Verallgemeinerte „Small Cancellation"-Theorie

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fachbereiche
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Michael Autenrieth
aus München

Göttingen 1996

D7
Referent: Prof. Dr. S.J. Patterson
Korreferentin: Prof. Dr. R. Kellerhals
Tag der mündlichen Prüfung: 19.6.1996

Einleitung

Ein früher Höhepunkt der kombinatorischen Gruppentheorie war zweifellos die Dehnsche Lösung des Wort- und Konjugationsproblems für Flächengruppen. In seiner ersten, geometrischen Arbeit [4] verwendet Dehn die Operation der Flächengruppen auf der hyperbolischen Halbebene $I\!H^2$ und vergleicht die Entfernungen im Gruppengraphen mit den Entfernungen in $I\!H^2$. Kurze Zeit später gab Dehn einen zweiten, rein kombinatorischen Beweis [5] für seine Lösung, in dem er nur benutzt, wie sich die Relationen zu einer Pflasterung der Halbebene zusammenfügen.

Mit der „small cancellation"-Theorie wurde in den sechziger Jahren dieser zweite, kombinatorische Beweis wiederentdeckt ([7], [8], [14], [22]). Zahlreiche Autoren variierten diese Methoden ([6], [11], [12], [13], [15], [21]), um sie auf eine größere Menge endlich präsentierter Gruppen anwenden zu können. Die klassischen „small cancellation"-Bedingungen implizieren die Asphärizität der Präsentation [14]. Daher werden diese Bedingungen von Präsentationen der Fundamentalgruppen höherdimensionaler hyperbolischer Mannigfaltigkeiten nicht erfüllt. Auch die oben angegebenen Variationen liefern für diese Gruppen keinen allgemein anwendbaren Ansatz.

Anfang der achtziger Jahre gelang es Cannon [2], die erste, geometrische Lösung von Dehn auf die Fundamentalgruppen von beliebigen kompakten hyperbolischen n-Mannigfaltigkeiten zu übertragen. Kurz darauf entwickelte Gromov die Theorie der hyperbolischen Gruppen [9].

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit der Frage, ob und wie wir mit der Theorie der hyperbolischen Gruppen eine Verallgemeinerung des zweiten, kombinatorischen Beweises von Dehn für alle hyperbolischen Gruppen erhalten. Wir können dieses Problem so formulieren:

Wie kann allein aufgrund der kombinatorischen Eigenschaften der definierenden Relationen die Hyperbolizität einer endlich präsentierten Gruppe nachgewiesen und ein Dehn-Algorithmus bestimmt werden?

Die Hyperbolizität einer Gruppe wird durch Eigenschaften aller geodätischer Dreiecke im Gruppengraphen definiert und ist somit eine globale Eigenschaft des, im allgemeinen unendlich großen, Gruppengraphen. Aus den kombinatorischen Eigenschaften der definierenden Relationen folgen aber allenfalls lokale Aussagen. Gromov zeigt in [9], Kapitel 6.8 (siehe auch [1], Kapitel 8), daß sich lokale Hyperbolizität in hinreichend großen Umgebungen im Gruppengraphen auf den ganzen Raum ausbreitet. Gromov gelingt es damit, einen Hyperbolizitätstest für alle endlich präsentierten Gruppen zu konstruieren ([9], Kapitel 2.3.G) und somit die obige Frage zu beantworten. Gromovs Lösung ist allerdings kaum praktikabel, da eine äußerst lange Liste all der Relationen angelegt werden muß, die sich auf eine gewisse Weise aus den definierenden Relationen ergeben können.

In dieser Arbeit geben wir einen neuen Beweis für die Ausbreitung lokaler Hyperbolizität, der gleichzeitig aufzeigt, wie „small cancellation"-Methoden auf alle hyperbolischen Gruppen direkt angewendet werden können. Das neue Hyperbolizitätskriterium in Satz 3.2.1 hat den Vorteil, daß wir nur einige Relationen mit gewissen Eigenschaften finden müssen, um die Hyperbolizität der Gruppe nachzuweisen. Die klassische „small cancellation"-Bedingung $C'(\frac{1}{6})$ ergibt sich unmittelbar als Spezialfall.

Ebenso wie Gromov verwenden wir analytische Methoden, um kombinatorische Aussagen zu beweisen. Wir betrachten geschlossene Kurven in hyperbolischen Räumen und wollen Diagramme mit gewissen, für hyperbolische Räume typischen Eigenschaften in diese Kurven einspannen.

Die wesentliche Idee hierfür findet sich in Satz 3.1.2. Dort finden wir für jeden hyperbolischen Raum und jede natürliche Zahl p eine Energiefunktion mit folgender Eigenschaft:
Spannen wir in eine beliebige geschlossene Kurve ein bezüglich dieser Energiefunktion minimales Diagramm ein, so hat jede 2-Zelle, die ganz im Inneren eines solchen Diagramms liegt, mindestens p direkte Nachbarzellen. Indem wir $p > 6$ wählen, erhalten wir somit „negativ gekrümmte" Diagramme, in denen die klassischen „small cancellation"-Argumente anwendbar sind.

Mit Hilfe dieser neuen Technik finden wir eine ganze Reihe neuer äquivalenter Definitionen von hyperbolischen Räumen. Insbesondere geben wir in 2.4.2 eine neue Invariante eines geodätischen Raumes an, die genau dann 0 ist, falls der Raum hyperbolisch ist. Ferner beweisen wir, daß jeder geodätische Raum, der einer subquadratischen isoperimetrischen Ungleichung genügt, bereits eine lineare isoperimetrische Ungleichung erfüllt. Diese Tatsache wird bereits in Gromov [9], Kapitel 6.8. implizit formuliert. In den nachfolgenden Arbeiten ([3], [18], [19]), die diesen Artikel aufarbeiten, schränken sich die Autoren jedoch auf Gruppengraphen oder Riemannsche Mannigfaltigkeiten ein.

Um solche Beschränkungen zu vermeiden, arbeiten wir zunächst in beliebigen geodätischen Räumen und geben in den Kapiteln 1 und 2 einige grundlegende Definitionen. In den Notationen orientieren wir uns insbesondere an [1]. Neu ist hier die Definition des μ-Durchmessers einer beliebig geformten geschlossenen Kurve, der Gebrauch von subquadratischen Energiefunktionen in Lemma 2.3.2 und die Definition der verallgemeinerten „small cancellation"-Eigenschaft eines geodätischen Raumes.

In Kapitel 3.1 formulieren wir die Resultate für beliebige geodätische Räume. Insbesondere beschreiben wir hier, wie aus der Existenz von gewissen Energiefunktionen unmittelbar die Ausbreitung lokaler Hyperbolizität folgt. In Kapitel 3.2 geben wir die Konsequenzen an, die sich speziell für Gruppengraphen endlich präsentierter Gruppen ergeben. Die Beweise für die Aussagen in beliebigen geodätischen Räumen finden sich in Kapitel 4, die Beweise für die

Aussagen für Gruppengraphen in Kapitel 5.

Um die Lesbarkeit zu erhöhen, arbeiten wir häufig mit Bildern, die Operationen in Diagrammen beschreiben. Dieses Vorgehen läßt sich stets durch Verallgemeinerungen der Sätze von Jordan und Schönflies rechtfertigen. Wir verweisen hier insbesondere auf [17], Kapitel 10.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Patterson für seine Geduld bei der Betreuung der Arbeit und bei Dr. Jahnel für die Beweisidee aus Beispiel 3 in Kapitel 2.4 bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1 Notationen

1.1 Kurven und geodätische Räume

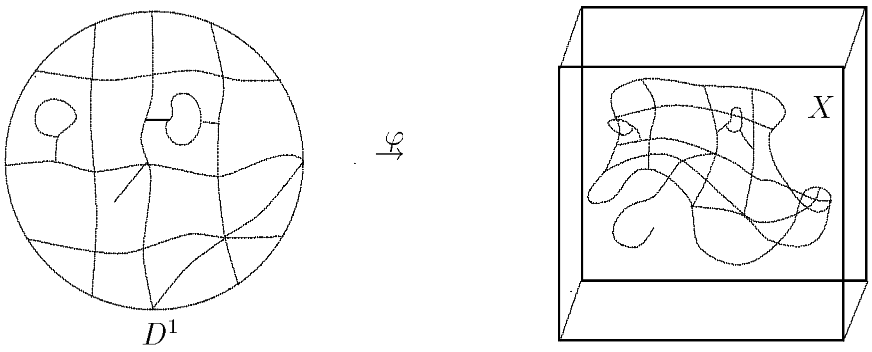
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die Theorie der Kurven und ihrer Längen in einem beliebigen metrischen Raum wird in [20] ausführlich dargestellt. Wir verwenden hier die folgenden Konventionen.

Eine Parameterdarstellung einer Kurve bzw. geschlossenen Kurve in X ist eine stetige Abbildung $[0,1] \to X$ bzw. $S^1 \to X$. Wir benutzen den topologischen Kurvenbegriff ohne Berücksichtigung der Orientierung. D.h. zwei Parameterdarstellungen beschreiben genau dann dieselbe Kurve bzw. dieselbe geschlossene Kurve, falls sie durch eine stetige und bijektive (eventuell orientierungsumkehrende) Parametertransformation ineinander überführt werden können.

Ist γ eine Kurve bzw. geschlossene Kurve, so bezeichnen wir mit $l(\gamma)$ deren Länge. Ist $l(\gamma)$ endlich, so heißt γ rektifizierbar. Eine Kurve heißt Geodäte, falls ihre Länge mit dem Abstand ihrer Endpunkte übereinstimmt. Auch konstante Abbildungen $[0,1] \to x \in X$ sind somit Parameterdarstellungen von Geodäten. Ein metrischer Raum X heißt geodätischer Raum, falls es zwischen je zwei Punkten mindestens eine Geodäte gibt.

1.2 Diagramme

Definition 1.2.1 (Diagramme) *Ein Diagramm D über einem geodätischen Raum X besteht aus einer CW-Zerlegung $D^0 \subset D^1 \subset D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ der Einheitskreisscheibe und einer stetigen Abbildung $\varphi : D^1 \to X$.*



Es ist dabei zu beachten, daß φ nur das 1-Skelett D^1 abbildet und daß sich das Bild von D^1 in X auf komplizierteste Weise selbst durchdringen oder gar nur aus einem Punkt bestehen kann.

Mit D_1 bezeichnen wir die Menge der 1-Zellen von D. Für jede 1-Zelle k gibt es eine bis Parametertransformationen eindeutige charakteristische Abbildung $[0,1] \to D^1$. Die Komposition mit φ definiert daher für jede 1-Zelle k eine Kurve in X, die wir ebenfalls mit k bezeichnen. Ein Diagramm heißt rektifizierbar, falls $l(k)$ für alle $k \in D_1$ endlich ist.

Mit D_2 bezeichnen wir die Menge der 2-Zellen von D. Jede 2-Zelle A kann in einer bis auf Orientierung und Wahl des Anfangspunktes eindeutigen Weise kreuzungsfrei längs der 1-Zellen auf dem Rand ∂A von A umlaufen werden (siehe [15], S. 236). Wir erhalten somit durch das Zusammensetzen der entsprechenden Kurven für jede 2-Zelle A eine wohldefinierte geschlossene Kurve in X, die wir ebenfalls mit ∂A bezeichnen. Die Länge $l(\partial A)$ dieser Kurve ist die Summe der Längen der 1-Zellen am Rand von A. Dabei müssen wir die 1-Zellen doppelt zählen, die von beiden Seiten aus A erreichbar sind.

Die Maschengröße eines Diagramms ist definiert durch

$$m(D) := \max_{A \in D_2} l(\partial A).$$

Die Einschränkung von φ auf den Rand ∂D von D definiert eine geschlossene Kurve in X, die wir die Randkurve des Diagramms nennen und auch mit ∂D bezeichnen.

Die 0- und 1-Zellen, die auf dem Rand bzw. im Inneren von D liegen, heißen äußere bzw. innere 0- und 1-Zellen. Ein leeres Diagramm ist ein Diagramm ohne innere 1-Zellen. Die Länge der Randkurve ist die Summe der Längen der äußeren 1-Zellen.

Mit $a(D)$ bezeichnen wir die Anzahl der 2-Zellen. Da jede äußere 1-Zelle auf dem Rand einer 2-Zelle liegt, gilt

$$m(D)\, a(D) \geq l(\partial D). \tag{1}$$

1.3 Energiefunktionen und minimale Diagramme

In Analogie zu Minimalflächen in der Differentialgeometrie werden minimale Diagramme mit Hilfe einer Energiefunktion definiert.

Definition 1.3.1 (Energiefunktion) *Eine Energiefunktion ist eine monoton wachsende und unbeschränkte Funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$.*

Definition 1.3.2 (minimale Diagramme) *Ist h eine Energiefunktion, so definieren wir die h-Energie $e_h(D)$ eines Diagramms durch*

$$e_h(D) := \sum_{A \in D_2} h(l(\partial A)).$$

Die h-Energie $e_h(\gamma)$ einer geschlossenen Kurve γ in X ist definiert durch

$$e_h(\gamma) := \inf_{\{D \,:\, \partial D = \gamma\}} e_h(D).$$

Ein Diagramm heißt h-minimal, falls

$$e_h(D) = e_h(\partial D).$$

Für $\epsilon > 0$ nennen wir ein rektifizierbares Diagramm h_ϵ-minimal, falls

$$e_h(D) < e_h(\partial D) + \epsilon.$$

Für nicht rektifizierbare Diagramme und Kurven benutzen wir die üblichen Rechenregeln für „unendlich". Jede geschlossene Kurve γ ist die Randkurve eines leeren Diagramms. Daher gilt

$$e_h(\gamma) \leq h(l(\gamma)).$$

Durch die Einschränkung auf strikt positive und monoton wachsende Energiefunktionen erhalten wir für alle $\epsilon > 0$ die folgende Abschätzung für die Anzahl der 2-Zellen in einem h_ϵ-minimalen Diagramm:

$$a(D) < \frac{h(l(\partial D)) + \epsilon}{h(0)}. \tag{2}$$

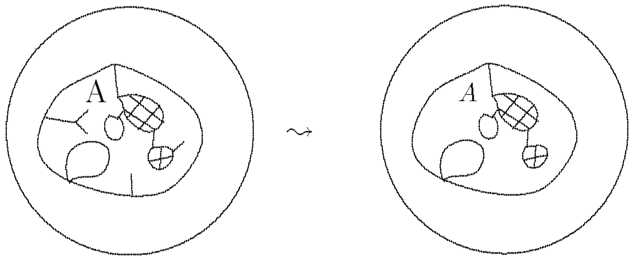
1.4 Operationen in Diagrammen

Wir werden hier einige Operationen für Diagramme einführen, welche die Randkurve eines Diagramms nicht verändern.

1.4.1 Vereinfachen von Diagrammen

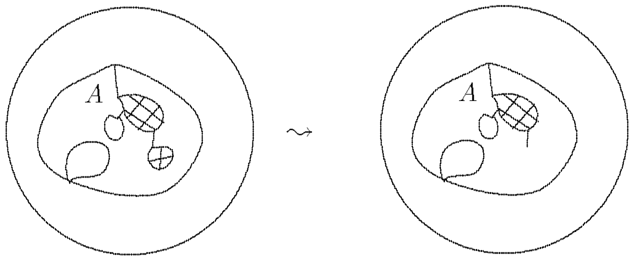
Der Rand einer 2-Zelle A ist im allgemeinen nicht homöomoph zur S^1. Verfolgen wir den umlaufenden Kantenpfad, so sehen wir, daß dabei zwei Phänomene auftreten können.

Eine 1-Zelle, die beim Umlaufen des Randes direkt hintereinander in beiden Richtungen durchlaufen wird, nennen wir eine freie 1-Zelle. Freie 1-Zellen können aufgrund der Monotonie von Energiefunktionen gestrichen werden, ohne daß sich die Maschengröße und die h-Energie des Diagramms erhöhen.



Streichen freier 1-Zellen

Sind alle freien 1-Zellen gestrichen und ist der Rand der 2-Zelle A trotzdem nicht homöomorph zur S^1, so gibt es mindestens einen Unterkomplex, der homöomorph zur Kreisscheibe ist und dessen 1-Skelett den Rest des 1-Skeletts nur in einer 0-Zelle trifft. Einen solchen Unterkomplex nennen wir ein freies Teildiagramm. Freie Teildiagramme können entfernt werden, ohne die Maschengröße und die h-Energie des Diagramms zu vergrößern.



Streichen eines freien Teildiagramms

Eine 0-Zelle heißt unnötig, falls genau zwei 1-Zellen in ihr enden und diese beiden 1-Zellen jeweils zwei verschiedene Endpunkte besitzen. Eine unnötige 0-Zelle kann gestrichen werden, wobei die beiden angrenzenden 1-Zellen zu einer 1-Zelle zusammengefügt werden. Bei dieser Operation verändern sich weder die Maschengröße noch die h-Energie.

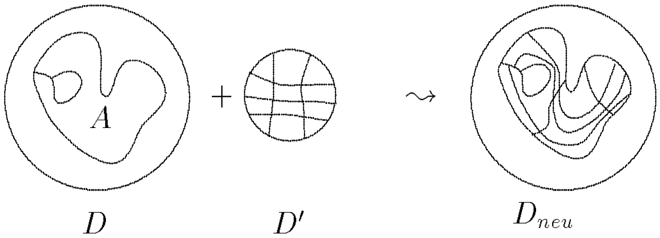
Definition 1.4.1 (einfache Diagramme) *Ein Diagramm ohne freie 1-Zellen, freie Teildiagramme und unnötige 0-Zellen heißt einfach.*

In einem einfachen Diagramm ist der Rand jeder 2-Zelle homöomorph zur S^1, jede innere 1-Zelle liegt auf dem Rand von zwei verschiedenen 2-Zellen, und in jeder inneren 0-Zelle treffen sich mindestens drei verschiedene 2-Zellen.

Da ein Diagramm ein endlicher CW-Komplex ist, können wir jedes Diagramm durch mehrfaches Anwenden der obigen Operationen in ein einfaches Diagramm überführen. Insbesondere ist jede rektifizierbare geschlossene Kurve die Randkurve eines einfachen h_ϵ-minimalen Diagramms.

1.4.2 Einkleben eines Diagramms

Ist A eine 2-Zelle eines Diagramms D und D' ein Diagramm mit $\partial D' = \partial A$, so können wir statt der 2-Zelle A das Diagramm D' in das Diagramm D einkleben.



Als Energiebilanz dieser Operation ergibt sich:

$$e_h(D_{neu}) = e_h(D) + e_h(D') - h(l(\partial A)).$$

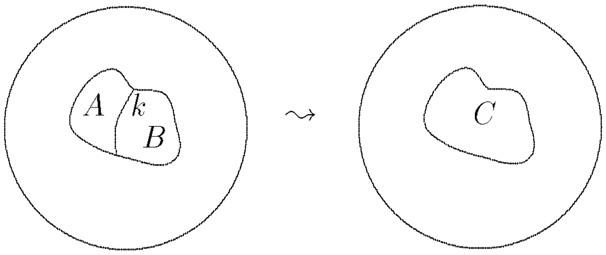
Ist $\epsilon > 0$ und A eine 2-Zelle mit $h(l(\partial A)) \geq e_h(\partial A) + \epsilon$, so können wir für jedes $\epsilon' < \epsilon$ die Energie des Diagramms um mindestens ϵ' verringern, indem wir ein $h_{\epsilon-\epsilon'}$-minimales Diagramm D' statt A einkleben. Daher gilt für alle 2-Zellen A in einem h_ϵ-minimalen Diagramm die Ungleichung:

$$h(l(\partial A)) < e_h(\partial A) + \epsilon. \tag{3}$$

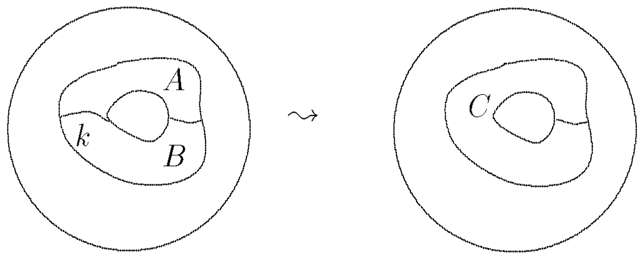
1.4.3 Verkleben zweier 2-Zellen

Liegt eine innere 1-Zelle k auf dem Rand von zwei verschiedenen 2-Zellen A und B, so können wir die 1-Zelle k streichen. Damit ersetzen wir die 2-Zellen A und B durch eine neue 2-Zelle C mit

$$l(\partial C) = l(\partial A) + l(\partial B) - 2l(k).$$

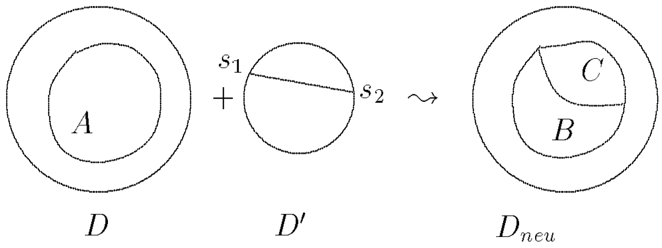


Wie das folgende Beispiel zeigt, kann beim Verkleben aus einem einfachen Diagramm ein Diagramm mit einem freien Teildiagramm entstehen.

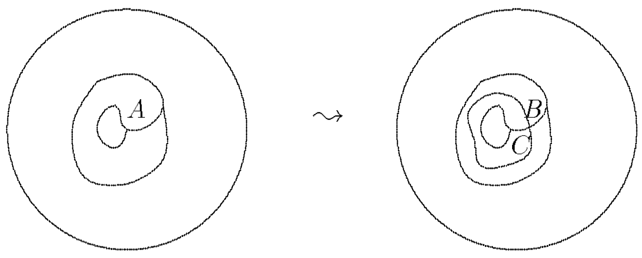


1.4.4 Zerschneiden einer 2-Zelle

Seien $A \in D_2$, $\gamma : S^1 \to X$ eine Parameterdarstellung der Kurve ∂A und $s_1, s_2 \in S^1$ mit $s_1 \neq s_2$. Dann können wir ein Diagramm D' mit $\partial D' = \partial A$ konstruieren, indem wir die S^1 als Einheitskreis betrachten und die Punkte s_1 und s_2 durch eine 1-Zelle verbinden, die auf eine Geodäte in X abgebildet wird. Indem wir D' in das Diagramm D einkleben, zerschneiden wir A in zwei neue 2-Zellen B und C.



Da γ nicht injektiv sein muß, ist es möglich, daß $d(\gamma(s_1), \gamma(s_2)) = 0$. In diesem Fall wird die neue 1-Zelle auf einen einzigen Punkt in X abgebildet. Ist das Diagramm nicht einfach, so können in diesem Fall die Endpunkte der neuen 1-Zelle in D_{neu} zusammenfallen.



2 Asymptotische Eigenschaften

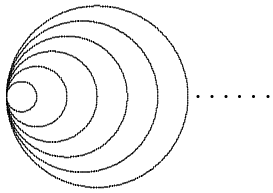
2.1 Fast einfach zusammenhängende Räume

Definition 2.1.1 (Maschengröße eines geodätischen Raumes)
Die Maschengröße $m(X)$ eines geodätischen Raumes X ist das Infimum aller $\kappa > 0$, für welche jede rektifizierbare geschlossene Kurve die Randkurve eines Diagramms D mit $m(D) \leq \kappa$ ist. Ein geodätischer Raum X heißt fast einfach zusammenhängend, falls $m(X) < \infty$.

Beispiele:

1. Der euklidische $\mathbb{R}^2$, die hyperbolische Halbebene $\mathbb{H}^2$ und jeder Baum haben die Maschengröße 0.

2. Ein Bouquet von abzählbar vielen, immer länger werdenden Schleifen ist nicht fast einfach zusammenhängend.



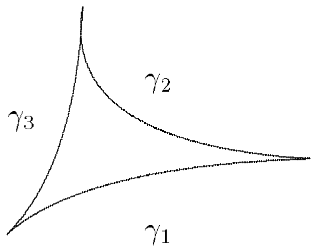
3. Der Gruppengraph (als 1-Komplex mit Kantenlänge 1) einer endlich präsentierten Gruppe ist fast einfach zusammenhängend, wobei die Maschengröße höchstens das Maximum der Relationenlängen ist.

4. Der Gruppengraph einer endlich erzeugten, aber nicht endlich präsentierbaren Gruppe ist nicht fast einfach zusammenhängend.

2.2 Hyperbolizität

Hyperbolische metrische Räume werden in [9] eingeführt. Wir beschränken uns hier auf geodätische Räume. In diesen kann Hyperbolizität durch elementare Eigenschaften von geodätischen Dreiecken beschrieben werden.

Ein geodätisches Dreieck ist eine geschlossene Kurve, die sich aus drei Geodäten γ_1, γ_2 und γ_2 zusammensetzt.



Da Geodäten auch die Länge 0 haben können, kann ein geodätisches Dreieck auch ein geodätisches „Zweieck“ beschreiben.

Definition 2.2.1 (Hyperbolizität) *Sei $\delta \geq 0$. Ein geodätischer Raum heißt δ-hyperbolisch, falls für jedes geodätische Dreieck und jeden Punkt $x \in Spur(\gamma_1)$*

$$d(x, Spur(\gamma_2) \cup Spur(\gamma_3)) \leq \delta.$$

Ein geodätischer Raum X heißt hyperbolisch, falls es ein $\delta \geq 0$ gibt, so daß X δ-hyperbolisch ist.

Beispiele:

1. Jeder metrische Baum ist 0-hyperbolisch.
2. Jeder geodätische Raum mit endlichem Durchmesser ist hyperbolisch.
3. Der hyperbolische Halbraum $\mathbb{H}^n$ ist hyperbolisch für $\delta = \ln 3$.

2.3 Isoperimetrische Ungleichungen

In der Differentialgeometrie beschreiben isoperimetrische Ungleichungen das Verhältnis zwischen der Länge einer geschlossenen Kurve und dem Flächeninhalt einer minimalen eingespannten Fläche. Da wir in beliebigen geodätischen Räumen arbeiten, haben wir keinen Flächeninhalt zur Verfügung. Gromov löst dieses Problem durch den Begriff der eingespannten Fläche ([9], Kapitel 6.8 und ([10], Kapitel 5). Wir gehen hier einen anderen, aus der kombinatorischen Gruppentheorie stammenden Weg.

Definition 2.3.1 (isoperimetrische Funktionen) *Sei X ein geodätischer Raum. Wir nennen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ eine isoperimetrische Funktion bezüglich der Maschengröße $\kappa > 0$, falls für alle $t > 0$ und jede geschlossene Kurve γ mit $l(\gamma) \leq t$ ein Diagramm D mit $\partial D = \gamma$, $m(D) \leq \kappa$ und $a(D) \leq f(t)$ existiert.*

Isoperimetrische Funktionen sind definitionsgemäß strikt positive und monoton wachsend. Wegen Ungleichung (1) in 1.2 wächst jede isoperimetrische Funktion mindestens linear. Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ subquadratisch, falls

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t^2} = 0,$$

und sagen, ein geodätischer Raum X genügt einer subquadratischen bzw. linearen isoperimetrischen Ungleichung, falls es eine subquadratische bzw. lineare isoperimetrische Funktion für X gibt.

Lemma 2.3.2 *Ein geodätischer Raum genügt genau dann einer subquadratischen isoperimetrischen Ungleichung, falls eine subquadratische Energiefunktion h und reelle Zahlen $\kappa, \epsilon > 0$ existieren, so daß $m(D) \leq \kappa$ für jedes h_ϵ-minimale Diagramm D.*

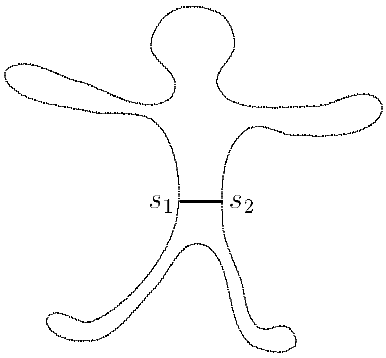
Beweis: Ist h eine solche Energiefunktion, so ist $f(t) := \frac{h(t)+\epsilon}{h(0)}$ gemäß Ungleichung (2) in 1.3 eine isoperimetrische Funktion. Ist umgekehrt f eine isoperimetrische Funktion bezüglich der Maschengröße κ, so wählen wir ein beliebiges $\epsilon > 0$ und definieren die Energiefunktion h durch

$$h(t) := \begin{cases} 1, & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \kappa \\ f(t) + 2\epsilon, & \text{für} \quad t > \kappa \end{cases} .$$

Wäre A eine 2-Zelle in einem h_ϵ-minimalen Diagramm mit $l(\partial A) \geq \kappa$, so wäre ∂A die Randkurve eines Diagramms D' mit $a(D') \leq f(l(\partial A))$ und $m(D') \leq \kappa$. Daher erhalten wir $e_h(\partial A) \leq f(l(\partial A)) = h(l(\partial A)) - 2\epsilon$ und damit einen Widerspruch zur Ungleichung (3) in 1.4. $\square$

2.4 Schlanke Schleifen

Sei $\gamma : S^1 \to X$ eine geschlossene Kurve in einem geodätischen Raum X. Dann können wir für $s_1, s_2 \in S^1$ die Entfernung $d(\gamma(s_1), \gamma(s_2))$ im Raum X vergleichen mit der Entfernung $d_\gamma(s_1, s_2)$ auf der Kurve, die als Minimum der Längen der beiden Teilkurven definiert wird, in die γ durch die beiden Punkte unterteilt wird.



Die folgende Definition ist offensichtlich unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung.

Definition 2.4.1 (μ-Durchmesser einer geschlossenen Kurve)
Für $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ nennen wir

$$d_\mu(\gamma) := \min\{d(\gamma(s_1), \gamma(s_2)) \ : \ s_1, s_2 \in S^1, \ d_\gamma(s_1, s_2) \geq \mu \, l(\gamma)\}$$

den μ-Durchmesser der geschlossenen Kurve γ.

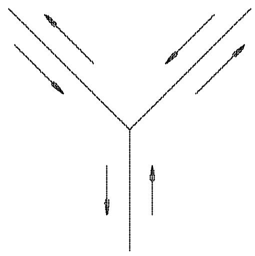
Um das Verhältnis zwischen dem μ-Durchmesser und der Länge einer geschlossenen Kurve für hinreichend lange Kurven zu beschreiben, verwenden wir die folgende Definition.

Definition 2.4.2 (schlanke Schleifen) *Für einen geodätischen Raum X und $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ definieren wir*

$$c_\mu(X) := \lim_{\kappa \to \infty} \sup_{\{\gamma \,:\, l(\gamma) \geq \kappa\}} \frac{d_\mu(\gamma)}{l(\gamma)},$$

und sagen X hat schlanke Schleifen, falls $c_{\frac{1}{3}}(X) = 0$.

Der Wert $\frac{1}{3}$ ist in dieser Definitionen nicht zufällig gewählt. Wir werden im Korollar 4.1.3 sehen, daß Bäume immer schlanke Schleifen haben. Betrachten wir den Baum T, der durch die Verheftung von drei Halbgeraden in ihrem Ursprung entsteht, und betrachten wir Kurven, die nacheinander die gleiche Strecke in jede Halbgerade hinein- und zurücklaufen, so erhalten wir aber für $\mu \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, daß $c_\mu(T) \geq \mu - \frac{1}{3} > 0$.



Beispiele:

1. Räume mit endlichem Durchmesser haben schlanke Schleifen.

2. Kreise im $\mathbb{R}^2$ zeigen:

$$c_{\frac{1}{3}}(\mathbb{R}^2) \geq \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0.275664 \ .$$

3. Für den Gruppengraphen Γ der freien abelschen Gruppe $< a, b \mid aba^{-1}b^{-1} >$ gilt:

$$c_{\frac{1}{3}}(X) = \frac{1}{4} \ .$$

Beweis: Geschlossene Kantenpfade der Form $a^n b^n a^{-n} b^{-n}$ zeigen, daß $c_{\frac{1}{3}}(\Gamma) \geq \frac{1}{4}$. Betten wir Γ wie üblich in den $\mathbb{R}^2$ ein und ist γ eine rektifizierbare geschlossene Kurve in $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, so finden wir im $\mathbb{R}^2$ beim

Umlaufen der Kurve zwei senkrecht aufeinander stehende, achsenparallele Verbindungen k_1, k_2 von Punkten, die die Kurve genau halbieren. Da jede Kurve, die die vier Endpunkte dieser Strecken in Γ verbindet, mindestens die Länge $2l(k_1) + 2l(k_2)$ hat, muß entweder $l(k_1) \leq \frac{1}{4}\ l(\gamma)$ oder $l(k_2) \leq \frac{1}{4}\ l(\gamma)$ gelten. Da wir in Γ auf offensichtliche Weise ähnliche Durchmesser finden, die höchstens um 2 länger sind, erhalten wir $c_{\frac{1}{3}}(X) \leq c_{\frac{1}{2}}(X) \leq \frac{1}{4}$. □

4. Betrachten wir im Gruppengraphen der freien abelschen Gruppe

$$< a, b, c \mid aba^{-1}b^{-1}, aca^{-1}c^{-1}, bcb^{-1}c^{-1} >$$

geschlossene Kantenpfade der Form $a^n b^n c^n a^{-n} b^{-n} c^{-n}$, so sehen wir, daß es fast einfach zusammenhängende geodätische Räume gibt, für die

$$c_{\frac{1}{3}}(X) = \frac{1}{3}.$$

2.5 Verallgemeinerte „small cancellation"-Eigenschaft

In Analogie zu den „small cancellation"-Bedingungen $C'(\lambda)$ in der kombinatorischen Gruppentheorie ([15], S. 240) definieren wir:

Definition 2.5.1 („small cancellation"-Eigenschaft für Diagramme)
Sei $\lambda > 0$. Ein Diagramm D hat die „small cancellation"-Eigenschaft $C'(\lambda)$, falls D einfach ist und für jede innere 1-Zelle k, die auf dem Rand einer 2-Zelle A liegt,

$$l(k) < \lambda l(\partial A).$$

Ein Diagramm D erfüllt die „small cancellation"-Bedingung $C'(\lambda, \kappa)$, falls zusätzlich

$$m(D) < \kappa.$$

Liegen in einem Diagramm mit der „small cancellation"-Eigenschaft $C'(\frac{1}{6})$ auf dem Rand einer 2-Zelle $A \in D_2$ keine äußeren 1-Zellen, so liegen mindestens 7 innere 1-Zellen auf dem Rand von A.

Definition 2.5.2 („small cancellation"-Eigenschaft für Räume)
Sei $\lambda > 0$. Ein geodätischer Raum hat die „small cancellation"-Eigenschaft $C'(\lambda)$, falls ein $\kappa > 0$ existiert, so daß jede geschlossene rektifizierbare Kurve γ die Randkurve eines Diagramms D mit der Eigenschaft $C'(\lambda, \kappa)$ ist. Ein Raum hat die verallgemeinerte „small cancellation"-Eigenschaft, falls er für alle $\lambda > 0$ die Eigenschaft $C'(\lambda)$ hat.

3 Resultate

3.1 Ausbreitung von Hyperbolizität

Im Kapitel 4 werden wir die folgenden Implikationen für einen geodätischen Raum X beweisen.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{hyperbolisch} \arrow[dl, Rightarrow] & \\
\begin{matrix}\text{schlanke}\\ \text{Schleifen}\end{matrix} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow, "def"'] & \begin{matrix}\text{verallgemeinerte}\\ \text{Small}\\ \text{Cancellation}\\ \text{Eigenschaft}\end{matrix} \arrow[r, Rightarrow, "def"] & C'(\frac{1}{6}) \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
c_{\frac{1}{3}}(X) < \frac{\sqrt{17}-3}{6} \arrow[r, Rightarrow] & \begin{matrix}\text{subquadratische}\\ \text{isoperimetrische}\\ \text{Ungleichung}\end{matrix} \arrow[ul, Rightarrow] & \begin{matrix}\text{lineare}\\ \text{isoperimetrische}\\ \text{Ungleichung}\end{matrix} \arrow[l, Rightarrow, "def"']
\end{tikzcd}
$$

Die durch $\overset{def}{\Longrightarrow}$ gekennzeichneten Implikationen folgen unmittelbar aus den Definitionen.

Korollar 3.1.1 *In geodätischen Räumen sind alle obigen Eigenschaften äquivalent.*

Insbesondere gilt für einen geodätischen Raum X entweder $c_{\frac{1}{3}}(X) = 0$ oder $c_{\frac{1}{3}}(X) \geq \frac{\sqrt{17}-3}{6} \approx 0.187184$. Betrachen wir das Beispiel 3 in 2.4, so bleibt die Frage offen, ob geodätische Räume mit $\frac{\sqrt{17}-3}{6} \leq c_{\frac{1}{3}}(X) < \frac{1}{4}$ existieren.

Für den Beweis der ersten Implikation in der zweiten Zeile der obigen Abbildung verwenden wir eine explizite Konstruktion geeigneter Energiefunktionen. Verknüpfen wir diese Konstruktion aus Lemma 4.2.3 mit dem Beweis für die Implikation hyperbolisch $\Rightarrow$ Schlanke Schleifen (siehe Korollar 4.1.2) so folgt unmittelbar der folgende Satz:

Satz 3.1.2 *Für jedes $\delta > 0$ und jedes $\lambda > 0$ gibt es eine Energiefunktion h und reelle Zahlen $\kappa, \epsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft:*

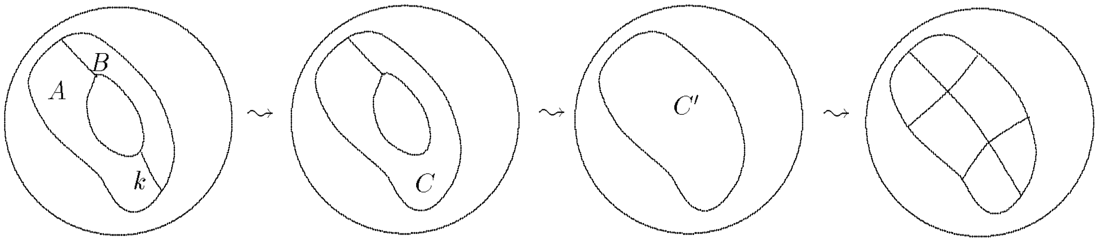
Jedes einfache und h_ϵ-minimale Diagramm D über einem δ-hyperbolischen Raum X hat die „small cancellation"-Eigenschaft $C'(\lambda, \kappa)$.

Ist $\lambda > 0$ und D ein rektifizierbares Diagramm über einem δ-hyperbolischen Raum X und sind h, ϵ, κ gemäß Satz 3.1.2 gewählt, so können wir D mit den folgenden Operationen in ein Diagramm mit derselben Randkurve und der $C'(\lambda, \kappa)$-Eigenschaft überführen.

I) Ist das Diagramm nicht einfach, so vereinfachen wir es durch das Streichen freier 1-Zellen, freier Teildiagramme und unnötiger 0-Zellen.

II) Existiert eine 2-Zelle A mit $l(\partial A) \geq \kappa$, so kleben wir statt A ein einfaches $h_{\frac{\epsilon}{2}}$-minimales Diagramm D' mit $\partial D' = \partial A$ ein.

III) Existiert eine innere 1-Zelle k auf dem Rand von zwei verschiedenen 2-Zellen A, B mit $l(k) \geq \lambda l(\partial A)$, so kleben wir A und B längs der 1-Zelle k zu einer neuen 2-Zelle C zusammen. Wir streichen eventuell entstehende freie 1-Zellen und freie Teildiagramme und erhalten so eine 2-Zelle C'. Statt C' kleben wir sodann ein einfaches $h_{\frac{\epsilon}{2}}$-minimales Diagramm ein.



Bei der Operation I) wächst weder die Maschengröße noch die h-Energie. Wenden wir die Operationen II) und III) auf ein einfaches Digrammm an, so wird ein einfaches Teildiagramm, welches die Bedingung $C'(\lambda, \kappa)$ verletzt und daher nicht h_ϵ-minimal ist, durch ein einfaches $h_{\frac{\epsilon}{2}}$-minimales Diagramm ersetzt. Daher vermindert sich durch diese beiden Operationen die h-Energie mindestens um $\frac{\epsilon}{2}$. Da die h-Energie des Ausgangsdiagramms endlich ist, erhalten wir nach endlich vielen Schritten ein Diagramm, auf welches diese drei Operationen nicht mehr anwendbar sind. Dieses Diagramm muß daher der Bedingung $C'(\lambda, \kappa)$ genügen.

Starten wir mit einem Diagramm D mit $m(D) < \kappa$ und wenden wir die Operation II) vorrangig an, so bleibt bei diesem Prozeß die Maschengröße immer kleiner als $\kappa(2-2\lambda)$. Haben in einem geodätischen Raum X mit $m(X) < \kappa$ alle einfachen h_ϵ-minimalen Diagramme D mit $l(\partial D) \leq \kappa(2-2\lambda)$ die Eigenschaft $C'(\lambda,\kappa)$, so breitet sich diese Eigenschaft deshalb auf einfache h_ϵ-minimale Diagramme beliebiger Größe aus. Setzen wir $\lambda = \frac{1}{6}$, so erhalten wir mit Korollar 3.1.1 die folgende Charakterisierung von Hyperbolizität.

Satz 3.1.3 („lokale" Charakterisierung von Hyperbolizität)
Ein geodätischer Raum X ist genau dann hyperbolisch, falls es eine Energiefunktion h und reelle Zahlen $\kappa, \epsilon > 0$ gibt, so daß

i) $m(X) < \kappa$.

ii) Jedes einfache h_ϵ-minimale Diagramm D mit $l(\partial D) < \frac{5}{3}\kappa$ erfüllt die „small cancellation"-Bedingung $C'(\frac{1}{6},\kappa)$.

Wir nennen diese Charakterisierung trotz der Bedingung $i)$ „lokal", da in vielen wichtigen Beispielen, die Maschengröße von X definitionsgemäß beschränkt ist. Fassen wir die numerischen Auswertung 4.2.5 und Korollar 3.1.1 zusammen, so erhalten wir die folgende Formulierung:

Numerische Auswertung 3.1.4 *Ein geodätischer Raum X ist genau dann hyperbolisch, falls es ein $\kappa > 0$ gibt mit*

i) $m(X) < \kappa$,

ii) Für alle geschlossenen Kurven γ mit $\kappa \leq l(\gamma) < \frac{5}{3}\kappa$ gilt $d_{\frac{1}{3}}(\gamma) \leq \frac{1}{19}l(\gamma)$.

3.2 Hyperbolizitätskriterien für Gruppen

Im Kapitel 5 werden wir 3.1.3 und 3.1.4 auf den Fall übertragen, in dem X der Gruppengraph einer endlich präsentierten Gruppe ist. Da die Isometriegruppe des Gruppengraphen transitiv auf den 0-Zellen operiert, genügt es in diesem Fall, die Bedingungen aus 3.1.3 bzw. aus 3.1.4 für endlich viele Diagramme bzw. endlich viele geschlossenen Kurven zu prüfen.

Wir verwenden hier die üblichen Notationen für endlich präsentierte Gruppen $< S \mid R >$, wie sie z.B. in [15] eingeführt werden. Insbesondere nennen wir ein Wort r über dem Alphabet S eine Relation, falls r die Identität in der Gruppe darstellt. Die Elemente aus R nennen wir die definierenden Relationen. Wir setzen stets voraus, daß die Menge R symmetrisiert ist, d.h. die Elemente aus R sind zyklisch reduziert und R enthält mit r auch alle zyklischen Permutationen von r und deren Inverse. Bei der Formulierung des folgenden Satzes ist zu beachten, daß jede Relation durch zyklische Permutation und Streichen von Teilworten der Form ss^{-1} in eine bis auf zyklische Permutation eindeutig bestimmte zyklisch reduzierte Form gebracht werden kann.

Mit $l(w)$ bezeichnen wir die Länge eines Wortes in den Erzeugern. Wir sagen, daß eine symmetrisierte Menge R_1 von Relationen einen Dehn-Algorithmus beschreibt, falls jede Relation r (eventuell nach zyklischer Permutation) ein Teilwort v enthält, welches auch ein Teilwort einer Relation $r' \in R_1$ mit $l(v) > \frac{1}{2}l(r')$ ist. Ein Dehn-Algorithmus impliziert im Gruppengraphen eine lineare isoperimetrische Ungleichung. Daher ist X hyperbolisch, falls es einen Dehn-Algorithmus gibt [16]. Eine Gruppe heißt hyperbolisch, falls sie eine endliche Präsentation besitzt, für die der Gruppengraph hyperbolisch ist. In diesem Fall ist der Gruppengraph jeder endlichen Präsentation der Gruppe hyperbolisch ([9], 2.3.E).

In Kapitel 5.4 zeigen wir:

Satz 3.2.1 *Eine endlich präsentierte Gruppe* $< S \mid R >$ *ist genau dann hyperbolisch, falls es zwei disjunkte symmetrisierte Mengen* R_1, R_2 *von Relationen und eine Energiefunktion* h *gibt, so daß:*

i) $R \subseteq R_1 \cup R_2$.

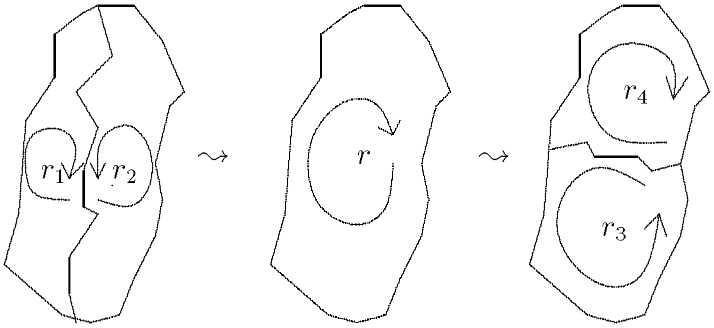
ii) Sind r_1, r_2 *zwei verschiedene Elemente aus* R_1 *und ist* r *eine zyklisch reduzierte Form des Wortes* $r_1 r_2^{-1}$ *mit* $l(r) < l(r_1) + l(r_2) - \frac{1}{3}l(r_1)$, *so ist* r *ein Element aus* $R_1 \cup R_2$ *und* $h(l(r_1)) + h(l(r_2)) > h(l(r))$.

iii) Jede Relation aus R_2 *besitzt eine zyklische Permutation* r, *für die es zwei Relationen* $r_3, r_4 \in R_1 \cup R_2$ *gibt, so daß* r_4 *eine zyklisch reduzierte Form des Wortes* $r_3 r$ *ist und* $h(l(r_3)) + h(l(r_4)) < h(l(r))$.

Außerdem gilt: Erfüllen R_1, R_2 *und* h *diese Voraussetzungen, so beschreibt* R_1 *eine Dehn-Algorithmus.*

Anschaulich formuliert, bedeuten die Bedingungen ii) und iii) folgendes. Haben zwei Relationen aus R_1 ein derartig langes gemeinsames Stück, so daß durch das Zusammentreffen dieser Relationen in einem Diagramm über dem Gruppengraphen die Bedingung $C'(\frac{1}{6})$ verletzt sein könnte, so können wir die beiden Relationen bzw. die zugehörigen 2-Zellen verkleben, wobei sich die h-Energie vermindert. Entsteht dabei eine Relation aus R_2, so können wir diese durch einen kleineren Schnitt wieder in zwei Relationen aus $R_1 \cup R_2$

zerschneiden, wobei sich ebenfalls die h-Energie vermindert.



Ist $< S \mid R >$ eine Präsentation, die der klassischen „small cancellation"-Bedingung $C'(\frac{1}{6})$ genügt, so können wir $R_1 = R$, $R_2 = \emptyset$ und h beliebig wählen. In diesem Fall erfüllt nämlich kein Paar r_1, r_2 aus R die zweite Bedingung aus Satz 3.2.1. Für beliebige Präsentationen können wir durch Verkleben von definierenden Relationen versuchen, ein solches Tripel R_1, R_2, h zu finden. Da wir in 4.2 die Energiefunktion h explizit bestimmen werden, können wir in 5.5.1 einen Algorithmus konstruieren, der diese Suche automatisiert. Der Algorithmus benutzt als Input nur die Erzeuger und Relationen. Er findet nach nicht vorhersehbarer Rechenzeit ein Tripel R_1, R_2, h mit den in Satz 3.2.1 verlangten Eigenschaften, falls die Gruppe hyperbolisch ist. Falls die Gruppe nicht hyperbolisch ist, läuft er ewig weiter. Da auch triviale Gruppen hyperbolisch sind und das Isomorphieproblem für triviale Gruppen unlösbar ist, kann es kein allgemeines Abbruchkriterium für nicht hyperbolische Gruppen geben.

Ist $< S \mid R >$ eine endlich präsentierte Gruppe, so ist kein Algorithmus bekannt, der entscheidet, ob R einen Dehn-Algorithmus beschreibt. In 5.5.2 werden wir einen Algorithmus angeben, der folgendes leistet: Angenommen, wir vermuten, daß die definierenden Relationen R einen Dehn-Algorithmus beschreiben. Dann geben wir als Input die Erzeuger und die Relationen ein. Der Algorithmus wird nach einer durch diese Eingangsdaten beschränkten Rechenzeit entweder zeigen, daß R keinen Dehn-Algorithmus beschreibt, oder aber er liefert uns eine (eventuell von R verschiedene) Menge R_1 von Relationen, die einen Dehn-Algorithmus definiert.

Mit $\|w\|$ bezeichnen wir die Wortnorm, d.h. $\|w\|$ ist die Länge eines kürzesten Wortes, welches dasselbe Gruppenelement wie w darstellt. Es gilt $\|w\| = 0$ genau dann, falls w eine Relation ist. Als Übersetzung von 3.1.4 beweisen wir in 5.4 ferner den folgenden Satz:

Satz 3.2.2 *Eine endlich erzeugte Gruppe $< S \mid R >$ ist genau dann hyperbolisch, falls es ein $\kappa \in \mathbb{N}$ gibt mit*

i) $\kappa > \max\{l(r) \ : r \in R\}$.

ii) Jede zyklisch reduzierte Relation r mit $\kappa \leq l(r) < \frac{5}{3}\kappa$ enthält ein Teilwort v mit $\frac{1}{3}l(r) \leq l(v) \leq \frac{2}{3}l(r)$ und $\|v\| \leq \frac{1}{19}l(r)$.

In diesem Fall beschreiben alle Relationen r mit $l(r) < \kappa$ einen Dehn-Algorithmus.

Dieser Satz liefert ein Hyperbolizitätskriterium für Gruppen, in denen wir das Wortproblem bereits lösen können. Dann können wir nämlich alle Relationen einer gewissen Länge aufzählen und die Wortnorm $\|v\|$ bestimmen, indem wir alle Worte kleinerer Länge aufzählen und überprüfen, ob sie dasselbe Gruppenelement darstellen.

Liegen die seitenidentifizierenden Abbildungen eines kompakten Fundamentalpolytops in $\mathbb{H}^3$ explizit als Matrizen in $PSl_2(\mathbb{C})$ vor, so können wir mit Hilfe dieses Satzes einen Dehn-Algorithmus finden. Da die Anzahl der zu bildenden Produkte exponentiell mit ihrer Länge wächst, ist dieses Verfahren allerdings in konkreten Beispielen kaum anwendbar.

4 Beweise der Implikationskette in geodätischen Räumen

4.1 Hyperbolizität $\Rightarrow$ Schlanke Schleifen

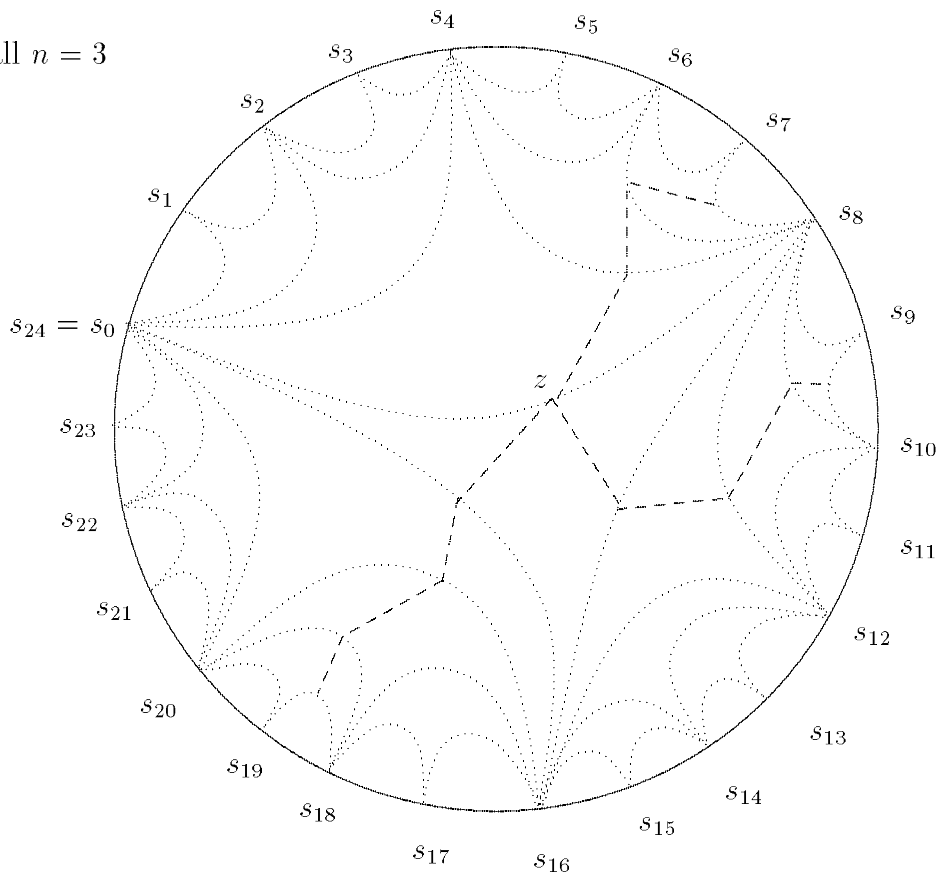
In der hyperbolischen Halbebene $I\!H^2$ wächst der Umfang eines Kreises exponentiell mit seinem Durchmesser. Indem wir den $\frac{1}{3}$-Durchmesser verwenden, erhalten wir die folgende Verallgemeinerung dieser Aussage für alle hyperbolischen Räume und beliebig geformte geschlossene Kurven:

Lemma 4.1.1 *Ist X ein δ-hyperbolischer Raum, so gilt für alle geschlossenen rektifizierbaren Kurven $\gamma : S^1 \to X$ und alle $n \in \mathbb{N}$:*

$$d_{\frac{1}{3}}(\gamma) \leq 2(n+1)\delta + \frac{l(\gamma)}{2^n 3}$$

Beweis: Wir wählen $2^n 3$ Punkte $s_0, \ldots, s_{2^n 3-1} \in S^1$, die γ in $2^n 3$ Teilkurven gleicher Länge unterteilen. Diese Punkte (genauer: ihre Bilder auf der Spur der Kurve) verbinden wir wie in der Abbildung durch Geodäten.

Der Fall $n = 3$



Wir betrachten zunächst das geodätische Dreieck $s_0, s_{2^n}, s_{2^{n+1}}$. Jeder Punkt der Geodäte s_0, s_{2^n} hat nach Definition 2.2.1 maximal den Abstand δ von einer der beiden anderen Dreiecksseiten. Indem wir uns längs der Geodäten s_0, s_{2^n} bewegen, finden wir daher einen Punkt z, den wir sowohl mit der Seite $s_0, s_{2^{n+1}}$, als auch mit der Seite $s_{2^n}s_{2^{n+1}}$ durch Geodäten verbinden können, die höchstens die Länge δ haben. Wir kennzeichnen diese Geodäten in der Abbildung durch zwei gestrichelte Linien im Inneren des Dreiecks $s_0, s_{2^n}, s_{2^{n+1}}$. Den Punkt z und die beiden anderen Endpunkte der soeben konstruierten Geodäten verbinden wir mit nächstliegenden Punkten auf den beiden anderen Seiten der nach außen anliegenden Dreiecke. Auch diese Verbindung hat gemäß Definition 2.2.1 höchstens die Länge δ. Wir wiederholen dies, bis wir auf Geodäten stoßen, die zwei benachbarte Punkte s_i, s_{i+1} verbinden. Vor dort aus wenden wir uns zum näherliegenden der beiden Punkte s_i und s_{i+1}.

Damit erhalten wir drei Pfade, deren Länge höchstens $(n+1)\delta + \frac{1}{2^{n+1}3}l(\gamma)$ ist und die z mit den drei Teilkurven zwischen s_0, s_{2^n} und $s_{2^{n+1}}$ verbinden.

Mindestens ein Paar dieser drei Pfade verbindet zwei Punkte s_i, s_j mit $l_\gamma(s_i, s_j) \geq \frac{1}{3}l(\gamma)$. Dies liefert die angegebene Abschätzung für $d_{\frac{1}{3}}(\gamma)$. $\square$

Korollar 4.1.2 *Ist X ein δ-hyperbolischer Raum, so gilt für alle geschlossenen rektifizierbaren Kurven γ*

$$d_{\frac{1}{3}}(\gamma) < 1 + 4\delta + 2\delta \log_2(1 + \frac{l(\gamma)}{3}),$$

und X hat schlanke Schleifen.

Beweis: Diese Abschätzung ergibt sich direkt aus dem letzten Lemma, wenn wir $n \in \mathbb{N}$ durch

$$n > \log_2(1 + \frac{l(\gamma)}{3}) \geq n - 1$$

definieren. Sie zeigt insbesondere, daß $\frac{d_{\frac{1}{3}}(\gamma)}{l(\gamma)} \longrightarrow 0$ für $l(\gamma) \longrightarrow \infty$. $\square$

Korollar 4.1.3 *Ist X ein Baum, so gilt $d_{\frac{1}{3}}(\gamma) = 0$ für alle geschlossenen Kurven γ.*

Beweis: Jeder Baum ist hyperbolisch für $\delta = 0$. Daher liefert obiges Lemma für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $d_{\frac{1}{3}}(\gamma) \leq \frac{l(\gamma)}{2^n 3}$. $\square$

Numerische Auswertung 4.1.4 *In einem δ-hyperbolischen Raum ergibt Lemma 4.1.1 für $n = 6$:*

$$l(\gamma) \geq 296\delta \qquad \Rightarrow \qquad d_{\frac{1}{3}}(\gamma) \leq \frac{1}{19}l(\gamma)\ .$$

4.2 Schlanke Schleifen $\Rightarrow$ Verallgemeinerte „small cancellation"- Eigenschaft

Wir bereiten den Beweis dieser Implikation durch ein analytisches Lemma vor.

Lemma 4.2.1 *Sei $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Dann gibt es eine Energiefunktion f und reelle Zahlen $c, t_0, \epsilon > 0$ mit:*

i) $f(t_1) + f(t_2) \geq f(t_1 + t_2 - 2\lambda t_1) + \epsilon,$ *für* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$

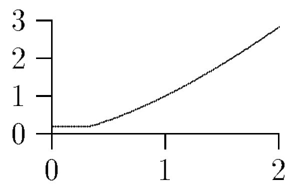
ii) $f(\mu t + ct) + f(t - \mu t + ct) + \epsilon \leq f(t),$ *für* $\frac{1}{3} \leq \mu \leq \frac{2}{3},\ t \geq 1$

iii) $f(t_1) + f(t_2) \geq f(t_1 + t_2) + \epsilon,$ *für* $0 \leq t_1 \leq t_0,\ 0 \leq t_2 \leq 1$

Beweis: Wir werden zunächst zeigen, daß es ein $\alpha > 1$ und ein $\epsilon' > 0$ gibt, so daß die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} (\frac{1}{3})^\alpha, & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ t^\alpha, & \text{für} \quad t \geq \frac{1}{3} \end{cases}$$

die Bedingung $i)$ für $\epsilon = \epsilon'$ erfüllt.



$f(t)$ für $\alpha = 1.5$

Da f stetig ist, genügt es ein $\alpha > 1$ zu finden, für welches

$$f(t_1) + f(t_2) - f(t_1 + t_2 - 2\lambda t_1) > 0, \text{ für } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1. \qquad (\star)$$

Für $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{3}$ ist $f(t_1)$ konstant. Die linke Seite ist deshalb für $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{3}$ monoton fallend in t_1. Es genügt daher, den Fall $\frac{1}{3} \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ zu betrachten. Hier ist $(\star)$ äquivalent zu

$$1 + (\frac{t_2}{t_1})^\alpha - (1 + \frac{t_2}{t_1} - 2\lambda)^\alpha > 0.$$

Die linke Seite ist monoton fallend in $\frac{t_2}{t_1}$. Daher ist $(\star)$ erfüllt, falls

$$1 + 3^\alpha - (4 - 2\lambda)^\alpha > 0 \qquad (\star\star)$$

Diese Ungleichung ist für $\alpha = 1$ richtig. Die linke Seite ist stetig und streng monoton fallend in α. Also gibt es genau ein $\alpha_\lambda > 1$ mit $1 + 3^\alpha - (4 - 2\lambda)^\alpha = 0$, und alle $\alpha \in]1, \alpha_\lambda[$ erfüllen die Ungleichung $(\star\star)$.

Wir werden nun zeigen, daß es für ein solches $\alpha > 1$ Konstanten $c, \epsilon'' > 0$ gibt, so daß f die Bedingung $ii)$ für $\epsilon = \epsilon''$ erfüllt. Da $t \geq 1$ und $\frac{1}{3} \leq \mu \leq \frac{2}{3}$, spielt wieder nur der zweite Definitionsbereich von f einen Rolle.

Der Ausdruck $(\mu+c)^\alpha + (1-\mu+c)^\alpha$ nimmt für $c \geq 0$ bei $\mu = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ sein Maximun an. Für $c = 0$ gilt

$$(\frac{1}{3} + c)^\alpha + (\frac{2}{3} + c)^\alpha < 1 \qquad (\star\star\star).$$

Daher finden wir auch ein $c > 0$ mit dieser Eigenschaft. Wir setzen

$$\epsilon'' = 1 - (\frac{1}{3} + c)^\alpha - (\frac{2}{3} + c)^\alpha$$

und erhalten durch Multiplikation mit t^α die Ungleichung $ii)$.

Da $t_2^\alpha + (\frac{1}{3})^\alpha - (t_2 + t_0)^\alpha$ monoton fallend in t_2 ist, genügt es, $t_0 > 0$ so klein zu wählen, daß $t_0 \leq \frac{1}{3}$ und

$$\epsilon''' := \min(1 + (\frac{1}{3})^\alpha - (1 + t_0)^\alpha,\ 2(\frac{1}{3})^\alpha - (\frac{1}{3} + t_0)^\alpha) > 0\ ,$$

um auch die Ungleichung $iii)$ mit $\epsilon = \epsilon'''$ zu erfüllen.

Wir definieren $\epsilon = \min(\epsilon', \epsilon'', \epsilon''')$ und haben damit das Lemma bewiesen. □

Numerische Auswertung 4.2.2 *Wir können $\alpha_{\frac{1}{6}}$ numerisch berechnen und erhalten:*

$$\alpha_{\frac{1}{6}} \approx 1.191475\ .$$

Indem wir mit hinreichender Genauigkeit rechnen, sehen wir, daß für $\lambda = \frac{1}{6}$ z.B. die folgenden Daten die Bedingungen aus dem Lemma erfüllen:

$$f(t) := \begin{cases} (\frac{1}{3})^{1.19}, & \textit{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ t^{1.19}, & \textit{für } t \geq \frac{1}{3} \end{cases}, \quad c = \frac{1}{19}, \quad t_0 = \frac{1}{5} \quad \textit{und} \quad \epsilon = \frac{1}{10000}\ .$$

Lemma 4.2.3 *Hat ein geodätischer Raum X schlanke Schleifen, so gibt es für jedes $\lambda > 0$ eine Energiefunktion h und Konstanten $\kappa_{min}, \kappa, \epsilon$, so daß jedes einfache h_ϵ-minimale Diagramm D über X die Eigenschaft $C'(\lambda, \kappa)$ hat. Unter der Voraussetzung, daß D nicht leer ist, gilt zudem $l(\partial A) \geq \kappa_{min}$ für jede 2-Zelle $A \in D_2$.*

Beweis: Da die Bedingung $C'(\lambda_1, \kappa)$ die Bedingung $C'(\lambda_2, \kappa)$ für alle $\lambda_2 > \lambda_1$ impliziert, genügt es, die Behauptung für $\lambda < \frac{1}{2}$ zu beweisen. Wir bestimmen für $\lambda < \frac{1}{2}$ eine Energiefunktion f sowie Konstanten ϵ, c, t_0 wie im Lemma 4.2.1.

Da X schlanke Schleifen hat, finden wir ein $\kappa > 0$, so daß $d_{\frac{1}{3}}(\gamma) \leq c\, l(\gamma)$ für jede geschlossene Kurve γ mit $l(\gamma) \geq \kappa$. Wir definieren eine neue Energiefunktion h durch $h(t) := f(\frac{t}{\kappa})$ und setzen $\kappa_{min} := t_0 \kappa$.

Sei nun D ein einfaches h_ϵ-minimales Diagramm.

Falls es eine 2-Zelle $A \in D_2$ mit $l(\partial A) \geq \kappa$ gäbe, könnten wir diese 2-Zelle in zwei 2-Zellen B, C mit $l(\partial B) \leq (\mu + c) l(\partial A)$ und $l(\partial C) \leq (1 - \mu + c) l(\partial A)$ und $\mu \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ zerschneiden. Aufgrund von Eigenschaft ii) im Lemma 4.2.1 würde sich die h-Energie des Diagramms D dabei mindestens um ϵ verringern. Dies wäre ein Widerspruch zur h_ϵ-Minimalität des Diagramms.

Da D einfach ist, liegt jede innere 1-Zelle k auf dem Rand von genau zwei 2-Zellen A und B. Wäre $l(k) \geq \lambda l(\partial A)$, so könnten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $l(\partial A) \leq l(\partial B)$. Andernfalls vertauschen wir die Rolle von A und B. Da h monoton wächst, folgt mit der Eigenschaft i) in Lemma 4.2.1, daß durch das Streichen der 1-Zelle k die h-Energie des Diagramms um mindestens ϵ vermindert würde. Wieder hätten wir einen Widerspruch zur h_ϵ-Minimalität gefunden. Also haben wir gezeigt, daß D die Bedingung $C'(\lambda, \kappa)$ erfüllt.

Ist D nicht leer, so stößt jede 2-Zelle längs einer 1-Zelle auf eine andere 2-Zelle. Aufgrund der Eigenschaft iii) aus Lemma 4.2.1 könnte dann eine 2-Zelle A mit $l(\partial A) < \kappa_{min}$ mit ihrer Nachbarzelle verklebt werden, wobei sich, im Widerspruch zur h_ϵ-Minimalität, die h-Energie um mindestens ϵ verringern würde. □

Lemma 4.2.4 *Für alle $\lambda > 0$ existiert ein $c > 0$ mit folgender Eigenschaft:*

Sei $\kappa > 0$ und X ein geodätischer Raum mit $m(X) < \kappa$, in dem für jede geschlossene Schleife γ mit $\kappa \leq l(\gamma) < (2-2\lambda)\kappa$ die Ungleichung $d_{\frac{1}{3}}(\gamma) \leq c\, l(\gamma)$ gilt.

Dann hat X die Eigenschaft $C'(\lambda)$.

Beweis: Wie im Beweis von Lemma 4.2.3 können wir $\lambda < \frac{1}{2}$ voraussetzen und eine Energiefunktion f und Konstanten c, ϵ, t_0 gemäß Lemma 4.2.1 wählen. Wir werden nun zeigen, daß dieses c die gewünschte Eigenschaft hat.

Sei also $\kappa > 0$ und X ein geodätischer Raum mit obigen Eigenschaften. Wir benutzen wieder die Energiefunktion h, gegeben durch $h(t) := f(\frac{t}{\kappa})$. Da $m(X) < \kappa$, können wir für jede geschlossene rektifizierbare Kurve γ ein einfaches Diagramm D mit $m(D) < \kappa$ finden. Tritt in D eine Situation auf, die im letzten Beweis zum Widerspruch geführt hat, so können wir nun die dort angegebene Operation verwenden um die h-Energie um mindestens ϵ zu verringern. Sobald ein nichteinfaches Diagramm entsteht können wir es mit den Operationen aus 1.4.1 vereinfachen. Wenden wir die Operation des Durchschneidens vorrangig an, so ensteht beim Zusammenkleben eine 2-Zelle, deren Rand stets kürzer als $\kappa(2-2\lambda)$ ist. Also genügen die Voraussetzungen, um nach endlich vielen Schritten ein Diagramm mit der Eigenschaft $C'(\lambda,\kappa)$ zu erhalten. $\Box$.

Verwenden wir die numerische Auswertung 4.2.2 so folgt:

Numerische Auswertung 4.2.5 *Sei $\kappa > 0$ und X ein geodätischer Raum mit $m(X) < \kappa$, in dem für jede geschlossene Schleife γ mit $\kappa \leq l(\gamma) < \frac{5}{3}\kappa$ die Ungleichung $d_{\frac{1}{3}}(\gamma) \leq \frac{1}{19} l(\gamma)$ gilt.*

Dann hat X die „small cancellation"-Eigenschaft $C'(\frac{1}{6},\kappa)$.

4.3 Schlanke Schleifen $\Rightarrow$ subquadratische isoperimetrische Ungleichung

Lemma 4.3.1 *Ein geodätischer Raum X mit*

$$c_{\frac{1}{3}}(X) < \frac{\sqrt{17}-3}{6}$$

erfüllt eine subquadratische isoperimetrische Ungleichung.

Beweis: Für $c_{\frac{1}{3}}(X) < c < \frac{\sqrt{17}-3}{6}$ und $\frac{1}{3} \leq \mu \leq \frac{2}{3}$ gilt:

$$(\mu+c)^2 + (1-\mu+c)^2 \leq (\frac{1}{3}+c)^2 + (\frac{2}{3}+c)^2 < 1.$$

Also gibt es auch einen Exponenten $\alpha \in]1,2[$, so daß

$$(\mu+c)^\alpha + (1-\mu+c)^\alpha < 1 \ , \qquad \text{für alle} \qquad \frac{1}{3} \leq \mu \leq \frac{2}{3}.$$

Daher gibt es $\epsilon > 0$ und $\kappa_1 > 0$, so daß für alle $t > \kappa_1$:

$$(\mu t + cx)^\alpha + (t - \mu t + ct)^\alpha + \epsilon < t^\alpha.$$

Wir definieren eine subquadratische Energiefunktion h durch

$$h(t) := \begin{cases} (\frac{1}{3}\kappa_1)^\alpha, & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3}\kappa_1 \\ t^\alpha, & \text{für} \quad t > \frac{1}{3}\kappa_1 \end{cases} .$$

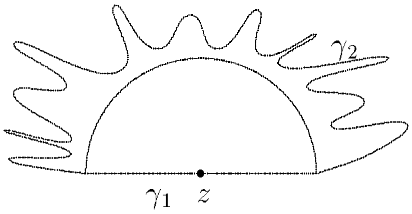
Da $c_{\frac{1}{3}}(X) < c$, finden wir ein $\kappa > \kappa_1$, so daß $d_{\frac{1}{3}}(\gamma) < c\, l(\gamma)$ für alle geschlossenen Kurven γ mit $l(\gamma) \geq \kappa$.

Gäbe es in einem h_ϵ-minimalen Diagramm eine 2-Zelle A mit $l(\partial A) \geq \kappa$, so könnten wir diese 2-Zelle längs eines $\frac{1}{3}$-Durchmessers so zerschneiden, daß sich die h-Energie um mehr als ϵ verringert. Also existiert keine solche 2-Zelle in einem h_ϵ-minimalen Diagramm, und die Behauptung folgt aus Lemma 2.3.2 □

4.4 Subquadratische isoperimetrische Ungleichung ⇒ Schlanke Schleifen

Wir verwenden hier ein vereinfachte Version eines Argumentes von Ol'shanskii ([18], Lemma 5).

Lemma 4.4.1 *Sei D ein Diagramm, dessen Randkurve sich wie in der Abbildung aus einer Geodäten γ_1 der Länge $2r$ mit Mittelpunkt z und einer Kurve γ_2 mit $d(\gamma_2, z) \geq r > 0$ zusammensetzt.*



Dann gilt

$$a(D) \geq (\frac{2r}{m(D)} - 1)^2,$$

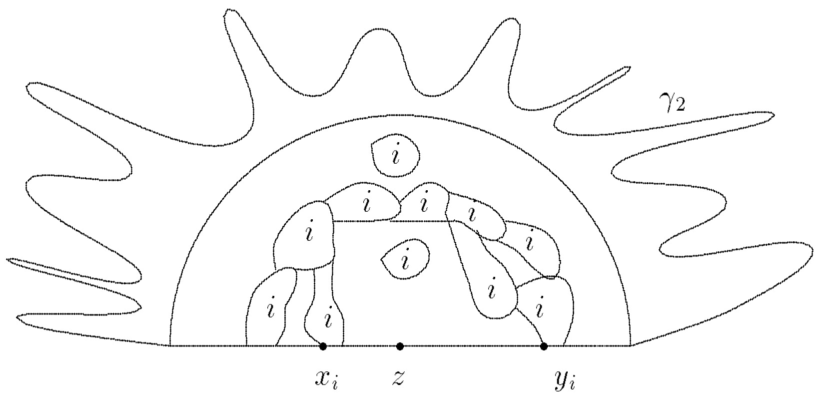
und für $r \geq 2m(D)$ enthält das Diagramm mindestens vier 2-Zellen, auf deren Rändern keine äußere 1-Zellen liegen.

Beweis: Da jedes Diagramm mindestens eine 2-Zelle enthält, genügt es, den Fall $r > m(D)$ zu betrachten. Wir definieren durch $d(z_1, z_2) := d(\varphi(z_1), \varphi(z_2))$ eine Halbmetrik d auf D^1, wählen ein $\kappa > \frac{m(D)}{2}$ und definieren eine Funktion $\phi : D_2 \to \mathbb{N}_0$ durch

$$\phi(A) = i \Longleftrightarrow i\kappa \geq d(z, \partial A) > (i-1)\kappa.$$

Diese Funktion hat die folgenden Eigenschaften:
1) $x \in \partial A$, $A \in \phi^{-1}(i) \Rightarrow d(x, z) > (i-1)\kappa$,
2) $x \in \partial A$, $d(x, z) = i\kappa \Rightarrow \phi(A) = i$.

Wir betrachten nun für natürliche $i \leq \frac{r}{\kappa}$ die Menge der 2-Zellen in $\phi^{-1}(i)$, und werden zeigen, daß es einen Kantenpfad auf den Rändern dieser 2-Zellen gibt, der die links von z liegende Hälfte von γ_1 mit der rechts von z liegenden Hälfte verbindet.



Gäbe es nämlich keinen solchen Pfad, so könnten wir den Punkt z mit einem Punkt auf γ_2 längs eines Pfades auf den Rändern von allen 2-Zellen verbinden, die nicht in $\phi^{-1}(i)$ liegen. Dieser Pfad müßte einen Punkt x mit $d(x,z) = i\kappa$ treffen. Dies ergäbe wegen der Eigenschaft 2) von ϕ einen Widerspruch.

Da zwei so verbundene Punkte $x_i, y_i \in \gamma_1$ auf dem Rand von 2-Zellen aus $\phi^{-1}(i)$ liegen, gilt $d(x_i, z) > (i-1)\kappa$ und $d(y_i, z) > (i-1)\kappa$. Also ist $d(x_i, y_i) > (2i-2)\kappa$, und der Kantenpfad muß mindestens $2i-1$ verschiedene 2-Zellen in $\phi^{-1}(i)$ berühren. Somit erhalten wir

$$a(D) \geq \sum_{\frac{r}{\kappa} \geq i \geq 1,} (2i-1) \geq (\frac{r}{\kappa} - 1)^2.$$

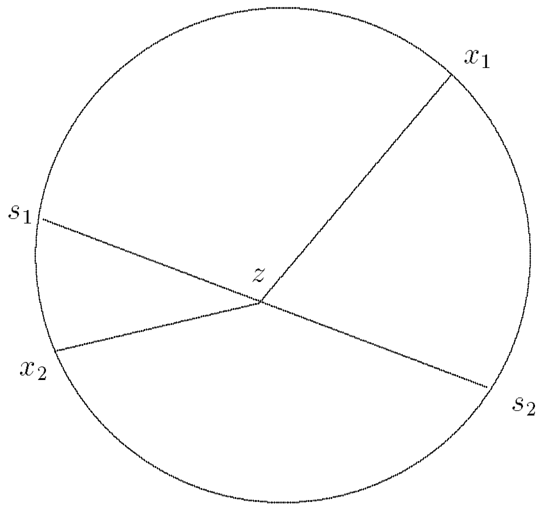
Da dies für alle $\kappa > \frac{m(D)}{2}$ richtig ist, folgt damit die gewünschte Abschätzung. Mindestens $2i-3$ der 2-Zellen von $\phi^{-1}(i)$ liegen ganz im Inneren von D. Damit erhalten wir für $\kappa = m(D)$ auch die zweite Aussage. $\square$

Lemma 4.4.2 *Ist X ein geodätischer Raum und ist f eine isoperimetrische Funktion bezüglich der Maschengröße κ, so gilt für jede rektifizierbare geschlossene Kurve:*

$$d_{\frac{1}{3}}(\gamma) \leq \kappa(1 + \sqrt{f(l(\gamma))}).$$

Beweis: Sei $\gamma : S^1 \to X$ eine rektifizierbare geschlossene Kurve mit $d_{\frac{1}{3}}(\gamma) > 0$. Wir unterscheiden in der Schreibweise nicht mehr zwischen den Punkten aus S^1 und ihren Bildern in X. Sei $s_1, s_2 \in S^1$ mit $d_\gamma(s_1, s_2) \geq \frac{1}{3} l(\gamma)$ so gewählt, daß $d(s_1, s_2) = d_{\frac{1}{3}}(\gamma)$. Mit z bezeichnen wir den Mittelpunkt einer Geodäte zwischen s_1 und s_2. Die beiden Punkte s_1, s_2 zerlegen γ in zwei Teilkurven.

Mit $x_1, x_2 \in S^1$ bezeichnen wir zwei Punkte auf diesen Teilkurven, die den geringsten Abstand zu z haben. Auch die Punkte x_1 und x_2 unterteilen γ in zwei Teilkurven. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß s_2 auf der längeren der beiden Seiten liegt.



Verläuft die kürzeste Verbindung von x_1 oder x_2 zu s_2 auf γ über den Punkt s_1, so ist wegen $d_\gamma(s_1, s_2) \geq \frac{1}{3}l(\gamma)$ auch diese Verbindung länger als $\frac{1}{3}l(\gamma)$. Verläuft die kürzeste Verbindung von x_1 oder x_2 zu s_2 auf γ nicht über den Punkt s_1, so gilt $d_\gamma(x_1, x_2) + d_\gamma(x_1, s_2) + d_\gamma(x_2, s_2) = l(\gamma)$.

Also gilt in jedem Fall

$$\max\{d_\gamma(x_1, x_2), d_\gamma(x_1, s_2), d_\gamma(x_2, s_2)\} \geq \frac{1}{3}l(\gamma).$$

Da andernfalls ein Widerspruch zur Wahl von s und t entstünde, haben wir damit gezeigt, daß nicht gleichzeitig $d(x_1, z) < d(s_2, z)$ und $d(x_2, z) < d(s_2, z)$ gelten kann. Ohne Einschränkung nehmen wir an, daß $d(x_1, z) \geq d(s_2, z)$.

Dann bilden die Geodäte zwischen s_1 und s_2 und die Teilkurve zwischen s_1 und s_2, auf der x_1 liegt, eine geschlossene Kurve, deren Länge nicht größer als $l(\gamma)$ ist. Wir können ein Diagramm D mit dieser Randkurve, $a(D) \leq f(l(\gamma))$ und $m(D) \leq \kappa$ finden. Dieses Diagramm D erfüllt außerdem die Voraussetzungen von Lemma 4.4.1 mit $r = \frac{1}{2}d_{\frac{1}{3}}(\gamma)$.

Also erhalten wir

$$f(l(\gamma) \geq (\frac{d_{\frac{1}{3}}(\gamma)}{\kappa} - 1)^2$$

und damit die Behauptung □

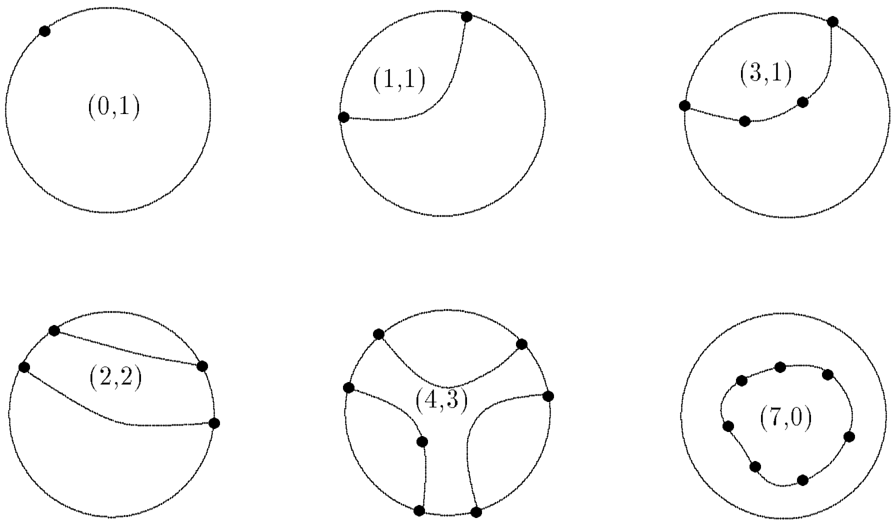
Korollar 4.4.3 *Jeder geodätische Raum X mit einer subquadratischen isoperimetrischen Ungleichung hat schlanke Schleifen.*

Beweis: Ist f subquadratisch, so zeigt die Abschätzung für den $\frac{1}{3}$-Durchmesser in Lemma 4.4.2, daß $\frac{d_{\frac{1}{3}}(\gamma)}{l(\gamma)} \longrightarrow 0$ für $l(\gamma) \longrightarrow \infty$. $\square$.

4.5 „Small cancellation"-Eigenschaft $C'(\frac{1}{6}) \Rightarrow$ Hyperbolizität

In diesem Kapitel und in Kapitel 4.6 übertragen wir die aus der „small cancellation"-Theorie bekannten Rechnungen (siehe z.B. [15], Kapitel V.4) auf Diagramme über geodätischen Räumen.

Wir bezeichnen eine 2-Zelle $A \in D_2$ in einem einfachen Diagramm D als 2-Zelle vom Typ (n, m), falls genau n innere und m äußere Kanten auf dem Rand von A liegen. Da wir voraussetzen, daß D einfach ist, besteht ein Diagramm mit einer 2-Zelle vom Typ $(0, 1)$ nur aus dieser 2-Zelle. Andernfalls gilt $n \geq m$.



Wir bezeichnen eine äußere 1-Zelle k, die auf dem Rand einer 2-Zelle A liegt, als verkürzbare äußere 1-Zelle, falls $l(k) > \frac{1}{2}l(\partial A)$. Erfüllt ein Diagramm die Bedingung $C'(\frac{1}{6})$, so ist jede innere 1-Zelle auf dem Rand einer 2-Zelle A kürzer als $\frac{1}{6}l(\partial A)$. Daher ist in einem $C'(\frac{1}{6})$-Diagramm die äußere 1-Zelle einer 2-Zelle vom Typ $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ oder $(3, 1)$ verkürzbar.

Ist D ein nichtleeres und einfaches Diagramm und ist v eine 0-Zelle von D, so bezeichnen wir mit $deg(v)$ die Anzahl der 2-Zellen, die sich in v treffen. Da D einfach und nicht leer ist, sind all diese 2-Zellen verschieden, und es gilt für alle inneren 0-Zellen, daß $deg(v) \geq 3$, und für alle äußeren 0-Zellen, daß $deg(v) \geq 2$.

Wir definieren die Krümmung einer 2-Zelle $A \in D_2$ vom Typ (n, m) durch

$$\chi(A) := 1 - m - \frac{n}{2} + \sum_{v \in \partial A} \frac{1}{\deg(v)}.$$

Dann gilt nach der Eulerschen Formel:

$$\sum_{A \in D_2} \chi(A) = 1. \tag{4}$$

Für $n \neq 0$ hat eine 2-Zelle A vom Typ (n, m) genau $n - m$ innere und $2m$ äußere 0-Zellen. Damit ergibt sich:

$$\chi(A) \leq \frac{6 - 2m - n}{6}. \tag{5}$$

Mit $a_{(n,m)}$ bezeichnen wir die Menge der 2-Zellen vom Typ (n, m) in einem einfachen Diagramm D.

Lemma 4.5.1 *In einem nicht leeren Diagramm mit der Eigenschaft $C'(\frac{1}{6})$ gilt:*

$$\frac{1}{2}a_{(1,1)} + \frac{1}{3}a_{(2,1)} + \frac{1}{6}a_{(3,1)} \geq 1 + \sum_{n=7}^{\infty} \frac{1}{6}a_{(n,0)}.$$

Insbesondere hat ein solches Diagramm mindestens zwei verkürzbare äußere 1-Zellen.

Beweis: Die Krümmung $\chi(A)$ kann wegen Ungleichung (5) nur für Zellen vom Typ $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$ und vom Typ $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(4, 0)$, $(5, 0)$ strikt positiv sein. Die letzten fünf Typen kommen wegen der Bedingung $C'(\frac{1}{6})$ nicht vor. Für 2-Zellen vom Typ $(n, 0)$ gilt $\chi(A) \leq -\frac{1}{6}$, falls $n \geq 7$. Daher folgt die Behauptung aus der Eulerschen Formel (4). □

Lemma 4.5.2 *Jeder geodätische Raum, der die „small cancellation"-Bedingung $C'(\frac{1}{6})$ erfüllt, ist hyperbolisch.*

Beweis: Da X die Bedingung $C'(\frac{1}{6})$ erfüllt, existiert ein $\kappa > 0$, so daß jedes geodätische Dreieck die Randkurve eines Diagramms D mit der Eigenschaft $C'(\frac{1}{6}, \kappa)$ ist. Wir setzen $\delta = 2\kappa$. Ist $l(\partial D) \leq \kappa$, so erfüllt das Dreieck trivialerweise die Bedingungen aus 2.2.1. Da die Randkurve ein geodätisches Dreieck ist, existieren andernfalls höchstens drei verkürzbare äußere 1-Zellen. Also gibt es höchstens drei 2-Zellen vom Typ (1,1), (2,1) oder (3,1). Daher gibt es, gemäß Lemma 4.5.1, höchstens drei 2-Zellen, auf deren Rand keine äußeren Kanten liegen. Ist z ein Punkt auf einer Seite des Dreiecks, und wäre die Entfernung von den anderen Seiten größer als 2κ, so erhielten wir mit Hilfe der zweiten Aussage in Lemma 4.4.1 einen Widerspruch. □

4.6 „Small cancellation“-Eigenschaft $C'(\frac{1}{6}) \Rightarrow$ Lineare isoperimetrische Ungleichung

Lemma 4.6.1 *Jeder geodätische Raum, der die „small cancellation“-Eigenschaft $C'(\frac{1}{6})$ hat, genügt einer linearen isoperimetrischen Ungleichung.*

Beweis: Wir haben bereits die Implikationen

$$C'(\frac{1}{6}) \qquad \Rightarrow \qquad \text{Hyperbolizität} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Schlanke Schleifen}$$

gezeigt. Da X die Bedingung $C'(\frac{1}{6})$ erfüllt, können wir somit Lemma 4.2.3 anwenden. Wir finden also $\kappa_{min}, \kappa > 0$, so daß jede geschlossene Kurve γ mit $\kappa < l(\gamma) < \infty$ die Randkurve eines Diagramms mit der Eigenschaft $C'(\frac{1}{6}, \kappa)$ ist, und für alle 2-Zellen $A \in D_2$ in diesem Diagramm $l(\partial A) \geq \kappa_{min}$ gilt. Wir betrachten jene 2-Zellen, die einen nicht negativen Beitrag in der Formel (4) aus 4.5 liefern. Dies sind gemäß Ungleichung (5) in 4.5 gerade die 2-Zellen vom Typ

$$(1,1),\ (2,1),\ (3,1),\ (4,1) \qquad \text{und} \qquad (2,2).$$

Aufgrund der Bedingung $C'(\frac{1}{6}, \kappa)$ haben die äußeren Kanten einer Zelle vom Type (n, m) zusammen mindestens die Länge $\frac{6-n}{6}\kappa_{min}$. Daher ist die Anzahl der 2-Zellen, die einen nicht negativen Beitrag in der Formel (4) liefern, kleiner als $\frac{3l(\partial D)}{\kappa_{min}}$. Damit ist aufgrund der Eulerschen Formel (4) auch die Anzahl der 2-Zellen, die einen negativen Beitrag leisten, linear in $l(\gamma)$ beschränkt. $\square$

5 Einschränkung auf Gruppengraphen

5.1 Kombinatorische Diagramme

Die bisher entwickelten Methoden sollen nun in Situationen angewendet werden, in denen der geodätische Raum X ein zusammenhängender 1-Komplex ist, der dadurch metrisiert ist, daß wir jeder Kante die Länge 1 geben. In diesem Fall ist es nicht sinnvoll, alle Diagramme zu betrachten.

Definition 5.1.1 (kombinatorische Diagramme) *Ein Diagramm D über einem 1-Komplex X mit Kantenlänge 1 heißt kombinatorisch, falls nach hinreichend feiner endlicher Unterteilung der 1-Zellen von D die Abbildung $\varphi : D^1 \to X$ alle 0-Zellen auf 0-Zellen und alle offenen 1-Zellen homöomorph auf offene 1-Zellen abbildet.*

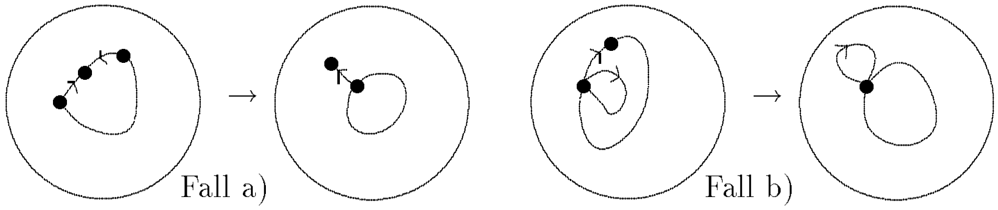
In kombinatorischen Diagrammen werden 1-Zellen von D auf Kantenpfade im 1-Komplex X abgebildet. Die Randkurve ∂D und die Randkurve ∂A jeder 2-Zelle A beschreiben geschlossene Kantenpfade in X. Die Längen $l(k)$ und $l(\partial A)$ sind für alle 1-Zellen $k \in D_1$ und alle 2-Zellen $A \in D_2$ natürliche Zahlen.

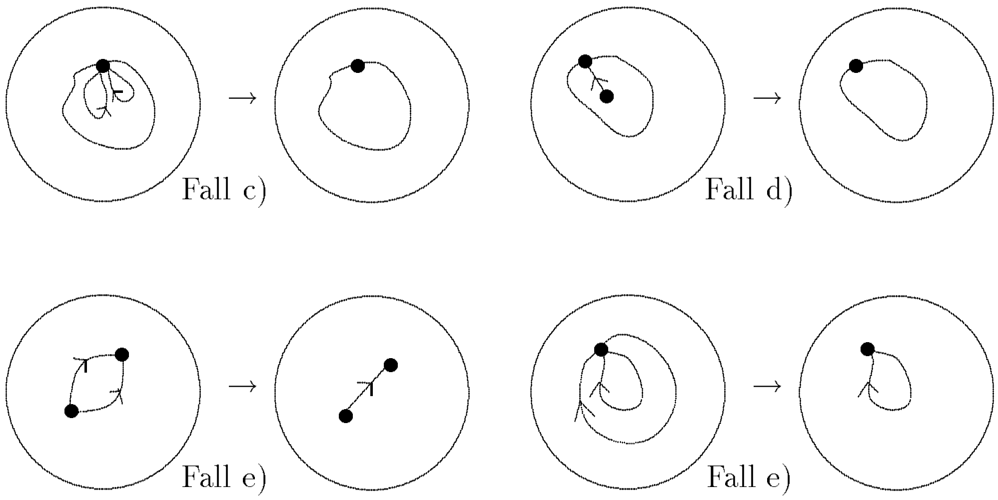
5.2 Operationen in kombinatorischen Diagrammen

In kombinatorischen Diagrammen benutzen wir statt der Operationen aus Kapitel 1.4 die folgenden drei Operationen:

5.2.1 Diagramme zyklisch reduzieren

Wir nennen ein kombinatorisches Diagramm D zyklisch reduziert, falls die Kurve ∂D und die Kurven ∂A für alle $A \in D_2$ lokal injektiv sind. Dies bedeutet, daß die ensprechenden Kantenpfade niemals dieselbe 1-Zelle direkt nacheinander in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Unter der Voraussetzung, daß die Randkurve ∂D injektiv ist, können wir ein kombinatorisches Diagramm D durch wiederholte Anwendungen der folgenden Operationen in ein zyklisch reduziertes Diagramm überführen, ohne die Maschengröße oder die h-Energie zu vergrößern. Diese Liste von Operationen entsteht dadurch, daß wir danach unterscheiden, wie die betroffenen 0- und 1-Zellen zusammenfallen können.





Im Fall b) wird dabei auch das Innere der inneren Schleifen nach außen geklappt. Die Injektivität der Kurve ∂D ist notwendig, um diese Operationen auch dann durchführen zu können, wenn ein Teil der betroffenen 0- und 1-Zellen auf dem Rand von D liegen. Im Fall a) und b) dürfen die beiden 0-Zellen, die identifiziert werden, nicht beide auf dem Rand von D liegen. Im Fall e) muß mindestens eine der beiden 1-Zellen eine innere 1-Zelle sein.

5.2.2 Verkleben zweier 2-Zellen in kombinatorischen Diagrammen

Beim Verkleben (siehe Kapitel 1.4.3) zweier 2-Zellen in einem kombinatorischen Diagramm erhalten wir wieder ein kombinatorisches Diagramm. Daher können wir diese Operation ohne Schwierigkeiten auch in kombinatorischen Diagrammen anwenden.

5.2.3 Zerschneiden einer 2-Zelle

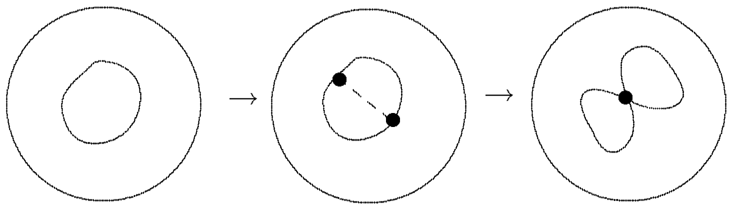
Bei der Operation Zerschneiden in 1.4.4 treten in kombinatorischen Diagrammen zwei Probleme auf.

1. Die neue 1-Zelle muß ein Kantenpfad sein. Deshalb müssen wir in 1.4.4 voraussetzen, daß $\gamma(s_1)$ und $\gamma(s_2)$ 0-Zellen in X sind. Ist γ ein geschlossener Kantenpfad, so erhalten wir durch diese Einschränkung in 2.4.1 eine neue kombinatorische Definition des $\frac{1}{3}$-Durchmessers $d_{\frac{1}{3}}(\gamma)$. Für $l(\gamma) \geq 6$ unterscheiden sich diese beiden Definitionen höchstens um den Wert 2. Deshalb gilt auch für einen hyperbolischen 1-Komplex X, daß $\frac{d_{\frac{1}{3}}(\gamma)}{l(\gamma)} \longrightarrow 0$ für $l(\gamma) \longrightarrow \infty$.

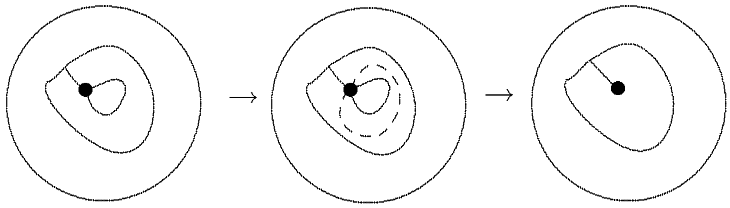
2. In einem kombinatorischen Diagramm existieren keine 1-Zellen der Länge 0. Also können wir die Operation aus 1.4.4 nicht durchführen, falls wir dort eine neue 1-Zelle der Länge 0 einfügen müßten. Dieses Problem lösen wir für Diagramme mit injektiver Randkurve ∂D wie folgt:

   Wir fügen zunächst eine Hilfskante ein. Diese ziehen wir danach zu einem Punkt zusammen. Dabei treten zwei Fälle auf:

   Fall 1: Die beiden Endpunkte sind verschieden. Da ∂D injektiv ist, können diese beiden Punkte nicht beide auf dem Rand des Diagramms liegen. Das Diagramm bleibt daher homöomorph zur Kreisscheibe.



   Fall 2: Die beiden Endpunkte stimmen überein. In diesem Fall bildet die Hilfskante und ihr Inneres ein freies Teildiagramm, welches wir entfernen.



5.3 Van Kampen-Diagramme

Sei $< S \mid R >$ eine endlich präsentierte Gruppe mit einer symmetrisierten Menge R von definierenden Relationen. Sei X das 1-Skelett des Gruppengraphen. Jede orientierte 1-Zelle in X ist durch einen Erzeuger aus S gekennzeichnet ([15], S. 123). In einem kombinatorischen Diagramm D über X definiert daher die Randkurve ∂D eine bis auf zyklische Permutation und Invertierung eindeutige Randrelation $r(\partial D)$. Jede 2-Zelle A definiert eine bis auf zyklische Permutation und Invertierung eindeutige Relation $r(\partial A)$. Ist D zyklisch reduziert, so sind $r(\partial D)$ und $r(\partial A)$ für alle $A \in D_2$ zyklisch reduzierte Wörter. Wir nennen eine Relation selbstüberschneidungsfrei, falls sie zyklisch reduziert ist und kein echtes Teilwort enthält, welches ebenfalls eine Relation ist. Ist die Kurve ∂D injektiv, so ist die Randrelation $r(\partial D)$ selbstüberschneidungsfrei.

Definition 5.3.1 (van Kampen-Diagramme) *Ein kombinatorisches Diagramm über dem Gruppengraphen einer endlich präsentierten Gruppe heißt van Kampen-Diagramm über $< S \mid R >$, falls für jede 2-Zelle $A \in D_2$ die Relation $r(\partial A)$ eine definierende Relation ist.*

Es ist zu beachten, daß wir im Gegensatz zur Definition in [15] verlangen, daß van Kampen-Diagramme homöomorph zur Einheitskreisscheibe sind.

Satz 5.3.2 (Existenz von van Kampen-Diagrammen) *Jede selbstüberschneidungsfreie Relation in einer endlich präsentierten Gruppe* $< S \mid R >$ *ist die Randrelation eines van Kampen-Diagramms über* $< S \mid R >$.

Beweis: Wir verwenden die Konstruktion aus [15], Kapitel V.1. Für selbstüberschneidungsfreie Randrelationen muß das dort konstruierte Diagramm immer homöomorph zur Einheitskreisscheibe und daher ein van Kampen-Diagramm in unserem Sinne sein. □

5.4 Beweis von Satz 3.2.1 und Satz 3.2.2

Der Beweis von Satz 3.2.1 ähnelt den Beweisen im Kapitel 4.2. Da es nur endlich viele kombinatorische Typen von van Kampen-Diagrammen mit beschränkter h-Energie gibt, berandet jede selbstüberschneidungsfreie Relation ein h-minimales van Kampen-Diagramm und alle Prozesse, die die h-Energie eines Diagramms verringern, brechen nach endlich vielen Schritten ab. Daher taucht in Satz 3.2.1 und im folgenden Beweis kein ϵ mehr auf. Da wir die Kontrolle über die in einem Diagramm auftretenden Relationen verlieren würden, wenn wir Diagramme wie in 1.4.1 „zwischendurch" vereinfachen würden, müssen wir freie Teildiagramme in diesem Beweis gesondert behandeln.

5.4.1 Beweis von Satz 3.2.1

Sei $< S \mid R >$ eine endlich präsentierte Gruppe und sei der Gruppengraph X hyperbolisch. Wir werden zunächst zwei Relationenmengen R_1, R_2 und eine Energiefunktion h mit den in Satz 3.2.1 verlangten Eigenschaften konstruieren.

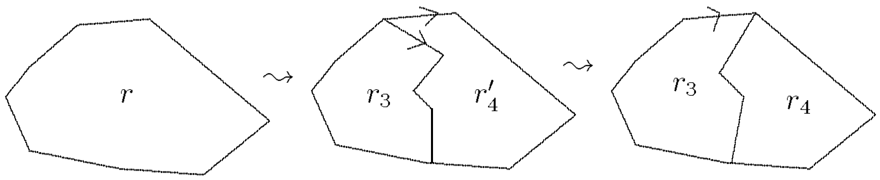
Da X hyperbolisch ist, gibt es eine natürliche Zahl $\kappa \geq \max\{l(r) : r \in R\}$, so daß $d_{\frac{1}{3}}(\gamma) \leq \frac{1}{19} l(\gamma)$ für alle geschlossenen Kantenpfade γ mit $l(\gamma) \geq \kappa$.

Sei f die in 4.2.2 angegebene Funktion. Wir definieren die Energiefunktion h durch $h(t) := f(\frac{t}{\kappa})$. Die Menge R_1 ist die Menge aller zyklisch reduzierten Relationen r mit $l(r) < \kappa$. Die Menge R_2 ist die Menge aller zyklisch reduzierten Relationen r mit $\kappa \leq l(r) < \frac{5}{3}\kappa$.

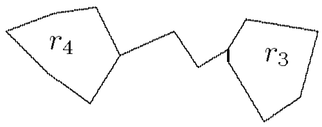
Die Eigenschaft $ii)$ aus Satz 3.2.1 folgt unmittelbar aus Lemma 4.2.1, $i)$. Um auch die Eigenschaft $iii)$ zu erhalten, gehen wir wie folgt vor. Ist $r \in R_2$, so gibt es ein leeres kombinatorisches Diagramm über dem Gruppengraphen mit

Randrelation r, welches wir längs eines kombinatorischen $\frac{1}{3}$-Durchmessers in zwei 2-Zellen A und B zerschneiden können.

Wir setzen $r_3' = r(\partial A)$ und $r_4' = r(\partial B)$. Dann gilt wegen Lemma 4.2.1, $ii)$, daß $h(l(r_3')) + h(l(r_4')) < h(l(r))$. Indem wir r_3' und r_4' zyklisch reduzieren und r eventuell zyklisch permutieren, erhalten wir die gesuchten Relationen r_3^{-1}, r_4, die die Bedingung $iii)$ aus Satz 3.2.1 erfüllen.



Es ist zu beachten, das r nicht immer als zyklisch reduzierte Form von $r_4 r_3^{-1}$ geschrieben werden kann. Durch die zyklische Reduktion kann sich nämlich auch das folgende Bild ergeben:



Dies ist der Grund für die etwas unsymmetrische Formulierung der Bedingungen $ii)$ und $iii)$ aus Satz 3.2.1.

Damit ist die Existenz von R_1, R_2, h für hyperbolische Gruppen gezeigt.

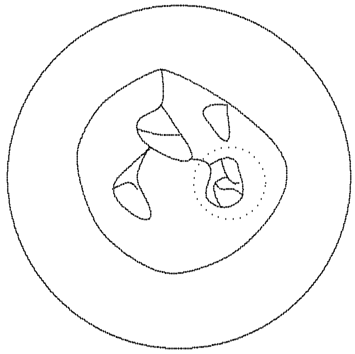
Sei nun R_1, R_2, h ein Tripel mit den im Satz 3.2.1 verlangten Eigenschaften und r eine selbstüberschneidungsfreie Relation. Dann gibt es nach Satz 5.3.2 ein van Kampen-Diagramm D über $< S \mid R >$ mit Randwort r.

Wir entfernen im folgenden unnötige 0-Zellen, sobald sie auftreten. Treffen in D zwei 2-Zellen A, B längs einer Kante k mit $l(k) \geq \frac{1}{6} l(A)$ zusammen, so verkleben wir die beiden 2-Zellen und reduzieren das Diagramm zyklisch. Dabei vermindert sich die h-Energie wegen der Bedingung $ii)$ aus Satz 3.2.1, und wir erhalten eine neue 2-Zelle C mit $r(\partial C) \in R_1 \cup R_2$.

Sobald durch eine derartige Verklebung eine 2-Zelle A mit $r(\partial A) \in R_2$ auftritt, zerschneiden wir sie wie folgt energievermindernd: Wir finden r_3 und r_4 wie in der Eigenschaft iii) aus Satz 3.2.1 vorgegeben. Ist r_3^{-1} eine Teilwort von $r(\partial A)$, so verwenden wir hier die Operation aus 5.2.3 mit einer Hilfskante der Länge 0. Nach zyklischer Permutation entstehen dabei im ersten Fall 1 von 5.2.3 entweder zwei 2-Zellen B und C mit $r(\partial B) = r_3$ und $r(\partial C) = r_4$, oder es bleibt im Fall 2 eine 2-Zelle mit Randwort r_3 oder r_4 zurück. Andernfalls finden wir nach zyklischer Permutation von $r(\partial A)$ und r_3 reduzierte Wörter v, r_3' und r' mit $r(\partial A) = v^{-1} r'$, $r_3 = r_3' v$ und $r_4 = r_3' r'$. Dann ist $r(\partial A)$ eine zyklisch reduzierte Form von $v^{-1}(r_3')^{-1}r_3'r'$ und $h(l(v^{-1}(r_3')^{-1})) + h(l(r_3'r')) = h(l(r_3)) + h(l(r_4)) < h(l(r(\partial A)))$. Also können wir A längs eines Kantenzuges, der dem Wort r_3' entspricht, energievermindernd zerschneiden.

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir so ein zyklisch reduziertes van Kampen-Diagramm über $< S \mid R_1 >$, in dem beide Operationen nicht mehr möglich sind. In diesem Diagramm gilt daher $l(k) < \frac{1}{6}l(\partial A)$ für alle 1-Zellen k, die auf dem Rand von zwei verschiedenen 2-Zellen A, B liegen. Wir werden nun zeigen, daß dieses Diagramm auch einfach ist.

Da D zyklisch reduziert ist, gibt es keine freie 1-Zelle. Also müßte D ein freies Teildiagramm enthalten, falls D nicht einfach wäre. Insbesondere gäbe es ein freies Teildiagramm, welches selbst kein weiteres freies Teildiagramm enthält. Dieses Teildiagramm wäre also einfach und würde daher die „small cancellation"-Bedingung $C'(\frac{1}{6})$ erfüllen.



Wegen Lemma 4.5.1 wäre dieses Teildiagramm entweder leer oder würde mindestens zwei verkürzbare äußere 1-Zellen enthalten. Im zweiten Fall könnte nur auf einer dieser beiden 1-Zellen die 0-Zelle liegen, die das Teildiagramm mit dem Rest verbindet. Wir erhielten also in beiden Fällen mindestens eine zu lange 1-Zelle auf dem Rand des Teildiagramms und somit einen Widerspruch.

Also ist D einfach und erfüllt somit die Bedingung $C'(\frac{1}{6})$. Wegen Lemma 4.5.1 ist $r(\partial D)$ entweder ein Element aus R_1, oder es enthält (zyklisch betrachtet) zwei disjunkte, durch Relationen aus R_1 verkürzbare Teilworte. Jede zyklisch reduzierte Relation kann nach zyklischer Permutation als Produkt von selbstüberschneidungsfreien Relationen $r_1r_2\ldots r_n$ geschrieben werden. Daher muß $r_1r_2\ldots r_n$ mindestens n durch Relationen aus R_1 verkürzbare Teilwörter enthalten. Dabei benutzen wir, daß nur ein verkürzbares Teilwort an der Stelle liegen kann, an der r_i an $r_{i\pm 1}$ stößt. Also beschreibt R_1 einen Dehn-Algorithmus. $\square$

5.4.2 Beweis von Satz 3.2.2

Die gesuchte Zahl κ erhalten wir wie Beweis von 3.2.1. Die Hyperbolizität folgt unter den in Satz 3.2.2 genannten Voraussetzungen, da wir h, R_1, R_2 wie im Beweis von Satz 3.2.1 definieren und Satz 3.2.1 anwenden könnnen. $\square$

5.5 Theoretische Algorithmen

5.5.1 Ein Hyperbolizitätstest

Sei $< S \mid R >$ eine endlich präsentierte Gruppe. Dann erhalten wir jede zyklisch reduzierte Relation, indem wir ein Produkt der Form

$$v_1 r_1 v_1^{-1} v_2 r_2 v_2^{-1} \dots v_n r_n v_n^{-1} \qquad (r_1, \dots, r_n \in R)$$

zyklisch reduzieren und zyklisch permutieren. Wir können alle derartigen Produkte mit beschränkter Länge $\sum_{j=1}^{n} (2l(v_j) + l(r_j))$ aufzählen und erhalten so einen Algorithmus, der im n-ten Schritt eine zyklisch reduzierte Relation r_n erzeugt, so daß in der Liste $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jede zyklisch reduzierte Relation mindestens einmal auftaucht. Sei f die in 4.2.2 angegebene Funktion. Wir können nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ überprüfen, ob für eine natürliche Zahl $\kappa \leq n$ das Tripel $R_1 := \{r \in \{r_i\}_{\{i \leq n\}} \ : \ l(r) < \kappa\}$, $R_2 := \{r \in \{r_i\}_{\{i \leq n\}} \ : \ \kappa \leq l(r) < \frac{5}{3}\kappa\}$, $h(t) := f(\frac{t}{\kappa})$ die Bedingungen aus Satz 3.2.1 erfüllt.

Da jede Relation in der Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auftaucht, wird dieser Algorithmus die Hyperbolizität nachweisen und einen Dehn-Algorithmus finden, falls die Gruppe hyperbolisch ist. Andernfalls läuft er ewig weiter.

5.5.2 Nachweis eines Dehn-Algorithmus

Wir werden nun einen Algorithmus angeben, der entweder widerlegt, daß eine Dehn-Präsentation vorliegt, oder eine neue Relationenmenge R_1 liefert, die einen Dehn-Algorithmus definiert. Die Laufzeit dieses Algorithmus ist durch die Eingangsdaten $< S \mid R >$ beschränkt.

Wir setzen $p := \max\{l(r) \ : \ r \in R\}$. Unter der Annahme, daß R einen Dehn-Algorithmus beschreibt, folgt, daß der Gruppengraph X der isoperimetrischen Ungleichung $f(n) = n$ bezüglich der Maschengröße p genügt. Mit Lemma 4.4.2 erhalten wir, daß $d_{\frac{1}{3}}(\gamma) \leq \frac{1}{19} l(\gamma)$ für jeden geschlossenen Kantenpfad mit $l(\gamma) \geq (20p)^2$.

Unter der Annahme, daß R einen Dehn-Algorithmus beschreibt, können wir außerdem die Mengen R_1 aller zyklisch reduzierten Relationen, die kürzer als $(20p)^2$ sind, und die Menge R_2 aller zyklisch reduzierten Relationen mit Längen zwischen $(20p)^2$ und $\frac{5}{3}(20p)^2$ bestimmen. Wir definieren $h(t) := f(\frac{t}{400p^2})$, wobei f in 4.2.2 definiert ist, und überprüfen, ob das Tripel R_1, R_2, h die Bedingungen aus 3.2.1 erfüllt. Falls dies der Fall ist beschreibt R_1 eine Dehn-Algorithmus. Falls dies nicht der Fall ist, ist dies ein Widerspruch zur Annahme, daß R einen Dehn-Algorithmus beschreibt.

5.6 Ein „optimistischer" Algorithmus

Die bisher vorgestellten Algorithmen sind aufgrund der dort auftretenden langen Listen kaum in konkreten Beispielen anwendbar. Wir werden daher nun einen weiteren Algorithmus angeben, der allerdings nicht immer zum Erfolg führen kann.

Sei $< S \mid R >$ eine endlich präsentierte Gruppe. Wir arbeiten mit zwei disjunkten symmetrisierten Mengen R_1 und R_2 von Relationen, starten mit $R_1 := R$, $R_2 := \emptyset$ und wählen eine Energiefunktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Auf die Mengen R_1, R_2 können wir nun die folgenden Operationen anwenden:

I) Sind r_1, r_2 zwei verschiedene Relationen aus R_1, ist $r \notin R_1 \cup R_2$ eine zyklisch reduzierte Form von $r_1 r_2^{-1}$ und gilt $h(l(r_1)) + h(l(r_2)) > h(l(r))$, so fügen wir r, alle zyklischen Permutationen von r und deren Inverse in die Menge R_1 ein.

II) Sind $r \in R_1$, $r_3 \in R_1 \cup R_2$ und ist r_4 eine zyklisch reduzierte Form von $r_3 r$ mit $h(l(r_3)) + h(l(r_4)) < h(l(r))$, so verschieben wir r, alle zyklischen Permutationen von r und deren Inverse von R_1 nach R_2 und fügen r_4, alle zyklischen Permutationen von r_4 und deren Inverse in die Menge R_1 ein, falls $r_4 \notin R_1 \cup R_2$.

Durch wiederholtes Anwenden dieser beiden Operationen versuchen wir die Mengen R_1, R_2 nun so zu verändern, daß wir folgendes erreichen:
Sind r_1, r_2 zwei verschiedene Relationen aus R_1, ist r eine zyklisch reduzierte Form von $r_1 r_2^{-1}$ und gilt $l(r) < l(r_1) + l(r_2) - \frac{1}{3} l(r_1)$, so ist $r \in R_2$ und $h(l(r_1)) + h(l(r_2)) > h(l(r))$.

In diesem Fall hätten wir nämlich ein Tripel R_1, R_2, h gefunden, welches die Bedingungen aus Satz 3.2.1 erfüllt. Insbesondere wäre dann die Gruppe hyperbolisch und R_1 würde einen Dehn-Algorithmus beschreiben.

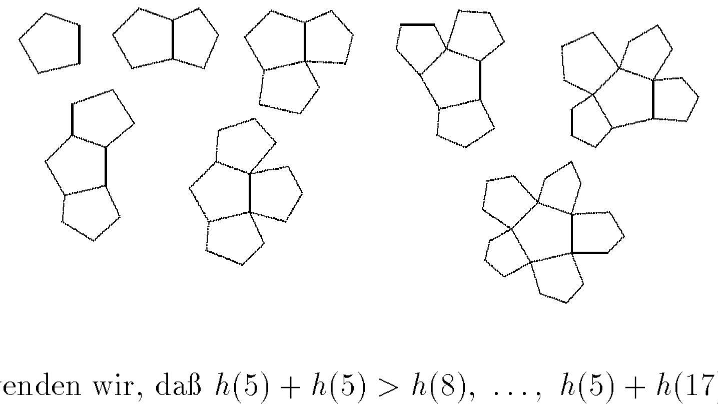
Bei der Reihenfolge der Anwendungen der Operationen I) und II) haben wir eine gewisse Freiheit. Im allgemeinen ist es sinnvoll, die Operationen wie folgt zu koordinieren: Die Operation II) wenden wir stets an, sobald sie möglich ist. Die Operation I) wenden wir vorrangig auf möglichst kurze Wörter r_1, r_2 an.

Ist der Gruppengraph hyperbolisch, so gibt es gemäß Satz 3.2.1 eine Energiefunktion h, mit der dieses Vorgehen zum Erfolg führen könnte. Insbesondere sollten hinreichend lange Relationen durch die Operation II) energievermindernd in zwei kürzere Relationen zerschnitten werden können. Um dies festzustellen, müßten wir aber mindestens eine dieser beiden kürzeren Relationen kennen. Da wir im Gegensatz zu den letzten beiden Algorithmen nicht mit „vollständigen" Listen von Relationen arbeiten, können wir nicht garantieren, daß diese kürzeren Relationen durch die Operationen I) und II) in $R_1 \cup R_2$ auftauchen. Werden die kurzen Relationen erst relativ spät erzeugt, so kann es außerdem sein, daß wir die Operation I) bereits mit zu langen Relationen durchgeführt haben, so daß unsere Mengen R_1, R_2 zu rasch anwachsen. Da das Isomorphieproblem für triviale Gruppen nicht lösbar ist, gibt es Gruppen, in denen diese Probleme auftreten müssen.

Für Fundamentalgruppen von kompakten hyperbolischen Mannigfaltigkeiten können wir versuchen, diesen Algorithmus mit Hilfe geometrischer Informationen zu steuern. Wir geben nun ein Beispiel für eine Fuchssche Gruppe, in der dies funktioniert.

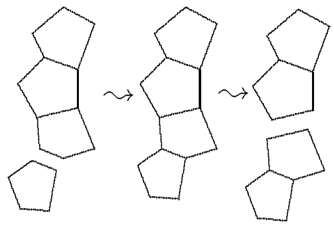
Wir betrachten die Gruppe $< a, b, c, d, e \mid edcba,\ \ ecdab >$. Um unnötige Schreibarbeit zu vermeiden, haben wir die Menge R nicht symmetrisiert angegeben. Der Gruppengraph ist planar und besteht aus Fünfecken, von denen sich jeweils zehn in einer 0-Zelle treffen. Die Gruppe erfüllt die klassischen „small cancellation"-Bedingungen $C'(\frac{1}{4})$ und $T(10)$ (siehe [15], S. 241). Wir werden zeigen, wie wir in diesem Fall auch mit unseren Methoden einen Dehn-Algorithmus finden. Wir benutzen dabei van Kampen-Diagramme, in denen niemals eine Relation direkt mit ihrer Inversen zusammentreffen. Ein Existenzbeweis und eine genaue Definition für solche reduzierten Diagramme findet sich in [15], V.2.

Wir verwenden eine Energiefunktion h mit $h(5) = 5$, $h(8) = 6$, $h(11) = 10$, $h(14) = 14$, $h(17) = 18$, $h(20) = 22$ und $h(23) = 26$. Durch mehrfaches Anwenden der Operation I) mit $l(r_1) = 5$ erhalten wir die Menge R_1, die aus allen Relationen besteht, deren Bilder im Gruppengraphen wie folgt aussehen:



Hierbei verwenden wir, daß $h(5) + h(5) > h(8),\ \ldots,\ h(5) + h(17) > h(20)$.

Da sich zehn Fünfecke in jeder 0-Zelle des Gruppengraphen treffen, können sich zwei Relationen aus R_1 in einem reduzierten Diagramm höchstens längs einer einzigen 1-Zelle treffen. Da alle Relationen aus $R_1 \setminus R$ mindestens die Länge acht haben, genügt es, den Fall zu betrachten, in dem eine der definierenden Relationen auf eine Relation aus R_1 trifft. Wegen $h(5) + h(5) > h(8), \ldots, h(5)+h(20) > h(23)$ erhalten wir dabei entweder wieder ein Element aus R_1, oder wir können die resultierende Relation mit Hilfe der Operation II) wegen $h(8) + h(8) < h(14),\ h(8) + h(11) < h(17),\ \ldots,\ h(8) + h(17) < h(23)$ energievermindernd in zwei Relationen aus R_1 zerschneiden.



Also beschreibt R_1 einen Dehn-Algorithmus.

Literatur

[1] B.H. Bowditch: *Notes on Gromov's hyperbolicity criterion for path-metric spaces*, in *Group theory from a geometrical viewpoint*, eds.: E. Gys, A. Haefliger, A. Verjovsky, World Scientific, 46-167, 1991

[2] J.W. Cannon: *The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups*, Geom. Dedicata 16, 123-148, 1984

[3] M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos: *Géométrie et théorie des groupes*, Lecture Notes in Math. 1441, Springer, 1990

[4] M. Dehn: *Über unendliche diskontinuierliche Gruppen*, Math. Ann. 71, 116-144, 1912

[5] M. Dehn: *Transformationen der Kurven auf zweiseitigen Flächen*, Math. Ann. 72, 413-421, 1912

[6] S.M. Gersten: *Reducible diagrams and equations over groups*, in *Essays in group theory*, ed.: S.M. Gersten, MSRI Publ. 8, Springer, 15-73, 1987

[7] M.D. Greendlinger: *Dehn's algorithm for the word problem*, Comm. Pure Appl. Math., 13, 67-83, 1960

[8] M.D. Greendlinger: *Dehn's algorithms for the conjugacy and word problems with applications*, Comm. Pure Appl. Math., 13, 641-677, 1960

[9] M. Gromov: *Hyperbolic groups*, in *Essays in group theory*, ed.: S.M. Gersten, MSRI Publ. 8, Springer, 75-263, 1987

[10] M. Gromov: *Asymtotic invariants of infinite groups*, in *Geometric group theory*, eds.: G.A. Niblo, M.A. Roller, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 182, Volume 2, 1991

[11] A. Juhasz: *Small cancellation theory with a weakened small cancellation hypothesis 1. The basic theory*, Israel J. Math. 55, 65-93, 1986

[12] A. Juhasz: *Small cancellation theory with a weakened small cancellation hypothesis 2. The word problem, 3. The conjugacy problem*, Israel J. Math. 58, 19-53, 1987

[13] A. Juhasz: *Small cancellation theory with a unified small cancellation condition*, J. London Math. Soc. 40, 57-80, 1989

[14] R.C. Lyndon: *On Dehn's algorithm*, Math. Ann. 166, 208-228, 1966

[15] R.C. Lyndon, P.E. Schupp: *Combinatorial group theory*, Ergebnisse der Mathematik 89, Springer, 1977

[16] I.G. Lysenok: *On some algorithmic properties of hyperbolic groups*, Math. USSR Izvestiya 35 (1), 145-163, 1990

[17] E.E. Moise: *Geometric topology in dimension 2 and 3*, Graduate Texts in Math. 47, Springer, 1977

[18] A.Yu. Ol'shanskii: *Hyperbolicity of groups with subquadratic isoperimetric inequality*, Intern. J. Algebra Comp., 1, 282-289, 1991

[19] P. Papasoglu: *On the sub-quadratic isoperimetric inequality*, in *geometric group theory*, eds.: R.Charney, M. Davis, M. Sharpiro, de Gruyter, 149-157, 1995

[20] W. Rinow: *Die inneren Geometrie der metrischen Räume*, Grundlehren der Math. Wissenschaft 105, Springer, 1961

[21] E.E. Rips: *Generalized small cancellation theory and applications*, Israel J. Math., 41, 1-146, 1982

[22] M.C. Weinbaum: *Visualizing the word problem, with applications to sixth groups*, Pacific J. Math. 16, 557-578, 1966

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Autenrieth
Vorname: Michael
Geburtstag: 17.1.64
Geburtsort: München
Mutter: Margarete Autenrieth, geborene Storkebaum, Lehrerin
Vater: Reinhold Autenrieth, Pfarrer
Familienstand: ledig, ohne Kinder

Bildungsgang

Sept. 1970 bis Juli 1974: Grundschule Eckental-Echenau (bei Nürnberg)
Sept. 1974 bis Juni 1983: Emil-von-Behring-Gymnasium Erlangen-Spardorf, Abitur im Juni 1983
Nov. 1984 bis August 1986: Grundstudium Mathematik mit Nebenfach Physik an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Vordiplom im Juli 1986
Sep. 1986 bis Juli 1990: Hauptstudium Mathematik mit Nebenfach Physik an der Georg-August-Universität Göttingen, gefördert von der Studienstiftung des deutschen Volkes, Diplom im Juli 1990
seit Sept. 1990: Promotionsstudiengang Mathematik in Göttingen

Beruflicher Werdegang

Sept. 1983 bis Okt. 1984: Zivildienst auf einer neurochirurgischen Klinikstation der Universitätsklinik Erlangen
Sept. 1988 bis März 1989: wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität Göttingen
Sept. 1990 bis August 1991: wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut der Universität Göttingen
Sept. 1991 bis März 1992: wissenschaftlicher Mitarbeiter am SFB 170 „Geometrie und Analysis“ in Göttingen
April 1992 bis März 1996: wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut der Universität Göttingen

Sonstige Tätigkeiten

1984 bis 1990: Spieler in der ersten und zweiten Schachbundesliga
1990 bis 1992: Mitarbeit beim Aufbau der Kreisgruppe Göttingen des ADFC
Seit Frühjahr 1994: Ortsvorstand von GAL/Die Grünen Göttingen