1. *Sei X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X und $\mathbb{F}$ ein Körper. Die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der Faserung*

$$X \xrightarrow{\pi} X/T_X \xrightarrow{k} BT_X$$

bricht im E_2-Term zusammen. Sei $f_1, ..., f_n$ eine reguläre Folge, die das Borel-Ideal $\ker k^*$ erzeugt. Dann gilt als Algebren

(a) $E_2 \cong E_\infty$.

(b) $E_2 \cong S^* \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}f_1, ..., s^{-1}f_n)$

Ist $char\,(\mathbb{F}) \neq 2$*, so gibt es einen Isomorphismus von Algebren*

$$H^*(X, \mathbb{F}) \cong S^* \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}f_1, ..., s^{-1}f_n)$$

mit $deg\,(s^{-1}f_i) = deg\,(f_i) - 1$ *für alle* $i = 1, 2, ..., n$*.*

Beweis. Nach Theorem 3.1.5 ist $H^*(X/T_X, \mathbb{F})$ ein freier R^*-Modul und daher auch

$$H^*(X/T_X, \mathbb{F}) \cong S^* \otimes_{\mathbb{F}} R^*$$

als Moduln über der Algebra R^*. Ist $\{E_r, d_r\}$ die Eilenberg-Moore- Spektralsequenz so haben wir für den E_2-Term daher

$$\begin{aligned} E_2 &\cong Tor_{H^*(BT_X,\mathbb{F})}(\mathbb{F}, H^*(X/T_X, \mathbb{F})) \cong Tor_{H^*(BT_X,\mathbb{F})}(\mathbb{F}, S^* \otimes_{\mathbb{F}} R^*) \\ &\cong Tor_{H^*(BT_X,\mathbb{F})}(\mathbb{F}, R^*) \otimes_{\mathbb{F}} S^* \end{aligned}$$

denn $Tor_{H^*(BT_X,\mathbb{F})}(\mathbb{F}, ?)$ ist ein additiver Funktor und S^* ist ein trivialer $H^*(BT_X, \mathbb{F})$-Modul. Nach Satz 3.1.4 ist das Ideal $ker\,k^*$ ein Borel-Ideal und wird von einer regulären Folge maximaler Länge erzeugt, d.h. $ker\,k^* = (f_1, ..., f_n)$, wobei $f_1, ..., f_n$ eine reguläre Folge in $H^*(BT_X, \mathbb{F})$ von maximaler Länge ist. Dann ist nach Satz 1.3.2 der Koszul-Komplex $(\mathcal{K}, \partial)$

$$\mathcal{K} = H^*(BT_X, \mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}f_1, ..., s^{-1}f_n)$$

mit Differential ∂ gegeben durch

$$\partial(s^{-1}f_i) = f_i$$

mit $deg\,(s^{-1}f_i) = deg\,(f_i) - 1$ für $i = 1, 2, ..., n$ azyklisch. Er liefert eine freie Auflösung von $R^* \cong H^*(BT_X, \mathbb{F})/ker\,k^*$ als $H^*(BT_X, \mathbb{F})$-Modul. Also folgt

$$Tor_{H^*(BT_X,\mathbb{F})}(\mathbb{F}, R^*) \cong E(s^{-1}f_1, ..., s^{-1}f_n)$$

und damit für den E_2-Term als Algebren schließlich

$$E_2 \cong S^* \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}f_1, ..., s^{-1}f_n)$$

Also wird $E_2^{*,*}$ als Algebra erzeugt von den Termen $E_2^{0,*}$ und $E_2^{-1,*}$ und da die Differentiale d_r Derivationen von Algebren sind, folgt unmitelbar, daß die Spektralsequenz im E_2-Term zusammenbricht und damit folgt die Behauptung. □

Als eine Folgerung erhalten wir einen Beweis einer Behauptung von Kac für kompakte Liesche Gruppen [Kc], Theorem 2, die eine Verallgemeinerung eines Satzes von Leray für rationale Koeffizienten ist [Le]. Der von Kac gegebene Beweis ist wiederum nicht vollständig.

Korollar 3.2.2 (Kac). *Sei* X *ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus* T_X *und* $\mathbb{F}$ *ein Körper. Die Leray-Serre-Spektralsequenz* $\{E_r, d_r\}$ *der Faserung*

$$T_X \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/T_X$$

bricht im E_3-Term zusammen. Sei $f_1, ..., f_n$ eine reguläre Folge, die das Borel-Ideal $\ker k^*$ erzeugt. Dann gilt als Algebren

(a) $E_3 \cong E_\infty$.

(b) $E_3 \cong S^* \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}f_1, ..., s^{-1}f_n)$

Ist $char\,(\mathbb{F}) \neq 2$, *so gibt es einen Isomorphismus von Algebren*

$$H^*(X, \mathbb{F}) \cong S^* \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}f_1, ..., s^{-1}f_n)$$

mit $deg\,(s^{-1}f_i) = deg\,(f_i) - 1$ *für alle* $i = 1, 2, ..., n$.

Beweis. Für die Leray-Serre-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der betrachteten Faserung ist

$$E_2 \cong H^*(X/T_X, \mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} H^*(T_X, \mathbb{F})$$

$$E_r \Rightarrow H^*(X, \mathbb{F})$$

Wir betrachten das Diagramm von Faserungen

$$T_X \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/T_X \xrightarrow{k} BT_X$$

Wir haben folgende Isomorphismen als Algebren

$$H^*(T_X, \mathbb{F}) \cong E(u_1, ..., u_n)$$

$$H^*(BT_X, \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}[t_1, ..., t_n]$$

wobei $n = rg(T_X)$ und $deg(u_i) = 1$ ist. Die äußere Algebra wird von Erzeugern vom Grad 1 erzeugt. Ist

$$\sigma^* : H^*(BT_X, \mathbb{F}) \longrightarrow H^*(T_X, \mathbb{F})$$

der Einhängungsmorphismus in Kohomologie, so gilt:

$$\sigma^*(t_i) = u_i$$

für alle $i = 1, 2, ..., n$. In der vorliegenden speziellen Situation gilt für das Differential d_2 der Leray-Serre-Spektralsequenz

$$d_2(u_i) = k^*(t_i).$$

Da $E_2^{*,0} \cong H^*(X/T_X, \mathbb{F})$ ist, gilt für alle $x \in H^*(X/T_X, \mathbb{F})$ außerdem

$$d_2(x) = 0.$$

In dieser speziellen Situation läßt sich also der Komplex (E_2, d_2) mit dem Koszul-Komplex $(\mathcal{K}, \partial)$ identifizieren, gegeben durch

$$\mathcal{K} = H^*(X/T_X, \mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} E(u_1, ..., u_n)$$

mit dem Differential

$$\partial(x) = 0$$

$$\partial(u_i) = k^*(t_i).$$

Die Kohomologie des Koszul-Komplexes ist aber gerade wieder

$$H(\mathcal{K}, \partial) \cong Tor_{H^*(BT_X, \mathbb{F})}(\mathbb{F}, H^*(X/T_X, \mathbb{F})).$$

Es folgt daher für den E_3-Term der Spektralsequenz bis auf Graduierung

$$E_3 \cong Tor_{H^*(BT_X,\mathbb{F})}(\mathbb{F}, H^*(X/T_X,\mathbb{F}))$$

Nach Theorem 3.2.1 folgt somit

$$dim_{\mathbb{F}}(Tot(E_3)) = dim_{\mathbb{F}}(Tot(E^0H^*(X,\mathbb{F})$$

und es gilt für die Poincaré-Reihen

$$P(E_3,t) = P(E^0H^*(X,\mathbb{F}),t) = P(H^*(X,\mathbb{F}),t)$$

also bricht die Leray-Serre-Spektralsequenz im E_3-Term zusammen und es folgt die Behauptung. □

Wir notieren noch die folgende wichtige Folgerung aus Theorem 3.2.1

Korollar 3.2.3. *Sei X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X und $\mathbb{F}$ ein Körper. Dann ist die Sequenz*

$$\mathbb{F} \longrightarrow H^*(BT_X,\mathbb{F}) \xrightarrow{k^*} H^*(X/T_X,\mathbb{F}) \xrightarrow{\pi^*} H^*(X,\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$$

koexakt, d.h. $ker\,\pi^* = (\overline{im\,k^*})$. □

Wir wollen nun die Torsion in der integralen Kohomologie Liescher Schleifenräume studieren. Im folgenden sei X ein ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X und $\mathbb{F}$ ein Körper. Wir definieren zunächst die folgende charakteristische Algebra

Definition 3.2.4. Sei X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X und $\mathbb{F}$ ein Körper. Dann ist der *Chow-Ring* $CH^*(X,\mathbb{F})$ von X über $\mathbb{F}$ die Algebra, die von

$$im\,\{\pi^* : H^*(X/T_X,\mathbb{F}) \to H^*(X,\mathbb{F})\}$$

erzeugt wird.

Der Chow-Ring $CH^*(X,\mathbb{F})$ ist eine Unter-Hopf-Algebra der Hopf-Algebra $H^*(X,\mathbb{F})$ und ein Indikator für die Existenz von Torsion in der integralen Kohomologie von X. Die Terminologie ist dem Fall einer reduktiv algebraischen Gruppe entlehnt. Nach Grothendieck [G] ist $\pi^*(H^*(G/T_G,\mathbb{F}))$ für eine zusammenhängende kompakte Liesche Gruppe gerade der Chow-Ring $CH^*(G_{\mathbb{C}},\mathbb{F})$ der Komplexifizierung von G.

Aus Korollar 3.2.3 folgt für den Chow-Ring sofort

$$\begin{aligned} CH^*(X,\mathbb{F}) &= \pi^*(H^*(X/T_X,\mathbb{F})) \cong H^*(X/T_X,\mathbb{F})/ker\,\pi^* \\ &\cong H^*(X/T_X,\mathbb{F})/(\overline{im\,k^*}) \cong H^*(X/T_X,\mathbb{F})//R^* = S^* \end{aligned}$$

Es ist $H^*(X/T_X,\mathbb{F}) \cong R^* \otimes_{\mathbb{F}} S^*$ als R^*-Moduln und wir erhalten für die Poincaré-Reihen

$$P(H^*(X/T_X,\mathbb{F}),t) = P(R^*,t) \cdot P(S^*,t)$$

Sei zunächst $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$. Aus Theorem 3.2.1 folgt zunächst

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \cong CH^*(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} E(s^{-1}f_1, ..., s^{-1}f_n)$$

mit $deg\,(s^{-1}f_i) = deg\,(f_i) - 1$.

Nach dem Satz von Hopf-Leray-Borel [Mi-M] muß $H^*(X, \mathbb{Q})$ als Hopf-Algebra über $\mathbb{Q}$ isomorph zu einer äußeren Algebra mit $n = rg(X)$ Erzeugern von ungeradem Grad sein, also folgt

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \cong E(s^{-1}f_1, ..., s^{-1}f_n).$$

Daher ist der rationale Chow-Ring von X trivial

$$CH^*(X, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$$

und somit ist der Homomorphismus k^* ein Epimorphismus und

$$H^*(X/T_X, \mathbb{Q}) \cong R^* \cong H^*(BT_X, \mathbb{Q})/ker\,k^*$$

Das Borel-Ideal $ker\,k^*$ wird von der regulären Folge $f_1, ..., f_n$ erzeugt, d.h. $ker\,k^* = (f_1, ..., f_n)$. Wir definieren die $\mathbb{Q}$-*Grade* $(d_1, ..., d_n)$ als die natürlichen Zahlen

$$deg(f_i) = 2d_i$$

für alle $i = 1, 2, ..., n$. Wir haben einen Isomorphismus von Algebren

$$H^*(X/T_X, \mathbb{Q}) \cong \frac{\mathbb{Q}[t_1, ..., t_n]}{(f_1, ..., f_n)}$$

wobei $deg\,(t_i) = 2$ für alle $i = 1, 2, ..., n$. Diese Aussagen gelten für jeden Körper $\mathbb{F}$ mit $char(\mathbb{F}) = 0$.

Nach Theorem 2.3.5 ist $H^{unger}(X/T_X, \mathbb{Z}) = 0$, also ist die Poincaré-Reihe von $H^*(X/T_X, \mathbb{F})$ unabhängig vom Körper $\mathbb{F}$ und mit den obigen Überlegungen erhalten wir

$$P(H^*(X/T_X, \mathbb{F}), t) = P(H^*(X/T_X, \mathbb{Q}), t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - t^{2d_i}}{1 - t^2}$$

Sei jetzt $\mathbb{F} = \mathbb{F}_p$. Die Hopf-Algebra $CH^*(X, \mathbb{F}_p)$ ist als Quotient von $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ nach Theorem 2.3.4 in geraden Graden konzentriert und nach dem Satz von Milnor-Moore [Mi-M] ist sie von der Form

$$CH^*(X, \mathbb{F}_p) \cong \frac{\mathbb{F}_p[x_1, ..., x_m]}{(x_1^{p^{s_1}}, ..., x_m^{p^{s_m}})}$$

wobei für die Erzeuger gilt $deg\,(x_i) = 2k_i$ für alle $i = 1, 2, ..., m$. Also ist die Poincaré-Reihe von der Form

$$P(CH^*(X, \mathbb{F}_p), t) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1 - t^{2k_i p^{s_i}}}{1 - t^{2k_i}} \quad (*)$$

Andererseits gilt aber auch die Gleichung

$$P(CH^*(X, \mathbb{F}_p), t) = \frac{P(H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p), t)}{P(R^*, t)}$$

und wir haben für die Algebra R^* allgemein den folgenden Isomorphismus

$$R^* \cong \frac{H^*(BT_X, \mathbb{F}_p)}{ker\, k^*} \cong \frac{\mathbb{F}_p[t_1, ..., t_n]}{(f_{1,p}, ..., f_{n,p})}$$

wobei das Borel-Ideal $ker\, k^*$ von der regulären Folge $f_{1,p}, ..., f_{n,p}$ erzeugt wird, d.h. $ker\, k^* = (f_{1,p}, ..., f_{n,p})$. Wir definieren die *p-Grade* $(d_{1,p}, ..., d_{n,p})$ als die natürlichen Zahlen

$$deg(f_{i,p}) = 2d_{i,p}$$

für alle $i = 1, 2, ..., n$ und damit folgt für die Poincaré-Reihe über $\mathbb{F}_p$

$$P(R^*, t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - t^{2d_{i,p}}}{1 - t^2}.$$

Für die Poincaré-Reihe von $CH^*(X, \mathbb{F}_p)$ erhalten wir also abschließend den Ausdruck

$$P(CH^*(X, \mathbb{F}_p), t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - t^{2d_i}}{1 - t^{2d_{i,p}}} \quad (**).$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt zunächst, daß $m = n$ sein muß und machen wir die Substitution $z = t^2$, so erhalten wir die Gleichung

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1 - z^{k_i p^{s_i}}}{1 - z^{k_i}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 - z^{d_i}}{1 - z^{d_{i,p}}}$$

Es ist daher $k_i = d_{i,p}$ für $i = 1, 2, ..., n$ und es gibt eine Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ und eine Permutation der Indizes derart, daß

$$d_i = p^{s_i} d_{i,p} \text{ mit } s_i > 0 \text{ für } i = 1, 2, ..., r.$$

$$d_i = d_{i,p} \text{ für } i = r + 1, ..., n.$$

Für die Poincaré-Reihe des Chow-Rings über $\mathbb{F}_p$ folgt also mit diesen Bezeichnungen

$$P(CH^*(X, \mathbb{F}_p), t) = \prod_{i=1}^{r} \frac{1 - t^{2p^{s_i} d_{i,p}}}{1 - t^{2d_{i,p}}}$$

Die auftretenden Zahlen wurden von Kac [Kc] und Demazure [De] für kompakte Liesche Gruppen studiert. Wir definieren

Definition 3.2.5. Sei p eine Primzahl und X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Die natürlichen Zahlen $d_1, , ..., d_r$ heißen die *p-exzeptionellen Grade* von X.

Wir erhalten schließlich aus diesen Überlegungen das folgende allgemeine Theorem, als Verallgemeinerung eines entsprechenden Theorems von Kac für kompakte Liesche Gruppen [Kc], Theorem 3. Nach dem universellen Koeffiziententheorem reicht es aus Koeffizienten im Primkörper $\mathbb{F}_p$ zu betrachten.

Theorem 3.2.6. *Sei X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Dann gelten die folgenden Aussagen*
(1) Sei $\mathbb{F}$ ein Körper mit $char(\mathbb{F}) = 0$. Dann bricht die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der Faserung

$$X \xrightarrow{\pi} X/T_X \xrightarrow{k} BT_X$$

im E_2-Term zusammen. Sei $f_{2d_1}, ..., f_{2d_n}$ eine reguläre Folge, die das Borel-Ideal $\ker k^*$ erzeugt. Es gilt für den Chow-Ring über dem Körper $\mathbb{F}$

$$CH^*(X, \mathbb{F}) \cong \mathbb{F}$$

und es gibt einen Isomorphismus von Algebren

$$H^*(X, \mathbb{F}) \cong E(s^{-1}f_{2d_1}, ..., s^{-1}f_{2d_n})$$

(2) Sei $\mathbb{F}$ ein Körper mit $char(\mathbb{F}) = p$ für eine Primzahl p. Dann bricht die Eilenberg-Moore-Spektralsequenz $\{E_r, d_r\}$ der Faserung

$$X \xrightarrow{\pi} X/T_X \xrightarrow{k} BT_X$$

im E_2-Term zusammen. Sei $f_{2d_{1,p}}, ..., f_{2d_{n,p}}$ eine reguläre Folge, die das Borel-Ideal $\ker k^*$ erzeugt. Dann gibt es eine Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ und eine Permutation der Indizes derart, daß

$$d_i = p^{s_i} d_{i,p} \text{ mit } s_i > 0 \text{ für } i = 1, 2, ..., r.$$

$$d_i = d_{i,p} \text{ für } i = r+1, ..., n.$$

Es gilt für den Chow-Ring über dem Körper $\mathbb{F}$

$$CH^*(X, \mathbb{F}) \cong \frac{\mathbb{F}[x_{2d_{1,p}}, ..., x_{2d_{r,p}}]}{(x_{2d_{1,p}}^{p^{s_1}}, ..., x_{2d_{r,p}}^{p^{s_r}})}$$

und es gibt einen Isomorphismus von Algebren

$$E_2 \cong CH^*(X, \mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}f_{2d_{1,p}}, ..., s^{-1}f_{2d_{n,p}})$$

Ist $char(\mathbb{F}) \neq 2$ so gibt es einen Isomorphismus von Algebren

$$H^*(X, \mathbb{F}) \cong CH^*(X, \mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} E(s^{-1}f_{2d_{1,p}}, ..., s^{-1}f_{2d_{n,p}})$$

Ist $char(\mathbb{F}) = 2$, so gilt dies noch additiv als Moduln. □

Für die p-exzeptionellen Grade haben wir folgenden allgemeinen Satz als Verallgemeinerung eines Satzes von Kac [Kc], Theorem 4.

Satz 3.2.7. *Sei p eine Primzahl und X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Dann ist $d_i/d_{i,p} = 1$ oder $d_i/d_{i,p} = p^{\nu_p(d_i)}$, wobei $\nu_p(d_i)$ die maximale p-Potenz in d_i ist. Mit anderen Worten, ist $d_{i,p}$ ein echter Teiler von d_i, so ist $d_{i,p}$ relativ prim zu p.*

Beweis. Angenommen, $d_{i,p} \equiv 0 \ mod p$ für ein $i \in \{1, 2, ..., r\}$, wobei die natürliche Zahl r wie in Theorem 3.2.6 gewählt ist. Dann hat der Chow-Ring $CH^*(X, \mathbb{F}_p)$ einen Erzeuger x_i vom Grad $2d_{i,p}$ und daher ist nach Theorem 3.2.6

$$Q^{d_{i,p}} H^*(X, \mathbb{F}_p) \neq 0$$

wobei $Q(?)$ der Funktor der unzerlegbaren Elemente ist. Nach dem Theorem von Lin [L1], [K2] ist für jeden endlichen Schleifenraum $H^{unger}(\Omega X, \mathbb{Z}) = 0$ und daher auch für jede Primzahl p nach dem universellen Koeffiziententheorem $H^{unger}(\Omega X, \mathbb{F}_p) = 0$ für jede Primzahl p.

Wir betracchten den Einhängungsmorphismus in $\mathbb{F}_p$-Kohomologie

$$\sigma^* : H^*(X, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(\Omega X, \mathbb{F}_p)$$

Nach einem Satz von Browder [Br], Theorem 5.14 ist die induzierte Abbildung

$$\sigma^* : Q^l H^*(X, \mathbb{F}_p) \longrightarrow P^{l-1} H^*(\Omega X, \mathbb{F}_p)$$

ein Monomorphismus für $l \neq 2mp^a + 2$. Dabei ist $P(?)$ der Funktor der primitiven Elemente. Da $d_{i,p} \equiv 0 \ mod p$ ist, folgt, daß $2d_{i,p} \neq 2mp^a + 2$ und $H^{2d_{i,p}-1}(\Omega X, \mathbb{F}_p) \neq 0$ im Widerspruch zum Theorem von Lin. Also ist $d_{i,p} \not\equiv 0 \ mod p$, wie behauptet. □

Die p-exzeptionellen Grade kodieren viel Information über die Kohomologie $H^*(X, \mathbb{F}_p)$ eines Lieschen Schleifenraumes X mit maximalem Torus T_X, wie das folgende Theorem zeigt:

Theorem 3.2.8. *Sei p eine Primzahl und X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Die Grade einer regulären Folge, die das Borel-Ideal $ker\, k^*$ erzeugt, bestimmen die p-exzeptionellen Grade und damit die Poincaré-Reihe von $H^*(X, \mathbb{F}_p)$ und den Chow-Ring $CH^*(X, \mathbb{F}_p)$. Umgekehrt bestimmen die p-exzeptionellen Grade die Grade einer regulären Folge, die das Borel-Ideal $ker\, k^*$ erzeugt.*

Beweis. Seien $2d_1, ..., 2d_n$ bzw. $2e_1, ..., 2e_n$ die Grade einer regulären Folge, die das Borel-Ideal $ker\, k^*$ über dem Körper $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{F}_p$ erzeugen. Alle Grade seien nicht-absteigend geordnet.
Ist $d_n = e_n$, so ist d_n kein exzeptioneller Grad und wir streichen $2d_n$ aus der ersten und $2e_n$ aus der zweiten Folge. Ist $d_n \neq e_n$, so ist d_n ein p-exzeptioneller Grad und wir streichen $2d_n$ aus der ersten Folge und den Teiler $2d_n p^{-\nu_p(d_n)}$ von e_n aus der zweiten Folge, wobei $\nu_p(d_n)$ die maximale p-Potenz in d_n ist. Es bleibt dann $d_{n,p}$ in der zweiten Folge übrig. Den gleichen Prozeß wenden wir auf die anderen Folgenelemente an, bis schließlich alle $d_{1,p}, ..., d_{r,p}$ bestimmt sind. Dies legt nach Theorem 3.2.6 den Chow-Ring und die Poincaré-Reihe fest und umgekehrt. □

Wir können nun weitreichende Folgerungen für die Existenz von Torsion in der integralen Kohomologie Liescher Schleifenräume mit maximalem Torus ziehen. Dies verallgemeinert Resultate von Borel [Bo2] und Kac [Kc] für den Fall zusammenhängender kompakter Liescher Gruppen. Die Existenz eines nicht trivialen Chow-Rings über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ oder die Existenz von p-exzeptionellen Graden sind verantwortlich für p-Torsion.

Wir haben folgendes Theorem für Liesche Schleifenräume mit maximalem Torus

Theorem 3.2.9. *Sei p eine Primzahl und X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Sei $f_{2d_{1,p}}, ..., f_{2d_{n,p}}$ eine reguläre Folge, die das Borel-Ideal $\ker k^*$ erzeugt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent*

(i) $H^*(X, \mathbb{Z})$ hat keine p-Torsion.
(ii) $H^*(X, \mathbb{F}_p) \cong E(s^{-1}f_{2d_{1,p}}, ..., s^{-1}f_{2d_{n,p}})$
(iii) $H^*(BX, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[f_{2d_{1,p}}, ..., f_{2d_{n,p}}]$
(iv) $H^*(BX, \mathbb{Z})$ hat keine p-Torsion.
(v) Für den Chow-Ring ist $CH^*(X, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p$.
(vi) $k^* : H^*(BT_X, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ ist ein Epimorphismus.
(vii) Es gibt keine p-exzeptionellen Grade, d.h. $r = 0$.

Ist $p \nmid d_i$ für alle $i = 1, 2, ..., n$, so sind die Bedingungen erfüllt. Betrachten wir Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, so sind die Bedingungen auch erfüllt.

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen (i) bis (iv) ist klar und für jeden endlichen Schleifenraum wahr [K2]. Die spezielle Form der äußeren Algebra und der Polynomalgebra folgt aus Theorem 3.2.6.

Ist $CH^*(X, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p$, so ist auch $S^* \cong H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)//R^* \cong \mathbb{F}_p$ und damit $im\, k^* \cong H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$, also ist k^* ein Epimorphismus. Die umgekehrte Richtung folgt analog und somit ist die Äquivalenz von (v) und (vi) gezeigt.

Ist $CH^*(X, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p$, so ist

$$\frac{\mathbb{F}_p[x_{2d_{1,p}}, ..., x_{2d_{r,p}}]}{(x_{2d_{1,p}}^{p^{s_1}}, ..., x_{2d_{r,p}}^{p^{s_r}})} \cong \mathbb{F}_p$$

und damit $s_1 = \cdots = s_r = 0$, also $d_i = d_{i,p}$ für alle $i = 1, 2, ..., n$ und es gibt keine p-exzeptionellen Grade. Die umgekehrte Richtung folgt wieder analog und somit folgt die Äquivalenz von (v) und (vii).

Hat $H^*(X, \mathbb{Z})$ hat keine p-Torsion, so ist

$$H^*(X, \mathbb{F}_p) \cong E(s^{-1}f_{2d_{1,p}}, ..., s^{-1}f_{2d_{n,p}})$$

Da $CH^*(X, \mathbb{F}_p) = \pi^*(H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p))$ eine Unter-Hopf-Algebra von $H^*(X, \mathbb{F}_p)$ ist, die in geraden Graden konzentriert ist, muß $CH^*(X, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p$ sein. Ist umgekehrt $CH^*(X, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p$, so ist nach Theorem 3.2.6 auch

$$H^*(X, \mathbb{F}_p) \cong E(s^{-1}f_{2d_{1,p}}, ..., s^{-1}f_{2d_{n,p}})$$

also hat $H^*(X, \mathbb{Z})$ keine p-Torsion. Das beweist die Äquivalenz der Aussagen (i) und (v). Der Rest der Behauptung folgt wieder aus Theorem 3.2.6. □

Definition 3.2.10. Sei X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Eine Primzahl p ist *gut*, wenn eine und damit alle Bedingungen des vorherigen Theorems erfüllt sind. Ansonsten heißt p eine *schlechte* Primzahl.

Kac untersucht in [Kc] einfache kompakte Liesche Gruppen und deren Torsion. Aus den klassischen Berechnungen der Kohomologie solcher Gruppen, gewinnt er eine genaue Übersicht über die guten und schlechten Primzahlen und die zugehörigen exzeptionellen Grade.

Sei p eine Primzahl und X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Aus Theorem 2.3.2 folgt, daß die Algebra $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ eine *Poincaré-Dualitäts-Algebra* ist, d.h. ein graduierter vollständiger Durchschnitt über dem Körper $\mathbb{F}_p$ [Sm4], Theorem 6.5.1. Wir erhalten hieraus eine weitere Charakterisierung der p-Torsion in der Kohomologie $H^*(X, \mathbb{Z})$.

Theorem 3.2.11. *Sei p eine Primzahl, X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X und $[X/T_X]_p \in H^{2d}(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ die $\mathbb{F}_p$- Fundamentalklasse. Dann ist*

$$Im\{k^* : H^{2d}(BT_X, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^{2d}(X/T_X, \mathbb{F}_p)\} = (D(\mathbb{F}_p) \cdot [X/T_X]_p)$$

für eine Zahl $D(\mathbb{F}_p) \in \mathbb{N}$ und $H^*(X, \mathbb{Z})$ hat p-Torsion genau dann, wenn p die Zahl $D(\mathbb{F}_p)$ teilt.

Beweis. Wir betrachten die Faserung

$$X/T_X \xrightarrow{k} BT_X \xrightarrow{Bi} BX.$$

Da $H^*(X, \mathbb{Z})$ eine Poincaré-Dualitäts-Algebra ist, gibt es eine Zahl d mit $H^k(X, \mathbb{Z}) = 0$ für alle $k > 2d$ und für eine Zahl $D(\mathbb{F}_p) \in \mathbb{N}$ ist

$$Im\{k^* : H^{2d}(BT_X, \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^{2d}(X/T_X, \mathbb{F}_p)\} = (D(\mathbb{F}_p) \cdot [X/T_X]_p)$$

Es ist $(D(\mathbb{F}_p) \cdot [X/T_X]_p) \neq 0$ genau dann, wenn $p \nmid D(\mathbb{F}_p)$. Nach einem Satz von Borel [Bo3], lemme 3.1, ist daher der Morphismus $(Bi)^*$ ein Monomorphismus genau dann, wenn $p \nmid D(\mathbb{F}_p)$. Ist aber $(Bi)^*$ ein Monomorphismus, so ist $H^*(BX, \mathbb{F}_p)$ als Unteralgbra der Polynomalgebra $H^*(BT_X, \mathbb{F}_p)$ wieder eine Polynomalgebra und hat keine p-Torsion und umgekehrt. Damit folgt die Behauptung. □

Wir können diese Überlegungen auch integral durchführen und erhalten den *Torsionsindex* von Demazure [De], der definiert ist als Ordnung des Kokerns der Abbildung

$$k^* : H^{2d}(BT_X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2d}(X/T_X, \mathbb{Z}).$$

Wir haben das folgende Theorem:

Theorem 3.2.12. *Sei X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X und $[X/T_X] \in H^{2d}(X/T_X, \mathbb{Z})$ die Fundamentalklasse. Dann ist*

$$Im\{k^* : H^{2d}(BT_X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2d}(X/T_X, \mathbb{Z})\} = (D \cdot [X/T_X])$$

für eine Zahl $D \in \mathbb{N}$. Die Zahl D ist der Torsionsindex von X und hat die Primfaktorzerlegung

$$D = p_1^{l_1} \cdots p_m^{l_m}$$

wobei $p_1, ..., p_m$ die schlechten Primzahlen von X sind. $H^*(X, \mathbb{Z})$ ist torsionsfrei genau dann, wenn $D = 1$.

Beweis. Aus dem universellen Koeffiziententheorem und der Tatsache, daß $H^*(X/T_X, \mathbb{F}_p)$ eine Poincaré-Dualitäts-Algebra ist, folgt $H^k(X/T_X, \mathbb{Z}) = 0$ für alle $k > 2d$ und

$$H^{2d}(X/T_X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

erzeugt von der Fundamentalklasse $[X/T_X]$. Außerdem ist die Cup-Produkt-Paarung

$$\cup : H^i(X/T_X, \mathbb{Z}) \otimes H^{2d-i}(X/T_X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2d}(X/T_X, \mathbb{Z})$$

nicht singulär und es folgt schließlich aus Theorem 3.2.11 und dem universellen Koeffiziententheorem

$$Im\{k^* : H^{2d}(BT_X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{2d}(X/T_X, \mathbb{Z})\} = (D \cdot [X/T_X])$$

für eine Zahl $D \in \mathbb{N}$. Dabei ist die Zahl $D(\mathbb{F}_p)$ die *mod p*-Reduktion von D und $H^*(X, \mathbb{Z})$ hat p-Torsion genau dannn, wenn $p \nmid D$. Sind $p_1, ..., p_m$ die schlechten Primzahlen von X, so muß die Zahl D eine Primfaktorzerlegung der Form

$$D = p_1^{l_1} \cdots p_m^{l_m}$$

haben und daher ist $H^*(X, \mathbb{Z})$ torsionsfrei genau dann, wenn $D = 1$. Der Rest der Behauptung ist klar. □

Sei X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X. Neben dem Torsionsindex D von X können wir auch das folgende Produkt betrachten. Seien $p_1, ..., p_m$ die schlechten Primzahlen von X. Für jede dieser schlechten Primzahlen p_j existieren p_j-exzeptionelle Grade $d_1^{(j)}, ..., d_{r_j}^{(j)}$. Wir bilden nun das Produkt

$$\prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{r_j} d_i^{(j)} / d_{i,p_j}^{(j)} = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{r_j} p^{\nu_{p_j}(d_i^{(j)})}.$$

Dieses Produkt hat eine Zerlegung in dieselben Primzahlen wie der Torsionsindex D. Die Teilberechnungen von Demazure [De] und Kac [Kc] für kompakte Liesche Gruppen legen folgende Vermutung nahe, für die es insbesondere wünschenswert wäre, einen konzeptionellen Beweis zu finden.

Vermutung 3.2.13. *Sei X ein Liescher Schleifenraum mit maximalem Torus T_X und D der Torsionsindex von X. Dann ist*

$$D = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{r_j} d_i^{(j)} / d_{i,p_j}^{(j)} = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{r_j} p^{\nu_{p_j}(d_i^{(j)})}$$

wobei $p_1, ..., p_m$ die schlechten Primzahlen von X sind.

Betrachten wir nur eine spezielle Primzahl p, so sind natürlich alle Aussagen in disem Abschnitt wahr, wenn wir $\mathbb{F}_p$-Liesche Schleifenräume mit maximalem Torus T_X betrachten. Wir ersetzen dann integrale Kohomologie jeweils durch $\mathbb{Z}_{(p)}$-Kohomologie. Mit den in Abschnitt 2.3 gemachten Einschränkungen erhalten wir auch wieder entsprechende Ausagen für p-kompakte Gruppen.

Literaturverzeichnis

[A1] J.F.Adams: Lectures on generalized cohomology theories, LNMS **99** (1969), 1-138

[A2] J.F.Adams: Stable Homotopy and Generalized Homology, Chicago Lectures in Math. (1974)

[Ba] P.F.Baum: On the Cohomology of Homogenous Spaces, *Topology* **7** (1968), 15-38

[Bo1] A.Borel: Sur la cohomologie des éspaces fibré principaux et des éspaces homogènes de groupes de Lie compacts, *Annals of Math.* **57** (1953), 115-207

[Bo2] A.Borel: Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 273-342

[Bo3] A.Borel: Sur la torsion des groupes de Lie, *J. Math Pures et Appl.* **35** (1955), 127-139

[Bt] R.Bott: An Application of Morse Theory to the Topology of Lie Groups, Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 251-281

[Bou-Kan] A.K.Bousfield, D.M.Kan: Homotopy Limits, Completions and Localizations, LNMS **304** (1972)

[Br] W.Browder: On Differential Hopf Algebras, *Trans. of A.M.S.* **107** (1963), 163-176

[B-P] E.H.Brown, F.P.Peterson: A spectrum whose $\mathbb{Z}_p$- cohomology is the algebra of reduced p-th powers, *Topology* **5** (1966), 144-154

[C-E] H.Cartan, S.Eilenberg: Homological Algebra, Princeton University Press (1956)

[Co] J.M.Cohen: Coherent Graded Rings and the Non-Existence of spaces of Finite Stable Homotopy Type,*Comm. Math. Helv.* **44** (1969), 217-228

[C-Sm] P.E.Conner, L.Smith: On the Complex Bordism of Finite Complexes, *Publ. I.H.E.S. No.* **37** (1969), 117-222

[De] M.Demazure: Invariants symètrique entiers des groupes de Weyl et torsion, *Invent. Math.* **21** (1973), 287-301

[D-W1] W.G.Dwyer, C.W.Wilkerson: A New Finite Loop Space at the Prime Two, *Journal of A.M.S.* **6** (1993), 37-64

[D-W2] W.G.Dwyer, C.W.Wilkerson: Homotopy Fixed Point Methods for Lie Groups and Finite Loop Spaces, *Annals of Math.* **139** (1994), 395-442

[E-M] S.Eilenberg, J.C.Moore: Homology and Fibrations I, *Comm. Math. Helv.* **40** (1966), 199-236

[G] A.Grothendieck: Torsion homologique et sections rationelles, Sem. C.Chevalley, exposé 5, ENS (1958)

[Kc] V.G.Kac: Torsion in Cohomology of Compact Lie Groups and Chow Rings of Reductive Algebraic Groups, *Invent. Math.* **80** (1985), 69-79

[K1] R.Kane: Implications in Morava K-theory, *Mem. of A.M.S.* **340** (1986)

[K2] R.Kane: The Homology of Hopf Spaces, North Holland Math. Lib. vol. 40 (1988)

[K-N] R.Kane, D.Notbohm: Elementary Abelian p-Subgroups of Lie Groups, *Publ. R.I.M.S, Kyoto Univ.* **27** (1991), 801-811

[Le] J.Leray: Sur l'homologie des groupes de Lie, des espaces homogènes et des espaces fibré principaux. Colloque de Topologie Algèbrique, Bruxelles (1950)

[L1] J.P.Lin: Torsion in H-Spaces II, *Annals of Math.* **107** (1978), 41-88

[L2] J.P.Lin: Two Torsion and the Loop Space Conjecture, *Annals of Math.* **115** (1983), 35-91

[Mi] J.W.Milnor: On the Cobordism Ring Ω^* and a Complex Analogue Part I, *Amer. J. of Math.* **82** (1960), 505-521

[Mi-M] J.W.Milnor, J.C.Moore: On the Structure of Hopf Algebras, *Annals of Math.* **81** (1965), 211-264

[Mø-N1] J.M.Møller, D.Notbohm: Centers and Finite Coverings of Finite Loop Spaces, *J. reine angew. Math.* **456** (1994), 99-133

[Mø-N2] J.M.Møller, D.Notbohm: Connected Finite Loop Spaces with Maximal Tori, *Mathematica Gottingensis* **14** (1994)

[Ne-Ns-Sm] F.Neumann, M.D.Neusel, L.Smith: Rings of Generalized and Stable Invariants of Pseudoreflections and Pseudoreflection Groups, to appear in *J. of Algebra* (1996)

[N] D.Notbohm: Classifying Spaces of Compact Lie Groups and Finite Loop Spaces, Handbook of Algebraic Topology (ed. I.M.James), Elsevier (1995), 1049-1094

[Ra] D.C.Ravenel: Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres, Academic Press (1986)

[R1] D.L.Rector: Loop Structures on the Homotopy Type of S^3, Symposium on Algebraic Topology Seattle 1971, LNMS **249** (1971), 99-105

[R2] D.L.Rector: Subgroups of Finite Dimensional Topological Groups, *J. Pure Appl. Algebra* **1** (1971), 253-273

[R2] D.L.Rector: Noetherian Cohomology Rings and Finite Loop Spaces with Torsion, *J. Pure Appl. Algebra* **32** (1984), 191-217

[S] J.-P.Serre: Faisceaux Algébriques Coherents, *Ann. of Maths* **61**, 197-278

[Si] K.Sinkinson: The Cohomology of Certain Spectra Associated with the Brown-Peterson Spectrum, *Duke J. Math.*, **43** (1976), 605-622

[Sm1] L.Smith: The Cohomology of Stable Two Stage Postnikov Systems, *Ill. J. of Math.* **11** (1967), 310-329

[Sm2] L.Smith: Homological Algebra and the Eilenberg-Moore Spectral Sequence, *Trans. of A.M.S.* **129** (1967), 58-93

[Sm3] L.Smith: On the finite Generation of $\Omega^U_*(X)$, *J. of. Math. and Mec.* **18** (1969), 1017-1024

[Sm4] L.Smith: Polynomial Invariants of Finite Groups, Research Notes in Mathematics vol. 6, A.K. Peters (1995)

[T] J.Tate: Homology of Noetherian Rings and Local Rings, *Ill. J. of Math.* **1** (1957), 14-27

[To] H.Toda: On the Cohomology Ring of Some Homogenous Spaces, *J. Math. Kyoto Univ.* **15** (1975), 185-199

[Wi] C.W.Wilkerson: Rational Maximal Tori, *J. Pure Appl. Algebra* **4** (1974), 261-272

[W] W.S.Wilson: The Ω-Spectrum for Brown-Peterson Cohomology II, *Amer. J. of Math.* **97** (1975), 101-123