Hyperbolische einfach-punktierte Torus-Bündel

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik
der Universität Bielefeld

vorgelegt von

Tino Koch

Mai 1999

Danksagung

Mein akademischer Lehrer, Prof. Dr. H. Helling, hat mich von der Vorlesung Analysis I an den Anfängen meines Mathematikstudiums bis zu dieser Arbeit angeleitet. Die zahlreichen Privatissimi und Diskussionen über dreidimensionale hyperbolische Geometrie haben mein eigenes Denken über dieses Gebiet wesentlich bestimmt. Und so ist Herr Prof. Helling in einem Maße, das im einzelnen abzuschätzen ich mich nicht in der Lage sehe, an dem Entstehen dieser Arbeit beteiligt. Ich möchte ihm an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen.

Mein kollegialer Dank gilt zudem Christof Menzel für die vielen Gespräche, zu denen meine Fragen oft Anlaß gaben, und insbesondere für den Hinweis auf das Whitehead-Link Komplement im Zusammenhang mit Abschnitt 3.4.3. Ebenso danke ich Björn Thiel für die Referenz [2] und den Hörern meiner Vorträge für ihre Geduld und ihr Interesse.

Sich von Zeit zu Zeit mit anderen mathematischen Fragen beschäftigt zu haben, brachte mir den nötigen Abstand, um die eigenen Fragestellungen mit neuer Motivation, Ruhe und Klarheit anzugehen. Ich danke freundschaftlich Jörg Liesen für seinen offenen Arbeitsstil, der uns in diesem Sinne zu einer befriedigenden und fruchtbaren gemeinsamen mathematischen Anstrengung [39] zusammenführte.

Allen anderen, die an dieser Arbeit durch inhaltliche Gespräche, Tips und Hilfestellungen bei der Überwindung computertechnischer Hürden Anteil haben, danke ich und entschuldige mich, daß ich sie nicht alle namentlich erwähnen kann.

Last but not least ist es mir ein inniges Anliegen, meiner lieben Frau Patricia zu danken. Sie hat mich über alle Höhen und durch alle Tiefen dieser Arbeit unterstützt.

1. Gutachter: Prof. Dr. Heinz Helling, Universität Bielefeld
2. Gutachter: Prof. Dr. John R. Parker, University of Durham

Datum der mündlichen Prüfung: 13. August 1999

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier ∞ ISO 9706

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Hintergrund. Ende der siebziger Jahre gaben Arbeiten von Thurston geometrischen Methoden bei der Untersuchung von dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten ein neues Gewicht. Geometrie und Topologie sind seither auf dem Gebiet der 3-Mannigfaltigkeiten eng miteinander verbunden. Oft ist es möglich, sich ein Bild von einer 3-Mannigfaltigkeit zu verschaffen, indem man auf ihr eine geometrische Struktur etabliert. Mehrnoch, vermutlich ist dies immer möglich. Thurston formulierte in seiner Geometrisierungsvermutung, daß sich das Innere jeder kompakten 3-Mannigfaltigkeit kanonisch in Teile zerlegen läßt, die für sich eine geometrische Struktur besitzen (s. [67]). Bis auf Spezialisierungen, die weitere Voraussetzungen machen, ist diese Vermutung bis heute nicht bewiesen. Sie hat aber zu einer Vielzahl von Forschungsaktivitäten geführt.

Mit einer der Spezialisierungen befaßt sich diese Arbeit. Von den acht Geometrien, die in diesem Kontext auftreten, kann eine als wichtigste, als der „Regelfall" bezeichnet werden: Die hyperbolische Struktur (vgl. [63] und [67]). Sie steht auch hier im Mittelpunkt. Eine 3-Mannigfaltigkeit besitzt dabei eine vollständige hyperbolische Struktur, wenn jede kleine Umgebung der 3-Mannigfaltigkeit zu einer Umgebung des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes isometrisch, die 3-Mannigfaltigkeit selbst der Quotient des hyperbolischen Raumes mittels einer diskreten Bewegungsgruppe ist. Die 3-Mannigfaltigkeit heißt dann auch kurz hyperbolisch. Man weiß, daß die Fundamentalgruppe einer hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeit folgende Bedingungen erfüllt: Sie ist unendlich, kein freies Produkt, und jede enthaltene $\mathbb{Z}^2$ ist Fundamentalgruppe eines randparallelen Torus [41]. Es ist der Inhalt von Thurstons Hyperbolisierungsvermutung, daß diese Bedingungen auch hinreichend für eine hyperbolische Struktur sind. Bewiesen ist diese Vermutung unter weiteren Voraussetzungen für zwei Typen von 3-Mannigfaltigkeiten:

Typ 1: für hinreichend große Mannigfaltigkeiten (Haken) [67],

Typ 2: für Faserungen über dem Kreis mit einer kompakten, eventuell punktierten Fläche [70], [53].

Es gibt zudem ein besonderes Interesse an den Mannigfaltigkeiten vom Typ 2, das durch eine Frage Thurstons geweckt wurde:

> „Does every hyperbolic 3-manifold have a finite-sheeted cover which fibers over the circle? This dubious sounding question seems to have a definite chance for a positive answer ([67] Question 18)."

Auch diese Vermutung ist bislang nicht bewiesen (vgl. [26], [5] Question 6).

Leider sind die Beweise zu Typ 1 und 2 nicht konstruktiv. Sie enthalten keine Methode, in einem konkreten Fall die zugehörige diskrete Bewegungsgruppe zu ermitteln. So ist es ein eigenständiges Problem, die etwaige hyperbolische Struktur auf einer 3-Mannigfaltigkeit zu finden. Das Problem wurde vor allem für Knoten- und Linkkomplemente ([72] zur Berechnung, [16] zur Übersicht) sowie für 3-Mannigfaltigkeiten gelöst, von denen eine Triangulierung durch ideale hyperbolische Tetraeder bekannt ist [31], [15].

Diese Arbeit nimmt sich dieses Problems für Mannigfaltigkeiten des Typs 2 an, solchen mit dem einfach-punktierten Torus als Faser. Das Innere dieser nicht kompakten Mannigfaltigkeiten sei kurz Torus-Bündel genannt. Wird eine Faser höheren Geschlechts oder mit mehr Punktierungen gewählt, so ist über die entsprechende Mannigfaltigkeit vom Typ 2 nur wenig bekannt. Ergebnisse und Probleme für die einfach-punktierte Brezelfläche als Faser findet man in [48]. Ausgewählte Torus-Bündel hingegen dienen bis heute immer wieder als instruktives Beispielmaterial, das in Bezug auf verschiedene Vermutungen untersucht wurde, wie zuletzt in [23].

Der Stand der Bearbeitung kann wie folgt skizziert werden, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben:

- In [25] und [21] wurden inkompressible Flächen in hyperbolischen Torus-Bündeln untersucht, und insbesondere in [25] ist eine Triangulierung in ideale hyperbolische Tetraeder beschrieben, die auf Jørgensen zurückgehen soll.
- Wann die Fundamentalgruppe eines hyperbolischen Torus-Bündels arithmetisch ist, wurde vollständig in [14] geklärt.
- Die Längen geschlossener Geodätischer in hyperbolischen Torus-Bündeln gehorchen einer bemerkenswerten Identität, der sog. McShane-Identität [12].
- Es gibt Ansätze, die Fundamentalgruppe eines hyperbolischen Torus-Bündels in $SL_3(\mathbb{C})$ darzustellen, wobei sich noch zeigen muß, ob hieraus neue Erkenntnisse gewonnen werden können [44].
- Torus-Bündel sind nicht kompakt und besitzen im Rand einen Torus. Durch Einkleben eines Volltorus, was auf verschiedene Weisen geschehen kann und Dehn-Chirurgie oder auch -Filling genannt wird, können Torus-Bündel kompaktifiziert werden. Die entstehenden kompakten Mannigfaltigkeit, die je nachdem, wie der Volltorus eingeklebt wurde, wieder hyperbolisch sind, waren ebenfalls Gegenstand von Untersuchungen [10], [58]. Die Arbeiten [25] und [21] lieferten durch Dehn-Chirurgie die ersten Beispiele von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten, die nicht Haken sind. Und in [59] wurde aus einem Torus-Bündel ein erstes Beispiel einer hyperbolischen, nicht Haken Mannigfaltigkeit konstruiert, die durch Faserung über dem Kreis mit einer Fläche vom Geschlecht 2 als Faser endlich überdeckt wird.

Übersicht und Ergebnisse. In dieser Arbeit werden nicht die Kompaktifizierungen, sondern die Torus-Bündel selbst systematisch behandelt, und die Ermittlung der hyperbolischen Struktur wird zur Aufgabe gemacht. Grundlage ist die Veröffentlichung [3] von Alestalo und Helling. Die Dissertation enthält folgende Hauptergebnisse:

- Es ist gelungen, Methoden zur Berechnung der hyperbolischen Strukturen beliebiger Torus-Bündel zu finden und einen kanonischen Fordschen Fundamentalbereich anzugeben. Dieser Fundamentalbereich ist ein hyperbolisches Polyeder und in dem Sinne kanonisch, als die Kombinatorik seiner Seiten-, Kanten- und Eckenidentifizierungen explizit beschrieben werden kann. Diese Kombinatorik hängt ausschließlich von der Monodromie des Torus-Bündels ab, einer in die Konstruktion eingehenden, homöomorphen Selbstabbildung der Faser.
- Auf dieser Grundlage wurden verschiedene Computer-Routinen für Mathematica 3.0 [74] entwickelt, die letztlich dieses kombinatorische Schema zu einem metrisch korrekten Fordschen Fundamentalbereich umsetzen.
- Es stellte sich zudem heraus, daß hyperbolische Torus-Bündel stets paarweise auftreten. Zu einem Paar genau bestimmter hyperbolischer Torus-Bündel ist ein weiteres Torus-Bündel eine gemeinsame zweiblättrige Überlagerung. Als Folge sind die hyperbolischen Strukturen eng verwandt. Man kennt sie für alle drei Torus-Bündel, wenn sie für ein Torus-Bündel des Paars bestimmt wurde.

Die Arbeit gliedert sich in drei Kapitel und zwei Anhänge. Im ersten Kapitel wird die Konstruktion von Torus-Bündeln erläutert, ihre Fundamentalgruppen angegeben und auf die Klassen homöomorpher Torus-Bündel eingegangen.

Das zweite Kapitel befaßt sich mit der Existenz hyperbolischer Strukturen auf Torus-Bündeln. Es wird ein einfaches Kriterium für ihre Hyperbolizität und ein Repräsentantensystem für die Klassen homöomorpher hyperbolischer Torus-Bündel angegeben, welches sich aus der sog. LU-Zerlegung einer $SL_2(\mathbb{Z})$-Matrix ergibt. Anschließend werden einige klassische Techniken erläutert, die zu einer Darstellung der Fundamentalgruppe eines hyperbolischen Torus-Bündels in $PSL_2(\mathbb{C})$, der Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien des hyperbolischen Raumes, führen. Das Kapitel gibt außerdem eine Beschreibung der paarweise auftretenden hyperbolischen Torus-Bündel.

Zu Beginn des dritten Kapitels werden benötigte Eigenschaften von Tschebyscheff-Polynomen und von Polynomen zusammengestellt, die mit den Tschebyscheffschen verwandt sind und erstmals in [3] beschrieben wurden. Es wird eine Beschreibung der Kombinatorik Fordscher Fundamentalbereiche für hyperbolische Torus-Bündel vorgestellt und sodann die zuvor erläuterten Techniken konkret zur Bestimmung hyperbolischer Strukturen herangezogen. Ihre Anwendungsmöglichkeiten werden an mehreren Beispielen von Serien hyperbolischer Torus-Bündel demonstriert.

Eine Auswahl zugehöriger Fordscher Fundamentalbereiche findet sich im Anhang A. Sie wurden mit einer MATHEMATICA-Prozedur erzeugt, die sich neben anderen im Anhang B anschließt.

Begrifflichkeiten und Notationen. Sei $\mathfrak{R} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathfrak{R}$ ist die *allgemeine lineare Gruppe* $GL_n(\mathfrak{R})$. Jene Matrizen aus $GL_n(\mathfrak{R})$ mit Determinante 1 bilden die *spezielle lineare Gruppe* $SL_n(\mathfrak{R})$ mit Zentrum $\{I, -I\}$, $I =$ Identität. Der Quotient $GL_n(\mathfrak{R})/\pm\mathfrak{R}^*I$ ist die *projektive lineare Gruppe* $PGL_n(\mathfrak{R})$, wobei $\mathfrak{R}^*$ die multiplikative Gruppe von $\mathfrak{R}$ bezeichnet; völlig analog ist $PSL_n(\mathfrak{R})$ definiert. Für z.B. $n = 2$ sei das Bild von $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in $PSL_2(\mathfrak{R})$ mit $\pm\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ bezeichnet. Desweiteren bezeichnet $tr(A)$ die Spur und $det(A)$ die Determinante einer Matrix $A \in (P)GL_n(\mathfrak{R})$.

Als Modell für den dreidimensionalen hyperbolischen Raum $\mathbb{H}^3$ wird das Poincaré-Modell des oberen Halbraums verwandt, $\mathbb{H}^3 = \mathbb{C}\times]0,\infty[$, dessen Isometriengruppe mit $Iso(\mathbb{H}^3)$ bezeichnet sei. Die Gruppe $Iso^+(\mathbb{H}^3)$ der orientierungserhaltenden Isometrien des $\mathbb{H}^3$ kann mit $PSL_2(\mathbb{C})$ identifiziert werden. Dabei ist die Beschreibung der Operation von $PSL_2(\mathbb{C})$ auf dem $\mathbb{H}^3$ als Quaternionen-Halbraum vorteilhaft,

$$\mathbf{p} = (z, r) = Re(z) + Im(z)i + rj + 0 \cdot k \in \mathbb{H}^3.$$

Eine Matrix $\pm\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in PSL_2(\mathbb{C})$ operiert dann auf dem $\mathbb{H}^3$ mittels

$$\mathbf{p} \longmapsto \frac{a\mathbf{p} + b}{c\mathbf{p} + d} = \frac{\left[(az + b)(\overline{cz + d}) + r^2 a\bar{c}\right] + rj}{|cz + d|^2 + r^2|c|^2}. \tag{0.1}$$

Zudem operiert jede torsionsfreie, diskrete Untergruppe Γ von $PSL_2(\mathbb{C})$ frei und diskontinuierlich auf dem $\mathbb{H}^3$, in dem Sinne, daß für jede Umgebung $\mathfrak{U}$ eines Punktes $x \in \mathbb{H}^3$ der Schnitt $\gamma\mathfrak{U} \cap \mathfrak{U}$ für nur endlich viele $\gamma \in \Gamma$ nichtleer ist. Der Orbit-Raum $\mathbb{H}^3/\Gamma$ ist damit eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit universeller Überlagerung $\mathbb{H}^3$ und Fundamentalgruppe Γ. Man sagt, eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist *hyperbolisch* bzw. besitzt eine *hyperbolische Struktur*, wenn sie homöomorph zu einem derart definierten Orbit-Raum $\mathbb{H}^3/\Gamma$ ist. Gleichbedeutend hierzu ist $\mathcal{M}$ eine vollständige, orientierbare, dreidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Krümmung -1. Es wird hier nur um hyperbolische Mannigfaltigkeiten mit endlichem Volumen gehen.

1 Konstruktion von Flächen-Bündeln

Sei $\mathcal{S}_{g,h}$ eine orientierbare, kompakte Fläche vom Geschlecht g, aus der h disjunkte, offene Kreisscheiben entfernt wurden, sog. Punktierungen. Um bei allgemeinen Aussagen uninteressante Spezialfälle zu vermeiden, sollen die Flächen $\mathcal{S}_{g,h}$ stets negative Euler-Charakteristik besitzen, d.h.

$$2 - 2g - h < 0. \tag{1.2}$$

Die Darstellung der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathcal{S}_{g,h})$ der Fläche $\mathcal{S}_{g,h}$,

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathcal{S}_{g,h}) &= \Big\langle \xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_g, \eta_g, \lambda_1, \ldots, \lambda_h \mid \prod_{i=1}^{g} [\xi_i, \eta_i] \prod_{j=1}^{h} \lambda_j = 1 \Big\rangle \\ &\simeq \langle \xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_g, \eta_g, \lambda_1, \ldots, \lambda_{h-1} \rangle , \end{aligned} \tag{1.3}$$

als freie Gruppe auf $2g + h - 1$ Erzeugenden ist klassisch. Hierbei bezeichnen $[\xi_i, \eta_i]$ die Kommutatoren $\eta_i^{-1} \xi_i^{-1} \eta_i \xi_i$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ die Randkurven der h entfernten Kreisscheiben.

Nach der „*mapping torus*"-Konstruktion erhält man eine 3-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{g,h}(f)$, die von einem Homöomorphismus f von $\mathcal{S}_{g,h}$ auf sich abhängt:

$$\mathcal{M}_{g,h}(f) := \mathcal{S}_{g,h} \times [0,1] \Big/ (x,0) \sim (f(x),1) \qquad \forall x \in \mathcal{S}_{g,h}, \tag{1.4}$$

wobei $\mathcal{S}_{g,h} \times \{0\}$ mit $\mathcal{S}_{g,h} \times \{1\}$ mittels f identifiziert wird. Für orientierungserhaltende f erhält $\mathcal{M}_{g,h}(f)$ eine Orientierung durch das Produkt der gegebenen Orientierung auf $\mathcal{S}_{g,h}$ mit der positiven Orientierung von $[0,1]$.

Die kompakte 3-Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{g,h}(f)$ mit Rand fasert mit $\mathcal{S}_{g,h}$ über dem Einheitskreis S^1. Die Bündelstruktur

$$\mathcal{S}_{g,h} \longrightarrow \mathcal{M}_{g,h}(f) \longrightarrow S^1$$

erklärt die folgende Definition.

Definition 1.1 *Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{g,h}(f)$ aus (1.4) wird* ***$\mathcal{S}_{g,h}$-Bündel über S^1 zur Monodromie f mit Faser*** *$\mathcal{S}_{g,h}$ genannt.*

Da f insbesondere die Randkurven von $\mathcal{S}_{g,h}$ auf sich abbildet, besteht der Rand $\partial\mathcal{M}_{g,h}(f)$ für orientierungserhaltende f aus h Tori; kehrt f die Orientierung um aus h Kleinschen Flaschen.

In der Gruppe der Homöomorphismen von $\mathcal{S}_{g,h}$ auf sich ist die Menge der Homöomorphismen, die zur Identität isotop sind, Normalteiler. Die Quotientengruppe ist die *Gruppe der Abbildungsklassen* und sei nach dem Englischen „mapping class group" mit $MCG(\mathcal{S}_{g,h})$, die Untergruppe der orientierungserhaltenden Homöomorphismen mit $MCG^+(\mathcal{S}_{g,h})$ bezeichnet. Es ist ausreichend, Abbildungsklassen $f \in MCG(\mathcal{S}_{g,h})$ zu betrachten, da die Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}_{g,h}(f)$ damit bis auf Homöomorphie festgelegt sind.

Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathcal{M}_{g,h}(f))$ der 3-Mannigfaltigkeit erbt Struktur von $\pi_1(\mathcal{S}_{g,h})$, denn $\pi_1(\mathcal{S}_{g,h})$ ist Normalteiler von $\pi_1(\mathcal{M}_{g,h}(f))$ mit Quotientengruppe $\mathbb{Z}$:

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{S}_{g,h}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{g,h}(f)) \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow 1$$

mit $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ (exakte Sequenz). $\pi_1(\mathcal{M}_{g,h}(f))$ läßt sich als HNN-Erweiterung von $\pi_1(\mathcal{S}_{g,h})$ mit „stable letter" μ schreiben,

$$\begin{aligned} &\pi_1(\mathcal{M}_{g,h}(f)) = \\ &\qquad \big\langle \xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_g, \eta_g, \lambda_1, \ldots, \lambda_{h-1}, \mu \mid \mu\omega\mu^{-1} = f_*(\omega) \ \forall \omega \in \pi_1(\mathcal{S}_{g,h}) \big\rangle , \end{aligned} \tag{1.5}$$

wobei f_* der durch f induzierte Gruppenautomorphismus von $\pi_1(\mathcal{S}_{g,h})$ ist.

1.1 Konkretisierung: einfach-punktierte Torus-Bündel

Sei nun $g = h = 1$. Die Konstruktion wird nun mit einem einfach-punktierten Torus $\mathcal{T}^{\bullet} = \mathcal{S}_{1,1}$ durchgeführt. Sei $f \in MCG^{+}(\mathcal{T}^{\bullet})$; d.h. f ist stets orientierungserhaltend. Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_{1,1}(f)$ besitzt demnach einen Randtorus $\partial\mathcal{M}_{1,1}(f)$. Die Fundamentalgruppe des Randtorus wird erzeugt durch die Randkurve $\lambda = \partial\mathcal{T}^{\bullet}$ der Faser und einem auf $\partial\mathcal{M}_{1,1}(f)$ induzierten Schnitt μ durch die Faserung. λ ist bis auf die Orientierung festgelegt, und mit einem Basispunkt b in $\partial\mathcal{T}^{\bullet}$ ist $\mu = b \times [0,1]/\sim$.

Nun ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathcal{T}^{\bullet})$ eine freie Gruppe vom Rang 2. Ein Paar $\{\xi, \eta\}$ freier Erzeuger für $\pi_1(\mathcal{T}^{\bullet}) \simeq \mathbf{F}_2 = \langle \xi, \eta \rangle$ wird so gewählt, daß λ als Kommutator realisiert wird,

$$\lambda = \eta^{-1}\xi^{-1}\eta\xi. \tag{1.6}$$

Im folgenden werden ausschließlich orientierbare, nicht kompakte Mannigfaltigkeiten untersucht, die sich als Inneres der bis hierher konstruierten Mannigfaltigkeiten ergeben. Im Zentrum stehen also die Mannigfaltigkeiten

$$\mathcal{M}(f) := \mathcal{M}_{1,1}(f) - \partial\mathcal{M}_{1,1}(f),$$

die von nun an abkürzend *Torus-Bündel zur Monodromie f* bezeichnet werden und deren Fundamentalgruppe schließlich als HNN-Erweiterung notiert werden kann:

$$\pi_1(\mathcal{M}(f)) = \left\langle \xi, \eta, \mu \mid \mu\xi\mu^{-1} = f_*(\xi)\,,\, \mu\eta\mu^{-1} = f_*(\eta) \right\rangle. \tag{1.7}$$

Offenbar ist $f_* \in Aut\mathbf{F}_2$, der Gruppe der Automorphismen von $\mathbf{F}_2$, welche von Nielsen in einer klassischen Arbeit [51] untersucht worden ist (vgl. auch [19]). Er fand:

Satz 1.2 *Sei $Inn\mathbf{F}_2 < Aut\mathbf{F}_2$ die Gruppe der inneren Automorphismen, λ wie in (1.6) gegeben und $f_* \in Aut\mathbf{F}_2$ ein beliebiges Element. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) $f_*(\lambda) = \omega\lambda^{\pm 1}\omega^{-1}$ für ein $\omega \in \mathbf{F}_2$.

(ii) Die Gruppe $MCG(\mathcal{T}^{\bullet})$ ist isomorph zur Quotientengruppe $Aut\mathbf{F}_2/Inn\mathbf{F}_2$.

Es sei bemerkt, daß es bezüglich *(ii)* Verallgemeinerungen für Gruppen $MCG(\mathcal{S}_{g,h})$ gibt [43].

Da f die Orientierung erhält, kann nunmehr mit *(i)* genauer festgehalten werden, daß f_* in der Untergruppe

$$Aut^{+}\mathbf{F}_2 := \left\{ g \in Aut\mathbf{F}_2 \mid \exists \omega \in \mathbf{F}_2 : g(\lambda) = \omega\lambda\omega^{-1} \right\}$$

enthalten ist. Als unmittelbare Schlußfolgerung zu *(ii)* ergibt sich das

Korollar 1.3 *$MCG^{+}(\mathcal{T}^{\bullet}) \simeq Aut^{+}\mathbf{F}_2/Inn\mathbf{F}_2$.*

Nach dieser Klärung der Beziehung von $MCG^{+}(\mathcal{T}^{\bullet})$ und $Aut\mathbf{F}_2$ wird von nun an in der Regel der $*$-Index weggelassen, sofern Mißverständnisse ausgeschlossen sind.

1.2 Äquivalente Bündel

Die Homöomorphie von Torus-Bündeln läßt sich vollständig anhand ihrer Monodromien beschreiben.

Definition 1.4 *Zwei $\mathcal{S}_{g,h}$-Bündel heißen **äquivalent**[1], wenn es zwischen ihnen einen Homöomorphismus ϕ gibt, der die Faserung respektiert, d.h.*

$$\phi|_{\mathcal{S}_{g,h}} \in MCG(\mathcal{S}_{g,h}).$$

[1] Die Flächen-Bündel dieser Definition werden auch als *schwach äquivalent* (weakly equivalent) bezeichnet (z.B. [21] 1.3). Die zugrundeliegende Differenzierung ist hier indes bedeutungslos.

Sind $f_1, f_2 \in Aut\mathbf{F}_2$ identisch modulo einem inneren Automorphismus, so wurde am Ende des vorigen Abschnitts deutlich, daß die zugehörigen Torus-Bündel äquivalent sind. Es stellt sich die Frage nach der Äquivalenz und noch mehr nach der Homöomorphie von Torus-Bündeln zu verschiedenen Monodromien in $MCG^+(\mathcal{T}^\bullet)$.

Definition 1.5 *Zwei Abbildungsklassen $f_1, f_2 \in MCG(\mathcal{T}^\bullet)$ werden **schwach konjugiert** genannt, wenn es ein $g \in MCG(\mathcal{T}^\bullet)$ gibt mit $f_2 = g f_1^{\pm 1} g^{-1}$.*

Für schwach konjugierte Monodromien $f_1, f_2 \in MCG(\mathcal{T}^\bullet)$ sind die aus ihnen konstruierten Bündel $\mathcal{M}(f_1)$ und $\mathcal{M}(f_2)$ homöomorph. Sie sind offenkundig auch äquivalent, und es gilt die Umkehrung. Zwei Torus-Bündel sind genau dann äquivalent, wenn ihre Monodromien schwach konjugiert sind. Auf Murasugi soll der folgende Satz zurückgehen, daß für Torus-Bündel der Begriff der Äquivalenz sogar gleichbedeutend zu dem der Homöomorphie ist ([21] Prop. 1.3.1., vgl. [46] Prop. 1.3.3.).

Satz 1.6 *Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_1)$ und $\mathcal{M}(f_2)$ zu Monodromien $f_1, f_2 \in MCG^+(\mathcal{T}^\bullet)$ sind genau dann homöomorph, wenn f_1 und f_2 schwach konjugiert sind.*

Dieser Satz läßt sich nicht auf andere $\mathcal{S}_{g,h}$-Bündel verallgemeinern ([21]) und zeichnet die Torus-Bündel aus.

1.3 Beschreibung der Gruppe $MCG^+(\mathcal{T}^\bullet)$

Der Schlüssel zu einer Beschreibung liegt im Korollar 1.3, welches statt $MCG^+(\mathcal{T}^\bullet)$ die Betrachtung von $Aut^+\mathbf{F}_2$ nahelegt. Automorphismen einer beliebigen freien Gruppe werden zweckmäßig durch ihre Wirkung auf einer Basis beschrieben. Automorphismen überführen eine Basis in eine andere, genauso wie jede Bijektion zweier Basen einen Automorphismus festlegt.

Ist $\mathbf{F}_n$ eine freie Gruppe vom Rang n und $[\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_n]$ ihre Kommutator-Untergruppe, so ist die Quotientengruppe

$$\tilde{\mathbf{F}}_n := \mathbf{F}_n / [\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_n]$$

frei abelsch. Faßt man die Gruppenoperation von $\tilde{\mathbf{F}}_n$ additiv auf, so gilt

$$Aut\tilde{\mathbf{F}}_n \simeq Aut\mathbb{Z}^n \simeq GL_n(\mathbb{Z}).$$

So wie eine Basis $\mathfrak{B}$, $|\mathfrak{B}| = n$, für $\mathbf{F}_n$ unter der Quotientenabbildung im Bild zu einer Basis $\tilde{\mathfrak{B}}$ führt, induzieren die Erzeugende für $Aut\mathbf{F}_n$ auch Erzeugende für $Aut\tilde{\mathbf{F}}_n$. Das bedeutet:

Lemma 1.7 *Die natürliche Abbildung von $Aut\mathbf{F}_n$ nach $Aut\tilde{\mathbf{F}}_n$ ist ein Epimorphismus.*

Es ist unmittelbar einsichtig, daß die inneren Automorphismen von $\mathbf{F}_n$ im Kern dieser Abbildung enthalten sind. Für den hier interessanten Fall $n = 2$ zeigte Nielsen die Identität des Kerns mit $Inn\mathbf{F}_2$. Anders formuliert fand er in [51] den folgenden Satz (alternative Beweise [42] Prop. 4.5. oder [46] Prop. 1.3.1.).

Satz 1.8 *Der natürliche Epimorphismus $Aut\mathbf{F}_2 \to Aut\tilde{\mathbf{F}}_2 \simeq GL_2(\mathbb{Z})$ vermittelt einen Isomorphismus $A : Aut\mathbf{F}_2 / Inn\mathbf{F}_2 \to GL_2(\mathbb{Z})$.*

Explizit wird einem $f \in MCG(\mathcal{T}^\bullet) \simeq Aut\mathbf{F}_2 / Inn\mathbf{F}_2$ eine Matrix $A(f) \in GL_2(\mathbb{Z})$ zugeordnet, indem das Bild der Basis $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ von $\tilde{\mathbf{F}}_2$ unter der natürlich induzierten

Abbildung $\tilde{f}$ betrachtet wird. Man schreibt bei additiver Notation mit ganzen Zahlen r, s, u und v

$$\tilde{f} : (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \longmapsto (r\tilde{\xi} + s\tilde{\eta}, u\tilde{\xi} + v\tilde{\eta}) = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \begin{pmatrix} r & u \\ s & v \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

und setzt

$$A(f) = \begin{pmatrix} r & u \\ s & v \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}). \tag{1.9}$$

Die Matrix $A(f)$ werde *Monodromie-Matrix* oder kürzer *M-Matrix von* f benannt.

Schon aus der Kenntnis der Erzeugenden von $Aut\mathbf{F}_n$, den sog. Nielsen-Transformationen, folgt unmittelbar, daß für $f \in MCG^+(\mathcal{T}^\bullet)$ die M-Matrix $A(f) \in SL_2(\mathbb{Z})$ ist. Diese Bemerkung wird herausgestellt.

Korollar 1.9 *Die Abbildung* A *bildet* $MCG^+(\mathcal{T}^\bullet) \simeq Aut^+\mathbf{F}_2/Inn\mathbf{F}_2$ *isomorph auf* $SL_2(\mathbb{Z})$ *ab.*

Bemerkung. Der Satz 1.8 läßt sich nicht für $n > 2$ verallgemeinern. Man überzeugt sich leicht, daß der Kern des natürlichen Epimorphismus mehr als nur innere Automorphismen enthält, wie z.B. für $\mathbf{F}_4 =< \alpha, \beta, \gamma, \delta >$ der Automorphismus

$$\alpha \mapsto \alpha \ , \ \beta \mapsto \gamma\beta\gamma^{-1} \ , \ \gamma \mapsto \delta\gamma\delta^{-1} \ , \ \delta \mapsto \delta$$

zeigt. Während für Torus-Bündel also $MCG(\mathcal{T}^\bullet) \simeq GL_2(\mathbb{Z})$ gilt und man alle wesentlichen Informationen der Monodromie später aus der M-Matrix ablesen kann, verbleibt z.B. für Monodromien allgemeinerer $\mathcal{S}_{g,1}$-Bündel, $g > 1$, nur ein Epimorphismus $MCG(\mathcal{S}_{g,1}) \to GL_{2g}(\mathbb{Z})$. In diesen Fällen lassen sich nicht alle relevanten Informationen den M-Matrizen entnehmen, und die Untersuchungen werden schwieriger (z.B. für $\mathcal{M}_{2,1}(f)$ [48] chapter 3).

Für spätere Rechnungen wird eine Präsentation von $Aut^+\mathbf{F}_2/Inn\mathbf{F}_2 \simeq SL_2(\mathbb{Z})$ benötigt. Wählt man Elemente von $Aut^+\mathbf{F}_2$

$$g_4 : (\xi, \eta) \mapsto (\xi^{-1}\eta\xi, \xi^{-1}) \quad \text{und} \quad g_6 : (\xi, \eta) \mapsto (\xi^{-1}\eta\xi, \xi^{-1}\eta) \tag{1.10}$$

mit den Inversen

$$g_4^{-1} : (\xi, \eta) \mapsto (\eta^{-1}, \eta^{-1}\xi\eta) \quad \text{und} \quad g_6^{-1} : (\xi, \eta) \mapsto (\eta^{-1}\xi, \eta^{-1}\xi\eta), \tag{1.11}$$

so gilt das Lemma.[2]

Lemma 1.10 *Die Abbildung* A *aus Satz 1.8 vermittelt die Isomorphie*

$$\left\langle g_4, g_6 \mid g_4^2 = g_6^3 \right\rangle / \left\langle g_4^4 \right\rangle \simeq SL_2(\mathbb{Z}).$$

Beweis. Die Relation verifiziert man in einer direkten Rechnung,

$$g_4^2 = g_6^3 : (\xi, \eta) \mapsto (\alpha^{-1}\xi^{-1}\alpha, \alpha^{-1}\eta^{-1}\alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha = \eta\xi. \tag{1.12}$$

$SL_2(\mathbb{Z})$ hat die bekannte Präsentation als amalgamiertes Produkt $\mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$ (z.B. [52] section 2.2.),

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\langle P, Q \mid P^4 = Q^6 = 1, P^2 = Q^3 \right\rangle.$$

[2] Die Indices in den Bezeichnungen g_4, g_6 beziehen sich auf die Ordnung der zugehörigen M-Matrizen als Erzeuger zyklischer Gruppen.

Hierbei ist

$$P = A(g_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q = A(g_6) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

womit die Surjektivität garantiert ist. Für die Injektivität ist die Beobachtung $g_4^4 \in Inn\mathbf{F}_2$ hinreichend; nämlich

$$g_4^4 : (\xi, \eta) \mapsto (\lambda^{-1}\xi\lambda, \lambda^{-1}\eta\lambda). \tag{1.13}$$

□

Häufiger werden später die Automorphismen

$$f_1 := g_4^{-1} \circ g_6 \quad \text{und} \quad f_2 := g_4 \circ g_6^{-1} \tag{1.14}$$

herangezogen. Für sie gilt explizit

$$f_1 : (\xi, \eta) \mapsto (\xi, \xi\eta) \quad \text{und} \quad f_2 : (\xi, \eta) \mapsto (\eta\xi, \eta) \tag{1.15}$$

mit den M-Matrizen

$$A(f_1) = U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A(f_2) = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Es handelt sich um Dehn-Twists um die Kurven ξ bzw. η (f_1 rechtsläufig, f_2 linksläufig). Das nächste Lemma komplettiert die Beziehung zwischen den Automorphismen.

Lemma 1.11 *Mit den obigen Definitionen gilt:*

(i) $g_6 = f_1^{-1} \circ f_2$,

(ii) $g_4 = f_2 \circ f_1^{-1} \circ f_2$,

(iii) f_1 *und* f_2 *erfüllen die Relation* $f_1^{-1} \circ f_2 \circ f_1^{-1} = f_2 \circ f_1^{-1} \circ f_2$.

Beweis. Aus den Definitionen (1.14) folgt unmittelbar $f_1^{-1} \circ f_2 = g_6^{-1} \circ g_4^2 \circ g_6^{-1}$, was wegen $g_4^2 = g_6^3$ sofort (i) liefert. (ii) ergibt sich aus (i) und $g_4 = f_2 \circ g_6$, s. (1.14). Verwendet man (i) und $g_4 = g_6 \circ f_1^{-1}$, so folgt $g_4 = f_1^{-1} \circ f_2 \circ f_1^{-1}$, woraus sich (iii) sofort mit (ii) ergibt. □

Bemerkung. Alle gewählten Automorphismen sind offensichtlich der Menge

$$\left\{ f \in Aut^+\mathbf{F}_2 \mid f(\lambda) = \lambda \right\}$$

der λ-invarianten Automorphismen entnommen. Zu jeder Äquivalenzklasse in $Aut^+\mathbf{F}_2/Inn\mathbf{F}_2$ gibt es einen Repräsentanten, der λ-invariant ist. Diese Wahl hat rein technische Vorteile und entspricht in Teilen den Setzungen in [3].

2 Existenz hyperbolischer Strukturen auf Torus-Bündeln

In diesem Kapitel wird ein einfaches Kriterium für die Hyperbolizität von Torus-Bündeln vorgestellt und ein Weg zur expliziten Berechnung der hyperbolischen Struktur gezeigt. Einige Aussagen dieses Kapitels sind in der Literatur bekannt und gut belegt. Für andere Aussagen gilt, daß sie zwar in der Literatur erwähnt werden, aber mangels Querverweisen die Urheberschaft und Literaturlage unklar ist. In diesen Fällen wurde daher versucht, entweder eigene Beweise zu geben (z.B. Korollar 2.6) oder Quellen zu finden (z.B. Satz 2.11).

Die Frage, ob eine 3-Mannigfaltigkeit eine hyperbolische Struktur trägt, ist von topologischem Interesse, denn es gilt der wichtige Starrheitssatz, welcher die hyperbolische Struktur endlichen Volumens zu einer topologischen Invarianten erklärt. Er läßt sich für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, $n \geq 3$, formulieren und wurde für den kompakten Fall von Mostow, für den nichtkompakten Fall von Prasad bewiesen (s. z.B. [7] chapter C). Aus Konsistenzgründen wird er hier nur für die Dimension drei formuliert.

Satz 2.1 (Starrheitssatz) *Seien $\mathcal{M}_1 \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma_1$ und $\mathcal{M}_2 \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma_2$ hyperbolische Mannigfaltigkeiten von endlichem Volumen mit einem Gruppenisomorphismus $\phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$. Dann gibt es ein $\tau \in Iso(\mathbb{H}^3)$, so daß*

$$\phi(\Gamma_1) = \Gamma_2 = \tau \circ \Gamma_1 \circ \tau^{-1}$$

gilt und τ eine Isometrie $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ mit $f_* = \phi$ induziert.

Zwei homöomorphe hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten endlichen Volumens sind damit isometrisch, und geometrische Kenndaten, wie Volumen und Längen von Geodätischen, werden zu topologischen Invarianten. Der Deutlichkeit halber, nach dem Starrheitssatz sind die Gruppen Γ_1 und Γ_2 *nicht* notwendig in $PSL_2(\mathbb{C}) \simeq Iso^+(\mathbb{H}^3)$ konjugiert; im Hyperboloid-Modell des $\mathbb{H}^3$ sind sie in der Gruppe der Lorentz-Transformationen $PO(3,1)$ konjugiert. Faßt man $PSL_2(\mathbb{C})$ als Untergruppe vom Index 2 in $Iso(\mathbb{H}^3)$ auf, so fehlt zur vollen Isometriengruppe noch eine weitere Spiegelung (z.B. an der Ebene senkrecht zur reellen Achse), und Γ_1 ist entweder zu Γ_2 oder zu $\overline{\Gamma}_2$ in $PSL_2(\mathbb{C})$ konjugiert, wobei $\overline{\Gamma}_2$ alle Matrizen aus Γ_2 mit komplex konjugierten Einträgen enthält. Hierauf wird später noch einmal eingegangen.

Das Innere von $\mathcal{S}_{g,h}$-Bündeln ist von Thurston vollständig klassifiziert worden [70], wobei die Geometrisierbarkeit durch eine hyperbolische Struktur von endlichem Volumen der Regelfall ist. Eine Besonderheit im Vergleich zu verwandten Ergebnissen für andere Haken-Mannigfaltigkeiten ([67] Theorem 2.5.,[50]) ist, daß diese Klassifizierung Aussagen über Flächen und insbesondere Monodromien zugrundelegt. Zunächst folgt ein einfaches, aber an verschiedenen Stellen noch nützliches Lemma in dieser Richtung.

Lemma 2.2 *Ist das Innere von $\mathcal{M}_{g,h}(f)$ hyperbolisch, dann ist für alle ganzen $k \neq 0$ auch das Innere von $\mathcal{M}_{g,h}(f^k)$ hyperbolisch.*

Beweis. Falls $\mathcal{M}_{g,h}(f)$ hyperbolisch ist, so gibt es eine treue, diskrete Darstellung $\rho : \pi_1(\mathcal{M}_{g,h}(f)) \hookrightarrow \Gamma < PSL_2(\mathbb{C})$, so daß $\mathcal{M}_{g,h}(f) \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma$ ist. Im Vergleich zu (1.5) ist aber für beliebiges ganzes $k \neq 0$

$$\pi_1(\mathcal{M}_{g,h}(f^k)) = \left\langle \xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_g, \eta_g, \lambda_1, \ldots, \lambda_{h-1}, \mu^k \mid \mu^k \omega \mu^{-k} = f_*^k(\omega)\ \forall \omega \in \pi_1(\mathcal{S}_{g,h}) \right\rangle$$

Untergruppe von $\pi_1(\mathcal{M}_{g,h}(f))$ und $\rho\left(\pi_1(\mathcal{M}_{g,h}(f^k))\right)$ Untergruppe von Γ. $\square$

Aus der folgenden Charakterisierung von Abbildungsklassen ermittelte Thurston ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Hyperbolizität von $\mathcal{S}_{g,h}$-Bündeln.

Definition 2.3 *Eine Abbildungsklasse $f \in MCG^+(\mathcal{S}_{g,h})$ heißt*

(i) ***periodisch****, wenn $f^k = id$ für ein ganzes $k \neq 0$,*

(ii) ***reduzibel****, wenn f ein endliches System paarweiser disjunkter, wesentlicher (nicht nullhomotoper), einfach geschlossener Kurven auf $\mathcal{S}_{g,h}$, von denen keine parallel zu $\partial\mathcal{S}_{g,h}$ ist, bis auf Isotopie unter einander permutiert,*

(iii) ***irreduzibel (pseudo-Anosov)****, sonst.*

Eine irreduzible Abbildungsklasse f hat damit die Eigenschaft, für jede wesentliche, einfach geschlossene Kurve α, die nicht parallel zu $\partial\mathcal{S}_{g,h}$ ist, einen unendlichen Orbit $\{f^j(\alpha)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ zu liefern.

Das Innere von $\mathcal{S}_{g,h}$-Bündeln zu periodischen oder reduzibelen Monodromien besitzt keine hyperbolische Struktur, weil es eine notwendige Bedingung für Hyperbolizität verletzt — die Atoroidalität. Ein $\mathcal{S}_{g,h}$-Bündel $\mathcal{M}$ heißt *toroidal*, wenn es einen inkompressibelen Torus $\mathcal{T}$ enthält, der nicht parallel zu einer Komponente von $\partial\mathcal{M}$ ist, andernfalls heißt $\mathcal{M}$ *atoroidal*. *Inkompressibel* wird der enthaltene Torus genannt, wenn die Einbettung $\phi : \mathcal{T} \to \mathcal{M}$ eine injektive Abbildung $\phi_* : \pi_1(\mathcal{T}) \to \pi_1(\mathcal{M})$ induziert. Man sagt auch die Einbettung ist π_1-*injektiv*. Enthält eine hyperbolische 3-Mannigfaltigkeit $\mathbb{H}^3/\Gamma$ einen inkompressiblen Torus, so besitzt Γ eine Untergruppe $P \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. P ist insbesondere eine frei abelsche Untergruppe vom Rang zwei in $PSL_2(\mathbb{C})$. Eine geometrische Überlegung zeigt, daß P dann von zwei parabolischen Elementen erzeugt wird, die zu solchen der Gestalt $\pm\left(\begin{smallmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right), c \in \mathbb{C}$ konjugiert sind. Somit ist $\mathbb{H}^3/P$ homöomorph zu einer Spitze, $S^1 \times S^1 \times [0,\infty]$, welche stets nur als topologisches Ende einer hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeit auftritt. Ein inkompressibeler Torus in einem hyperbolischen $\mathcal{S}_{g,h}$-Bündel ist damit zwangsläufig parallel zu einer Randkomponente (vgl. z.B. [53] chapitre 1).

Ist $f \in MCG^+(\mathcal{S}_{g,h})$ nun eine reduzibele oder periodische Abbildungsklasse, so gibt es eine wesentliche, einfach geschlossene Kurve α, die nicht parallel zu $\partial\mathcal{S}_{g,h}$ ist, und ein ganzes $j \neq 0$ mit $f^j(\alpha) = \alpha$. Somit ist $\alpha \times [0,1]/\sim$ in $\mathcal{M}_{g,h}(f^j)$ ein inkompressibeler, nicht randparalleler Torus, und nach dem Lemma 2.2 hat $\mathcal{M}_{g,h}(f)$ kein hyperbolisches Inneres.

Es verbleibt nun die Frage, welche $\mathcal{S}_{g,h}$-Bündel zu irreduzibelen bzw. pseudo-Anosov Monodromien ein hyperbolisches Inneres besitzen. Thurston gab die Antwort: Alle ([70] Theorem 0.1 + Prop. 2.6).

Satz 2.4 *Ein $\mathcal{S}_{g,h}$-Bündel zur Monodromie f besitzt genau dann ein hyperbolisches Inneres mit endlichem Volumen, wenn f pseudo-Anosov ist.*

Da diesem Satz eine zentrale Bedeutung zukommt, wird er kommentiert. Er ist seit den späten 70-iger Jahren bekannt. Für erste Beiträge siehe [66], [56]. Thurstons Beweis liegt bis heute nur als eprint [70] vor; andere Beweise findet man aber bei [47] und [53]. Allen Beweisen ist gemeinsam, daß sie nicht einfach zugänglich sind und Techniken entwickeln, die über den Rahmen dieser Arbeit hinaus gehen. Die Hauptschwierigkeit liegt in dem Begriff *pseudo-Anosov*. Einen Einblick von der nötigen Begriffs- und Theoriebildung gibt Thurstons ursprüngliche Definition. Eine Abbildungsklasse heißt danach *pseudo-Anosov*, wenn sie ein eindeutig bestimmtes Paar projektiver Klassen von „geodätischen Laminationen mit Maß“ (measured geodesic lamination) fixiert (Details z.B. in [53]). Es ist diese Eigenschaft, die für den Beweis von Satz 2.4 zentral ist, wenngleich sie weniger Anschauung vermittelt als die Vorstellung, nicht periodisch und nicht reduzibel zu sein. Doch gerade daß eine nicht periodische Abbildungsklasse entweder reduzibel oder pseudo-Anosov ist, stellt eine weitere gewichtige Aussage dar [68],[24], [8], [9], die als Thurston-Nielsen-Klassifikation der Flächen-Homöomorphismen bezeichnet wird. Diese Schwierigkeiten werden mit der Definition 2.3 verdeckt, was aber legitim erscheint, da die Techniken ihrer Lösungen keinen unmittelbaren Einfluß auf diese Arbeit haben. Thurston betont in [67] und [70], daß die Aussage von Satz 2.4 für die hier im Mittelpunkt stehenden Torus-Bündel zum ersten Mal von Jørgensen bewiesen wurde. Diese Arbeit ist allerdings nicht dokumentiert.

2.1 Kriterium für *f ist pseudo-Anosov*

Der Satz 2.4 liefert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß ein Torus-Bündel zu einer Monodromie f eine hyperbolische Struktur besitzt, nämlich genau dann, wenn f pseudo-Anosov ist. Nur ist es im allgemeinen schwierig zu entscheiden, ob eine Abbildungsklasse pseudo-Anosov ist, denn weder Thurstons Definition noch der Klassifikationssatz für Flächenhomöomorphismen stellen ein handhabbares Kriterium dar. Exemplarisch sind die Probleme für $\mathcal{M}_{2,1}$ in [48] Kapitel 3 behandelt. Seit wenigen Jahren ist ein algorithmischer Beweis des Klassifikationssatzes bekannt, dessen Algorithmus eine Subsumierung einer konkreten Abbildungsklasse erlaubt [9]. Meines Wissens steht eine Umsetzung in ein Computerprogramm noch aus. Bedeutend einfacher ist ein Kriterium für Abbildungsklassen des einfach-punktierten Torus.

Satz 2.5 *Sei $f \in MCG^+(\mathcal{T}^\bullet)$ eine Abbildungsklasse mit M-Matrix $A(f) \in SL_2(\mathbb{Z})$. Dann ist f periodisch oder reduzibel genau dann, wenn $tr(A(f)) \in [-2, 2]$.*

Beweis. Grundlage ist das Korollar 1.9, welches die Isomorphie $MCG^+(\mathcal{T}^\bullet) \simeq SL_2(\mathbb{Z})$ sicherstellt. Nun ist $f \in MCG^+(\mathcal{T}^\bullet)$ genau dann periodisch, wenn $A(f)$ periodisch ist, also wenn $A^k(f) = Id$ für ein ganzes $k \neq 0$ gilt. In $SL_2(\mathbb{Z})$ sind die periodischen Elemente wohlbekannt. Betrachtet man $A(f) \in (P)SL_2(\mathbb{Z})$ als Operation via Möbiustransformation auf der oberen Halbebene, so sind die periodischen Elemente gerade die elliptisch genannten Matrizen der Spur 0 oder ± 1.

Ist andererseits $f \in MCG^+(\mathcal{T}^\bullet)$ eine reduzible Abbildungsklasse, dann gibt es nach Definition eine einfach geschlossene, wesentliche, nicht randparallele Kurve α auf $\mathcal{T}^\bullet$ und ein ganzes $k \neq 0$ mit $f^k(\alpha) = \alpha$ bis auf Homotopie. Besitzt α in einer Basis von $\tilde{\mathbf{F}}_2 \simeq H_1(\mathcal{T}^\bullet)$ die Darstellung $\tilde{\alpha}$, so ist hierzu $A^k(f)\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}$ äquivalent. $A(f)$ besitzt demnach eine k-te Einheitswurzel τ als Eigenwert, die Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi(t) = t^2 - tr(A(f)) \cdot t + 1$ von $A(f)$ ist. Demnach gilt

$$\chi(t) = (t - \tau)(t - \bar{\tau}) = t^2 - 2Re(\tau)t + 1,$$

was $tr(A(f)) = 2Re(\tau) \in [2, -2]$ zur Folge hat. □

Der Satz erlaubt die Angabe des folgenden sehr griffigen Kriteriums. Es folgt unmittelbar aus der Definition 2.3.

Korollar 2.6 (Kriterium) *Eine Abbildungsklasse $f \in MCG^+(\mathcal{T}^\bullet)$ ist genau dann pseudo-Anosov, wenn die M-Matrix $A(f)$ hyperbolisch ist, d.h. wenn*

$$|tr(A(f))| > 2.$$

Bemerkung. Das Kriterium tritt an verschiedenen Stellen in der Literatur auf und wird Jørgensen zugeschrieben. Da sich indes kein Beweis in der Literatur findet, wurde er hier eingefügt. Vergleicht man das Kriterium hier mit dem Kriterium in [18] Lemma 5.1 für geschlossene Flächen oder in [48] für $\mathcal{S}_{2,1}$, so ist entscheidend, daß $\mathcal{T}^{\bullet}$ nur eine wesentliche, einfach geschlossene und nullhomologe Kurve bis auf Homotopie besitzt, nämlich die Randkurve.

2.2 Standardrepräsentanten für Klassen hyperbolischer M-Matrizen

Mit dem Korollar 2.6 ist es einfach zu entscheiden, ob ein Torus-Bündel zur Monodromie f eine hyperbolische Struktur besitzt, indem man die Spur der M-Matrix $A(f)$ betrachtet. In Anlehnung an Definition 1.5 definiert man:

Definition 2.7 *Zwei Matrizen $A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$ heißen **schwach konjugiert**, wenn es eine Matrix $C \in GL_2(\mathbb{Z})$ gibt mit $A = CB^{\pm 1}C^{-1}$.*

Hiermit ist eine Äquivalenzrelation definiert.

Das Spurkriterium steht dem Faktum nahe, daß zwei Torus-Bündel genau dann homöomorph sind, wenn ihre Monodromien schwach konjugiert sind (s. Satz 1.6). Auf der Ebene der M-Matrizen läßt aber eine schwache Konjugation die Spur invariant. Für eine vollständige Untersuchung wird nun aus diesem Grund ein geeigneter Standardrepräsentant in den schwachen Konjugationsklassen hyperbolischer Matrizen in $SL_2(\mathbb{Z})$ gesucht.

2.2.1 Vorbereitung: Steigung von Eigenvektoren und Kettenbrüche

Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ eine hyperbolische Matrix. Ihr charakteristisches Polynom $\chi_A(t) = t^2 - tr(A)\,t + 1$ ist dann irreduzibel und besitzt die Diskriminante $\Delta(A) = tr^2(A) - 4$. Aufgefaßt als lineare Abbildung des $\mathbb{R}^2$ hat A genau zwei Eigenwerte w und $\bar{w}$, die sich nach $(tr(A) \pm \sqrt{\Delta(A)})/2$ berechnen und denen man die (reellen) Eigenvektoren $\left(\begin{smallmatrix} b \\ w-a \end{smallmatrix}\right)$ bzw. $\left(\begin{smallmatrix} b \\ \bar{w}-a \end{smallmatrix}\right)$ zuordnen kann. Die Eigenwerten sind demnach konjugiert quadratische Irrationalzahlen. Da A in $SL_2(\mathbb{C})$ diagonalisierbar ist, muß sowohl $w\,\bar{w} = 1$ als auch $tr(A) = w + \bar{w}$ gelten. Jedem der zwei Eigenvektoren wird seine *Steigung* (<u>sl</u>ope)

$$sl_{A,w} := \frac{w-a}{b} \quad \text{bzw.} \quad sl_{A,\bar{w}} := \frac{\bar{w}-a}{b} \tag{2.17}$$

zugeordnet; stets ist $b \neq 0$, da andernfalls A parabolisch war. Diese Steigungen berechnen sich nach

$$\frac{(d-a) \pm \sqrt{\Delta(A)}}{2b} \tag{2.18}$$

und sind wiederum konjugiert quadratische Irrationalzahlen.

Im Hinblick auf schwache Konjugation ist der Zusammenhang zwischen den Steigungen der Eigenvektoren von A und ihrer Inversen A^{-1} von Bedeutung. Nun hat A^{-1} mit A die Eigenwerte gemeinsam. Zudem hat man das einfache Lemma.

Lemma 2.8 *Sei $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ hyperbolisch mit Eigenwerten w und $\bar{w}$. Dann gilt:*

$$sl_{A,w} = sl_{A^{-1},\bar{w}}.$$

Beweis. Eine direkte Rechnung für eine hyperbolische Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ liefert

$$b \cdot (sl_{A,w} - sl_{A^{-1},\bar{w}}) = w + \bar{w} - (a+d) = 0.$$

□

Nun zu den Kettenbrüchen, deren Hauptreferenz hier [55] ist. Die Lösung des beschriebenen Konjugationsproblems ist eng mit der Entwicklung der Steigung von Eigenvektoren in einen Kettenbruch verbunden. Dabei sei unter einer eventuell auch unendlichen Bildung

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{\ddots}}}}$$

mit ganzen a_i und b_i ein Kettenbruch verstanden. Die a_i heißen i-ter Teilzähler, die b_i i-ter Teilnenner. Eine einfachere Schreibweise für diesen Ausdruck ist

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \cdots . \tag{2.19}$$

Unter Konvergenz eines Kettenbruchs ist die gewöhnliche Folgenkonvergenz in $\mathbb{R}$ gemeint.

Sind stets alle Teilzähler $a_i = 1$, $i > 0$, wird die Schreibweise

$$[b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots] := b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \cdots$$

eingeführt. Hat ein Kettenbruch die spezielle Gestalt

$$[c_0, c_1, \ldots, c_k, b_1, b_2, \ldots, b_l, b_1, b_2, \ldots, b_l, b_1, b_2, \ldots, b_l, \ldots],$$

so wird er *periodisch* genannt. Die Periode wird durch Überstreichung kenntlich gemacht, $[c_0, c_1, \ldots, c_k, \overline{b_1, \ldots, b_l}]$, und ist nicht eindeutig, z.B.

$$[\overline{b_1, \ldots, b_l}] = [\overline{b_1, \ldots, b_l, b_1, \ldots, b_l}] = [b_1, \overline{b_2, \ldots, b_l, b_1}] \quad \text{usw.},$$

sofern nicht von kürzester bzw. minimaler Periode gesprochen wird.

Ein Kettenbruch $[b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots]$ heißt *regelmäßig*, wenn alle Teilnenner b_i für $i > 0$ positiv sind. Nur das Anfangsglied b_0 darf eine beliebige ganze Zahl sein. Jede reelle Zahl r läßt sich in einen regelmäßigen (u.U. endlichen) Kettenbruch entwickeln, indem man eine Folge $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ durch $x_j = x_{j-1} - [x_{j-1}]$ und $x_1 = r - [r]$ definiert und mit $b_0 = [r]$ sowie $b_j = [x_j]$ gerade $r = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$ erhält, wobei das Symbol $[r] = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z < r\}$ die Gauß-Klammer bedeutet.

Es folgt eine Sammlung klassischer Fakten, die später benötigt werden.

(i) Jeder unendliche regelmäßige Kettenbruch konvergiert gegen eine irrationale Zahl. Umgekehrt besitzt jede Irrationalzahl eine eindeutige regelmäßige Kettenbruchentwicklung, welche notwendig unendlich ist [55] Satz 2.6.

(ii) Ein periodischer regelmäßiger Kettenbruch stellt eine quadratische Irrationalzahl dar, und die regelmäßige Kettenbruchentwicklung einer quadratischen Irrationalzahl ist stets periodisch [55] Sätze 3.1 und 3.2.

(iii) Die regelmäßigen Kettenbrüche für zwei zueinander konjugierte quadratische Irrationalzahlen haben inverse Perioden [55] Satz 3.8.

Damit läßt sich die Steigung $sl_{A,w}$ eines Eigenvektors einer hyperbolischen Matrix $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ mit Eigenwert w in einen periodischen regelmäßigen Kettenbruch entwickeln, $sl_{A,w} = [c_0, \ldots, c_k, \overline{b_1, \ldots, b_l}]$. Darüber hinaus hat die Steigung des zweiten Eigenvektors eine Kettenbruchentwicklung mit hierzu inverser Periode, sowie mit Lemma 2.8

$$sl_{A,\bar{w}} = [d_0, \ldots, d_j, \overline{b_l, b_{l-1}, \ldots, b_1}] = sl_{A^{-1},w}$$

gilt.

2.3 LU-Zerlegung als Standardrepräsentant

Nach dieser Vorbereitung läßt sich aus [1] der folgende entscheidende Satz umformulieren ([1] Theorem 15, vgl. [4]). Es sei hierzu

$$T_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

Satz 2.9 *Sei $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ hyperbolisch mit einem Eigenwert w und zugeordneter Steigung $sl_{A,w} = [a_0, \ldots, a_k, \overline{b_1, \ldots, b_l}]$, wobei l minimal ist. Wird $C = T_{a_0} \cdots T_{a_k}$ gesetzt, so gilt*

$$C^{-1} A^{\pm 1} C = \epsilon \left(T_{b_1} \cdots T_{b_l} \right)^N$$

für eine positive Zahl N und $\epsilon = tr(A)/|tr(A)|$.

Die Matrix $T_{b_1} \cdots T_{b_l}$ hat ihren Ursprung in der Periode von $sl_{A,w}$ und ist daher nur bis auf zyklische Vertauschung der b_i und Inversion der Periode eindeutig. Letzteres weil die Inversion der Periode durch das Lemma 2.8 mit $sl_{A^{-1},\bar{w}}$ verbunden ist und auch nur eine Konjugation zu $A^{\pm 1}$ gefragt ist.

Der Satz kann noch griffiger formuliert werden. Die im Satz gegebene Matrizenidentität bedeutet auch Gleichheit der Determinanten, d.h.

$$det \left(\epsilon \left(T_{b_1} \cdots T_{b_l} \right)^N \right) = 1, \tag{2.20}$$

wobei $det T_a = -1$ ist. Folglich ist l oder N gerade. Man kann deshalb auch gleich für die Periode von $sl_{A,w}$ verlangen, daß l gerade und dabei minimal ist. Mit der Beobachtung

$$T_m T_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ m & mn+1 \end{pmatrix} = L^m U^n, \quad m, n \in \mathbb{Z},$$

L und U wie in 1.16, liefert der Satz dann die sog. *LU-Zerlegung* einer hyperbolischen $SL_2(\mathbb{Z})$-Matrix. Desweiteren kann der Standpunkt der linearen Algebra verlassen werden. $PSL_2(\mathbb{Z})$ operiert nun als Möbiustransformation auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ mittels

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Eine hyperbolische Matrix $A = \pm\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in PSL_2(\mathbb{Z})$ besitzt genau zwei Fixpunkte z_1 und z_2, die Nullstellen der quadratischen Gleichung $cz^2 - (a-d)z - b = 0$ und irrational sind,

$$z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{\Delta}}{2c}. \tag{2.21}$$

Zwar sind die Eigenwerte von A und $-A$ aus $SL_2(\mathbb{Z})$ nicht identisch, doch das Paar zugeordneter Steigungen schon. In diesem Sinn werden auch Elementen aus $PSL_2(\mathbb{Z})$ Steigungen zugeordnet; so wie es auch sinnvoll ist, einer $SL_2(\mathbb{Z})$-Matrix Fixpunkte zu zuschreiben.

Lemma 2.10 *Sei $A \in PSL_2(\mathbb{Z})$ hyperbolisch. Dann sind die A zugeordneten Steigungen der Eigenvektoren Fixpunkte von*

$$A_t = \pm T_0 A T_0.$$

Beweis. Für eine hyperbolische Matrix $A = \pm\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in PSL_2(\mathbb{Z})$ ist $A_t = \pm\left(\begin{smallmatrix} d & c \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ mit Fixpunktgleichung $bz^2 - (d-a)z - c = 0$, welche nach 2.18 von den Steigungen erfüllt wird. $\square$

Mit diesen Bemerkungen kann der Satz 2.9 auch in folgende Form gebracht werden. Für eine geometrische Sicht vgl. [64], [65].

Satz 2.11 (LU-Zerlegung) *Seien L und U gegeben wie in (1.16) und $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ hyperbolisch mit einem Fixpunkt $p_{fix} = [a_0, \dots, a_k, \overline{n_l, m_l, \dots, n_1, m_1}]$, wobei l minimal ist. Wird $D = T_0 T_{a_0} \cdots T_{a_k}$ gesetzt, so gilt*

$$D^{-1} A^{\pm 1} D = \epsilon \left(L^{n_l} U^{m_l} \cdots L^{n_1} U^{m_1} \right)^N$$

für eine positive Zahl N und $\epsilon = tr(A)/|tr(A)|$.

Als Standardrepräsentanten in schwachen Konjugationsklassen einer hyperbolischen $SL_2(\mathbb{Z})$-Matrix wird ihre LU-Zerlegung gewählt.

Bemerkung. *Berechnung der positiven Zahl N.* Zwar hat $D^{-1} A^{\pm 1} D$ einen reinperiodischen Fixpunkt $\hat{p}_{fix} = [\overline{n_l, m_l, \dots, n_1, m_1}]$, doch ist $X = L^{n_l} U^{m_l} \cdots L^{n_1} U^{m_1}$ die primitive Matrix mit Fixpunkt $\hat{p}_{fix}$, so daß $D^{-1} A^{\pm 1} D$ nur Potenz von X seien kann. Die positive Zahl N wird als kleinste Zahl bestimmt, für welche $tr(X^N) = tr(A)$ erfüllt ist. Hierbei kann man von der Formel

$$tr(X^N) = x\, p_N(x) - 2 p_{N-1}(x), \quad x = tr(X)$$

Gebrauch machen, wobei p_k das k-te Tschebyscheff-Polynom bedeutet (s. (3.45)).

Eine Art Zusammenfassung liefert das folgende Korollar, für dessen Formulierung die Bezeichnung

$$\prod_{j=1}^{l} f_2^{n_j} f_1^{m_j} := f_2^{n_l} \circ f_1^{m_l} \circ \dots \circ f_2^{n_1} \circ f_1^{m_1} \tag{2.22}$$

eingeführt wird. Zudem wird ein $g_2 \in Aut(\mathbf{F}_2)$ benötigt mit $A(g_2) = T_0$, was mit

$$g_2 : (\xi, \eta) \mapsto (\eta, \xi) \tag{2.23}$$

gewährleistet ist. Offensichtlich ist $g_2^2 = id$, und man findet außerdem

$$f_2^n \circ g_2 = g_2 \circ f_1^n \tag{2.24}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.[3]

Korollar 2.12 *Mit den Bezeichnungen (1.10) und (1.14) gilt: Jedes hyperbolische Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ ist homöomorph zu einem Torus-Bündel zur Monodromie g, welche ein*

$$g_* = g_4^{\epsilon - 1} \circ \Big(\prod_{j=1}^{l} f_2^{n_j} f_1^{m_j} \Big)^N$$

mit einem positiven N, positiven ganzen Zahlen m_j, n_j, $1 \le j \le l$, und $\epsilon = tr(A(f))/|tr(A(f))|$ induziert.
Genauer: Hat $A(f)$ den Fixpunkt $[a_0, \dots, a_k, \overline{n_l, m_l, \dots, n_1, m_1}]$ bei minimalem l und ist N als die kleinste natürliche Zahl mit $tr(A(g)) = tr(A(f))$ bestimmt, so gilt mit

$$h = \begin{cases} g_2 \circ f_2^{a_0} \circ f_1^{a_1} \circ \dots \circ f_2^{a_{k-1}} \circ f_1^{a_k}, & \text{falls } k+1 \equiv 0 \bmod 2, \\ f_1^{a_0} \circ f_2^{a_1} \circ \dots \circ f_2^{a_{k-1}} \circ f_1^{a_k}, & \text{falls } k+1 \equiv 1 \bmod 2, \end{cases}$$

die Identität

$$g_* = h^{-1} \circ f_*^{\pm 1} \circ h \pmod{Inn(\mathbf{F}_2)}.$$

[3] Zusammen mit g_4 und g_6 gilt $\langle A(g_2), A(g_4), A(g_6) \rangle \simeq GL_2(\mathbb{Z})$ (z.B. [42] Prop.4.5).

Beweis. Im ersten Teil des Korollars gibt es für $\epsilon = 1$ wegen Satz 1.6 nichts zu beweisen. Ist $\epsilon = -1$ hilft die Beobachtung $A(g_4^{-2}) = A(g_4^2) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Zum zweiten Teil ist für $k + 1 \equiv 1 \bmod 2$ nur $T_{a_0} = A(g_2)A(f_1^{a_0})$ festzuhalten. □

Nochmals, die Exponenten n_j, m_j sind nur bis auf zyklische Vertauschung und Inversion eindeutig. Die im Korollar ausgezeichneten g_* werden in einer Menge

$$\mathcal{A} := \left\{ f \in Aut^+(\mathbf{F}_2) \mid f = g_4^{\epsilon-1} \circ \prod_{j=1}^{l} f_2^{n_j} f_1^{m_j} \ , \epsilon = \pm 1, \ m_j, n_j \in \mathbb{N}, \ 1 \le j \le l \right\} \tag{2.25}$$

zusammengefaßt. Später ist es oft ausreichend $f \in \mathcal{A}^+$ zu betrachten, wobei

$$\mathcal{A}^+ := \left\{ f \in Aut^+(\mathbf{F}_2) \mid f = \prod_{j=1}^{l} f_2^{n_j} f_1^{m_j}, \ m_j, n_j \in \mathbb{N}, \ 1 \le j \le l \right\} \tag{2.26}$$

bedeutet.

Torus-Bündel zu Monodromien, die sich nur um ein g_4^2 bzw. deren M-Matrizen sich nur im Vorzeichen ϵ unterscheiden, sind sehr eng miteinander verwandt, da die Bündel zu den quadrierten Monodromien homöomorph sind (vgl. Lemma 2.2). Sie besitzen anders gesagt eine gemeinsame zweiblättrige Überlagerung. Die Verwandtschaft wird später genau untersucht. Es zeigt sich dann, daß man beide Bündel genau kennt, wenn man eines kennt. Für die Untersuchung ist das Vorzeichen ϵ bzw. ein g_4^2 unwesentlich. Analoges gilt für die enge Verwandtschaft jener Torus-Bündel, die Potenzen derselben LU-Zerlegung sind (vgl. Lemma 2.2).

2.4 Halbregelmäßige Kettenbrüche und LU-Zerlegungen

Die Frage nach einer hyperbolischen Struktur auf einem Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ ist die Frage nach der Existenz einer treuen, diskreten Darstellung $\pi_1(\mathcal{M}(f)) \hookrightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, die einzig von f_* abhängt. Man hätte zunächst nach Lemma 1.10 und den Setzungen (1.14) versuchen können, für f_* beliebige Wörter in f_2 und f_1 zu untersuchen. Innerhalb einer schwachen Konjugationsklasse hätte man sich auf Wörter $f = \prod_{j=1}^{l} f_2^{n_j} f_1^{m_j}$ mit beliebigen $m_j, n_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $1 \le j \le l$, beschränken dürfen. Der Unterschied zu den Ergebnissen des letzten Abschnittes bestünde also in der Zulassung negativer Exponenten. Es wird sich zeigen, daß es für Einzelfalluntersuchungen in Kenntnis der zugehörigen LU-Zerlegung von Vorteil seien kann, negative Exponenten in dieser Art zu zulassen. Aus diesem Grunde definiert man

$$\mathcal{A}^- := \left\{ f \in Aut^+\mathbf{F}_2 \mid f = \prod_{j=1}^{l} f_2^{n_j} f_1^{m_j}, \ m_j, n_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \ 1 \le j \le l \right\}. \tag{2.27}$$

Die Bestimmung der LU-Zerlegung für einen Automorphismus $f \in \mathcal{A}^-$ mit negativen Exponenten, kann fast immer einfacher und schneller geschehen als über die regelmäßige Kettenbruchentwicklung eines Fixpunktes der zugehörigen M-Matrix. Diese Technik wird hier kurz vorgestellt.

Grundlage ist die instruktive Beobachtung, daß $A(f)$ für ein $f \in \mathcal{A}^+$ den Fixpunkt $[0, \overline{n_l, m_l, \ldots, n_1, m_1}]$ besitzt. Das impliziert bereits der vorangegangene Abschnitt, folgt aber auch aus der Operation von

$$A(f_2^n \circ f_1^m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ n & mn+1 \end{pmatrix}$$

auf dem $\mathbb{H}^2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ n & mn+1 \end{pmatrix} z \longmapsto \frac{z+m}{nz+mn+1} = \cfrac{1}{n+\cfrac{1}{m+z}}.$$

Sei nun $f = \prod_{j=1}^{l} f_2^{n_j} f_1^{m_j} \in \mathcal{A}^-$. kb sei die Abbildung, die jedem solchen $f \in \mathcal{A}^-$ den formalen (nicht notwendig regelmäßigen) periodischen Kettenbruch

$$kb(f) = [0, \overline{n_l, m_l, \ldots, n_1, m_1}]$$

zuordnet. Für $f \in \mathcal{A}^+$ ist $kb(f)$ ein regelmäßiger Kettenbruch. Hat f einen k-ten negativen Exponenten, für den wir beispielhaft $-n_k$, $0 < k \leq l$, schreiben, so kann $kb(f)$ stets umgeschrieben werden zu

$$kb(f) = \frac{1}{n_l} + \frac{1}{m_l} + \cdots + \frac{-1}{n_k} + \frac{-1}{m_k} + \cdots + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{m_1} + \cdots,$$

so daß alle Teilnenner positiv, alle Teilzähler ± 1 sind. Konvergiert $kb(f)$, so handelt es sich um einen Fixpunkt von $A(f)$. Kettenbrüche dieser Art sind bereits untersucht worden [11], [55] Kap. V.

Definition 2.13 *Ein endlicher oder unendlicher Kettenbruch*

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots, \quad a_\nu, b_\nu \in \mathbb{Z} \text{ für } \nu \geq 0,$$

heißt ***halbregelmäßig****, wenn*

(i) $a_\nu = \pm 1$ *für* $\nu \geq 1$,

(ii) $b_\nu \geq 1$ *und* $b_\nu + a_{\nu+1} \geq 1$ *für* $\nu \geq 1$,

(iii) falls er endlich ist und wenigstens zwei Glieder hat, ist der letzte Teilnenner größer als 1; falls er unendlich ist, gilt unendlich oft $b_\nu + a_{\nu+1} \geq 2$.

Die regelmäßigen Kettenbrüche sind in dieser Definition inbegriffen. Halbregelmäßige Kettenbrüche sind nach einem Satz von Tietze ([55] Satz 5.1.) stets konvergent. Auch hier gilt [55] Satz 5.13.: Ein periodischer halbregelmäßiger Kettenbruch stellt eine quadratische Irrationalzahl dar. Für ein $f \in \mathcal{A}^-$ bedeutet das, wenn $kb(f)$ halbregelmäßig ist, dann ist das Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ hyperbolisch, denn $kb(f)$ konvergiert gegen eine quadratische Irrationalzahl, die Fixpunkt von $\pm A(f)$ ist. $A(f)$ ist demzufolge hyperbolisch, und es greift das Kriterium Korollar 2.6.

Der Vorteil des Zugriffs hier liegt in dem einfachen, mechanischen Verfahren zur Umwandlung halbregelmäßiger Kettenbrüche in regelmäßige, an denen man die LU-Zerlegung nach Satz 2.11 ablesen kann. Die Umwandlung ist in [55] §40 beschrieben und basiert auf zwei Transformationen, die den Wert des halbregelmäßigen Kettenbruches nicht ändern. Die erste ist

$$\cdots + \frac{a_k}{b_k} + \frac{-1}{b_{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}} + \cdots \longrightarrow \cdots + \frac{a_k}{b_k - 1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{b_{k+1} - 1} + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}} + \cdots.$$

Durch Fallunterscheidung wird damit eine Transformation t_1 beschrieben:

Transformation t_1: *In der Schreibweise (2.19): Man schaltet vor jeden negativen Teilzähler ein Glied* $\frac{1}{1}$ *und ersetzt*

$$a_\nu \xrightarrow{t_1} |a_\nu|$$

$$b_\nu \xrightarrow{t_1} \begin{cases} b_\nu \quad, \textit{wenn}\, a_\nu = a_{\nu+1} = 1, \\ b_\nu - 1, \textit{wenn}\, \{a_\nu, a_{\nu+1}\} = \{-1, 1\}, \\ b_\nu - 2, \textit{wenn}\, a_\nu = a_{\nu+1} = -1, \end{cases}$$

wobei $a_0 \equiv 1$. [4]

Die zweite Transformation t_2 wird nötig, wenn nach t_1 Teilnenner 0 auftreten:

Transformation t_2:

$$\cdots + \frac{1}{b_k} + \frac{1}{0} + \frac{1}{b_{k+2}} + \cdots \xrightarrow{t_2} \cdots + \frac{1}{b_k + b_{k+2}} + \cdots$$

Falls $kb(f)$ für ein $f \in \mathcal{A}^-$ halbregelmäßig ist, liefert diese Umwandlung mit Satz 2.11 sofort die LU-Zerlegung von $A(f)$ bis auf das Vorzeichen, welches über $tr(A(f))$ bestimmt werden muß.

Wie man noch sehen wird, ist $kb(f)$ nicht notwendig halbregelmäßig, wenn $\mathcal{M}(f)$ für $f \in \mathcal{A}^-$ hyperbolisch ist. Doch läßt sich die Gesamttransformation

$$\mathfrak{t} := t_2 \circ t_1 \tag{2.28}$$

noch weiter anwenden. Das Bild von $f \in \mathcal{A}^-$ unter kb ist stets ein periodischer Kettenbruch mit positiven Teilnennern und Teilzählern ± 1. $\mathfrak{t}$ ändert nach [55] §40 den Wert dieser Sorte Kettenbrüche generell nicht. Deshalb definiert man:

Definition 2.14 *Ein unendlicher Kettenbruch*

$$p = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \cdots, \quad a_\nu, b_\nu \in \mathbb{Z} \;\; \textit{für} \;\; \nu \geq 0,$$

heißt ***halbregelmäßig im erweiterten Sinn****, abgekürzt* ***e-halbregelmäßig****, wenn*

(i) $a_\nu \pm 1$ *für* $\nu \geq 1$,

(ii) $b_\nu \geq 1$ *für* $\nu \geq 1$ *und unendlich oft* $b_\nu + a_{\nu+1} \geq 2$ *ist,*

(iii) durch endliches Anwenden der Transformation $\mathfrak{t}$ *auf* p *ein regelmäßiger Kettenbruch entsteht.*

Der Punkt (iii) der Definition garantiert die Konvergenz der e-halbregelmäßigen Kettenbrüche. Die Anwendung von $\mathfrak{t}$ auf einen periodischen e-halbregelmäßigen Kettenbruch führt wieder zu einem periodischen regelmäßigen oder e-halbregelmäßigen Kettenbruch aber mit nicht notwendig identischer Periodenlänge. Ein unendlicher halbregelmäßiger Kettenbruch ist selbstverständlich auch e-halbregelmäßig, erfüllt aber zusätzlich die Bedingung $b_\nu + a_{\nu+1} \geq 1$ für $\nu \geq 1$.

Lemma 2.15 *Sei* p *wie in Definition 2.14 (i) und (ii) ein formaler Kettenbruch und* $\mathfrak{t}_\nu$ *die Abbildung, die* $\mathfrak{t}$ *nur auf die* ν*-te Stelle von* p *anwendet. Entweder ist* $\mathfrak{t}(p)$ *dann ein regelmäßiger Kettenbruch, oder es gibt eine Stelle* ν *mit* $a_\nu = a_{\nu+1} = -1$ *und* $b_\nu = 1$ *mit* $\mathfrak{t}_\nu^2(p) = p$.

Beweis. Die ausgezeichnete Stelle ν mit $a_\nu = a_{\nu+1} = -1$ und $b_\nu = 1$ ist offensichtlich die einzige Stelle, die nach Anwendung von t_1 noch auf negative Teilnenner führt. Eine einfache direkte Rechnung zeigt, daß für sie $\mathfrak{t}_\nu^2(p) = p$ gilt.

Jede andere Stelle liefert nach t_1 positive Teilnenner oder Teilnenner 0, auf welche t_2 wirkt. Dabei ist es unmöglich, daß nach t_1 von einer Stelle an die Teilnenner 0 und 1 ad infinitum abwechseln, weil dann ursprünglich $b_\nu = 2$ und $a_{\nu+1} = -1$ für alle ν gewesen seien müßte, was nach Definition 2.14 (ii) nicht zulässig ist. $\square$

Man schließt folgende einfache Konsequenz.

[4] Bei endlichen halbregelmäßigen Kettenbrüchen gibt es noch eine Ergänzung , die hier uninteressant ist (s. [55] §40).

Lemma 2.16 *Ein Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ mit $f \in \mathcal{A}^-$ ist hyperbolisch, wenn $kb(f)$ e-halbregelmäßig ist.*

Beweis. Ist $kb(f)$ für ein $f \in \mathcal{A}^-$ e-halbregelmäßig, so stimmt sein Wert mit dem eines periodischen regelmäßigen Kettenbruchs überein. Der Fixpunkt von $\pm A(f)$ ist also eine quadratische Irrationalzahl, weshalb $A(f)$ hyperbolisch ist. Das Korollar 2.6 schließt den Beweis ab. $\square$

Es kann ggf. umständlicher sein, $tr(A(f))$ zu berechnen, als zu entscheiden, ob $kb(f)$ e-halbregelmäßig ist. Es entfällt bei diesem Vorgehen zudem die Kettenbruchentwicklung eines Fixpunktes. Zur Verdeutlichung drei Beispiele:

Beispiel 1. Sei $f = f_2^3 \circ f_1^{-3}$. Dann ist

$$kb(f) = \frac{1}{3} \underset{-}{} \frac{1}{3} \underset{-}{} \frac{1}{3} \underset{-}{} \frac{1}{3} \underset{-}{} \cdots$$

ein halbregelmäßiger Kettenbruch. Sein Wert ist

$$kb(f) \xrightarrow{t_1} \frac{1}{2} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \cdots = [0, 2, \overline{1}].$$

Nach Satz 2.11 gibt es eine natürliche Zahl N, so daß $A(f)$ schwach konjugiert ist zu $\pm(LU)^N$. Weil $A(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -8 \end{smallmatrix}\right)$ gilt, ist $A(f)$ schwach konjugiert zu $-(LU)^2$ bzw. f ist schwach konjugiert zu $g_4^2(f_2 f_1)^2$.

Beispiel 2. Sei $f = f_2^{-2} \circ f_1^3 \circ f_2^{-3} \circ f_1^2$ mit halbregelmäßigem

$$\begin{aligned}
kb(f) \quad &= \quad 0 + \frac{-1}{2} \underset{-}{} \frac{1}{3} \underset{-}{} \frac{1}{3} \underset{-}{} \frac{1}{2} \underset{+}{} \cdots \\
&\overset{t_1}{\to} \quad -1 + \left(\frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{0} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{0}\right) \underset{+}{} \cdots \\
&\overset{t_3}{\to} \quad -1 + \frac{1}{2} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{3} \underset{+}{} \cdots \\
&= \quad [-1, 2, \overline{1, 1, 1, 3}].
\end{aligned}$$

Da $A(f) = \left(\begin{smallmatrix} -8 & -13 \\ 13 & 21 \end{smallmatrix}\right)$ gilt, ist f schwach konjugiert zu $g = f_2 \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^3$ mit $A(g) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{smallmatrix}\right)$.

Beispiel 3. Sei $f = f_2^{-n} \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-m}$ mit $n > 2$, $m > 1$. Man findet einen e-halbregelmäßigen Kettenbruch

$$\begin{aligned}
kb(f) \quad &= \quad 0 - \frac{1}{n} \underset{-}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{-}{} \frac{1}{m} \underset{+}{} \frac{1}{n} \underset{-}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \cdots \\
&\overset{t_1}{\to} \quad -1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{n-2} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{0} \underset{+}{} \frac{1}{0} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{m-1} \underset{+}{} \frac{1}{n-1} \underset{+}{} \cdots \\
&\overset{t_3}{\to} \quad -1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{n-2} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{1} \underset{+}{} \frac{1}{m-1} \underset{+}{} \frac{1}{n-1} \underset{+}{} \cdots \\
&= \quad [-1, 1, n-2, \overline{1, 1, m-1, n-1}].
\end{aligned}$$

Durch Vergleich der M-Matrizen überzeugt man sich davon, daß f schwach konjugiert ist zu $g_4^2 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_2^{m-1} \circ f_1^{n-1}$.

Leider läßt sich das Lemma 2.16 nicht umkehren. Es gibt hyperbolische Torus-Bündel zu Monodromien mit $f \in \mathcal{A}^-$, für die $kb(f)$ nicht e-halbregelmäßig ist. Ein Beispiel ist $f = f_2 \circ f_1^{-5}$, wo

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{5} - \frac{1}{1} - \frac{1}{5} - \cdots$$

wegen Lemma 2.15 nicht e-halbregelmäßig ist, aber $A(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -4 \end{smallmatrix}\right)$ ist hyperbolisch. Man erhält eine Übersicht über die möglichen Ausnahmen aus der Definition 2.14 und Lemma 2.15. Mit der dortigen Bezeichnung ist eine Stelle ν mit $b_\nu = 1$ und $a_\nu = a_{\nu+1} = -1$ oder von einer Stelle ab stets $b_\nu = 2$ und $a_{\nu+1} = -1$ ein Ausschlußkriterium. Im letzteren Fall

$$\cdots + \frac{\pm 1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \cdots$$

ist der Kettenbruch zwar nicht e-halbregelmäßig, aber nach [55] Satz 5.1. konvergent. Sein Wert ist eine von der Vorperiode abhängige rationale Bildung in

$$q = 2 - \frac{1}{q} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1.$$

Eine zugehörige M-Matrix hätte demnach einen rationalen Fixpunkt und wäre parabolisch. Die entsprechenden Torus-Bündel

$$\mathcal{M}(f_2^2 \circ f_1^{-2}) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{M}(f_2^{-2} \circ f_1^2) \tag{2.29}$$

besitzen daher auch keine hyperbolische Struktur[5].

Problematischer ist der Fall $b_\nu = 1$ und $a_\nu = a_{\nu+1} = -1$,

$$\cdots + \frac{-1}{1} + \frac{-1}{b_{\nu+1}} + \cdots .$$

Man kann sein Auftreten einfach tabellieren.

Fall 1: Abschnitte der Gestalt $\cdots \circ f_{1,2}^{-1} \circ f_{2,1}^{k} \circ \cdots$, $k > 0$, liefern

$$\cdots + \frac{-1}{1} + \frac{-1}{k} + \cdots .$$

Fall 2: „Periodenübergänge" $f_2^{\mp k} \circ \cdots \circ f_2^{\mp l} \circ f_1^{\pm 1}$, $k, l > 0$, liefern

$$\frac{\mp 1}{k} + \cdots + \frac{-1}{1} + \frac{-1}{k} + \cdots .$$

Damit ist evident:

> *Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ mit $f_* = \prod_{j=1}^{l} f_2^{n_j} f_1^{m_j}$, $m_j, n_j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $1 \le j \le l$, die von (2.29) und den Fällen 1 und 2 verschieden sind, sowie falls $j > 1$ insbesondere jene mit $m_j \neq \pm 1 \neq n_j$ für alle $1 \le j \le l$, sind hyperbolisch.*

Die Torus-Bündel der Fälle 1 und 2 lassen sich nur mit Satz 2.11 untersuchen.

Bemerkung. Es ist naheliegend zu fragen, ob die periodischen Kettenbrüche auch in den Ausnahmefällen Sinn machen und gegen einen Fixpunkt der M-Matrix

[5] Diese beiden Mannigfaltigkeiten sind homöomorph, da ihre M-Matrizen mit $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ als Konjugationsmatrix schwach konjugiert sind.

konvergieren. Für elliptische Matrizen sind die Kettenbrüche sicher divergent, da die Fixpunkte echt komplex sind. Tatsächlich läßt [33] Theorem 3.3. (A),(B) die folgende Aussage zu. Der zu $f \in \mathcal{A}^-$ gehörige periodische (nicht notwendig e-halbregelmäßige) Kettenbruch $kb(f)$ konvergiert genau dann, wenn $A(f)$ parabolisch oder hyperbolisch ist. Sein Wert ist ein (genauer: der attraktive) Fixpunkt von $A(f)$. Im obigen Beispiel $f = f_2 \circ f_1^{-5}$ mit $A(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -4 \end{smallmatrix}\right)$ konvergiert

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{5} - \frac{1}{1} - \cdots$$

gegen $1/2(5-\sqrt{5})$.

2.5 Darstellung der Fundamentalgruppe in $PSL_2(\mathbb{C})$

Nach dem hinreichenden und notwendigen Kriterium Korollar 2.6 wird die Gesamtheit der hyperbolischen Torus-Bündel durch Monodromien mit hyperbolischen M-Matrizen erzeugt. Für die konkrete Angabe einer hyperbolischen Struktur $\mathbb{H}^3/\Gamma$ auf einem hyperbolischen Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ verbleibt die Aufgabe, eine treue, diskrete Darstellung $\rho : \pi_1(\mathcal{M}(f)) \to \Gamma < PSL_2(\mathbb{C})$ zu finden, deren Existenz bereits garantiert ist.

Es soll im folgenden deutlich werden, daß gleichwertig hierzu nach einer treuen, diskreten Darstellung von $\pi_1(\mathcal{M}(f))$ in $SL_2(\mathbb{C})$ gesucht werden kann. Ist eine solche Darstellung gefunden, so läßt sie sich in natürlicher Weise auf eine treue, diskrete Darstellung in $PSL_2(\mathbb{C})$ projizieren, weil $\pi_1(\mathcal{M}(f))$ torsionsfrei, insbesondere frei von Torsion der Ordnung 2 ist. Wichtiger ist noch die umgekehrte Richtung [22] Prop. 3.1.1., die sich schon bei Thurston [69] (Remark in 5.5) findet.

Satz 2.17 *Sei $\mathcal{M}$ eine hyperbolische 3-Mannigfaltigkeit. Die kanonische Darstellung von $\pi_1(\mathcal{M})$ in $PSL_2(\mathbb{C})$ kann zu einer Darstellung in $SL_2(\mathbb{C})$ geliftet werden.*

Darüber hinaus läßt sich jede diskrete Untergruppe Γ von $PSL_2(\mathbb{C})$ ohne Torsion der Ordnung 2 nach $SL_2(\mathbb{C})$ liften, d.h. es gibt einen Homomorphismus $\phi : \Gamma \to SL_2(\mathbb{C})$, der verkettet mit der natürlichen Projektion $SL_2(\mathbb{C}) \to PSL_2(\mathbb{C})$ die Identität auf Γ liefert [20]. Zur Verdeutlichung, die Liftung von $\Gamma = \langle \pm g_1, \ldots, \pm g_n \mid R_1 = \ldots = R_m = \pm I \rangle$ mit den Erzeugenden $g_1, \ldots, g_n$ und Relationen $R_1, \ldots, R_m$ in $SL_2(\mathbb{C})$ ist wegen $\phi(\pm I) = I$ gerade $\phi(\Gamma) = \langle g_1, \ldots, g_n \mid R_1 = \ldots = R_m = I \rangle$.

2.5.1 Charaktere von Darstellungen in $SL_2(\mathbb{C})$

Es folgt einiges Standardmaterial [22]. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Betrachtet man den Raum $\mathcal{R}(G)$ aller Darstellungen von G in $SL_2(\mathbb{C})$, d.h. die Gesamtheit aller Homomorphismen $\rho : G \to SL_2(\mathbb{C})$, dann heißen zwei solche Darstellungen ρ, ρ' *äquivalent*, wenn es einen inneren Automorphismus J von $GL_2(\mathbb{C})$ gibt, so daß $\rho' = J\rho$. Der *Charakter* einer Darstellung ρ ist eine Funktion $s_\rho : G \to \mathbb{C}$, die durch $s_\rho(g) := tr(\rho(g))$ definiert ist. Äquivalente Darstellungen besitzen offensichtlich denselben Charakter. Der Raum aller Darstellungen $\mathcal{R}(G)$ in $SL_2(\mathbb{C})$ sei als Punktmenge in $SL_2(\mathbb{C})^n \subset \mathbb{C}^{4n}$ aufgefaßt, indem für eine Menge von Erzeugern $\{g_1, \ldots, g_n\}$ von G die Menge aller Tupel $(\rho(g_1), \ldots, \rho(g_n))$ für alle $\rho \in \mathcal{R}(G)$ gebildet wird.

Jeder Charakter erfüllt eine Reihe von Beziehungen, die ihren Ursprung in entsprechenden Spuridentitäten in $SL_2(\mathbb{C})$ haben, wie

(i) $s_\rho(id) = 2$,

(ii) $s_\rho(a^2) = s_\rho(a)^2 - 2$,

(iii) $s_\rho(abc)+s_\rho(cba)-s_\rho(a)s_\rho(bc)-s_\rho(b)s_\rho(ac)-s_\rho(c)s_\rho(ab)+s_\rho(a)s_\rho(b)s_\rho(c)=0$,

für alle $a,b,c \in G$. Man kann umgekehrt auch feststellen, daß jede Funktion $s : G \to \mathbb{C}$, die (i), (ii), (iii) erfüllt, Charakter einer Darstellung ist. Insbesondere liefern diese Identitäten die Einsicht, daß wenn $g_1,\dots,g_n$ Erzeugende von G sind, der Wert von $s_\rho(b)$ für ein beliebiges $b \in G$ polynomial von den Werten

$$s_\rho(g_i), s_\rho(g_ig_j), s_\rho(g_ig_jg_k) \quad \text{für alle } i<j<k$$

festgelegt wird (vgl. [29]). Man kann die Menge aller Charaktere von Darstellungen also vollständig beschreiben, indem man eine Abbildung $t : \mathcal{R}(G) \to \mathbb{C}^m$ definiert durch

$$t(\rho) = (s_\rho(g_i), s_\rho(g_ig_j), s_\rho(g_ig_jg_k))$$

in lexikographischer Ordnung für alle $i<j<k$, $m = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = n + \binom{n+1}{3}$. Das Bild

$$\mathcal{X}(G) := t(\mathcal{R}(G)) \subset \mathbb{C}^m$$

heißt *Charaktervarietät* und ist eine affine algebraische Menge, die für Torus-Bündel noch näher untersucht werden wird.

Eine Darstellung $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ heißt *irreduzibel*, wenn $\rho(G)$ keine Unterräume außer $\{0\}$ und $\mathbb{C}^n$ invariant läßt; *reduzibel* sonst. Reduzible Darstellungen in $SL_2(\mathbb{C})$ lassen einen eindimensionalen Unterraum des $\mathbb{C}^2$ invariant und sind deshalb äquivalent zu Darstellungen aus oberen Dreiecksmatrizen. Diese sind parabolisch und treten als Darstellungen der Fundamentalgruppe eines hyperbolischen $\mathcal{S}_{g,h}$-Bündels, wie schon erwähnt, nur als Stabilisatoren einer Spitze auf, weshalb das Augenmerk auf den irreduziblen Darstellungen alleine liegt. Besitzen zwei Darstellungen ρ und ρ' denselben Charakter $s_\rho = s_{\rho'}$ und ist eine von ihnen irreduzibel, so sind ρ und ρ' äquivalent [22] Prop.1.5.2. Der Charakter legt also die Äquivalenzklasse irreduzibler Darstellungen fest.

Sei $\mathcal{R}^{irr}(G) \subset \mathcal{R}(G)$ die Menge aller irreduziblen Darstellungen einer Gruppe G in $SL_2(\mathbb{C})$, und sei $\mathcal{X}^{irr}(G) := t(\mathcal{R}^{irr}(G)) \subset \mathcal{X}(G)$.

2.5.2 Konkretisierung: Darstellungen von $\pi_1(\mathcal{M}(f))$ in $SL_2(\mathbb{C})$

Die wesentlichen Referenzen sind hier [3], [57] Kap. 4.5., [6]. Sei $\mathcal{M}(f)$ ein hyperbolisches Torus-Bündel zur Monodromie f, so bezeichne $\mathcal{R}_f = \mathcal{R}(\pi_1(\mathcal{M}(f)))$ die Menge aller Darstellungen und $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}(\pi_1(\mathcal{M}(f)))$ die zugehörige Charaktervarietät. Die Inklusion $i : \mathcal{T}^\bullet \to \mathcal{M}(f)$ induziert eine natürliche Abbildung $r : \mathcal{X}_f \to \mathcal{X}(\mathbf{F}_2)$, wobei zur Erinnerung $\mathbf{F}_2 = \langle \xi, \eta \rangle \simeq \pi_1(\mathcal{T}^\bullet)$. Mit der eingeführten Abbildung $t : \mathcal{R}(\mathbf{F}_2) \to \mathbb{C}^3$ ist $\mathcal{X}(\mathbf{F}_2) \subset \mathbb{C}^3$ mittels

$$t(\rho) = (s_\rho(\xi), s_\rho(\eta), s_\rho(\eta\xi)).$$

Die Surjektivität von t ist bekannt [6] Kap. V.7.

Zunächst studiert man das Bild von $r : \mathcal{X}_f \to \mathcal{X}(\mathbf{F}_2)$. Die Monodromie f operiert auf dem Darstellungsraum $\mathcal{R}(\mathbf{F}_2)$. Ist nämlich $\rho \in \mathcal{R}(\mathbf{F}_2)$ eine Darstellung, so ist mit dem induzierten $f_* \in Aut(\mathbf{F}_2)$ auch $\rho \circ f_*$ eine Darstellung. f induziert damit eine Abbildung $f^* : \mathcal{X}(\mathbf{F}_2) \to \mathcal{X}(\mathbf{F}_2)$. Es bezeichne $f^*_{irr} := f^*|_{\mathcal{X}^{irr}(\mathbf{F}_2)}$, wodurch eine Abbildung $f^*_{irr} : \mathcal{X}^{irr}(\mathbf{F}_2) \to \mathcal{X}^{irr}(\mathbf{F}_2)$ definiert ist.

Definition 2.18 *Für ein Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ bezeichne*

$$\mathcal{C}(f) := \{p \in \mathbb{C}^3 \mid f^*(p) = p\}$$

die Fixpunktmenge von f^* und

$$\mathcal{C}(f)^{irr} := \{p \in \mathbb{C}^3 \mid f^*_{irr}(p) = p\}$$

die Fixpunktmenge von f^*_{irr}.

Offensichtlich ist $\mathcal{C}(f)^{irr} \subsetneq \mathcal{C}(f)$ wegen der trivialen Darstellung und $\mathcal{C}(f)^{irr} \cap \mathcal{C}(f) \neq \varnothing$, weil $\mathcal{M}(f)$ hyperbolisch angenommen wurde.

Es gibt Zusammenhänge zwischen diesen Fixpunktmengen und dem Bild von r.

Lemma 2.19 *Mit den obigen Bezeichnungen gelten:*

$$\begin{array}{lrcl} (i) & r(\mathcal{X}_f) & \subset & \mathcal{C}(f), \\ (ii) & r(\mathcal{X}_f^{irr}) & = & \mathcal{C}(f)^{irr}. \end{array}$$

Beweis. Sei $p \in r(\mathcal{X}_f)$ gegeben, d.h. es gibt ein $\rho' \in \mathcal{R}_f$ mit $(s_\rho(\xi), s_\rho(\eta), s_\rho(\eta\xi)) = p$ für $\rho := \rho'|_{\mathbf{F}_2} \in \mathcal{R}(\mathbf{F}_2)$. Die Relation in $\pi_1(\mathcal{M}(f))$ lautet nach (1.7) $f_*(\omega) = \mu\omega\mu^{-1}$ für alle $\omega \in \mathbf{F}_2$, woraus für den Charakter der Darstellung ρ folgt:

$$s_\rho(f_*(\omega)) = s_\rho(\omega)$$

für alle $\omega \in \mathbf{F}_2$. Dann ist $f^*(p) = t(\rho \circ f_*) = p$ und $p \in \mathcal{C}(f)$. Damit ist *(i)* bewiesen.

Mit *(i)* genügt die Feststellung $r(\mathcal{X}_f^{irr}) \subset \mathcal{X}^{irr}(\mathbf{F}_2)$, um $r(\mathcal{X}_f^{irr}) \subset \mathcal{C}(f)^{irr}$ festzuhalten. Sei nun $p \in \mathcal{C}(f)^{irr}$ gegeben, d.h. es gibt ein $\rho \in \mathcal{R}^{irr}(\mathbf{F}_2)$ mit $p = t(\rho) = t(\rho \circ f_*) = f^*(p)$. Die beiden irreduziblen Darstellungen ρ und $\rho \circ f_*$ besitzen demzufolge denselben Charakter $s_\rho = s_{\rho \circ f_*}$ und sind deshalb äquivalent [22] Prop.1.5.2. Es gibt demnach ein $M \in SL_2(\mathbb{C})$ mit $M\rho(\mathbf{F}_2)M^{-1} = (\rho \circ f_*)(\mathbf{F}_2)$. Bestimmt man ein $\tilde{\rho} \in \mathcal{R}_f^{irr}$ durch $\tilde{\rho}|_{\mathbf{F}_2} = \rho$ und $\tilde{\rho}(\mu) = M$, so ist $r(t(\tilde{\rho})) = p$. □

Angenommen $\mathcal{M}(f)$ und $\mathcal{M}(g)$ sind hyperbolische Torus-Bündel mit schwach konjugierten Monodromien, d.h. es gibt ein $h \in Aut(\mathbf{F}_2)$ mit $h^{-1} \circ f_*^{\pm 1} \circ h = g_*$ (mod $Inn(\mathbf{F}_2)$). $\mathcal{M}(f)$ und $\mathcal{M}(g)$ sind dann homöomorph, und h induziert durch einen Erzeugendenwechsel $(\xi, \eta) \mapsto (h(\xi), h(\eta))$ einen Isomorphismus $\pi_1(\mathcal{M}(f)) \to \pi_1(\mathcal{M}(g))$. Damit ist das folgende Lemma gezeigt.

Lemma 2.20 *Seien $\mathcal{M}(f)$ und $\mathcal{M}(g)$ hyperbolische Torus-Bündel mit schwach konjugierten Monodromien, d.h. es gibt ein $h \in Aut(\mathbf{F}_2)$ mit $h^{-1} \circ f_*^{\pm 1} \circ h = g_*$ (mod $Inn(\mathbf{F}_2)$). Dann ist*

$$h^*(r(\mathcal{X}_f)) = r(\mathcal{X}_g).$$

Es ist möglich, die Operation der Monodromie f auf $\mathcal{R}(\mathbf{F}_2)$ und damit f^* noch expliziter zu beschreiben [3], [57]. Nach Korollar 2.12 darf vorausgesetzt werden, daß $f_* \in \mathcal{A}$.

Lemma 2.21 *Sei $\mathcal{M}(f)$ ein hyperbolisches Torus-Bündel zur Monodromie f mit $f_* \in \mathcal{A}$. Die induzierte Abbildung $f^* : \mathcal{X}(\mathbf{F}_2) \to \mathcal{X}(\mathbf{F}_2)$ ist polynomial gegeben, $f^* = (x_f, y_f, z_f) \in (\mathbb{Z}[x,y,z])^3$, durch die Rekursion:*

$$\begin{array}{rcl} id^* & = & (x, y, z), \\ (g \circ f_1)^* & = & (x_g, z_g, x_g z_g - y_g), \\ (g \circ f_2)^* & = & (z_g, y_g, y_g z_g - x_g), \\ (g_4^2 \circ g)^* & = & g^*, \end{array}$$

wobei $g \in Aut(\mathbf{F}_2)$ mit $g^* = (x_g, y_g, z_g) \in (\mathbb{Z}[x,y,z])^3$.

Beweis. Seien $g, h \in Aut(\mathbf{F}_2)$ mit $g : (\xi, \eta) \mapsto (\omega_1(\xi, \eta), \omega_2(\xi, \eta))$, ω_1, ω_2 Wörter in ξ, η, so ist $h \circ g : (\xi, \eta) \mapsto (\omega_1(h(\xi), h(\eta)), \omega_2(h(\xi), h(\eta)))$. Es folgt,

$$\begin{array}{rcl} (h \circ g)^*(x, y, z) & = & (x_{h \circ g}(x,y,z), y_{h \circ g}(x,y,z), z_{h \circ g}(x,y,z)) \\ & = & (x_g(x_h, y_h, z_h), y_g(x_h, y_h, z_h), z_g(x_h, y_h, z_h)). \end{array}$$

Desweiteren folgt aus den Definitionen (1.10),(1.14),

$$\begin{aligned} f_1^*(x,y,z) = (x_{f_1}, y_{f_1}, z_{f_1}) &= (s_\rho(f_1(\xi)), s_\rho(f_1(\eta)), s_\rho(f_1(\eta\xi))) \\ &= \left(s_\rho(\xi), s_\rho(\xi\eta), s_\rho(\xi^2\eta)\right) \\ &= (x, z, xz - y), \end{aligned}$$

dabei wird für $s_\rho(\xi^2\eta)$ die Spuridentität $tr(AB) = tr(A)tr(B) - tr(AB^{-1})$, $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$, verwandt.

Analog findet man $f_2^*(x,y,z) = (z, y, yz - x)$, sowie $(g_4^2)^*(x,y,z) = (x,y,z)$. Hieraus ergeben sich die Rekursionen unmittelbar. □

Das letzte Lemma erlaubt $f^* : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ als polynomiale Funktion zu berechnen, womit $\mathcal{C}(f)$ als Lösungsmenge dreier simultaner Gleichungen in $\mathbb{Z}[x,y,z]$ beschrieben ist. Es handelt sich im allgemeinen um eine Kurve im $\mathbb{C}^3$. Man weiß über sie z.B., daß stets $(2,2,2) \in \mathcal{C}(f)$ für jede Monodromie f als Folge der trivialen Darstellung ist. Um die treue, diskrete Darstellung $\rho_0 \in \mathcal{R}_f$ zu finden, müssen Bedingungen berücksichtigt werden, die ihren Ursprung in der Geometrisierbarkeit von $\mathcal{M}(f)$ durch eine hyperbolische Struktur haben.

2.6 Geometrische Bedingungen und Normalisierung der Darstellung

Sei $\rho_0 \in \mathcal{R}_f$ die gesuchte treue, diskrete Darstellung für ein hyperbolisches Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ mit $f_* \in \mathcal{A}$. Mit den bisherigen Bezeichnungen seien die wesentlichen Bilder von ρ_0 mit

$$\rho_0(\xi) = X_0, \quad \rho_0(\eta) = Y_0, \quad \rho_0(\lambda) = L_0, \quad \rho_0(\mu) = M_0$$

bezeichnet. Wegen der λ-Invarianz von f_1, f_2 und g_4 gilt

$$f_*(\lambda) = \mu\lambda\mu^{-1} = \lambda, \tag{2.30}$$

so daß λ und μ kommutieren bzw. die von ihnen erzeugte Untergruppe in $\pi_1(\mathcal{M}(f))$ isomorph zu $\mathbb{Z}^2$ ist. Wie schon erwähnt, muß diese Untergruppe Fundamentalgruppe des Randtorus sein; sowie M_0 und L_0 parabolische Elemente seien müssen, die in $PSL_2(\mathbb{C})$ konjugiert sind zu Elementen $\pm\left(\begin{smallmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, $c \in \mathbb{C}$, d.h.

$$tr(M_0) = \pm 2 \qquad \text{und} \qquad tr(L_0) = \pm 2. \tag{2.31}$$

Nun ist nach (1.6) $L_0 = Y_0^{-1}X_0^{-1}Y_0X_0$ ein Kommutator. Für jede von zwei Elementen g_1, g_2 erzeugte Gruppe ist bekannt, daß eine Darstellung $\rho : G \to SL_2(\mathbb{C})$ mit $s_\rho([g_1, g_2]) = 2$ reduzibel ist [22] Prop. 1.5.5. Da aus Gründen der Geometrie ρ_0 irreduzibel ist, muß deshalb

$$tr(L_0) = -2 \tag{2.32}$$

verlangt werden. Mit

$$x_0 = tr(X_0), \quad y_0 = tr(Y_0), \quad z_0 = tr(Y_0X_0)$$

wendet man die bekannte Spuridentität

$$tr(B^{-1}A^{-1}BA) = tr^2(A) + tr^2(B) + tr^2(AB) - tr(A)tr(B)tr(AB) - 2 \tag{2.33}$$

für alle $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ auf (2.32) an und verlangt damit, daß sich (x_0, y_0, z_0) in dem Schnitt aus $\mathcal{C}(f)$ und der komplexen Lösungsmenge der sog. *Markoff-Gleichung*

$$xyz = x^2 + y^2 + z^2 \tag{2.34}$$

befinden muß[6]. Wie später genau zu sehen seien wird , liefert der Schnitt nur endlich viele Tripel (x, y, z) als gemeinsame Lösungen. An diese sind weitere geometrische Bedingungen zu stellen. Zum einen handelt es sich bei X_0, Y_0 und Y_0X_0 garantiert nicht um parabolische Matrizen – diese sind bereits klassifiziert – und nicht um elliptische Matrizen, weil $\rho_0(\pi_1(\mathcal{M}(f)))$ frei auf $\mathbb{H}^3$ operiert. Zum anderen ist $(x_0, y_0, z_0) \notin \mathbb{R}^3$, weil nach [38] Satz 1 ρ_0 äquivalent wäre zu einer Darstellung in $PSL_2(\mathbb{R}) \simeq Iso^+(\mathbb{H}^2)$.

Festzuhalten ist, daß (x_0, y_0, z_0) in der Menge

$$\mathcal{L}(f) := \mathcal{C}(f) \cap \left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \mathbb{R}^3 \mid xyz = x^2 + y^2 + z^2,\ x, y, z \notin [-2, 2]\right\} \quad (2.35)$$

enthalten ist. $\mathcal{L}(f)$ ist im wesentlichen durch die gemeinsamen Nullstellen von vier Polynomen in $\mathbb{Z}[x, y, z]$ bestimmt, weshalb sich zu jedem $(x, y, z) \in \mathcal{L}(f)$ auch das komplex konjugierte Tripel $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in $\mathcal{L}(f)$ befindet. Die zugehörigen Darstellungen unterscheiden sich also nur durch eine komplexe Konjugation der Matrizeneinträge und sind dennoch nicht äquivalent. $\mathcal{L}(f)$ enthält damit Charaktere zweier *nicht* äquivalenter, treuer und diskreter Darstellungen ρ_0 und $\bar{\rho}_0$. Wie beim Starrheitssatz 2.1 ausgeführt entspricht das den Erwartungen. Die weitere Aufgabe besteht darin, in $\mathcal{L}(f)$ die Charaktere von ρ_0 zu finden.

Zuvor zu der Normalisierung. Weil eine Darstellung $\rho : G \to SL_2(\mathbb{C})$ einer endlich erzeugten Gruppe G genau dann reduzibel ist, wenn für jedes Element c ihrer Kommutatorgruppe $s_\rho(c) = 2$ ist [22], befinden sich wegen (2.32) in $\mathcal{L}(f)$ nur Charaktere irreduzibler Darstellungen. Deren Äquivalenzklasse ist durch ein $(x, y, z) \in \mathcal{L}(f)$ festgelegt. Entsprechend dieser möglichen Konjugation verbleiben für eine Normalisierung der Matrizen, die man zu den Spuren angeben kann, soviel „Freiheitsgrade" wie Freiheit bei den Einträgen einer Konjugationsmatrix bestehen, also drei. Verbreitet werden zwei Freiheitsgrade durch die Setzung des Kommutators

$$L = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

festgelegt (vgl. [3], [34], [54]), bei der die Spitze in den Punkt ∞ gelegt und die Translation bestimmt wird.

Lemma 2.22 *Seien $Y, X \in SL_2(\mathbb{C})$ mit Spuren $y = tr(Y)$ und $x = tr(X)$ und dem Kommutator*

$$L = Y^{-1}X^{-1}YX = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann haben sie die Gestalt

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ -y & y-a \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad X = \begin{pmatrix} a' & b' \\ x & x-a' \end{pmatrix}.$$

Beweis. Mit dem Ansatz $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & y-a \end{pmatrix}$ ergibt sich aus $X^{-1}YX = YL$ für die Spuren sofort $y = tr(YL) = -y - 2c$. Also ist $c = -y$. Analog folgt aus $Y^{-1}X^{-1}Y = LX^{-1}$ die Gestalt für X. □

Setzt man im vorangegangenen Lemma $a' = x$ bzw.

$$X = \begin{pmatrix} x & -x^{-1} \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

so resultiert die Normalisierung in [3], der hier gefolgt wird.

[6] vgl. [13] für den Zusammenhang von Markoff-Gleichung und (treuen, diskreten) Darstellungen von $\mathbf{F}_2 \to SL_2(\mathbb{C})$.

Lemma 2.23 *Sei $X \in SL_2(\mathbb{C})$ wie in (2.37) und seien Y, x, y wie in Lemma 2.22. Dann ist*

$$Y = \begin{pmatrix} -zx^{-1} & 2zx^{-1} - yx^{-2} \\ -y & y + zx^{-1} \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Beweis. Mit dem Ansatz $Y = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -y & y-a \end{smallmatrix}\right)$ erhält man aus $YX = XYL$ die Gleichung

$$-y = (2a + b)x^2.$$

Zusätzlich muß $tr(YX) = z$ nach Definition gelten, d.h.

$$xz = x^2(a + b) + y.$$

Dieses lineare Gleichungssystem in den Variablen a und b besitzt die im Lemma genannten Lösungen. □

Als letztes bleibt für $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{L}(f)$ die Bestimmung der Matrix M_0, von der bisher verlangt wird, sie habe die Gestalt $\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $t \in \mathbb{C}$. M_0 tritt in den Relationen der Präsentation von $\pi_1(\mathcal{M}(f))$ nur als Konjugationsmatrix auf, weshalb o.B.d.A.

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

mit geeignetem komplexen t gesetzt werden darf. Ein solches t muß es geben, weil die Existenz einer hyperbolischen Struktur auf dem Torus-Bündel bereits garantiert ist.

Definition 2.24 (Normalisierung) *Die für $(x, y, z) \in \mathcal{L}(f)$ hier festgelegte Darstellung $\rho \in \mathcal{R}_f$ mit $\rho(\pi_1(\mathcal{M}(f))) = \Gamma < SL_2(\mathbb{C})$, $\Gamma = \langle X, Y, M \rangle$ mit X, Y, M nach (2.37), (2.38), (2.39) und $s_\rho(\xi) = x$, $s_\rho(\eta) = y$, $s_\rho(\eta\xi) = z$ wird als* ***in normalisierter Form*** *bezeichnet.*

Es wird auch von Γ oder von Matrizen $\rho(\xi) = X$, $\rho(\eta) = Y$, etc. in normalisierter Form die Rede sein.

Es soll noch ein weiteres Detail über Darstellungen in normalisierter Form festgehalten werden. Die Bestimmung der parabolischen oberen Dreiecksmatrix M geschieht explizit wie folgt.

Lemma 2.25 *Sei $\rho : \pi_1(\mathcal{M}(f)) \to SL_2(\mathbb{C})$ eine Darstellung in normalisierter Form und $\rho(f_*(\xi)) = \left(\begin{smallmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & w_1x^{-1} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Man verwendet die Matrizenidentität $MX = \rho(f_*(\xi))M$ und entnimmt z.B. aus der Position $(1, 1)$ die Gleichung

$$x(1 + t) = w_1.$$

□

2.7 Verwandte Torus-Bündel

Mit der Existenz einer hyperbolischen Struktur auf einem Torus-Bündel verbindet sich stets auch die Existenz einer solchen auf einem anderen, verwandten Torus-Bündel. Diese Beziehung wird hier dargelegt. Die Ergebnisse helfen im folgenden Abschnitt ein Diskretheitskriterium anzugeben.

Torus-Bündel, die sich nur im Vorzeichen ihrer M-Matrix unterscheiden, besitzen als gemeinsame zweiblättrige Überlagerung das Torus-Bündel zum Monodromiequadrat (vgl. Lemma 2.2).

Definition 2.26 *Zwei Torus-Bündel $\mathcal{M}(g)$ und $\mathcal{M}(h)$ heißen* ***verwandt****, wenn $A(g)$ und $-A(h)$ schwach konjugiert sind.*

Man standardisiert und nennt $\mathcal{M}(g_4^2 \circ f)$ *das* zu $\mathcal{M}(f)$ verwandte Torus-Bündel, vgl. Korollar 2.12, unbeschadet das entsprechend der Definition 2.26 alle zu $\mathcal{M}(g_4^2 \circ f)$ homöomorphen Torus-Bündel ebenfalls zu $\mathcal{M}(f)$ verwandt sind. Gemeint sind bei diesen Bezeichnungen $f, g_4^2 \in Aut(\mathbf{F}_2)$, wofür vormals der $*$-Index verwendet wurde.

Der folgende Satz demonstriert, daß man mit der hyperbolischen Struktur eines Torus-Bündel auch die hyperbolische Struktur des verwandten Torus-Bündels genau kennt. Sei hierzu

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Satz 2.27 *Beschreibt $\Gamma = \langle X, Y, M \rangle$ die hyperbolische Struktur $\mathbb{H}^3/\Gamma$ auf einem Torus-Bündel in normalisierter Form, dann liefert $\Gamma_v = \langle X, Y, MT \rangle$ die hyperbolische Struktur $\mathbb{H}^3/\Gamma_v$ auf dem verwandten Torus-Bündel.*

Beweis. Sei $\mathcal{M}(f) \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma$ ein hyperbolisches Torus-Bündel, wobei $\Gamma = \langle X, Y, M \rangle$ in normalisierter Form vorliege. Das verwandte Torus-Bündel

$$\mathcal{M}(g_4^2 \circ f) \simeq \mathcal{M}(f \circ g_4^2)$$

ist wegen des Spurkriteriums Korollar 2.6 auch hyperbolisch. Es gibt also eine Gruppe $\Gamma_v = \langle X_v, Y_v, M_v \rangle < SL_2(\mathbb{C})$ in normalisierter Form mit $\mathcal{M}(f \circ g_4^2) \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma_v$. Notiert man die Operation von f als

$$f : (\xi, \eta) \mapsto (\omega_1, \omega_2),$$

wobei ω_1 und ω_2 Wörter in ξ und η sind, so ist nach (1.12)

$$f \circ g_4^2 : (\xi, \eta) \mapsto (\alpha^{-1}\omega_1^{-1}\alpha, \alpha^{-1}\omega_2^{-1}\alpha)$$

mit $\alpha = \omega_2\omega_1$. Da der Charakter s_ρ einer Darstellung $\rho \in \mathcal{R}_f$ gegenüber Konjugation und Inversenbildung invariant ist, d.h. da also

$$\begin{aligned} x &= s_\rho(\xi) = s_\rho(\omega_1) = s_\rho(\alpha^{-1}\omega_1^{-1}\alpha), \\ y &= s_\rho(\eta) = s_\rho(\omega_2) = s_\rho(\alpha^{-1}\omega_2^{-1}\alpha), \end{aligned}$$

besitzen die verwandten Torus-Bündel dieselbe Charaktervarietät. Folglich müssen $X_v = X$ und $Y_v = Y$ bzw. $X_v = \overline{X}$ und $Y_v = \overline{Y}$ gelten. O.B.d.A. wird die komplexe Konjugation nicht betrachtet.

Sind nun die Darstellungen $\rho : \pi_1(\mathcal{M}(f)) \to \Gamma$ und $\rho_v : \pi_1(\mathcal{M}(f \circ g_4^2)) \to \Gamma_v$ gegeben, dann hat man einerseits $\rho(\xi) = \rho_v(\xi) = X$ und $\rho(\eta) = \rho_v(\eta) = Y$ und andererseits gelten mit $\rho(\mu) = M = \binom{1\,t}{0\,1}$ und $\rho_v(\mu) = M_v = \binom{1\,t_v}{0\,1}$ die Relationen

$$MXM^{-1} = \rho(\omega_1) \quad \text{und} \quad MYM^{-1} = \rho(\omega_2),$$

sowie

$$M_v Y M_v^{-1} = \rho_v(\omega_1^{-1}\omega_2^{-1}\omega_1) = \rho(\omega_1)^{-1}\rho(\omega_2)^{-1}\rho(\omega_1) = MX^{-1}Y^{-1}XM^{-1}.$$

Schreibt man diese Gleichung zu $M^{-1}M_vY = X^{-1}Y^{-1}XM^{-1}M_v$ um und berechnet sie mit den normalisierten Matrizen, so folgt unmittelbar

$$t_v = t - 1$$

bzw. $M_v = MT$. □

2.7.1 Eine Symmetrieeigenschaft

Es ist interessant, sich unter Verwendung der Bezeichnungen des Satzes 2.27 mit der Gruppenerweiterung $\Gamma' = \langle X, Y, M, T \rangle$ zu beschäftigen. Anders gesagt, ist $\rho : \pi_1(\mathcal{M}(f)) \to \Gamma$ die kanonische Darstellung, so untersucht man nun die Gruppe $G = \langle \xi, \eta, \mu, \tau \rangle$ und die Darstellung $\rho' : G \to \Gamma'$, wobei $\rho'|_\Gamma = \rho$ und $\rho'(\tau) = T$ ist. Die Konjugation mit τ liefert einen Automorphismus von $\mathbf{F}_2$ und ist Ursache einer Translationssymmetrie der später konstruierten Fundamentalbereiche.

Lemma 2.28 *Sei Γ wie in Satz 2.27 und $\rho : \pi_1(\mathcal{M}(f)) \to \Gamma$ die zugehörige kanonische Darstellung. Für alle $\omega \in \mathbf{F}_2$ gilt dann*

$$T\rho(\omega)T^{-1} = \rho(g_4^2(\omega)).$$

Beweis. $\mathbb{H}^3/\Gamma$ ist ein hyperbolisches Torus-Bündel. Die hyperbolische Struktur auf dem verwandten Torus-Bündel sei $\mathbb{H}^3/\Gamma_v$ mit Γ_v wie in Satz 2.27. In der Gruppe Γ_v hat man von ihrer Herkunft her die Relation

$$(MT)\rho(\omega)(MT)^{-1} = \rho(f \circ g_4^2(\omega))$$

für alle $\omega \in \mathbf{F}_2$. Eine direkte Umformung führt zu

$$T\rho(\omega)T^{-1} = \rho(\mu^{-1}(f \circ g_4^2)(\omega)\mu) = \rho(g_4^2(\omega)).$$

□

Dieses Hilfsmittel erlaubt die Formulierung des folgenden Satzes.

Satz 2.29 *Seien $\mathbb{H}^3/\Gamma$ und $\mathbb{H}^3/\Gamma_v$ verwandte Torus-Bündel mit Γ und Γ_v wie in Satz 2.27. Folgende Aussagen gelten für die um T erweiterte Gruppe $\Gamma' = \langle X, Y, M, T \rangle$:*

(i) *Γ und Γ_v haben in Γ' den Index 2;*

(ii) *Γ' ist diskret;*

(iii) *Γ' enthält Torsion.*

Beweis. Unter der Annahme von (i) folgt (ii) aus der Diskretheit von Γ bzw. Γ_v. Zum Beweis von (i) beobachtet man,

$$T^2 = L^{-1} \quad \text{in } PSL_2(\mathbb{C}). \tag{2.41}$$

Mit dem Lemma 2.28 ergibt sich sofort $\Gamma' = \Gamma \cup T\Gamma$ bzw. $\Gamma' = \Gamma_v \cup T\Gamma_v$. Unter Verwendung der normalisierten Formen berechnet man schließlich $tr(XT) = tr(Y^{-1}T) = 0$, womit sich (iii) ergibt. □

2.8 Diskretheitskriterien

Ist für ein hyperbolisches Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ die endliche Menge $\mathcal{L}(f)$ bestimmt, muß das Tripel von Charakteren $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{L}(f)$ ausfindig gemacht werden, welches zur kanonischen treuen und diskreten Darstellung $\rho_0 \in \mathcal{R}_f$ bzw. zu $\bar{\rho}_0$, der komplex konjugierten Darstellung, gehört. Über die Diskretheit einer Untergruppe von $SL_2(\mathbb{C})$ zu entscheiden, ist im allgemeinen ein schwieriges Problem. Es gibt kein einfaches notwendiges und hinreichendes Kriterium. Die Untergruppe ist sicher diskret, wenn man ein Fundamentalpolyeder im $\mathbb{H}^3$ konstruieren kann, auf das man das

Poincarésche Lemma [45] anwenden kann. Riley versuchte, dies in seinem Computerprogramm Poincaré zu automatisieren [61]. Später werden Fundamentalpolyeder von hyperbolischen Torus-Bündeln im Mittelpunkt stehen.

Zunächst kann man mithilfe einiger klassischer Kriterien Charaktertripel in $\mathcal{L}(f)$ von nicht diskreten Darstellungen ermitteln. Ein bekanntes Kriterium ist die Jørgensensche Ungleichung, nach der $\langle A, B\rangle < SL_2(\mathbb{C})$ nicht diskret ist, wenn

$$|tr^2(A) - 4| + |tr(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| < 1, \tag{2.42}$$

es sei denn $\langle A, B\rangle$ ist elementar [35]. Die Ungleichung direkt auf $\langle X, Y\rangle$ nach (2.37), (2.38) anzuwenden ist wegen $tr(L) = -2$ für alle $(x, y, z) \in \mathcal{L}(f)$ wertlos. Es geht aber einfacher, als nach $A, B \in \langle X, Y\rangle$ zu suchen, die eine nicht diskrete Untergruppe nach Jørgensen erzeugen. Bei Gegenwart von parabolischen Matrizen hat sich ein Spezialfall der Jørgensenschen Ungleichung für die Praxis als geeigneter erwiesen, das schon länger bekannte Lemma von Shimizu und Leutbecher [40].

Lemma 2.30 *Seien $P, Q \in SL_2(\mathbb{C})$ mit $P = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $c \neq 0$ und $Q = \pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $q \neq 0$. Gilt*

$$|c| < \frac{1}{|q|},$$

dann ist die Gruppe $\langle P, Q\rangle$ nicht diskret.

Beweis. Unter den Bedingungen des Lemmas ist $\langle P, Q\rangle$ keine der drei elementaren Ausnahmengruppen in [35]. Man kann die Jørgensensche Ungleichung direkt anwenden. Setzt man in (2.42) $A = Q$ und $B = P$, so erhält man

$$|tr(QPQ^{-1}P^{-1}) - 2| < 1.$$

Eine direkte Rechnung mithilfe (2.33) liefert $|c \cdot q| < 1$. □

Man schließt aus den normalisierten Matrizen (2.36), (2.37) und (2.38) unmittelbar, daß für jedes $W = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \langle X_0, Y_0\rangle$ der Wert $|c|$ nach unten beschränkt ist,

$$|c| \geq \frac{1}{2}.$$

Die Aussage läßt sich verschärfen, wenn man die Gruppe um das Translationselement T nach (2.40) erweitert. Im Satz 2.29 wurde festgehalten, daß $\langle X_0, Y_0, T\rangle$ eine diskrete, Torsion enthaltende Gruppe ist, in der $\langle X_0, Y_0\rangle$ den Index 2 hat. Man hat damit bei Anwendung von Lemma 2.30 auf $\langle X_0, Y_0, T\rangle$ damit ein Ergebnis von [54] Prop. 3.4 gezeigt.

Lemma 2.31 *Seien $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{L}(f)$ so, daß die Gruppe $\langle X_0, Y_0\rangle$ in normalisierter Form diskret ist. Für jedes $W = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \langle X_0, Y_0\rangle$ gilt dann*

$$|c| \geq 1$$

.

Für Erzeugende der Gruppe $\langle X_0, Y_0\rangle$ folgt die Aussage auch aus [27] Cor. 3 zweiter Teil.

Die zu nicht diskreten Gruppen gehörenden Tripel in $\mathcal{L}(f)$ können mit diesem Lemma ausgeschlossen werden, indem in den Gruppen nach Elementen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $|c| < 1$ gesucht wird.

Bemerkung. Es sind eine Reihe weiterer notwendiger Bedingungen für die Diskretheit von Untergruppen in $SL_2(\mathbb{C})$ bekannt, die mit der Jørgensenschen Ungleichung verwandt sind, so z.B. [17] und weitere Artikel der Autoren von [27]. Für die Zwecke hier haben sie sich als nicht nützlicher erwiesen. Auch das neuere hinreichende Kriterium von Gilman [28] wurde in die Untersuchungen einbezogen. Es ist einfach anzuwenden und testet die geometrische sog. NSD/TC-Eigenschaft. Es stellte sich in den konkreten Fällen jedoch heraus, daß die sog. ortho-Enden der fraglichen Gruppen nie die NSD/TC-Eigenschaft besitzen, selbst wenn die Gruppen diskret sind.

3 Untersuchung der hyperbolischen Struktur – Fundamentalbereiche

3.1 Techniken – Spuren und Tschebyscheff-Polynome

Hier werden einige technische Hilfsmittel zusammengestellt, die bei der Berechnung von Spuren von Elementen aus $SL_2(\mathbb{C})$ nützlich sind. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton erfüllt eine beliebige Matrix $A \in SL_2(\mathbb{C})$ ihr charakteristisches Polynom $A^2 = A\,tr(A) - I$, wobei $I = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Es folgt für die Berechnung einer beliebigen Potenz, daß

$$A^n = p_n(a)\,A - p_{n-1}(a)\,I, \tag{3.43}$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$ und $p_n(a)$ außer für $p_0(a)$ ein Polynom vom Grad $|n| - 1$ in der Variablen $a = tr(A)$ ist, welches rekursiv durch

$$\begin{aligned} &p_{n+1}(a) = a\,p_n(a) - p_{n-1}(a) \\ &p_0(a) = 0,\ p_1(a) = 1,\ p_{-n}(a) = -p_n(a) \end{aligned} \tag{3.44}$$

definiert ist. Als einfache Konsequenzen aus (3.43) werden für $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ und $n \in \mathbb{Z}$ die Gleichungen

$$tr(A^n) \;=\; a\,p_n(a) - 2p_{n-1}(a) = p_{n+1} - p_{n-1} \tag{3.45}$$

$$\text{und} \quad tr(A^n B) \;=\; p_n(a)\,tr(AB) - p_{n-1}(a)\,tr(B) \tag{3.46}$$

festgehalten.

Es handelt sich bei den Polynomen $p_n(a)$ um *Tschebyscheff-Polynome* (zweiter Art), für die eine Reihe von Identitäten bekannt sind (vgl. [62], [36]). Benötigt werden neben der Rekursion vor allem die durch vollständige Induktion einfach beweisbaren Formeln

$$p_n^2 - p_{n+1}p_{n-1} = 1 \tag{3.47}$$

und

$$p_{m+n} = p_m p_{n+1} - p_n p_{m-1} \tag{3.48}$$

für ganze m und n. Hier, wie im folgenden, wird, wann immer möglich, die Angabe des Argumentes bei allen auftretenden Polynomen unterdrückt. Für jedes $a \in \mathbb{C}$ gibt es $\vartheta \in \mathbb{C}$ mit $a = 2\cos\vartheta$. Man überzeugt sich leicht davon, daß

$$p_n(2\cos\vartheta) = \frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{3.49}$$

gilt, denn dieser Ausdruck erfüllt diegleiche Rekursion. Hiermit ist es einfach, die Nullstellen von $p_n(a)$ und somit die Linearfaktoren zu ermitteln,

$$p_n(a) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(a - 2\cos\frac{k\pi}{n}\right). \tag{3.50}$$

Ebenso findet man

$$p_n(2) \;=\; n, \tag{3.51}$$

$$p_n(-2) \;=\; (-1)^{n+1}n. \tag{3.52}$$

In dieser Arbeit ist oftmals

$$d_n(a) := \mathrm{ggT}\left(p_n(a),\, p_{n+1} - 1\right),\ n > 0$$

von Interesse, vgl. [3].

Lemma 3.1 *Für $n > 0$ gilt:*

$$(i) \qquad d_n(a) \;=\; \prod_{\substack{k=1 \\ k\equiv 0 \bmod 2}}^{n-1} \left(a - 2\cos\frac{k\pi}{n}\right),$$

$$(ii) \qquad d_n \;=\; \mathrm{ggT}\,(p_n,\, p_{n-1}+1)\,.$$

Beweis. Mit (3.49) und einem Additionstheorem gilt

$$p_{n+1} - 1 = \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} - 1 = p_n\cos\vartheta + \cos n\vartheta - 1.$$

Die Suche nach gemeinsamen Nullstellen von p_n und $p_{n+1}-1$ führt nun auf $\cos n\vartheta = 1$ und schließlich auf die Linearfaktorzerlegung von $d_n(a)$ in (i). Analog folgert man für $p_{n-1}+1$ und erhält (ii). □

Es ist folgerichtig,

$$d_{-n} = -d_n$$

zu setzten und damit den Gültigkeitsbereich des Lemmas auf alle ganzen n zu erweitern.

3.1.1 verwandte Tschebyscheff-Polynome

In [3] werden noch andere, mit den Tschebyscheff-Polynomen verwandte Polynome beschrieben, die helfen, Konsequenzen aus der Existenz des $\mathrm{ggT}(p_n, p_{n+1}-1)$ zu ziehen. Der Zugriff ist hier anders. Durch die Rekursion

$$\begin{gathered} \tilde{p}_{n+2}(a) = a\,\tilde{p}_n(a) - \tilde{p}_{n-2}(a), \\ \tilde{p}_0 = 2,\, \tilde{p}_1 = 1,\, \tilde{p}_{-n} = \tilde{p}_n \end{gathered} \tag{3.53}$$

werden Polynome definiert, die *verwandte Tschebyscheff-Polynome* heißen sollen. $\tilde{p}_n$ hat den Grad $|n|/2$ bzw. $(|n|-1)/2$, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist.

Mit der Bezeichnung

$$r_n(a) := \begin{cases} a-2 & ,\ n \equiv 1 \bmod 2, \\ a^2-4 & ,\ n \equiv 0 \bmod 2, \end{cases} \tag{3.54}$$

zeigt sich die Verwandtschaft auch in folgender quadratischen Relation.

Lemma 3.2 *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:* $\qquad \tilde{p}_n^2 - \tilde{p}_{n+2}\tilde{p}_{n-2} = -r_n.$

Beweis. Man führt den Beweis per vollständiger Induktion. Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Behauptung unmittelbar einsichtig. Angenommen das Lemma ist für ein n richtig. Es ist dann

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n(a)\tilde{p}_{n+4}(a) &= a\,\tilde{p}_{n+2}(a)\tilde{p}_n(a) - \tilde{p}_n^2(a) \\ &= a\,\tilde{p}_{n+2}(a)\tilde{p}_n(a) - \tilde{p}_{n+2}(a)\tilde{p}_{n-2}(a) + r_n(a) \\ &= \tilde{p}_{n+2}^2(a) + r_n(a). \end{aligned}$$

□

Lemma 3.3 *In der Variablen $2\cos\vartheta$ schreiben sich die verwandten Tschebyscheff-Polynome*

$$\tilde{p}_n(2\cos\vartheta) = \begin{cases} 2\cos n\frac{\vartheta}{2} & ,\ n \equiv 0 \bmod 2, \\ \cos n\frac{\vartheta}{2} / \cos\frac{\vartheta}{2} & ,\ n \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}$$

Beweis. In dieser Form erfüllen die Polynome die definierende Rekursion. Zum einen gilt $\tilde{p}_0 = 2$ und $\tilde{p}_1 = 1$ und zum anderen gilt

$$2\cos\vartheta \, \cos n\frac{\vartheta}{2} = \cos(n+2)\frac{\vartheta}{2} + \cos(n-2)\frac{\vartheta}{2}.$$

□

Eine direkte Schlußfolgerung hieraus ist die Bestimmung der Nullstellen, die in

$$\tilde{p}_n(a) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\equiv 1 \bmod 2}}^{n-1} \left(a - 2\cos\frac{k\pi}{n}\right) \tag{3.55}$$

mündet. Die Beziehung zu den Tschebyscheff-Polynomen klärt sich nun im Vergleich mit Lemma 3.1 (i) und (3.50):

$$p_n = d_n \, \tilde{p}_n. \tag{3.56}$$

Entsprechend soll festgehalten werden, was $(p_{n+1} - 1)/d_n$ ergibt. Dazu wird ein allgemeineres Resultat festgehalten.

Lemma 3.4 *Für alle ganzen m und $n \neq 0$ gelten*

$$\begin{array}{lrcl} (i) & \dfrac{\tilde{p}_{2m+n}}{\tilde{p}_n} & = & \dfrac{p_{m+n} - p_m}{p_n}, \\ (ii) & \tilde{p}_{2m} & = & \dfrac{p_{m+n} - p_{m-n}}{p_n}. \end{array}$$

Beweis. Man schließt mit trigonometrischen Beziehungen wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{p_{m+n} - p_m}{p_n} &= \frac{\sin(m+n)\vartheta - \sin m\vartheta}{\sin n\vartheta} \\ &= \frac{2\cos(2m+n)\frac{\vartheta}{2} \cdot \sin n\frac{\vartheta}{2}}{\sin n\vartheta} \, \frac{2\cos n\frac{\vartheta}{2}}{2\cos n\frac{\vartheta}{2}} \\ &= \frac{\cos(2m+n)\frac{\vartheta}{2}}{\cos n\frac{\vartheta}{2}} = \frac{\tilde{p}_{2m+n}}{\tilde{p}_n}. \end{aligned}$$

Ebenso berechnet man

$$\frac{p_{m+n} - p_{m-n}}{p_n} = \frac{\sin(m+n)\vartheta - \sin(m-n)\vartheta}{\sin n\vartheta} = 2\cos m\vartheta = \tilde{p}_{2m}.$$

□

Dieses Lemma umfaßt einige Beziehungen aus [3] als Spezialfälle. Sie werden mit anderen Folgerungen zusammengefaßt.

Korollar 3.5 *Für alle ganzen m und $n \neq 0$ gelten*

$$\begin{array}{lrcl} (i) & \tilde{p}_{2m+1} & = & p_{m+1} - p_m, \\ (ii) & \tilde{p}_{2m} & = & p_{m+1} - p_{m-1}, \\ (iii) & \tilde{p}_n\tilde{p}_{2m} & = & \tilde{p}_{2m+n} + \tilde{p}_{2m-n}, \\ (iv) & \tilde{p}_{2m}^2 & = & \tilde{p}_{4m} + 2, \\ (v) & \dfrac{\tilde{p}_{n+2}}{\tilde{p}_n} & = & \dfrac{p_{n+1} - 1}{p_n}. \end{array}$$

Beweis. (i) und (ii) ergeben sich durch Wahl von $n = 1$ in Lemma (3.4). Setzt man $m = 1$ erhält man (v). (iii) ist eine Kombination der im Lemma (3.4) genannten Identitäten. (iv) ergibt sich aus (iii) durch $n = 2m$. □

Mit dem Punkt (v) des Korollars ist die obige Frage durch

$$\tilde{p}_{n+2} = (p_{n+1} - 1)/d_n \tag{3.57}$$

beantwortet. Ein Vorzeichenwechsel $n \mapsto -n$ liefert aus (v) zudem die nützliche Beziehung

$$\frac{\tilde{p}_{n-2}}{\tilde{p}_n} = \frac{p_{n-1} + 1}{p_n}. \tag{3.58}$$

Zwischen den beiden Arten von Tschebyscheff-Polynomen gibt es noch in Bezug auf (3.48) einen Zusammenhang.

Lemma 3.6 *Für alle ganzen m und n gilt*

$$\tilde{p}_{2m+n} = p_m \tilde{p}_{n+2} - \tilde{p}_n p_{m-1}.$$

Beweis. Laut (i) Lemma 3.4 gilt $p_n \tilde{p}_{2m+n} = (p_{m+n} - p_m)\tilde{p}_n$, was unter Verwendung von (3.48) gleichbedeutend ist mit

$$d_n \tilde{p}_{2m+n} = p_m p_{n+1} - p_n p_{m-1} - p_m = p_m(p_{n+1} - 1) - p_n p_{m-1}.$$

Man kann nach (3.56), (3.57) durch d_n teilen und beschließt so den Beweis. □

Unter dem Gesichtspunkt der Teilbarkeit sind folgende Ergebnisse bedeutsam (vgl. [62]).

Lemma 3.7 *Für alle ganzen m und n gilt*

$$\begin{array}{lrcl} (i) & p_{mn}(a) & = & p_m(\tilde{p}_{2n}(a))\, p_n(a), \\ (ii) & \mathrm{ggT}\,(p_m, p_n) & = & p_{\mathrm{ggT}(m,n)}. \end{array}$$

Beweis. Man beweist (i) mittels vollständiger Induktion über den Parameter m. Die Behauptung ist für $m = 1$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ trivial. Gelte das Lemma für ein ganzes $m > 1$. Aus Lemma 3.4 (ii) folgert man

$$p_{n(m+1)} = p_{mn+n} = \tilde{p}_{2n} p_{mn} - p_{mn-n}.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$p_{n(m+1)}(a) = \tilde{p}_{2n}(a)\, p_m(\tilde{p}_{2n}(a))\, p_n(a) - p_{m-1}(\tilde{p}_{2n}(a))\, p_n(a) = p_{m+1}(\tilde{p}_{2n}(a))\, p_n(a).$$

Seien nun bezüglich (ii) n und m beliebige ganze Zahlen. Für $n = m$ oder $n = 1$ bzw. $m = 1$ gibt es nichts zu beweisen. Ist $g := \mathrm{ggT}(n, m) = 1$, so erkennt man leicht an der Linearfaktorzerlegung (3.50), daß auch $\mathrm{ggT}(p_n, p_m) = 1$ folgt. Andererseits falls $g \neq 1$ ist, gibt es teilerfremde $n', m' \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, so daß $n = n'g$ und $m = m'g$ gilt, was mit (i) auf $p_n = p_{n'}(\tilde{p}_{2g})p_g$ bzw. $p_m = p_{m'}(\tilde{p}_{2g})p_g$ führt. Da $\mathrm{ggT}(p_{n'}, p_{m'}) = 1$, ist $p_g = \mathrm{ggT}(p_n, p_m)$. □

Es werden weitere Resultate gesammelt.

Lemma 3.8 *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\begin{array}{lrcl} (i) & \tilde{p}_{2n}(2) & = & 2 \\ & \tilde{p}_{2n+1}(2) & = & 1 \\ & & & \\ (ii) & \tilde{p}_{2n}(-2) & = & (-1)^n\, 2, \\ & \tilde{p}_{2n+1}(-2) & = & (-1)^n(2n+1). \end{array}$$

Beweis. Man folgert direkt aus Lemma 3.3. □

Zum Abschluß werden nochmals die größten gemeinsamen Teiler d_n betrachtet.

Lemma 3.9 *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\begin{array}{lrcl} (i) & d_{2n} & = & p_n, \\ (ii) & d_{2n+1}(a) & = & \dfrac{\tilde{p}_{2n+2}(a) - \tilde{p}_{2n}(a)}{a-2}, \\ (iii) & d_{n+2}\tilde{p}_n & = & p_{n+1} + 1. \end{array}$$

Beweis. (i) ergibt sich direkt aus dem Lemma 3.4 (ii) für $n = m$. Für (ii) nutzt man vor allem das Korollar 3.5 (iii). Seine Verwendung wird durch ein $*$ über dem Gleichheitszeichen angezeigt. Es gilt

$$\begin{aligned} (a-2)p_{2n+1}(a) &= 2(p_{2n+2} - p_{2n+1}) - (p_{2n+2} - p_{2n}) = 2\tilde{p}_{4n+3} - \tilde{p}_{4n+2} \\ &\overset{*}{=} \tilde{p}_{4n+3} - \tilde{p}_{4n+1} \overset{*}{=} (\tilde{p}_{2n+2} - \tilde{p}_{2n})\tilde{p}_{2n+1}. \end{aligned}$$

Man teilt durch $\tilde{p}_{2n+1}$ und erhält (ii).

Mit (3.47) hat man

$$p_{n+1}^2 - 1 = p_{n+2}p_n = d_{n+2}\tilde{p}_{n+2}d_n\tilde{p}_n.$$

Da desweiteren (3.57) gilt, ist (iii) offenkundig. □

3.1.2 Spurpolynom eines Wortes aus $\mathbf{F}_2$

Es wurde ausgeführt, daß die Spur eines beliebigen Elementes W aus der Gruppe $\langle X, Y\rangle < SL_2(\mathbb{C})$ ein Polynom aus $\mathbb{Z}[x,y,z]$ ist, $x = tr(X)$, $y = tr(Y)$, $z = tr(YX)$. Diese Polynome sind der erste Schritt zur Bestimmung der Mengen $\mathcal{C}(f)$ bzw. $\mathcal{L}(f)$. Fragt man nur nach $tr(W)$, darf

$$W = X^{a_1}Y^{b_1}\cdots X^{a_n}Y^{b_n},\ a_i, b_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, 0 < i \leq n,$$

zyklisch reduziert angenommen werden. Nun ist mit (3.43)

$$\begin{aligned} X^{a_i}Y^{b_i} &= (p_{a_i}(x)\,X - p_{a_i-1}(x)\,I)\,(p_{b_i}(y)\,Y - p_{b_i-1}(y)\,I) \\ &= p_{a_i}(x)p_{b_i}(y)\,XY - p_{a_i}(x)p_{b_i-1}(y)\,X - p_{a_i-1}(x)p_{b_i}(y)\,Y \\ &\quad + p_{a_i-1}(x)p_{b_i-1}(y)\,I. \end{aligned}$$

Wie hieraus folgt, ist

$$tr(W) = Q_n z^n + Q_{n-1}z^{n-1} + \ldots + Q_0, \tag{3.59}$$

wobei die Koeffizienten Polynome $Q_i \in \mathbb{Z}[x,y]$ sind. Genauer ist der Gradkoeffizient

$$Q_n = \prod_{i=1}^{n} p_{a_i}(x)p_{b_i}(y), \tag{3.60}$$

und die restlichen Q_i, $1 \leq i < n$, ergeben sich als Summe von Produkten entsprechender Tschebyscheff-Polynome. Der Grad von Q_n ist

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i| + |b_i|) - 2n.$$

Insgesamt ist der Grad des Spurpolynoms $tr(W)$ in der Variablen z also gleich der Zahl der Blöcke $X^{a_i}Y^{b_i}$ (vgl. [71]). Dies wirft ein Schlaglicht auf die Komplexität der Polynome, die in die Menge $\mathcal{L}(f)$ eingehen.

Bemerkung. Jørgensen hat in [36] eine explizite Formel für das Spurpolynom $tr(W)$ angegeben. Da zur Bestimmung von $\mathcal{L}(f)$ die Berechnung der Spurpolynome dem Computer überlassen wird und eine rekursive Berechnung nach Lemma 2.21 einfacher zu programmieren ist als Jørgensens Formel, erhält erstere den Vorzug.

3.2 Fordscher Fundamentalbereich

Wurde nach dem bisherigen für ein hyperbolisches Torus-Bündel die hyperbolische Struktur $\mathbb{H}^3/\Gamma$ bestimmt, so kann als Beweis der Diskretheit von Γ und zur Demonstration ihrer Operation auf dem $\mathbb{H}^3$ ein Fundamentalbereich konstruiert und untersucht werden. Im folgenden werden kurz die nötigen Begriffe der klassischen Konstruktion des sog. Fordschen Fundamentalbereiches vorgestellt.

Betrachtet man die Operation von einem $S = \pm\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in PSL_2(\mathbb{C})$, $c \neq 0$, nach (0.1) auf dem $\mathbb{H}^3$, so ändert S angewandt auf die euklidische Halbsphäre und hyperbolische Ebene

$$I(S) := \left\{(z,r) \in \mathbb{H}^3 \mid |cz+d|^2 + r^2|c|^2 = 1\right\}$$

nicht die r-Koordinate. Bezugnehmend auf das hyperbolische Flächenelement $ds^2 = (dx^2+dy^2+dz^2)/r^2$ zeigt sich, daß S eine euklidische Isometrie von $I(S)$ auf $I(S^{-1})$ ist. $I(S)$ hat den Mittelpunkt $-d/c$, den Radius $1/|c|$ und heißt *isometrische Sphäre von S*.

Sei Γ nun eine torsionsfreie, diskrete Untergruppe von $PSL_2(\mathbb{C})$ mit einer nichttrivialen Untergruppe Γ_∞ parabolischer Elemente, die ∞ fixieren. Enthält $\tilde{\mathfrak{F}}$ das Äußere aller isometrischer Sphären von $\Gamma \setminus \Gamma_\infty$, so ist

$$\mathfrak{F} = \tilde{\mathfrak{F}}/\Gamma_\infty$$

ein *Fordscher Fundamentalbereich* für Γ. Fordsche Fundamentalbereiche sind hyperbolische Polyeder. Eines ist z.B. in Abbildung 2 für ein hyperbolisches Torus-Bündel gezeigt. Zur Verifizierung, daß es sich bei einem Kandidaten um einen Fordschen Fundamentalbereich handelt, läßt sich das Poincaré Lemma [45] anwenden.

Die isometrische Sphäre $I(S)$ erlaubt auch, die Operation von S auf dem $\mathbb{H}^3$ durch das Produkt euklidischer Operationen zu beschreiben. Weil sich diese Eigenschaft in den Fordschen Fundamentalbereichen niederschlägt und weil mir keine entsprechende Literaturstelle bekannt ist, wird hierauf kurz eingegangen.

Lemma 3.10 *Sei $I(S)$ die isometrische Sphäre von $S = \pm\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in PSL_2(\mathbb{C})$, $c \neq 0$. Die Operation von S auf dem $\mathbb{H}^3$ ist das Produkt der euklidischen Operationen in der angegebenen Reihenfolge:*

1. *Inversion des $\mathbb{H}^3$ an $I(S)$;*

2. *Spiegelung des $\mathbb{H}^3$ an einer euklidischen Halbebene $H(S)$ orthogonal zu $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \infty$, die den Mittelpunkt von $I(S)$ enthält;*

3. *Translation des $\mathbb{H}^3$, die $I(S)$ auf $I(S^{-1})$ verschiebt.*

$H(S)$ ist durch die Gerade $H(S) \cap \partial\mathbb{H}^3$ bestimmt, für deren Schnittwinkel ϕ mit der reellen Achse

$$\cos\phi = \frac{Im(c)}{|c|} \quad \textit{bzw.} \quad \sin\phi = \frac{Re(c)}{|c|}$$

gilt.

Beweis. Die isometrische Sphäre $I(S)$ von $S = \pm\binom{a\,b}{c\,d} \in PSL_2(\mathbb{C})$ hat den Mittelpunkt $-d/c$ und den Radius $1/|c|$. Man konjugiert S mit der Matrix

$$K = \begin{pmatrix} p & pc^{-1}d \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \ , \ p = \exp(i\frac{\varphi}{2}) \ , \ \varphi = -arg(\frac{i}{c}),$$

die zunächst die Translation des Mittelpunktes von $I(S)$ in den Punkt 0 und anschließend eine Drehung realisiert. Man findet

$$KSK^{-1} = \begin{pmatrix} tr(S) & i|c|^{-1} \\ i|c| & 0 \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

und $K(I(S)) = I(KSK^{-1})$. KSK^{-1} operiert als Möbiustransformation

$$z \longmapsto \frac{tr(S)}{i|c|} + \frac{1}{|c|^2 z}$$

auf $\mathbb{C} \cup \infty$, was dem Produkt von $z \mapsto 1/(|c|^2\bar{z})$ (Inversion am Kreis um 0 mit Radius $1/|c|$), $z \mapsto \bar{z}$ (Spiegelung an der reellen Achse) und $z \mapsto z + tr(S)/(i|c|)$ (Translation: $\partial I(S) \mapsto \partial I(S^{-1})$) entspricht. Durch Poincaré-Erweiterung sind die Punkte 1. bis 3. bewiesen.

Durch Umkehrung der mit p verbundenen Drehung findet sich die angegebene Spiegelebene $H(S)$. Die Gerade $t \cdot i/c$, $t \in \mathbb{R}$, wird mittels K auf die reelle Achse abgebildet. Sie legt $H(S)$ fest. $\square$

Die Transformation S ist folglich durch $I(S)$, $I(S^{-1})$ und $H(S)$ eindeutig bestimmt. S bildet das Äußere von $I(S)$ auf das Innere von $I(S^{-1})$ ab. Ist $P \in SL_2(\mathbb{C})$ parabolisch mit Fixpunkt ∞, dann ist $I(P^q S) = I(S)$ für alle ganzen q (aber $I((P^q S)^{-1}) \neq I(S^{-1})$) und

$$P\,(I(S)) = I(PSP^{-1}), \tag{3.62}$$

was im Hinblick auf die Translationen L und M in normalisierter Form von Bedeutung ist.

Zur Struktur eines Fordschen Fundamentalbereiches $\mathfrak{F}$ für ein hyperbolisches Torus-Bündel $\mathcal{M}(f) \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma$ mit Γ in normalisierter Form ist soweit folgendes zu sagen. Für jede isometrische Sphäre $I(S)$, $S \in \Gamma$, führen die Translationen L und M aus $\Gamma_\infty = \langle L, M\rangle$ nach (3.62) zu einem doppelt-periodischen System isometrischer Sphären im $\mathbb{H}^3$, welches die Gestalt von $\tilde{\mathfrak{F}}$ festlegt. Mehrnoch, wegen Lemma 2.28 trägt auch

$$I(T^p S T^{-p}) \ , \ p \in \mathbb{Z},$$

T nach (2.40), zu $\tilde{\mathfrak{F}}$ bei, wenn $I(S)$ beiträgt. Der Fordsche Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ wird eine Translationssymmetrie um ± 1 aufweisen .

Da sich verwandte hyperbolische Torus-Bündel nur im Stabilisator von ∞ unterscheiden (Satz 2.27), sind auch die Fordschen Fundamentalbereiche, soweit sie durch die isometrischen Sphären bestimmt werden, identisch. Ist im einen Fall $\Gamma_\infty = \langle L, M\rangle$, so ist im anderen $\Gamma_\infty = \langle L, MT\rangle$. Die Fundamentalbereiche von $\mathbb{H}^3/\Gamma_\infty$ betrachtet von ∞ und projiziert auf $\partial\mathbb{H}^3$ sind Parallelogramme, die sich durch eine Scherung unterscheiden (vgl. Abbildung 1). Diese Scherung ist damit auch der einzige Unterschied zwischen den Fordschen Fundamentalbereichen verwandter hyperbolischer Torus-Bündel, führt aber selbstverständlich zu anderen Identifizierungen der Seiten.

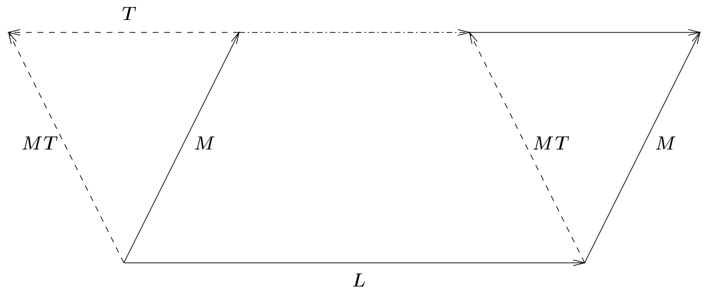


Abbildung 1: Stabilisatoren der Spitze verwandter Torus-Bündel

3.2.1 Ein Beispiel: $\mathcal{M}(f_2^2 \circ f_1)$

Zur Illustration wird hier ein einfaches Beispiel besprochen, das hyperbolische Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ zur Monodromie $f = f_2^2 \circ f_1$ mit der hyperbolischen M-Matrix $A(f) = \binom{1\,1}{2\,3}$. Es gilt

$$f(\xi, \eta) = (\eta^2 \xi \,,\, \eta^2 \xi \eta).$$

Zur Berechnung von Γ in normalisierter Form mit $\mathcal{M}(f) \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma$ wird $\mathcal{L}(f)$ bestimmt. Zunächst ermittelt man die Fixpunktgleichung $f^*(x,y,z) = (x,y,z)$ aus $\mathcal{C}(f)$ mit Lemma 2.21 oder nutzt für $x = s_\rho(\eta^2\xi)$, $y = s_\rho(\eta^2\xi\eta) = s_\rho(\eta^3\xi)$ und $z = s_\rho((\eta^2\xi)^2\eta)$ die Formel (3.46) aus:

$$\begin{aligned} x &= yz - x, && (3.63)\\ y &= (y^2-1)z - yx, && (3.64)\\ z &= (x-1)y. && (3.65) \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, daß (3.65) Folge von (3.63) und (3.64) ist, so daß nur zwei der drei Gleichungen zur Beschreibung von $\mathcal{C}(f)$ nötig sind. Aus (3.63) und (3.65) folgt

$$y^2 = \frac{2x}{x-1}, \tag{3.66}$$

womit z und y bei gegebenem x berechnet werden können.

Nimmt man die Markoff-Gleichung hinzu und setzt in sie (3.65) ein, erhält man

$$x^2 + y^2 + (x-1)^2y^2 - x(x-1)y^2 = 0,$$

was mit (3.66) auf

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

führt. Für dieses Beispiel enthält

$$\mathcal{L}(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-7}),\ y^2 = \frac{2x}{x-1},\ z = (x-1)y \right\}$$

also lediglich ein Paar komplex-konjugierter Charaktertripel (x,y,z). Jedes einzelne führt zu einer treuen und diskreten Darstellung $\rho : \pi_1(\mathcal{M}(f)) \to \Gamma < SL_2(\mathbb{C})$ mit Γ in normalisierter Form.

Die mit dem Programmpaket Mathematica 3.0 [74] erzeugte Abbildung 2 zeigt die räumliche Darstellung eines Fordschen Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}$ dieser Mannigfaltigkeit.

Die Breite des Kastens entspricht der Translation um L. Die eingezeichneten euklidischen Halbebenen senkrecht auf $\mathbb{C}$ gehören zu dem zweiten parabolischen Element M. Man gewinnt eine Vorstellung von $\tilde{\mathfrak{F}}$ durch Fortsetzung der

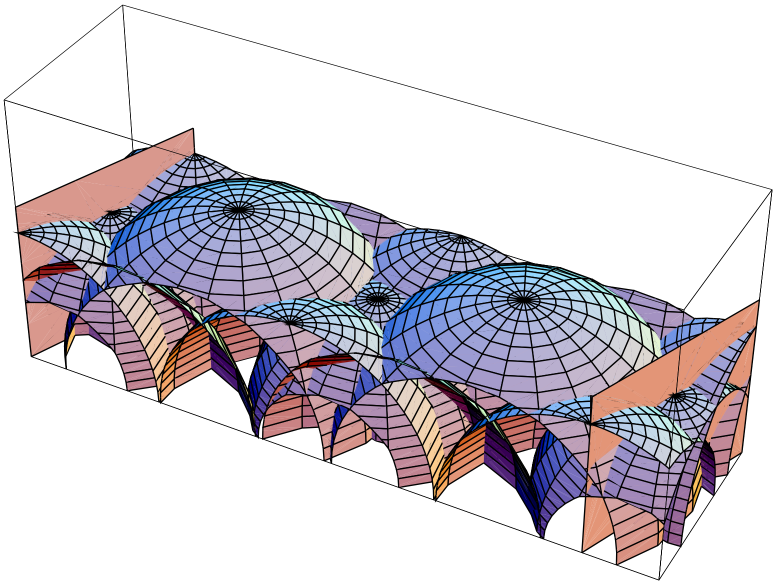


Abbildung 2: Ein Fordscher Fundamentalbereich für $\mathcal{M}(f_2^2 \circ f_1)$

gezeigten Sphärenschnitte entsprechend dem doppelt-periodischen Gitter $\mathbb{H}^3/\Gamma_\infty$, $\Gamma_\infty = \langle L, M \rangle$.

Zwei isometrische Sphären schneiden sich längs einer hyperbolischen Geraden. Alle Schnitte mit isometrischen Sphären, die zu $\tilde{\mathfrak{F}}$ beitragen, führen so auf einer Sphäre zu einem hyperbolischen Polygon. Wird dieses Polygon senkrecht auf die unterliegende komplexe Ebene projiziert, erhält man ein euklidisches Polygon. Die Abbildung 3 zeigt einen Fordschen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}'$ für $\mathcal{M}(f)$ unter dieser Projektion. $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}/\Gamma_\infty$ wurde so gewählt, daß er aus vollständigen Polygonen besteht. Der gestrichelte Kasten zeigt die Verschiebungen durch L und M und damit den Ausschnitt, der in Abbildung 2 gewählt wurde. Die Bezeichnungen geben die Gruppenelemente in Γ an, auf deren isometrischen Sphären die Polygone liegen. Die Kanten- und Eckenidentifizierungen werden in den folgenden Abschnitten behandelt. Künftig werden Fordsche Fundamentalbereiche unter dieser Projektion dargestellt.

3.3 Die Kombinatorik der Fordschen Fundamentalbereiche

Für die hyperbolischen Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m) \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma$ mit ganzen positiven m und n wurde in [3] ein Schema vorgestellt, welches die Kombinatorik der Fordschen Fundamentalbereiche $\mathfrak{F}$ erläutert. Es gibt Auskunft darüber, welche isometrischen Sphären von Elementen aus Γ zu $\mathfrak{F}$ beitragen und welche sich davon schneiden. Dieses kombinatorische Schema wird hier vereinfacht und auf Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ zu beliebigen Monodromien $f \in \mathcal{A}$ verallgemeinert.

Sei $\mathcal{M}(f) \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma$ ein hyperbolisches Torus-Bündel mit $f \in \mathcal{A}^+$ und Γ in normalisierter Form. Da $\mathcal{M}(f)$ und $\mathcal{M}(g_4^2 \circ f)$ verwandte Torus-Bündel sind, deren Fordsche Fundamentalbereiche sich nur in einer Scherung des Stabilisators von ∞ unterscheiden, ist es ausreichend, sich mit diesen f zu beschäftigen. Zunächst läßt man jedoch allgemeinere $f \in \mathcal{A}^-$ zu.

Lemma 3.11 *Sei* $f = \prod_{j=1}^k f_2^{n_j} f_1^{m_j} \in \mathcal{A}^-$. *Die Wirkung von* f *auf dem Erzeugen-*

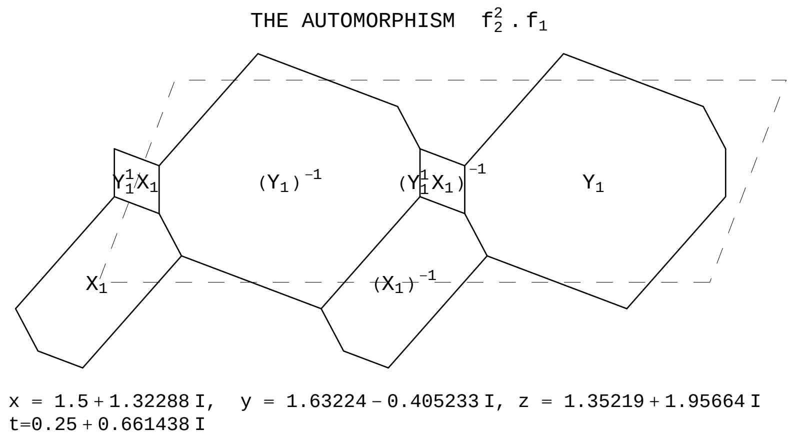


Abbildung 3: Projektion des Fordschen Fundamentalbereich von $\mathcal{M}(f_2^2 \circ f_1)$ auf $\mathbb{C}$

denpaar (ξ, η) *von* $\mathbf{F}_2$ *ist rekursiv gegeben durch*

$$f(\xi, \eta) = (\eta_k^{n_1} \xi_k \, , \, (\eta_k^{n_1} \xi_k)^{m_1} \eta_k) \, ,$$
$$\xi_{j+1} = \eta_j^{n_{k+1-j}} \xi_j, \; \eta_{j+1} = \xi_{j+1}^{m_{k+1-j}} \eta_j,$$

für $1 \leq j \leq k-1$ *sowie* $\xi_1 = \xi$ *und* $\eta_1 = \eta$.

Beweis. Man beweist mittels vollständiger Induktion über k. Für $k = 1$ folgt die Aussage aus den Definitionen von f_1 und f_2. Sei nun für ein $k > 1$ und alle $f = \prod_{j=1}^k f_2^{n_j} f_1^{m_j} \in \mathcal{A}^-$ die Rekursion erfüllt. Man betrachte $\tilde{f} = f_2^{n_{k+1}} \circ f_1^{m_{k+1}} \circ f$ mit beliebigen $m_{k+1}, n_{k+1} \in \mathbb{N}$. Dann ist nach Voraussetzung

$$\tilde{f} = (\eta_k^{n_1} \xi_k \, , \, (\eta_k^{n_1} \xi_k)^{m_1} \eta_k)$$

mit der geforderten Rekursion bis auf $\xi_1 = \eta_0^{n_{k+1}} \xi_0$ und $\eta_1 = \xi_1^{m_{k+1}} \eta_0$, $\xi_0 = \xi$, $\eta_0 = \eta$. Zum Abschluß führt man die Indexverschiebung $k \mapsto k+1$ durch. □

Dem Lemma entsprechend schreiben sich die Relationen in Γ als

$$\begin{gathered} MXM^{-1} = Y_k^{n_1} X_k \quad \text{und} \quad MYM^{-1} = (Y_k^{n_1} X_k)^{m_1} Y_k, \\ X_{j+1} = Y_j^{n_{k+1-j}} X_j \quad \text{und} \quad Y_{j+1} = X_{j+1}^{m_{k+1-j}} Y_j \end{gathered} \tag{3.67}$$

für $1 \leq j \leq k-1$ sowie $X_1 = X$ und $Y_1 = Y$. Da jedes X_j und Y_j der Rekursion seinen Ursprung in einem $f \in Aut^+(\mathbf{F}_2)$ mit $f(\lambda) = \lambda$ hat, gilt stets

$$L = Y_j^{-1} X_j^{-1} Y_j X_j \quad \text{für } 1 \leq j \leq k-1. \tag{3.68}$$

Mit diesen Bezeichnungen erklärt Abbildung 4 die beobachtete kombinatorische Struktur des Fordschen Fundamentalbereiches $\mathfrak{F}$ von $\mathcal{M}(f)$, $f \in \mathcal{A}^+ \subset \mathcal{A}^-$. Jedes Gruppenelement $S \in \Gamma$, welches in dem Schema auftritt, trägt mit seiner isometrischen Sphäre $I(S)$ zu $\mathfrak{F}$ bei. Die Schnitte aller zu $\mathfrak{F}$ beitragender isometrischer Sphären mit $I(S)$ bilden auf $I(S)$ ein hyperbolisches Polygon. Kombinatorisch sind diese Polygone im Schema Abbildung 4 dargestellt. Eine gemeinsame Kante zweier benachbarter Rechtecke im Schema steht für einen Schnitt der entsprechenden isometrischen Sphären. Eine Ecke entsteht aus dem Schnitt dreier isometrischer Sphären.

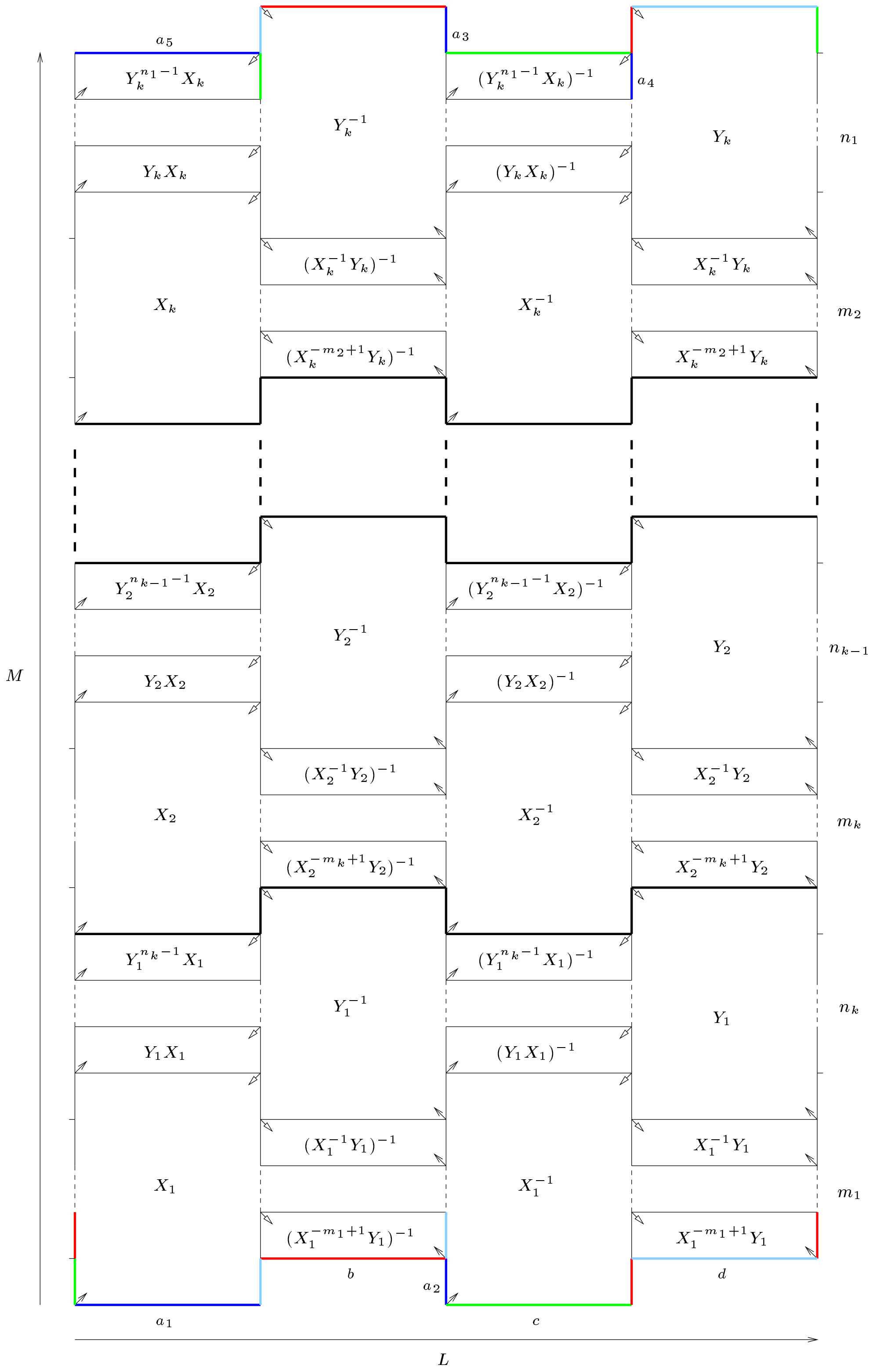


Abbildung 4: Kombinatorisches Schema für den Fordschen Fundamentalbereich von $\mathcal{M}(f_2^{n_k} \circ f_1^{m_k} \circ \cdots \circ f_2^{n_1} \circ f_1^{m_1})$

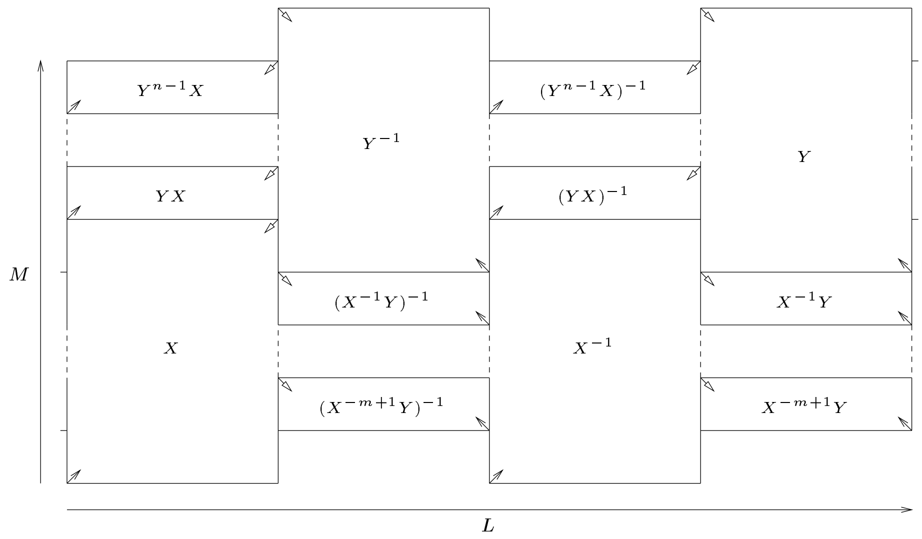


Abbildung 5: Kombinatorisches Schema für den Fordschen Fundamentalbereich von $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$ — ein Block in Abbildung 4

Das Schema ist in k-Blöcke gleicher Kombinatorik unterteilt, so viele wie es Bausteine $(f_2^{n_j} \circ f_1^{m_j})$ in f gibt. Es sind drei davon gezeigt. Ein solcher Block ist zugleich das Schema für $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$, $n, m \in \mathbb{N}$, s. Abbildung 5, welches gegenüber dem in [3] insofern vereinfacht ist, als die Unterscheidung zwischen m gerade und ungerade entfällt. Es tragen

$$\begin{array}{ll} I(X),\ I(Y), & \\ I(Y^jX) & \text{für } 1 \leq j \leq n-1, \\ I(X^{-j}Y) = I(M^{-1}(Y^nX)^{m-j}YM) & \text{für } 1 \leq j \leq m-1 \end{array}$$

und die isometrischen Sphären ihrer Inversen bei. Auf $I(X)$ und $I(X^{-1})$ befinden sich $(2m+4)$-Ecke, auf $I(Y)$ und $I(Y^{-1})$ sind die Schnittpolygone $(2n+4)$-Ecke. Auf allen anderen isometrischen Sphären finden sich Vierecke.

Das allgemeine Schema in Abbildung 4 entsteht aus Abbildung 5 durch fortgesetztes Übereinandersetzen, wobei aber *nicht* für jeden Baustein $(f_2^{n_j} \circ f_1^{m_j})$ in $f = \prod_{j=1}^{k} f_2^{n_j} f_1^{m_j}$ die elementare Kombinatorik nach Abbildung 5 zu nehmen ist. Die Exponenten werden zuvor mit einem σ aus der Permutationsgruppe von $2k$ Elementen invertiert und zyklisch vertauscht,

$$(n_k, m_k, \ldots, n_1, m_1) \stackrel{\sigma}{\longmapsto} (n_1, m_2, n_2, m_3, \ldots, n_{k-1}, m_k, n_k, m_1). \tag{3.69}$$

σ ist in der rechten Spalte von Abbildung 4 verdeutlicht.

Die Abbildung 4 zeigt die nach Seite 41 erwartete Translationssymmetrie um ± 1, die im Zusammenhang mit der um $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ erweiterten Gruppe Γ steht.

Lemma 3.12 *Sei $\rho : \mathbf{F}_2 \to \Gamma' < SL_2(\mathbb{C})$ eine Darstellung mit $\rho(\lambda) = L$. Gibt es zu $S \in \Gamma'$ ein $f \in Aut^+(\mathbf{F}_2)$ mit $f(\lambda) = \lambda$ und $S = \rho(f(\xi))$ oder $S = \rho(f(\eta))$, dann ist*

$$I(S^{-1}) = I(T^{\pm 1} S T^{\mp 1}).$$

Beweis. Entsprechend der λ-Invarianz von f gibt es ein $R \in \Gamma'$ mit entweder $R^{-1}S^{-1}RS = L$ oder $S^{-1}R^{-1}SR = L$. Nach Lemma 2.22 folgt

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ \pm tr(S) & tr(S) - a \end{pmatrix}.$$

Die Differenz der Mittelpunkte von $I(S)$ und $I(S^{-1})$ berechnet sich einfach zu ± 1. $\square$

In jeder Spalte des Schemas stehen nur Elemente $S \in \Gamma$, die offenkundig von der im Lemma geforderten Art sind, da sich Matrizen $Y^j X$ oder $X^{-j}Y$ durch Potenzen von f_1 bzw. f_2 realisieren lassen. Die Translationssymmetrie äußert sich daher in der gegenüber $I(S)$ um ± 1 verschobenen Sphäre $I(S^{-1})$. Dem entsprechend ist das kombinatorische Schema schon durch eine Hälfte, wie z.B. den ersten zwei Spalten, festgelegt.

Nach Lemma 3.10 operiert S auf $I(S)$, indem an einer Achse – einer hyperbolischen Geraden auf $I(S)$ – gespiegelt und anschließend $I(S)$ auf $I(S^{-1})$ translatiert wird. Da stets $I(S)$ und $I(S^{-1})$ zu $\mathfrak{F}$ beitragen, lassen sich aus dem Schema die Seiten-, Kanten- und Eckenidentifizierungen ablesen. Zu diesem Zweck ist die Spiegelachse durch kleine Pfeilsymbole angedeutet. Damit sind die Kanten- und Eckenidentifizierungen auf einem Paar $I(S)$, $I(S^{-1})$ bestimmt. Der Umstand, daß die Spiegelachse stets durch zwei gegenüberliegende Ecken der kombinatorischen Polygone verläuft, weißt auf eine Spiegelsymmetrie ihrer metrischen Realisierungen hin. Die ebenfalls im Schema angegebenen Identifizierungen durch L und M erlauben das Ablesen von Kanten- und Eckenzykeln.

Als Beispiel sei die in Abbildung 4 mit a bezeichnete Kantenklasse betrachtet. Man beginnt mit der Kante a_1 und wendet zunächst X_1 an, wodurch man zu a_2 gelangt. Man fährt fort mit der Anwendung von M und erreicht a_3. Setzt man das Verfahren fort bis man zu a_1 zurückgekehrt ist, so hat man mit diesem Zykel die Relation

$$M^{-1}(Y_k^{n_1-1}X_k)^{-1}Y_k^{-1}MX = id \quad \Leftrightarrow \quad MXM^{-1} = Y_k^{n_1}X_k$$

aus der Kantenklasse abgelesen. Wird dies für jede Kante durchgeführt, so ergeben sich aus dem Schema endlich viele Relationen $R_1 = R_2 = \ldots = R_s = id$. Man definiert folgerichtig eine Gruppe

$$\Gamma_K := \langle X, Y, M \mid [L, M] = R_1 = \ldots = R_s = id \rangle.$$

Ziel ist es jetzt, die Isomorphie der Gruppe Γ_K mit $\pi_1(\mathcal{M}(f)) \simeq \Gamma$ zu zeigen. Jede Kante, in deren Zykel das Element M vorkommt, heiße *äußere Kante*, die anderen werden *innere Kanten* genannt. Die äußeren Kanten sind in Abbildung 4 farbig.

Lemma 3.13 *Die Relationen in Γ_K der äußeren Kanten sind äquivalent zu den Relationen in Γ.*

Beweis. Man betrachtet das Schema in Abbildung 4 und findet für die Kantenklassen a und c

$$MXM^{-1} = Y_k^{n_1}X_k,$$

sowie für die Klassen b und d die Relation

$$MYM^{-1} = MX^m M^{-1}Y_k.$$

Dies sind exakt die Relationen der Gruppe Γ in der Präsentation (1.7). $\square$

Lemma 3.14 *Die Zykel innerer Kanten führen auf triviale Relationen (der Gestalt $AA^{-1} = id$).*

Beweis. Man nutzt die Blockstruktur des Schemas aus. Zunächst betrachtet man einen Block nach Abbildung 5 und führt einen Induktionsbeweis über m und n. Ist

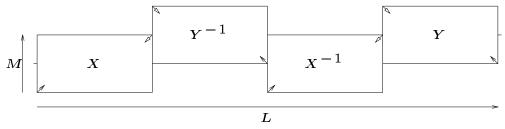


Abbildung 6: Degeneriertes kombinatorisches Schema für $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1)$

$n = m = 1$, so degeneriert das Schema zu Abbildung 6 und es gibt keine inneren Kanten.

Angenommen nun die Aussage gelte für ein bestimmtes Paar $n, m \in \mathbb{N}$. Eine innere Kante im Schema zu $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$ bleibt auch im Schema zu $\mathcal{M}(f_2^{n+1} \circ f_1^{m+1})$ innere Kante mit demselben Zykel. Deshalb müssen nur die Kantenklassen a', b', c', d' in Abbildung 7 untersucht werden. Die äußeren Kanten sind dort durch dicke Linien markiert. So findet man z.B. für die Kante b'

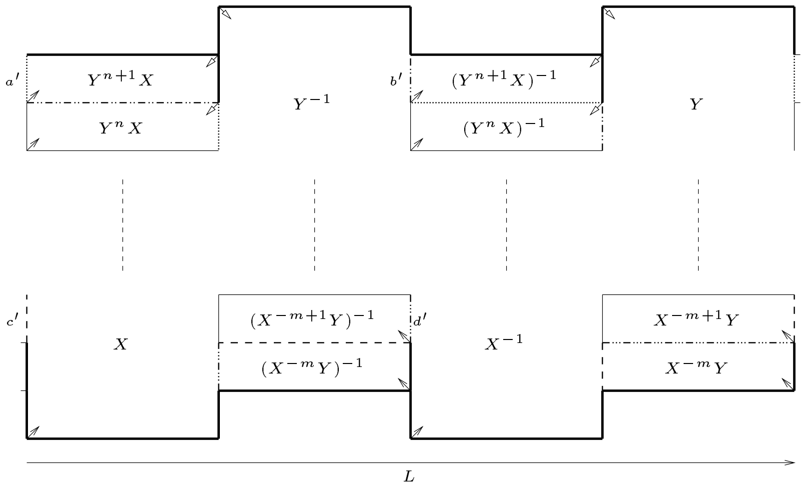


Abbildung 7: Neue innere Kanten im Induktionsschritt

$$Y(Y^nX)(Y^{n+1}X)^{-1} = id$$

und ebenso triviale Relationen für a', c', d'.

Um nun zum allgemeinen kombinatorischen Schema überzugehen, wird beobachtet, was beim Aneinandersetzten der Blöcke geschieht. Es tritt kombinatorisch stets dieselbe Situation auf, wenn der j-te und $(j+1)$-te Block zusammengesetzt werden. Vormals äußere Kanten werden zu inneren. Die Abbildung 8 zeigt für sie die neuen inneren Kantenklassen $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$. Unter Beachtung der Rekursion (3.67) ist es einfach, die trivialen Relationen aus der Abbildung 8 abzulesen. In Zykeln der Kanten $\hat{b}$ und $\hat{c}$ kommt das Element L vor, weshalb die Verwendung von (3.68) nötig ist. $\square$

Die letzten beiden Lemmata beweisen den folgenden Satz.

Satz 3.15 *Sei $\mathcal{M}(f) \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma$ ein hyperbolisches Torus-Bündel mit Γ in normalisierter Form und $f = \in \mathcal{A}^+$. Die aus dem zugehörigen kombinatorischen Schema Abbildung 4 generierte Gruppe Γ_K ist isomorph zu $\pi_1(\mathcal{M}(f)) \simeq \Gamma$.*

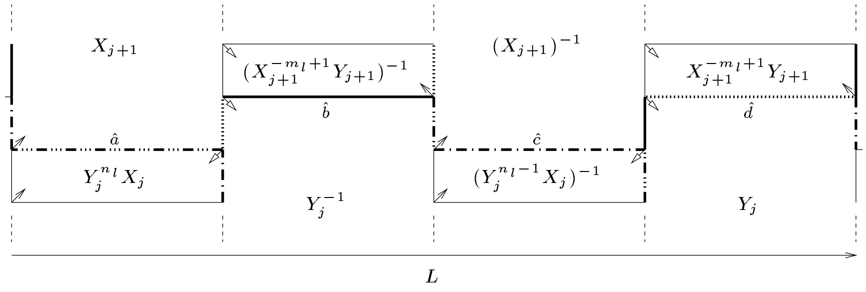


Abbildung 8: Beim Aneinandersetzen des j-ten und $(j+1)$-ten Block werden aus äußeren Kanten innere. Es ist $l = k + 1 - j$.

3.4 Die Serie $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$

Zur Ermittlung der hyperbolischen Struktur auf den einfachsten hyperbolischen Torus-Bündeln $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$, $n, m \in \mathbb{Z}$, mit der M-Matrix

$$A(f_2^n \circ f_1^m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ n & mn+1 \end{pmatrix}$$

geht man analog zum Beispiel im Abschnitt 3.2.1 vor. Es gilt

$$(f_2^n \circ f_1^m)(\xi, \eta) = (\eta^n \xi \, , \, (\eta^n \xi)^m \eta) \, . \tag{3.70}$$

Indem ganze n und m zugelassen werden, wird von der Standarddarstellung abgewichen. Der Grund ist, daß sich positive und negative Exponenten geschlossen darstellen lassen.

Die Beschreibung der Fixpunktmenge $\mathcal{C}(f_2^n \circ f_1^m)$ in [3] startet mit

$$\begin{aligned} x &= tr(Y^n X) = p_n(y)z - p_{n-1}(y)x, & (3.71)\\ y &= tr((Y^n X)^m Y) = p_m(x)\,(p_{n+1}(y)z - p_n(y)x) - p_{m-1}(x)y, & (3.72)\\ z &= tr((Y^n X)^{m+1} Y) = p_{m+1}(x)\,(p_{n+1}(y)z - p_n(y)x) - p_m(x)y. & (3.73) \end{aligned}$$

Zunächst werden nur (3.71) und (3.72) betrachtet. Erhält man aus (3.71)

$$\boldsymbol{z}\!= x\,\frac{p_{n-1}(y)+1}{p_n(y)} = \boldsymbol{x}\,\frac{\boldsymbol{\tilde{p}_{n-2}(y)}}{\boldsymbol{\tilde{p}_n(y)}}, \tag{3.74}$$

so liefert (3.74) in (3.72)

$$\begin{aligned} yp_n(y)\,(p_{m-1}(x)+1) &= xp_m(x)\left(p_{n+1}(y)p_{n-1}(y) + p_{n+1}(y) - p_n^2(y)\right)\\ &= xp_m(x)\,(p_{n+1}(y) - 1)\,. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Das Kürzen der $\mathrm{ggT}(p_k\,,\, p_{k\pm1} \mp 1)$ führt auf

$$y\tilde{p}_n(y)\tilde{p}_{m-2}(x) = x\tilde{p}_m(x)\tilde{p}_{n+2}(y), \tag{3.76}$$

was mit (3.53) schließlich in

$$\boldsymbol{\tilde{p}_{n-2}(y)\tilde{p}_{m-2}(x) = \tilde{p}_{n+2}(y)\tilde{p}_{m+2}(x)} \tag{3.77}$$

resultiert.

Nun zur Bedeutung von (3.73). Die Ausnutzung des gleichen Terms in (3.72) und (3.73) läßt

$$\boldsymbol{z = y\,\frac{\tilde{p}_{m+2}(x)}{\tilde{p}_m(x)}} \tag{3.78}$$

berechnen. Gleiches erhält man aus (3.74) und (3.76). Von den drei Fixpunktgleichungen beschreiben demnach schon zwei $\mathcal{C}(f_2^n \circ f_1^m)$ vollständig. Man kann festhalten:

> *$\mathcal{C}(f_2^n \circ f_1^m)$ wird durch die Gleichungen (3.77) und (3.74) oder (3.78) beschrieben.*

Der Übergang zu $\mathcal{L}(f_2^n \circ f_1^m)$ gelingt z.B. durch Einsetzen von (3.78) in die Markoff-Gleichung,

$$\begin{aligned} x^2\tilde{p}_m^2(x) &= y^2\left(x\tilde{p}_m(x)\tilde{p}_{m+2}(x) - \tilde{p}_m^2(x) - \tilde{p}_{m+2}^2(x)\right) \\ &= y^2\left(\tilde{p}_{m-2}(x)\tilde{p}_{m+2}(x) - \tilde{p}_m^2(x)\right) = y^2 r_m(x), \end{aligned} \tag{3.79}$$

wobei $r_m(x)$ wie in (3.54) ist. Das bedeutet

$$\boldsymbol{y^2 = x^2\,\frac{\tilde{p}_m^2(x)}{r_m(x)}.} \tag{3.80}$$

Für jedes x können zugehörige y und z nach (3.80) und (3.74) oder (3.78) ermittelt werden. Praktisch wird zur x-Bestimmung (3.77) nach ungeraden Potenzen von y umgestellt, quadriert und y^2 nach (3.80) ersetzt, womit man ein Polynom in x erzeugen kann, unter dessen Nullstellen sich der Charakter $s_\rho(\xi)$ der treuen und diskreten Darstellung $\rho : \pi_1(\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)) \to SL_2(\mathbb{C})$ befindet. Im Anhang B.1 ist dieses Verfahren mit der Prozedur SortPol für MATHEMATICA3.0 [74] automatisiert.

Der Vollständigkeit halber wird M für die hier gewählten Torus-Bündel bestimmt.

Lemma 3.16 *Für jedes hyperbolische Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m) \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma$ mit ganzen m und n und Γ in normalisierter Form ist M gegeben durch*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -yx^{-2}p_n(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Alternativ zu Lemma 2.25 läßt sich mit (3.43) für alle ganzen $j \neq 0$

$$Y^jX = \begin{pmatrix} * & * \\ * & yx^{-1}p_j(y) \end{pmatrix}$$

berechnen. Mit $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ entnimmt man für $j = n$ aus Position $(2,2)$ der Identität $MXM^{-1} = Y^nX$ die Gleichung $-tx = yx^{-1}p_n(y)$. □

3.4.1 Positive Exponenten

Die Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$ sind für alle positiven n und m nach Korollar 2.6 hyperbolisch. Die Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1)$, $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^2)$ und $\mathcal{M}(f_2^2 \circ f_1^2)$ sowie ihre verwandten Torus-Bündel wurden in Falluntersuchungen und als Beispielmaterial immer wieder bearbeitet [60], [37], [73], [57], [59], [23]. Tatsächlich sind diese Torus-Bündel in gewisser Hinsicht Ausnahmen, denn sie sind die einzigen arithmetischen Torus-Bündel [14]. Umfassender wurde die Serie in [3] behandelt.

Die Teilserie $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^m)$ läßt sich direkter beschreiben. Man findet für $\mathcal{C}(f_2 \circ f_1^m)$ die beschreibenden Gleichungen

$$y = x\,\frac{\tilde{p}_m(x)}{\tilde{p}_{m+2}(x)} \quad \text{und} \quad z = x, \tag{3.81}$$

was nach dem Schnitt mit der Markoff-Gleichung für $\mathcal{L}(f_2 \circ f_1^m)$

$$\tilde{p}_{m+2}^2(x) - r_m(x) = 0 \tag{3.82}$$

bedeutet [3]. In dieser Serie wurde eine Beobachtung gemacht. Ist wie oben beschrieben das Polynom bestimmt, in dessen Nullstellenmenge der Charakter x_0 der kanonischen Darstellung liegt, läßt sich mithilfe des Rechners der irreduzible Faktor N bestimmen mit $N(x_0) = 0$.

Beobachtung. *N besitzt stets nur echt komplexe Nullstellen, von denen x_0 die betragsmäßig größte ist. Oder auch, für alle x mit $N(x) = 0$ ist $|x| < 2$ und*

$$|2 - x_0| = \min_{N(x)=0} \{|2 - x|\}.$$

Ein Beweis dieser Beobachtung ist Helling für die Fälle $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^m)$ gelungen [30]. Für alle anderen untersuchten Torus-Bündel stellte sich diese Beobachtung als nützliche Leitlinie zur Auffindung des geometrisch korrekten Charakters x_0 heraus, ohne daß umfassende Voruntersuchungen zur Diskretheit nötig gewesen wären (vgl. Schlußbemerkungen).

Im Anhang A.1 sind einige Beispiele für Fordsche Fundamentalbereiche der Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$, n und m positiv, gezeigt. Man bemerke hierzu, daß wegen $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m) \simeq \mathcal{M}(f_2^m \circ f_1^n)$ o.B.d.A. $n \geq m$ gesetzt werden darf.

3.4.2 Negative Exponenten

Die Gleichungen (3.74), (3.77), (3.78), (3.80) beschreiben die Mengen $\mathcal{C}(f_2^n \circ f_1^m)$ und $\mathcal{L}(f_2^n \circ f_1^m)$ auch für n oder m negativ, da gemäß den Definitionen (3.53) und (3.54) für die verwandten Tschebyscheff-Polynome $\tilde{p}_n$ und für das Polynom r_n gerade $\tilde{p}_{-n} = \tilde{p}_n$ bzw. $r_{-n} = r_n$ für jedes ganze n gilt.

Es ist ausreichend, die Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ mit $f \in \mathcal{A}_{n,-m}$ zu betrachten, wobei

$$\mathcal{A}_{n,-m} := \left\{ f \in Aut(\mathbf{F}_2) \mid f = f_2^n \circ f_1^{-m},\ n, m \in \mathbb{N},\ m \geq n \right\}$$

ist, weil Vertauschen der Exponenten oder ihrer Vorzeichen zu homöomorphen Mannigfaltigkeiten führt; d.h. weil man u.a.

$$\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^{-m}) \simeq \mathcal{M}(f_2^{-m} \circ f_1^n) \simeq \mathcal{M}(f_2^m \circ f_1^{-n}) \simeq \mathcal{M}(f_2^{-n} \circ f_1^m)$$

hat. Anders als für positive Exponenten sind nicht alle Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$, $f \in \mathcal{A}_{n,-m}$ hyperbolisch. Nach dem Kriterium Korollar 2.6 ist $|tr(A(f_2^n \circ f_1^{-m}))| = |mn - 2| > 2$ zu verlangen. Daher ergeben sich für $f \in \mathcal{A}_{n,-m}$ die hyperbolischen Fälle:

Fall 1, $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^{-m})$, $m \geq 5$,

Fall 2, $\mathcal{M}(f_2^2 \circ f_1^{-m})$, $m \geq 3$,

Fall 3, $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^{-m})$, $m \geq n \geq 3$.

Für diese hyperbolischen Fälle sind zwar die Mengen $\mathcal{L}(f)$, $f \in \mathcal{A}_{n,-m}$ bereits beschrieben und damit das Charaktertripel (x, y, z) der kanonischen Darstellung bestimmbar, dennoch muß zur Angabe eines Fordschen Fundamentalbereichs ein Standardrepräsentant aus $\mathcal{A}^+$ in der schwachen Konjugationsklasse von f nach Korollar 2.12 ermittelt werden, weil sich das kombinatorische Schema des Fordschen Fundamentalbereichs Abbildung 4 nur auf diese Standardmonodromien bezieht.

Fall 1. *Für ein beliebiges $m \geq 5$ sind die hyperbolischen Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^{-m})$ und $\mathcal{M}(g_4^2 \circ f_2 \circ f_1^{m-4})$ homöomorph.*

Beweis. Sei $m \geq 5$. Die M-Matrizen

$A_1 = A(f_2 \circ f_1^{-m}) = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ und $A_2 = A(g_4^2 \circ f_2 \circ f_1^{m-4}) = -\begin{pmatrix} 1 & m-4 \\ 1 & m-3 \end{pmatrix}$

sind hyperbolisch, besitzen dieselbe Spur und die Fixpunkte

$$p_{A_1} = \frac{m}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2-4m} \quad \text{bzw.} \quad p_{A_2} = \frac{m-4}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2-4m}.$$

Da also $p_{A_2} = p_{A_1} - 2$ gilt, haben die regelmäßigen Kettenbruchentwicklungen von p_{A_1} und p_{A_2} bis auf Invertierung und zyklische Vertauschung eine identische Periode. Nach Korollar 2.12 sind $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^{-m})$ und $\mathcal{M}(g_4^2 \circ f_2 \circ f_1^{m-4})$ homöomorph.
□

Fall 2. *Für ein beliebiges $m \geq 3$ sind die hyperbolischen Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_2^2 \circ f_1^{-m})$ und $\mathcal{M}(g_4^2 \circ f_2^2 \circ f_1^{m-2})$ homöomorph.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu Fall 1. □

Die Torus-Bündel der Fälle 1 und 2 sind damit verwandt zu solchen, die aus dem vorigen Abschnitt bekannt sind.

Fall 3. *Für beliebige $m \geq n \geq 3$ sind die hyperbolischen Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^{-m})$ und $\mathcal{M}(g_4^2 \circ f_2 \circ f_1^{m-2} \circ f_2 \circ f_1^{n-2})$ homöomorph. Setzt man $h = g_2 \circ f_1^{n-1}$, ist darüber hinaus*

$$h^{-1} \circ f_2^n \circ f_1^{-m} \circ h = g_4^2 \circ f_2 \circ f_1^{m-2} \circ f_2 \circ f_1^{n-2} \pmod{Inn(\mathbf{F}_2)}.$$

Beweis. Man verwendet die Technik des Abschnittes über halbregelmäßige Kettenbrüche. Die Kettenbruchdarstellung eines Fixpunktes p_{fix} von $A(f_2^n \circ f_1^{-m})$, $m \geq n \geq 3$, der Art

$$p_{fix} = kb(f_2^n \circ f_1^{-m}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} - \cdots$$

ist ein halbregelmäßiger Kettenbruch. Man wandelt ihn in einen regelmäßigen um,

$$p_{fix} \overset{t_1}{\to} \frac{1}{n-1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{m-2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{n-2} + \cdots = [0, n-1, \overline{1, m-2, 1, n-2}].$$

Außerdem ist $tr(A(f_2^n \circ f_1^{-m})) = 2 - mn = tr(A(g_4^2 \circ f_2 \circ f_1^{m-2} \circ f_2 \circ f_1^{n-2}))$. Nach Satz 2.11 ist $A(f_2^n \circ f_1^{-m})$ schwach konjugiert zu $A(g_4^2 \circ f_2 \circ f_1^{m-2} \circ f_2 \circ f_1^{n-2})$. Der Rest folgt aus Korollar 2.12. □

Um Γ in normalisierter Form mit $\mathbb{H}^3/\Gamma \simeq \mathcal{M}(f_2 \circ f_1^{m-2} \circ f_2 \circ f_1^{n-2})$[7] und einen Fordschen Fundamentalbereich entsprechend Abbildung 4 anzugeben, wird Lemma 2.20 angewandt. Ist $(x, y, z) \in \mathcal{L}(f_2^n \circ f_1^{-m})$, $m \geq n \geq 3$, das gesuchte Charaktertripel der kanonischen Darstellung, so ist $(g_2 \circ f_1^{n-1})^*(x, y, z)$ das zugehörige Tripel, welches zu Γ führt. Hierbei ist $g_2 \circ f_1^{n-1} : (\xi, \eta) \mapsto (\eta, \eta^{n-1}\xi)$ und

$$(g_2 \circ f_1^{n-1})^*(x, y, z) = (y,\, p_{n-1}(y)z - p_{n-2}(y)x,\, p_n(y)z - p_{n-1}(y)x)\,. \tag{3.83}$$

Auf diese Weise sind die Fordschen Fundamentalbereiche dieser Serie im Anhang A.2 erzeugt worden. Es sei bemerkt, daß für $m = n \geq 3$ $\mathcal{M}(f_2^m \circ f_1^{-m})$ offenbar verwandt ist mit $\mathcal{M}((f_2 \circ f_1^{m-2})^2)$, einer zweiblättrigen Überlagerung von $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^{m-2})$.

[7]Der Einfachheit halber werden hier die zu $\mathcal{M}(g_4^2 \circ f_2 \circ f_1^{m-2} \circ f_2 \circ f_1^{n-2})$ verwandten Torus-Bündel betrachtet.

3.4.3 Der Limes $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$ für $m \to \infty$

Die Fordschen Fundamentalbereiche der hyperbolischen Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$ im Anhang legen nahe, daß für $m \to \infty$ oder auch $n \to \infty$ eine zusätzliche Spitze entsteht. Dies wird hier kurz für positive n und m betrachtet.

Hat man für ein festes n auf $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$ die hyperbolische Struktur $\mathbb{H}^3/\Gamma_{(m)}$, gibt es dann ein $\Gamma_{(\infty)} := \lim_{m\to\infty} \Gamma_{(m)}$ in der üblichen Topologie auf $SL_2(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^4$? In der Serie $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^m)$ konnte Helling [30] für den geometrisch korrekten Charakter x_0 beweisen, daß

$$x_0 \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} x_\infty = 2 \tag{3.84}$$

konvergiert. Nach (3.81) folgt hieraus für den zugehörigen Charakter $z \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} z_\infty = x_\infty = 2$. $y \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} y_\infty$ ist mit (3.81) nicht zu bestimmen, weil die Betrachtung von $\tilde{p}_m(x)$ für $m \to \infty$ einen Grenzprozeß im Argument und im Index des Tschebyscheff-Polynoms bedeutet. Die Markoff-Gleichung liefert hingegen

$$y_\infty^2 - 4y_\infty + 8 = 0,$$

womit $y_\infty = 2 \pm 2i$ ist. Den resultierenden Fordschen Fundamentalbereich zeigt Abbildung 12 im Anhang A.1 mit der zusätzlichen Spitze z.B. bei $1/2$. Er wurde nicht zusammenhängend angegeben, um den direkten Vergleich mit den Fordschen Fundamentalbereichen der Serie $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^m)$ zu verdeutlichen. Aus den Kantenzykeln des Fordschen Fundamentalbereiches liest man

$$\Gamma_\infty = \langle X, M \mid M^{-1}XMX^{-1}M^{-1}X^{-1}MXMX^{-1}M^{-1}XMXM^{-1}X^{-1} = id\rangle$$

ab. Man erhält dasselbe Ergebnis für die verwandte Serie $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^{-m})$, d.h. wenn man M durch MT ersetzt.

Es ist bekannt, daß die Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^m)$ homöomorph zu Komplementen des Whitehead-Links sind, wobei auf einer Komponente eine Dehn-Chirurgie ausgeführt wurde [32]. $\mathbb{H}^3/\Gamma_\infty$ läßt sich nun mit dem Komplement des Whitehead-Links selbst identifizieren. SnapPea [72] liefert für das Whitehead-Link Komplement die Fundamentalgruppe

$$\langle a, b \mid a^2b^{-3}ababa^{-2}b^3a^{-1}b^{-1} = id\rangle,$$

wobei

$$a = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ -3i & i-1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 1-i \end{pmatrix}$$

sind. Wählt man

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(1-i) \\ -1-i & 0 \end{pmatrix},$$

so sind die Gruppen in $PSL_2(\mathbb{C})$ konjugiert, denn es sind $Ka^{-1}bK^{-1} = -M$, $Kb^{-2}aK^{-1} = -X^{-1}$ und $Ka^{-1}ba^{-1}bab^{-3}abK^{-1} = L$, sowie $b = K^{-1}M^{-1}XK$ und $a = -K^{-1}M^{-1}XM^{-1}K$.

Für die Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$, $n \neq 1$, ist (3.84) nur eine Beobachtung. Unter der Annahme, daß (3.84) auch hier gilt, folgt aus (3.74) $z_\infty = 2\tilde{p}_{n-2}(y_\infty)/\tilde{p}_n(y_\infty)$, was in die Markoff-Gleichung eingesetzt die Bestimmung von y_∞ erlaubt,

$$\begin{aligned} 0 &= y_\infty^2\tilde{p}_n^2 + 4\left(\tilde{p}_n^2 + \tilde{p}_{n-2}^2 - y_\infty\tilde{p}_n\tilde{p}_{n-2}\right) = y_\infty^2\tilde{p}_n^2 + 4\left(\tilde{p}_n^2 - \tilde{p}_{n+2}\tilde{p}_{n-2}\right) \\ &= y_\infty^2\tilde{p}_n^2 - 4r_n(y_\infty). \end{aligned} \tag{3.85}$$

Hierbei ist $\tilde{p}_n = \tilde{p}_n(y_\infty)$ gesetzt und (3.2) verwendet worden.

Eine weitergehende Folge bezieht sich auf eine Betrachtung von $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^{-m})$ für $m, n \to \infty$ bzw. $\mathcal{M}(f_2^m \circ f_1^{-m})$ für $m \to \infty$. Nach den Ergebnissen des Abschnittes 3.4.2 Fall 3 ist für $m \geq 3$

$$\mathcal{M}(f_2^m \circ f_1^{-m}) \simeq \mathcal{M}(g_4^2 \circ (f_2 \circ f_1^{m-2})^2).$$

Man erhält demnach für $\mathcal{M}(f_2^m \circ f_1^{-m})_{m\to\infty}$ eine zweifache Überlagerung des Whitehead-Link Komplementes, wie das die Fordschen Fundamentalbereiche im Anhang auch nahelegen.

3.5 Hyperbolische Torus-Bündel zu komplexeren Monodromien

Nennt man einen Automorphismus $f_2^n \circ f_1^m$ einen Elementarbaustein, so werden in diesem Abschnitt Torus-Bündel behandelt, deren Monodromien durch Hintereinanderschaltung mehrerer Elementarbausteine entstehen.

Zu Beginn steht die Bestimmung der Fixpunktmenge $\mathcal{C}(f)$ für ein beliebiges $f = \prod_{j=1}^k f_2^{n_j} \circ f_1^{m_j} \in \mathcal{A}^-$, zu der man auf Lemma 3.11 und insbesondere (3.67) zurückgreift. Eine direkte Umformung von (3.67) in Spurgleichungen unter Verwendung von (3.46) liefert eine rekursive Beschreibung von $\mathcal{C}(f)$. Hierbei stehen Kleinbuchstaben für die Spuren der mit Großbuchstaben bezeichneten Matrizen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= tr(Y_k^{n_1} X_k) \\
&= \boldsymbol{p_{n_1}(y_k)\, z_k - p_{n_1-1}(y_k)\, x_k}, && (3.86)\\
\boldsymbol{y} &= tr((MXM^{-1})^{m_1} Y_k) \\
&= \boldsymbol{p_{m_1}(x)\, tr(Y_k^{n_1+1} X_k) - p_{m_1-1}(x)\, y_k}, && (3.87)\\
\boldsymbol{z} &= tr((Y_k^{n_1} X_k)^{m_1+1} Y_k) \\
&= \boldsymbol{p_{m_1+1}(x)\, tr(Y_k^{n_1+1} X_k) - p_{m_1}(x)\, y_k}, && (3.88)
\end{aligned}$$

mit rekursiv bestimmten

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_{j+1}} &= tr(Y_j^{n_{k+1-j}} X_j) \\
&= \boldsymbol{p_{n_{k+1-j}}(y_j)\, z_j - p_{n_{k+1-j}-1}(y_j)\, x_j}, && (3.89)\\
\boldsymbol{y_{j+1}} &= tr(X_{j+1}^{m_{k+1-j}} Y_j) \\
&= \boldsymbol{p_{m_{k+1-j}}(x_{j+1})\, tr(Y_j^{n_{k+1-j}+1} X_j) - p_{m_{k+1-j}-1}(x_{j+1}) y_j}, && (3.90)\\
\boldsymbol{z_{j+1}} &= tr(X_{j+1}^{m_{k+1-j}+1} Y_j) \\
&= \boldsymbol{p_{m_{k+1-j}+1}(x_{j+1})\, tr(Y_j^{n_{k+1-j}+1} X_j) - p_{m_{k+1-j}}(x_{j+1})\, y_j} && (3.91)
\end{aligned}$$

für $1 \leq j \leq k-1$ und $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$. Außerdem ist in dieser Rekursion

$$\boldsymbol{tr(Y_j^{n_{k+1-j}+1} X_j) = p_{n_{k+1-j}+1}(y_j)\, z_j - p_{n_{k+1-j}}(y_j)\, x_j} \tag{3.92}$$

für $1 \leq j \leq k$. Es ist möglich, (3.87) und (3.88) zu einer einfacheren Gleichung zu kombinieren. Aus (3.87) folgt nämlich

$$tr(Y_k^{n_1+1} X_k) = \frac{y + p_{m_1-1}(x)\, y_k}{p_{m_1}(x)},$$

was in (3.88) mit (3.47) auf

$$\boldsymbol{z = \frac{y\, p_{m_1+1}(x) - y_k}{p_{m_1}(x)}} \tag{3.93}$$

führt.

Die explizite Auflösung der Gleichungen (3.86), (3.87), (3.88), (3.93) mit der verschachtelten Rekursion wird im allgemeinen dem Computer überlassen. Auf die hierbei verwendeten Routinen wird später eingegangen.

3.5.1 Die Serie $\mathcal{M}((f_2 \circ f_1)^s \circ f_2 \circ f_1^m)$

Seien $s > 0$ und $m \neq 0$. Untersucht werden die Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ mit $f = (f_2 \circ f_1)^s \circ f_2 \circ f_1^m$. Da die meisten Exponenten der Automorphismen f_1 und f_2 auf Eins gesetzt sind, vereinfachen sich die Gleichungen (3.86), (3.87), (3.88) zur Beschreibung von $\mathcal{C}(f)$ deutlich. Man findet

$$\begin{aligned} x &= z_{s+1}, && (3.94)\\ y &= p_m(x)\,(y_{s+1}\,x - x_{s+1}) - p_{m-1}(x)\,y_{s+1} \\ &= y_{s+1}\,p_{m+1}(x) - x_{s+1}\,p_m(x), && (3.95)\\ z &= p_{m+1}(x)\,(y_{s+1}\,x - x_{s+1}) - p_m(x)\,y_{s+1} \\ &= y_{s+1}\,p_{m+2}(x) - x_{s+1}\,p_{m+1}(x) && (3.96)\end{aligned}$$

mit der Rekursion

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= z_i && (3.97)\\ y_{i+1} &= y_i\,z_i - x_i && (3.98)\\ z_{i+1} &= x_{i+1}\,y_{i+1} - y_i && (3.99)\end{aligned}$$

für $1 \leq i \leq s$ und $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$.

Der Term $x - z_{s+1}$ aus (3.94) besitzt einen einfachen Faktor, der auf die gesuchte treue, diskrete Darstellung führt. Dazu wird folgendes Lemma benötigt, welches eine Eigenschaft der Rekursionsgleichungen (3.97), (3.98), (3.99) herausstellt.

Lemma 3.17 *Seien für ein $s > 0$ die Polynome x_{j+1}, y_{j+1}, z_{j+1} für $1 \leq j \leq s$ rekursiv wie in (3.97), (3.98), (3.99) definiert. Mit dem Ideal*

$$\mathcal{I}_k := \begin{cases} (z_{k+1} - z_k)\ , \textit{falls es ein } k \in \mathbb{N} \textit{ gibt mit } s = 2k, \\ (y_{k+2} - y_{k+1}), \textit{falls es ein } k \in \mathbb{N} \textit{ gibt mit } s = 2k+1 \end{cases}$$

gelten in dem Restklassenring $\mathbb{Z}[x,y,z]/\mathcal{I}_k$ die folgenden Kongruenzen

$$\left.\begin{aligned} y_{k+j+1} &\equiv y_{k-j+1} \\ z_{k+j+1} &\equiv x_{k-j+1} \end{aligned}\right\} \bmod \mathcal{I}_k \quad \textit{für } 0 \leq j \leq k, \textit{ falls } s = 2k, \tag{3.100}$$

$$\left.\begin{aligned} y_{k+j+1} &\equiv y_{k-j+2} \\ z_{k+j+1} &\equiv x_{k-j+2} \end{aligned}\right\} \bmod \mathcal{I}_k \quad \textit{für } 0 \leq j \leq k+1, \textit{ falls } s = 2k+1. \tag{3.101}$$

Beweis. Man beweist mittels vollständiger Induktion über j. Sei zunächst ein beliebiges $s = 2k > 0$ gegeben. Für $j = 0$ gelten die Aussagen u.a. wegen (3.97) $x_{k+1} = z_k \equiv z_{k+1} \bmod \mathcal{I}_k$ unmittelbar. Angenommen die geforderten Kongruenzen gelten bis zu einem $j < k$, so ist nach (3.98)

$$y_{k+j+2} = y_{k+j+1}\,z_{k+j+1} - x_{k+j+1} \equiv y_{k-j+1}\,x_{k-j+1} - z_{k-j+1} \bmod \mathcal{I}_k.$$

Mit (3.99) schließt man nun $y_{k+j+2} \equiv y_{k-j} \bmod \mathcal{I}_k$. Außerdem ist mit (3.97) und (3.99)

$$z_{k+j+2} = z_{k+j+1}\,y_{k+j+2} - y_{k+j+1} \equiv x_{k-j+1}\,y_{k-j} - y_{k-j+1} \bmod \mathcal{I}_k,$$

woraus wegen (3.98) gerade $z_{k+j+2} \equiv x_{k-j} \bmod \mathcal{I}_k$ folgt.

Ist hingegen $s = 2k+1 > 0$ gegeben, so schließt man analog. Für $j = 0$ gibt es nichts zu beweisen. Gelten die Aussagen bis zu einem $j < k+1$, folgert man

$$\begin{aligned} y_{k+j+2} &= y_{k+j+1}\,z_{k+j+1} - x_{k+j+1} \equiv y_{k-j+2}\,x_{k-j+2} - z_{k-j+2} \bmod \mathcal{I}_k \\ &\equiv y_{k-j+1} \bmod \mathcal{I}_k. \end{aligned}$$

Hiermit ist auch

$$\begin{aligned} z_{k+j+2} &= x_{k+j+2}\, y_{k+j+2} - y_{k+j+1} \equiv z_{k-j+1}\, y_{k-j+1} - y_{k-j+2} \bmod \mathcal{I}_k \\ &\equiv x_{k-j+1} \bmod \mathcal{I}_k. \end{aligned}$$

□

Im Hinblick auf (3.94) ist folgende Schlußfolgerung bedeutsam.

Korollar 3.18 *Für $s = 2k$ ist $z_{k+1} - z_k$ Teiler von $x - z_{s+1}$; für $s = 2k + 1$ wird $x - z_{s+1}$ von $y_{k+2} - y_{k+1}$ geteilt.*

Beweis. Setze in Lemma 3.17 $j = k$, wenn $s = 2k$, bzw. $j = k+1$, wenn $s = 2k+1$. □

An den Ergebnissen beobachtet man, daß die im Korollar 3.18 genannten Teiler von $x - z_{s+1}$ auf die gesuchte hyperbolische Struktur führen. Sei deshalb nun

$$\begin{matrix} \boldsymbol{z_{k+1} = z_k} \quad, \text{falls } \boldsymbol{s = 2k}, \\ \boldsymbol{y_{k+2} = y_{k+1}}, \text{falls } \boldsymbol{s = 2k+1} \end{matrix} \tag{3.102}$$

angenommen. Die Kongruenzen des Lemmas 3.17 sind damit Identitäten. Insbesondere folgt aus (3.100) für $j = k$ bzw. (3.101) für $j = k + 1$ die Gleichung

$$y_{s+1} = y, \tag{3.103}$$

sowie mit (3.97) aus (3.100) für $j = k - 1$ bzw. aus (3.101) für $j = k$ die Beziehung

$$x_{s+1} = z. \tag{3.104}$$

Setzt man (3.103) und (3.104) in (3.95) ein, erhält man

$$y = y\, p_{m+1}(x) - z\, p_m(x) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{z = y}\frac{p_{m+1}(x)+1}{p_m(x)} \boldsymbol{= y \frac{\tilde{p}_{m+2}(x)}{\tilde{p}_m(x)}}; \tag{3.105}$$

in (3.96) eingesetzt folgt $z(p_{m+1}(x) + 1) = y\, p_{m+2}(x)$, was mit Lemma 3.9 (iii) ebenfalls zu (3.105) führt. Von den drei Gleichungen (3.94), (3.95), (3.96) zur Beschreibung von $\mathcal{C}(f)$ ist damit eine, wie in den anderen bereits betrachteten Serien auch, redundant.

(3.105) ist mit der Gleichung (3.78) der Serie $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$ identisch. Das Einsetzen von (3.105) in die Markoff-Gleichung zur Beschreibung von $\mathcal{L}(f)$ ergibt wie dort eine quadratische Relation für y vgl. (3.80), nämlich

$$\boldsymbol{y^2 = x^2 \frac{\tilde{p}_m^2(x)}{r_m(x)}}. \tag{3.106}$$

Zusammengefaßt wird $\mathcal{L}(f)$ in dieser Serie von Torus-Bündeln durch die Gleichungen (3.102), (3.105) und (3.106) beschrieben.

Konkret setzt man für ein bestimmtes s analog der Serie $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$ (3.105) in (3.102) ein und formt so um, daß (3.106) eingesetzt werden kann. Auf diese Weise erhält man ein Polynom in der Variablen x, unter dessen Nullstellen der gesuchte Charakter der kanonischen Darstellung zu finden ist. Diese Rechnungen können dem Computer überlassen werden, wie das z.B. mit dem Befehl FinPol s. Anhang B.1 geschehen ist.

Beispiele für positives m. Der Fall $s = 1$ ist schon im Abschnitt 3.4.2 behandelt worden. Dort wurde im Fall 3

$$\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^{-(m+2)}) \simeq \mathcal{M}(g_4^2 \circ f_2 \circ f_1^m \circ f_2 \circ f_1) \simeq \mathcal{M}(g_4^2 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^m)$$

festgestellt.

Wird $s = 2$ behandelt, nimmt (3.102) die Form

$$z_2 - z = yz^2 - (x+1)z - y = 0 \tag{3.107}$$

an. (3.105) hierin eingesetzt liefert

$$y^2 \tilde{p}_{m+2}^2 - (x+1)\tilde{p}_m \tilde{p}_{m+2} - \tilde{p}_m^2 = 0, \tag{3.108}$$

wobei das Argument in $\tilde{p}_n = \tilde{p}_n(x)$ unterdrückt wird. Schließlich ergibt sich aus (3.108) mit (3.106) folgendes Polynom in der Variablen x

$$x^2 \tilde{p}_{m+2}^2 \tilde{p}_m - (x+1)\tilde{p}_{m+2} r_m - \tilde{p}_m r_m = 0, \tag{3.109}$$

welches mit einigen Umformungen auf die Gestalt

$$x \tilde{p}_{m+2}(\tilde{p}_{m+2}^2 + \tilde{p}_m^2) - r_m(\tilde{p}_{m+2} + \tilde{p}_m) = 0 \tag{3.110}$$

gebracht werden kann. Laut MATHEMATICA 3.0 [74] sind diese Polynome bis $m = 25$ bis auf gelegentliche Faktoren x oder x^2 irreduzibel. Beispiele ausgewählter Fordscher Fundamentalbereiche finden sich im Anhang A.3.

Für größere Exponenten s und m läßt sich das Polynom in der Variablen x nicht mehr so kurz notieren. Man nutzt zweckmäßig die Routine FinPol s. Anhang B.1. Mit ihr sind weitere Beispiele Fordscher Fundamentalbereiche im Anhang A.3 erzeugt worden.

Bei diesen Beispielen fällt auf, daß der Grad des Polynoms zur x-Bestimmung und seine Koeffizienten mit wachsendem s deutlich steigen. Im Falle der Monodromie $(f_2 \circ f_1)^6 \circ f_2 \circ f_1^2$ ist der Grad dieses Polynoms z.B. 54 in der Variablen x^2 mit Koeffizienten in der Größenordnung 10^{18}. In diesem Fall konnten noch numerisch Nullstellen gefunden werden. Für größere s- und m-Werte waren zwar noch die Polynome, aber nicht mehr ihre Nullstellen zu bestimmen. Für $s = 8$ und $m = 2$ ist der Grad z.B. 143. Die numerischen Probleme dürften durch die Lage der Nullstellen verschärft werden. Wie Abbildung 9 für $m = 2$ und $0 \leq s \leq 6$ zeigt, häufen sich die Nullstellen in einem kleinen Gebiet der komplexen Ebene.

Beispiele für negatives m. Sei m nun negativ, d.h. anders gesagt, man betrachtet die Torus-Bündel $\mathcal{M}((f_2 \circ f_1)^s \circ f_2 \circ f_1^{-m})$ für positive s und m. Es treten verschiedene Fälle auf, von denen der Fall $s \geq 2$ und $m \geq 2$ auf neue hyperbolische Torus-Bündel führt, wie man an dem Standardrepräsentanten in der schwachen Konjugationsklasse der Monodromie nach Korollar 2.12 sieht:

Für beliebige $s \geq 2$, $m \geq 2$ ist das hyperbolische Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$, $f = (f_2 \circ f_1)^s \circ f_2 \circ f_1^{-m}$, homöomorph zum Torus-Bündel $\mathcal{M}(g)$, $g = g_4^2 \circ (f_2 \circ f_1)^{s-2} \circ f_2 \circ f_1^2 \circ f_2^{m-2} \circ f_1^2$. Setzt man $h = f_2 \circ f_1$, so gilt $h^{-1} \circ f \circ h = g \pmod{Inn(\mathbf{F}_2)}$.

Beweis. Für das betrachtete f ist

$$kb(f) = \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}}_{\times s} + \frac{1}{1} + \frac{-1}{m} + \frac{-1}{1} + \frac{1}{1} + \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}}_{\times(s-1)} + \cdots$$

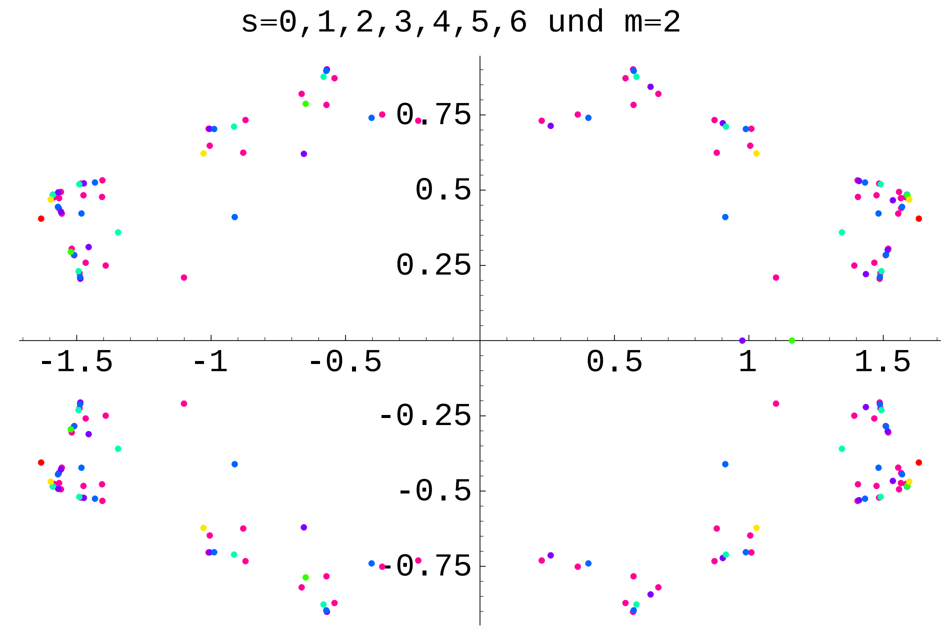


Abbildung 9: Nullstellen der Polynome zur x-Bestimmung der Torus-Bündel $\mathcal{M}((f_2\circ f_1)^s\circ f_2\circ f_1^2)$ für $0\le s\le 6$
($s=0$: rot, $s=1$: gelb, $s=2$: grün, $s=3$: türkis, $s=4$: blau, $s=5$: violett, $s=6$: pink)

e-halbregelmäßig. $\mathcal{M}(f)$ ist wegen Lemma 2.16 daher hyperbolisch. Die Umwandlung in einen regelmäßigen Kettenbruch mithilfe der im Abschnitt 2.4 definierten Transformation $\mathfrak{t}$ ergibt

$$\begin{aligned} kb(f) &\overset{t_1}{\to} \underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}_{\times s}+\frac{1}{0}+\frac{1}{1}+\frac{1}{m-2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{0}+\frac{1}{1}+\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}_{\times(s-1)}+\cdots \\ &\overset{t_2}{\to} \underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}_{\times(s-1)}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m-2}+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}}_{\times(s-2)}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{m-2}+\cdots \\ &= [0,1,1,\overline{\underbrace{1,1}_{\times(s-2)},1,2,m-2,2}]. \end{aligned}$$

Zudem überzeugt man sich leicht von $tr(A(f))=tr(A(g))$, z.B. indem man mit den Bezeichnungen $A_1=A(f_2\circ f_1)$, $A_2=A(f_2\circ f_1^2\circ f_2^{m-2}\circ f_1^2)$, $A_3=A(f_2\circ f_1^{-m})$ und Formel (3.46)

$$\begin{aligned} tr(A(g)) &= -tr(A_1^{s-2}A_2)=-p_{s-2}(3)\,tr(A_1A_2)+p_{s-3}(3)\,tr(A_2) \\ &= p_s(3)\,tr(A_1A_3)-p_{s-1}(3)\,tr(A_3)=tr(A_1^sA_3) \\ &= tr(A(f)) \qquad (3.111) \end{aligned}$$

berechnet. Man kann nun das Korollar 2.12 anwenden. □

Das Lemma 2.20 liefert für ein Charaktertripel $(x,y,z)\in\mathcal{L}(f)$, wie es nach (3.102), (3.105) und (3.106) bestimmt werden kann, gerade

$$(f_2\circ f_1)^*\,(x,y,z)=\big(z\,,\,yz-x\,,\,yz^2-xz-y\big)$$

<table>
<tr><th>$s\backslash m$</th><th>1</th><th>2</th><th>> 2</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">nicht hyperbolisch</td><td>$\mathcal{M}(g_4^2 \circ f_2 \circ f_1^{m-2})$</td></tr>
<tr><td>≥ 2</td><td>nicht unter-sucht</td><td colspan="2">$\mathcal{M}(g_4^2 \circ (f_2 \circ f_1)^{s-2} \circ f_2 \circ f_1^2 \circ f_2^{m-2} \circ f_1^2)$</td></tr>
</table>

Tabelle 1: Zu $\mathcal{M}((f_2 \circ f_1)^s \circ f_2 \circ f_1^{-m})$ homöomorphe hyperbolische Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ mit $f \in \mathcal{A}$

als zugehöriges Tripel in $\mathcal{L}(g)$. Einige Beispiele Fordscher Fundamentalbereiche für $\mathcal{M}(g)$ nach Schema Abbildung 4 finden sich in Anhang A.4. Man bemerke für $s \geq 2$ und $m = 2$, daß $\mathcal{M}(f) \simeq \mathcal{M}(g_4^2 \circ (f_2 \circ f_1)^{s-2} \circ f_2 \circ f_1^4)$ ist. Diese Torus-Bündel sind zuvor behandelt worden.

Die Tabelle 1 zeigt eine Zusammenfassung der Fälle, die mit den vorgestellten Techniken bearbeitet wurden. Die Fälle mit $s \geq 2$ und $m = 1$ wurden nicht betrachtet, weil ihr Bild unter kb nicht e-halbregelmäßig ist. Die Anwendung von Korollar 2.12 ist daher nur möglich, wenn der Fixpunkt berechnet und in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickelt wird. Erst ab $s = 3$ treten hier jedenfalls hyperbolische Torus-Bündel auf.

3.5.2 Allgemeine Techniken zur Lösung der Spurgleichungen

Für die Serien $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$ und $\mathcal{M}((f_2 \circ f_1)^s \circ f_2 \circ f_1^m)$ wurde festgestellt, daß von den drei Gleichungen zur Beschreibung der Fixpunktmengen $\mathcal{C}$ eine redundant ist. Es hat sich gezeigt, daß dies auch für allgemeine Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$, $f \in \mathcal{A}$, insofern stimmt, als bereits aus zwei der drei $\mathcal{C}(f)$ beschreibenden Gleichungen (3.86), (3.87), (3.88) das geometrisch korrekte Charaktertripel ermittelt werden kann. Deshalb wird auf die am wenigsten komplexen Gleichungen (3.86) und (3.93) zurückgegriffen. Das Problem eines Beweises hierfür liegt u.a. darin, daß (3.93) eine Bedingungsgleichung für z liefert, was für (3.86) und (3.87) erst nach Einsetzen aller Rekursionen gelingt. Dieser Vorgang ist unübersichtlich.

Praktisch wird zur Bestimmung von $\mathcal{L}(f)$ deshalb wie folgt verfahren. Man bildet das polynomiale Gleichungssystem GS_f bestehend aus (3.86), (3.93) und der Markoff-Gleichung. Dies geschieht mit dem Programm PolSys s. Anhang B.1. Eine Variante ist, y_k aus (3.93) als

$$y_k = y\, p_{m_1+1}(x) - z\, p_{m_1}(x) \tag{3.112}$$

zu bestimmen und (3.112) in (3.86) einzusetzen. Diese Gleichung wird dann statt (3.86) verwandt. Umgesetzt ist diese Variante im Programm PolSysB s. Anhang B.1. Mit diesen beiden Programmen wurden in der Praxis die einfachsten Gleichungssysteme generiert. Es werden zwei Verfahren genutzt, um diese Gleichungssysteme zu bearbeiten.

Das Resultantenverfahren. Formal ist GS_f von der Gestalt

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \qquad u, v, w \in \mathbb{Z}[x, y, z].$$

Bezeichnet $\mathrm{Res}_z(u, v)$ die Resultante von u und v nach der Variablen z, so ist

$$\mathrm{Res}_y\left(\mathrm{Res}_z(u, v),\, \mathrm{Res}_z(v, w)\right) \in \mathbb{Z}[x]$$

ein Polynom, in dessen irreduziblen Faktoren man das Minimalpolynom zum geometrisch sinnvollen Charakter x findet. Analog geht man für die Charaktere y und z vor, wenn man Kenntnis von ihren Minimalpolynomen erlangen will. Ihre Werte lassen sich auch durch Rückeinsetzen und Nullstellensuche gewinnen. Vergleichbar wurde z.B. in [59] in einer Falluntersuchung vorgegangen. Die nötige sukzessive Resultantenbildung und Faktorisierung ist mit Mathematica 3.0 [74] bequem auszuführen.

Aus der großen Menge möglicher Beispiele sind zur Illustration hier zwei ausgewählt worden.

Beispiel 1: Die Serie $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^m)$. Durch Einsetzen der konkreten Werte gewinnt man aus (3.86) die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= z_2 = x_2 y_2 - y \quad \text{mit} \\ x_2 &= p_n(y)\, z - p_{n-1}(y)\, x, \\ y_2 &= p_{n+1}(y)\, z - p_n(y)\, x. \end{aligned} \tag{3.113}$$

(3.93) nimmt die Gestalt

$$z = \frac{y\, p_{m+1}(x) - y_2}{p_m(x)} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{y\, p_{m+1}(x) + x\, p_n(y)}{p_m(x) + p_{n+1}(y)} \tag{3.114}$$

an. Hier ist z also als rationale Funktion in x und y gegeben. Setzt man (3.114) in (3.113) und in die Markoff-Gleichung ein und befreit von den Nennern, erhält man zwei Polynome aus $\mathbb{Z}[x, y]$. Mittels Resultantenbildung ermittelt man das Charaktertripel, welches auf die hyperbolische Struktur führt. Einige Fordsche Fundamentalbereiche dieser Serie von Torus-Bündeln für positive n und m sind im Anhang A.5 zusammengestellt. Wegen $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^m) \simeq \mathcal{M}(f_2^m \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^n)$ ist bei den Beispielen $m \geq n$ gewählt worden.

Wie in den Abschnitten 3.4.2 und 3.5.1 zuvor, kann auch diese Serie für negative Exponenten untersucht werden. Mit der dort angewendeten Technik der e-halbregelmäßigen Kettenbrüche findet man, daß

$$[-1, \overline{1, n-2, 2, m-1}]$$

Fixpunkt von $A(f_2^{-n} \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^m)$ ist, falls $n > 2$ und $m > 1$ angenommen wird. Durch Vergleich der Spuren der M-Matrizen liefert Korollar 2.12

$$\mathcal{M}(f_2^{-n} \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^m) \simeq \mathcal{M}(g_4^2 \circ f_2 \circ f_1^{n-2} \circ f_2^2 \circ f_1^{m-1})$$

und

$$(f_1^{-1})^*(x, y, z) = (x\, ,\, xy - z\, ,\, y)$$

als Charaktertripel der hyperbolischen Struktur in normalisierter Form.

Betrachtet man $\mathcal{M}(f_2^{-n} \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-m})$ für $m > 1$ und $n > 2$, so ist

$$[-1, 1, n-2, \overline{1, 1, m-1, n-1}]$$

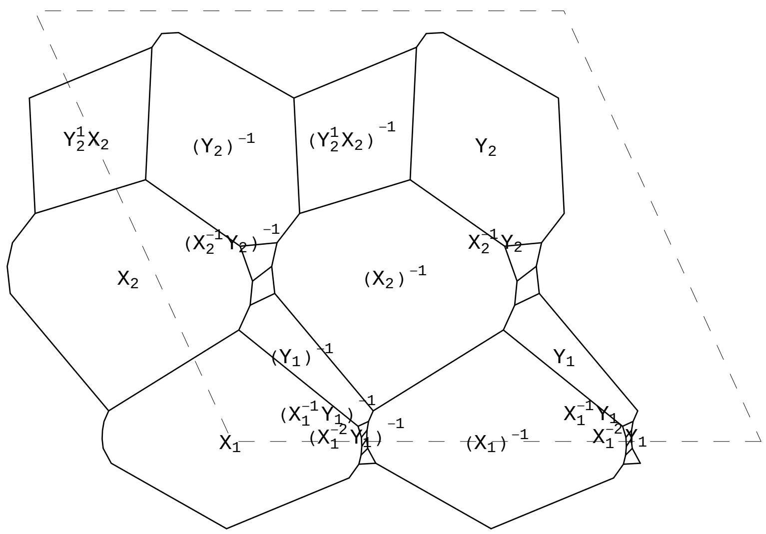
Fixpunkt der M-Matrix (s. 2.4 Beispiel 3). Es ergibt sich erneut mit Korollar 2.12

$$\mathcal{M}(f_2^{-n} \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-m}) \simeq \mathcal{M}(g_4^2 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_2^{m-1} \circ f_1^{n-1}),$$

und das Tripel

$$\begin{aligned} &\left(g_2 \circ f_2^{-1} \circ f_1^{n-2}\right)^* (x, y, z) = \\ &\qquad (y\, ,\, p_{n-2}(y)(z'y - x) - p_{n-3}(y)z'\, ,\, p_{n-1}(y)(z'y - x) - p_{n-2}(y)z') \end{aligned}$$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^3 . f_2^2 . f_1^5$



$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2^3 Y_1$

$x = 1.80702 + 0.111679\,I,\ y = 1.59869 - 1.62853\,I,\ z = 1.70436 + 0.272574\,I,\ t = -0.745388 + 1.62823\,I,$

Minimalpolynome

fuer $(x: 32 - 1196\,x^2 + 16893\,x^4 - 109575\,x^6 + 433863\,x^8 - 1150762\,x^{10} + 2294881\,x^{12} - 4185348\,x^{14} + 8100388\,x^{16} - 16325289\,x^{18} + 32278925\,x^{20} - 60050435\,x^{22} + 100646792\,x^{24} - 147213101\,x^{26} + 185231680\,x^{28} - 199133812\,x^{30} + 181572548\,x^{32} - 139119579\,x^{34} + 88691978\,x^{36} - 46609323\,x^{38} + 20007957\,x^{40} - 6946656\,x^{42} + 1926984\,x^{44} - 420048\,x^{46} + 70246\,x^{48} - 8688\,x^{50} + 748\,x^{52} - 40\,x^{54} + x^{56})$

fuer y :
$1796 - 2133\,y + 5208\,y^2 - 10162\,y^3 + 13373\,y^4 - 27336\,y^5 + 30880\,y^6 - 41616\,y^7 + 55728\,y^8 - 55700\,y^9 + 69180\,y^{10} - 58768\,y^{11} + 66618\,y^{12} - 47844\,y^{13} + 48408\,y^{14} - 28452\,y^{15} + 24966\,y^{16} - 12000\,y^{17} + 9884\,y^{18} - 3750\,y^{19} + 2941\,y^{20} - 900\,y^{21} + 640\,y^{22} - 168\,y^{23} + 110\,y^{24} - 20\,y^{25} + 12\,y^{26} - 2\,y^{27} + y^{28}$

fuer z :
$392 - 8361\,z^2 + 69692\,z^4 - 313044\,z^6 + 940217\,z^8 - 2024696\,z^{10} + 3403084\,z^{12} - 4842188\,z^{14} + 6122004\,z^{16} - 7029676\,z^{18} + 7427864\,z^{20} - 6802172\,z^{22} + 4223922\,z^{24} + 35216\,z^{26} - 3700332\,z^{28} + 4483168\,z^{30} - 2313962\,z^{32} - 834824\,z^{34} + 2865420\,z^{36} - 3083724\,z^{38} + 2167557\,z^{40} - 1111848\,z^{42} + 429568\,z^{44} - 125584\,z^{46} + 27454\,z^{48} - 4360\,z^{50} + 476\,z^{52} - 32\,z^{54} + z^{56}$

Abbildung 10: Ein Fordscher Fundamentalbereich für $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^3 \circ f_2^2 \circ f_1^5)$

mit $z' = xy - z$ erlaubt die Angabe eines Fordschen Fundamentalbereichs nach Schema 4, s. Anhang A.6 und A.7.

Beispiel 2: Das Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^3 \circ f_2^2 \circ f_1^5)$. Im Falle des hyperbolischen Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^3 \circ f_2^2 \circ f_1^5)$ ist keine der Variablen x, y, z rational durch die beiden anderen ausdrückbar. Hier muß das Resultantenverfahren wie geschildert angewendet werden. Das Ergebnis zeigt die Abbildung 10.

Das Newton-Verfahren Angenommen, (x, y, z) ist das Charaktertripel zur hyperbolischen Struktur auf dem Torus-Bündel $\mathcal{M}(f)$ mit $f = \prod_{j=1}^{l} f_2^{n_j} \circ f_1^{m_j} \in \mathcal{A}^+$. x, y, z lösen also das zugehörige Gleichungssystem GS_f. f ist eindeutig durch das Tupel $(n_l, m_l, \ldots, n_1, m_1) \in \mathbb{N}^{2l}$ bestimmt. Wird f nur leicht zu einem f' mit zugehörigem Tupel z.B.

$$(1, 1, n_l, m_l, \ldots, n_1, m_1) \quad \text{oder} \quad (n_l, m_l, \ldots, n_j + 1, m_j, \ldots, n_1, m_1)$$

variiert und nach der hyperbolischen Struktur auf dem Torus-Bündel $\mathcal{M}(f')$ gesucht, so kann man das Gleichungssystem $GS_{f'}$ numerisch mithilfe des „Newton-" oder des „Sekanten-Verfahrens" und x, y, z als Startnäherung zu lösen versuchen. MATHEMATICA 3.0 [74] erlaubt dies z.B. mit der Routine FindRoot.

Dieser Ansatz geht von einer in den exakt behandelbaren Torus-Bündeln gemachten Beobachtung aus, daß es zum einen Konvergenzphänomene gibt, wenn im f beschreibenden Tupel ein Exponent $m \to \infty$ wächst, z.B. $x \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 2$ im Abschnitt 3.4.3, und daß zum anderen bei der Variation von f zu einem f' Radius und Mittelpunkt der isometrischen Spären $I(X), I(Y), I(YX)$ sich nur wenig ändern. Diese Variationen der Monodromie werden daher als „Störungen" des ursprünglichen Systems GS_f zum gestörten System $GS_{f'}$ behandelt.

Man erhält nach diesem Verfahren zwar keine Einsicht in die algebraischen Eigenschaften der Charaktere x, y, z, kann aber numerisch die hyperbolische Struktur von Torus-Bündel bestimmen, welche mit dem Resultantenverfahren nicht mehr problemfrei bearbeitet werden können.

Beispiel. Ausgehend vom Torus-Bündel $\mathcal{M}(f_2^2 \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^4)$, welches nach dem Resultantenverfahren behandelt wurde, werden im Anhang A.8 die Exponenten schrittweise bis zu $\mathcal{M}(f_2^2 \circ f_1^4 \circ f_2^3 \circ f_1^5)$ erhöht. Dabei wird das Spurgleichungssystem GS wie oben beschrieben aufgestellt (PolSys) und mit dem Newton-Verfahren gelöst. Das Charaktertripel des zuvor behandelten Fall dient als Startnäherung.

3.6 Schlußbemerkungen

1. Mit den Methoden der vorliegenden Arbeit lassen sich die hyperbolischen Strukturen von vielen, prinzipiell von allen hyperbolischen Torus-Bündeln ermitteln. Weit mehr Beispiele, als an diese Arbeit angefügt sind, wurden bearbeitet. Bei allen untersuchten hyperbolischen Torus-Bündeln $\mathcal{M}(f)$, $f \in \mathcal{A}$, fand die bei den Mannigfaltigkeiten $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^m)$, $m > 0$, im Abschnitt 3.4.1 gemachte Beobachtung zur Lage des Charakters x_0 der kanonischen Darstellung in der Nullstellenmenge seines Minimalpolynoms N (vgl. [30]) eine Wiederholung:

   - Für alle x mit $N(x) = 0$ galt $|x| < 2$.
   - In der Regel galt

     $$|2 - x_0| \approx \min_{N(x)=0} \{|2 - x|\} \quad \text{oder auch} \quad |x_0| \approx \max_{N(x)=0} \{|x|\}.$$

     Ausnahmen waren z.B. in der Serie $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$ die Fälle $n \geq 3$ und $m \geq 5$ sowie in der Serie $\mathcal{M}((f_2 \circ f_1)^s \circ f_2 \circ f_1)$ die Fälle $s = 4, 5$ und $m = 6$. Die geometrisch korrekten Charaktere lagen indes dicht bei $\max_{N(x)=0}\{|x|\}$. In allen anderen Fällen ergab die betragsmäßig größte Nullstelle schließlich die hyperbolische Struktur. Diese Beobachtung diente als hilfreicher Leitfaden bei der Suche nach x_0 unter den Nullstellen von N.

   Sofern nach dem Resultantenverfahren gearbeitet wurde, mußte zumindest auch der Charakter y oder z aus der Nullstellenmenge seines Minimalpolynoms herausgefunden werden. Die geschilderten Beobachtungen zeichnen keinen Charakter aus, sondern stellten sich für alle Charaktere gleichermaßen ein. Gibt es einen Grund für diese beobachtete Eigenschaft?

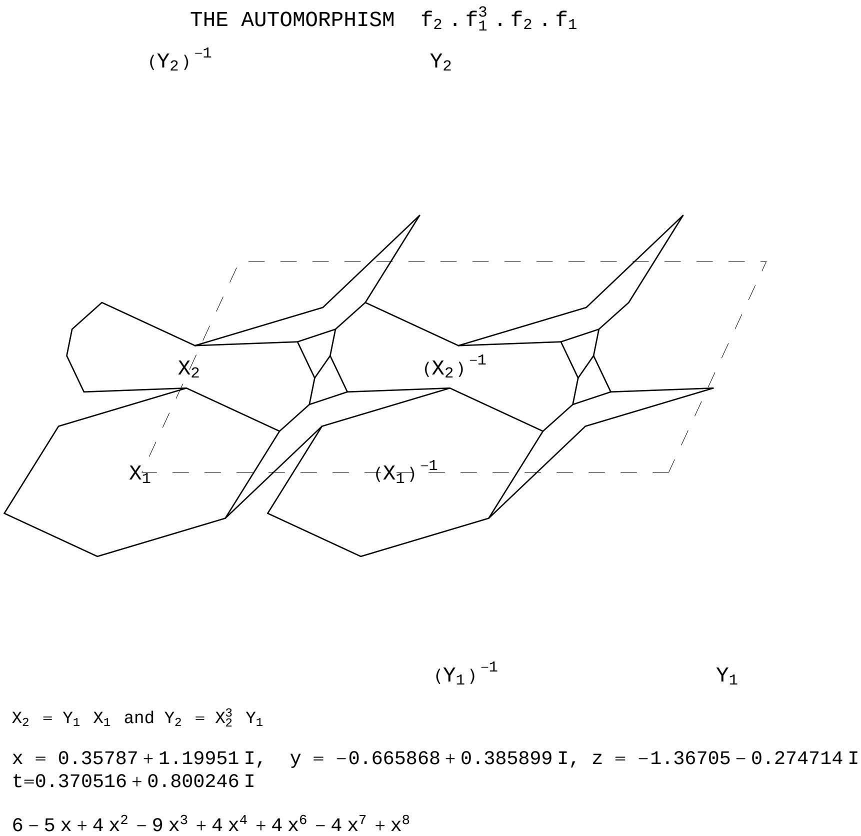


Abbildung 11: Beispiel einer Ausgabe von FordDomain für eine *nicht* diskrete Darstellung der Fundamentalgruppe von $\mathcal{M}(f_2^3 \circ f_1^{-5}) \simeq \mathcal{M}(g_4^2 \circ f_2 \circ f_1^3 \circ f_2 \circ f_1)$ in $SL_2(\mathbb{C})$
(Die Bezeichnungen der beitragenden isometrischen Sphären sind im Mittelpunkt dieser Spähren angeordnet.)

2. Wird aus der Menge $\mathcal{L}(f)$ eines hyperbolischen Torus-Bündels $\mathcal{M}(f)$ das falsche Charaktertripel gewählt und mit der Routine FordDomain (s. Anhang B) ein Bild nach dem kombinatorischen Schema 4 gezeichnet, so existieren in einigen Fällen die im Schema angegebenen Schnitte isometrischer Sphären auch für eine nicht diskrete Darstellung. Die Abbildung 11 zeigt ein solches Beispiel für $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^3 \circ f_2 \circ f_1)$. Das Lemma 2.31 schließt diese nicht diskreten Darstellungen rasch aus. Im Beispiel zeigt $|y| = 0,769609... < 1$, daß die konstruierte Gruppe nicht diskret ist.

3. Ist $\mathcal{M}(f) \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma$ eine hyperbolische Mannigfaltigkeit und $\Gamma^{(2)} = \mathrm{gp}\{A^2, \forall A \in \Gamma\}$, so wird $\mathbb{Q}\left(tr(\Gamma^{(2)})\right)$ als *invarianter Spurenkörper* von $\mathcal{M}(f)$ bezeichnet. Wegen der Markoff-Gleichung ist der Spurenkörper für hyperbolische Torus-Bündel $\mathbb{Q}(x^2, y^2, z^2)$ [59] Lemma 4. In den exakt behandelten Fällen war der Spurenkörper $\mathbb{Q}(x^2)$, und es stellt sich die Frage, ob $\mathbb{Q}(x^2)$ stets den Spurenkörper für $\mathcal{M}(f)$, $f \in \mathcal{A}$ angibt.

4. In einigen Artikeln, wie z.B. in [67], [70], [54], [25], [2], finden sich Bezüge auf unfertige oder unveröffentlichte Arbeiten Jørgensens, die sich ebenfalls mit hyperbolischen Torus-Bündeln und ihren Fordschen Fundamentalbereichen befassen. Nach Fertigstellung dieser Arbeit ist mir das Manuskript [34]

zugänglich geworden, aus dem man zusammen mit [70], [49], [64], [65] ebenfalls eine Beschreibung der kombinatorischen Struktur der Fordschen Fundamentalbereiche entnehmen kann. Ein Zusammenführen der Ideen und Ergebnisse muß der Zukunft vorbehalten bleiben.

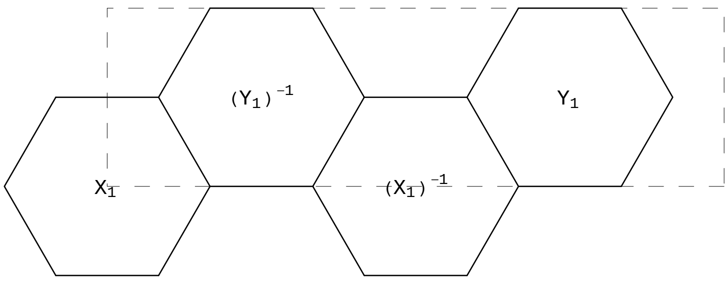
Ein abschließender Hinweis auf das Programm *SnapPea* [72] darf nicht unterlassen werden, das in seiner aktuellen Version ebenfalls hyperbolische Strukturen auf Torus-Bündeln berechnet. Im Gegensatz zu dem hier gewählten Zugriff läßt es keine algebraischen Aussagen zu, z.B. über Spurenkörper. Während in dieser Arbeit möglichst weitgehend exakt gerechnet wird, löst *SnapPea* Gleichungssysteme generell mit dem numerischen Newton-Verfahren.

A Beispiele Fordscher Fundamentalbereiche

Die hier zusammengestellten Fordschen Fundamentalbereiche hyperbolischer Torus-Bündel wurden mit dem Computer-Programm FordDomain für MATHEMATICA 3.0 erzeugt. Der Übersichtlichkeit halber sind nicht alle isometrischen Sphären beschriftet. Die Beschriftung wurde nur soweit eingefügt, daß sich das Fehlende leicht mit Abbildung 4 von selbst ergibt. Unter den Fundamentalbereichen findet sich einerseits eine Erklärung der Abkürzungen X_j und Y_j entsprechend der Rekursion (3.67) und andererseits das numerisch bestimmte Charaktertripel (x, y, z) und t aus $M = \binom{1\,t}{0\,1}$, welche zu Γ in normalisierter Form herangezogen wurden, sowie in einigen Fällen die Minimalpolynome von x bzw. y laut MATHEMATICA 3.0 [74]. Bei den Fordschen Fundamentalbereichen der Abschnitte A.2, A.4, A.6, A.7 sind die angegebenen Polynome *nicht* die Minimalpolynome des angegebenen Charakters x, sondern von einem x' mit $h^*(x') = x$, wobei h^* die von einem $h \in Aut(\mathbf{F}_2)$ induzierte Abbildung $\mathcal{X}(\mathbf{F}_2) \to \mathcal{X}(\mathbf{F}_2)$ ist. Die Details findet man im Abschnitt über die jeweilige Serie in der Arbeit.

A.1 Fordsche Fundamentalbereiche von $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$, $m, n \in \mathbb{N}$

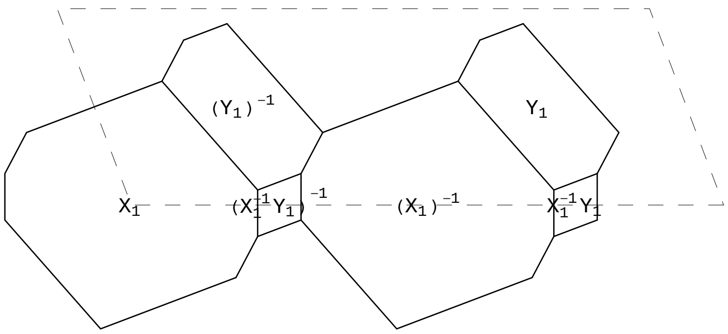
THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1$



x = 1.5 + 0.866025 I, y = 1.5 − 0.866025 I, z = 1.5 + 0.866025 I
t=1.66533 · 10^{-16} + 0.57735 I

$x^2 - 3x + 3$

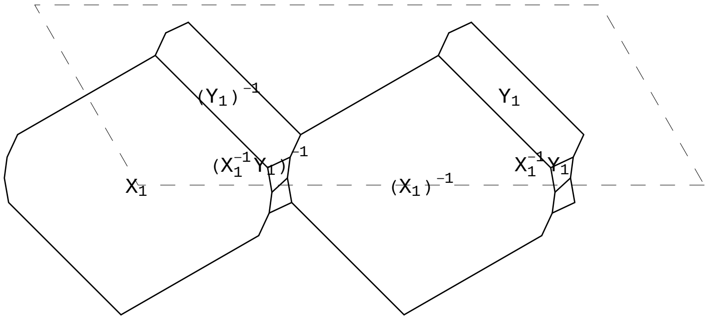
THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^2$



x = 1.63224 + 0.405233 I, y = 1.5 − 1.32288 I, z = 1.63224 + 0.405233 I
t=−0.25 + 0.661438 I

$x^4 - 5x^2 + 8$

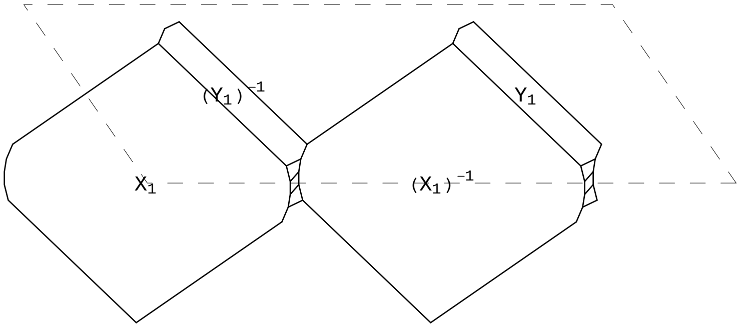
THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^3$



$x = 1.72715 + 0.228442\,I$, $y = 1.5725 - 1.57557\,I$, $z = 1.72715 + 0.228442\,I$
$t = -0.365309 + 0.635931\,I$

$x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 3$

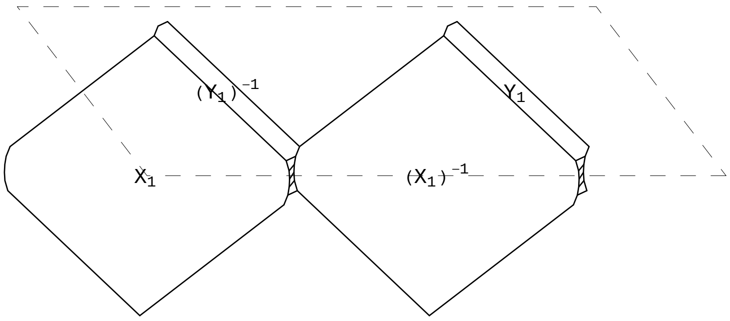
THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^4$



$x = 1.79211 + 0.14197\,I$, $y = 1.6478 - 1.72143\,I$, $z = 1.79211 + 0.14197\,I$
$t = -0.419643 + 0.606291\,I$

$x^6 - 6x^4 + 8x^2 + 4$

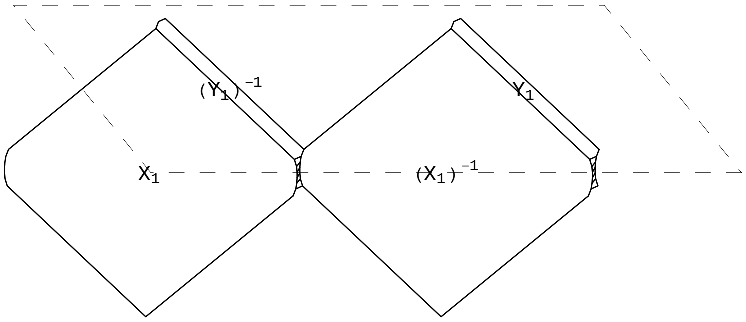
THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^5$



$x = 1.83745 + 0.0941707\,I$, $y = 1.71128 - 1.80955\,I$, $z = 1.83745 + 0.0941707\,I$
$t = -0.448237 + 0.583448\,I$

$x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 5x + 3$

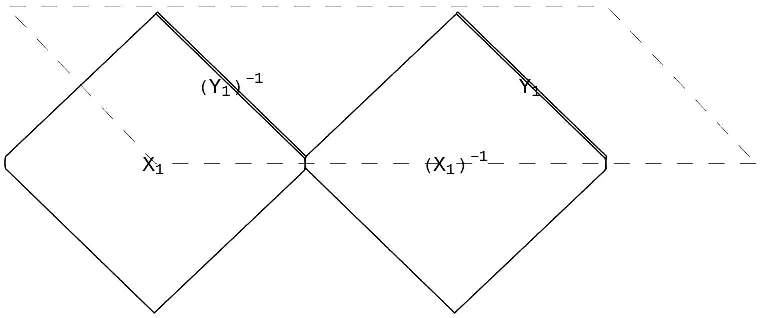
THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^6$



x = 1.86998 + 0.0655512 I, y = 1.76191 − 1.8651 I, z = 1.86998 + 0.0655512 I
t=−0.464704 + 0.566649 I

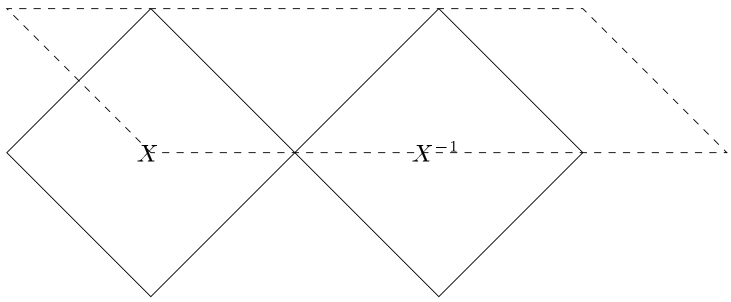
$x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 17x^2 + 8$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^{13}$



x = 1.95844 + 0.011087 I, y = 1.91858 − 1.97671 I, z = 1.95844 + 0.011087 I
t=−0.494334 + 0.520986 I

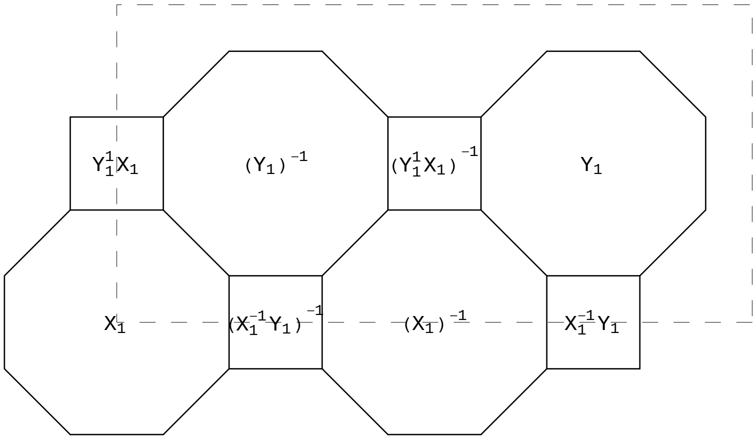
$3 + 5x - 3x^2 - 44x^3 + 22x^4 + 80x^5 - 40x^6 - 58x^7 + 29x^8 + 18x^9 - 9x^{10} - 2x^{11} + x^{12}$



$x_\infty = 2,\ y_\infty = 2 + 2i,\ z_\infty = 2$
$t = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$

Abbildung 12: Fordscher Fundamentalbereich von $\mathcal{M}(f_2 \circ f_1^m)$ für $m \to \infty$

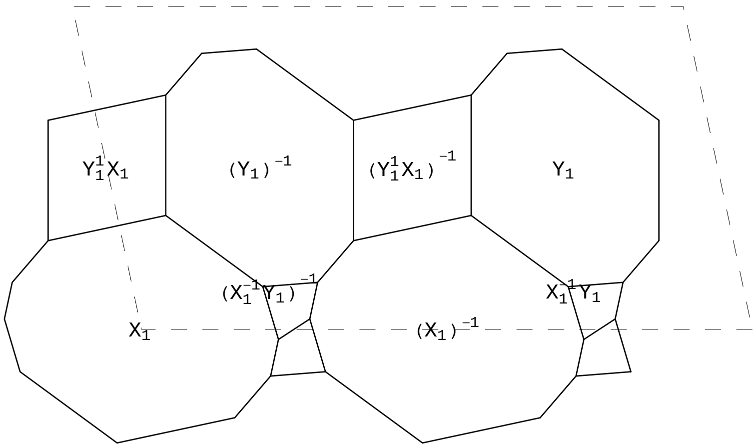
THE AUTOMORPHISM $f_2^2 . f_1^2$



$x = 1.55377 + 0.643594\,I$, $y = 1.55377 - 0.643594\,I$, $z = 1.41421 + 1.41421\,I$
$t = -4.44089 \cdot 10^{-16} + 1.\,I$

$x^4 - 4x^2 + 8$

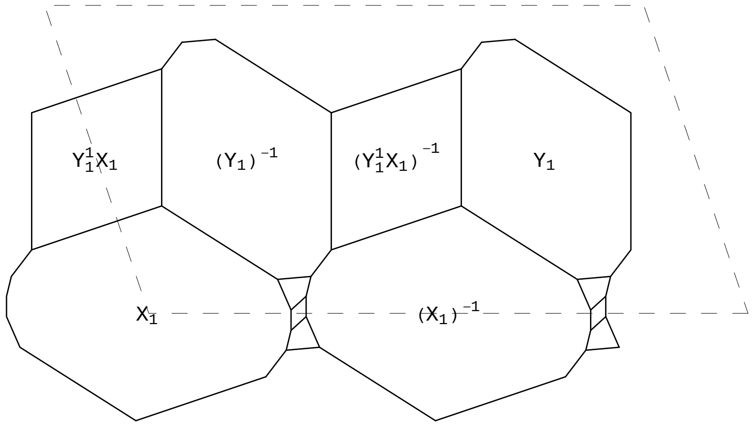
THE AUTOMORPHISM $f_2^2 . f_1^3$



$x = 1.64492 + 0.352325\,I$, $y = 1.55917 - 0.790121\,I$, $z = 1.49663 + 1.21037\,I$
$t = -0.225819 + 1.05577\,I$

$x^4 - 2x^3 - x + 4$

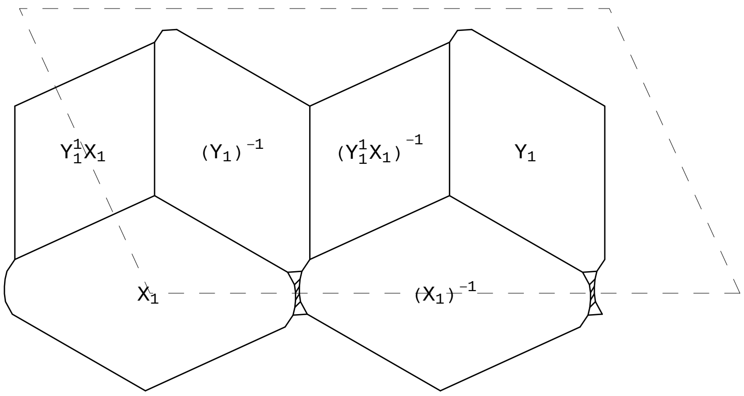
THE AUTOMORPHISM $f_2^2 . f_1^4$



x = 1.72642 + 0.207276 I, y = 1.58772 − 0.873388 I, z = 1.55926 + 1.11883 I
t=−0.347804 + 1.02885 I

$8 + 4x^2 - 5x^4 + x^6$

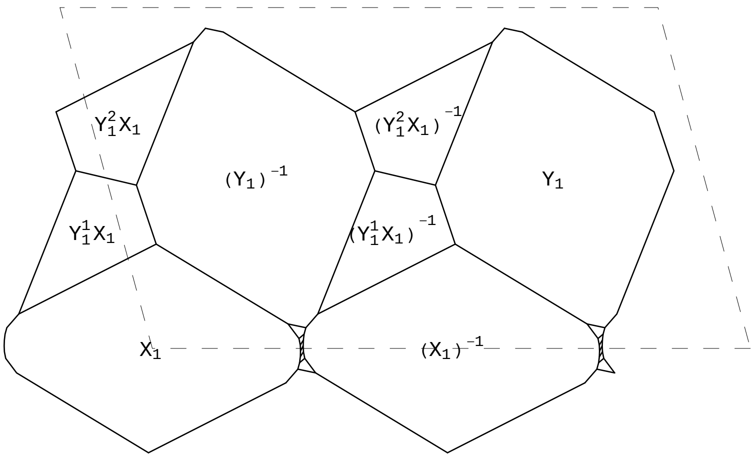
THE AUTOMORPHISM $f_2^2 . f_1^6$



x = 1.83394 + 0.0860334 I, y = 1.63926 − 0.947067 I, z = 1.6321 + 1.0479 I
t=−0.442542 + 0.966847 I

$8 - 8x^2 + 14x^4 - 7x^6 + x^8$

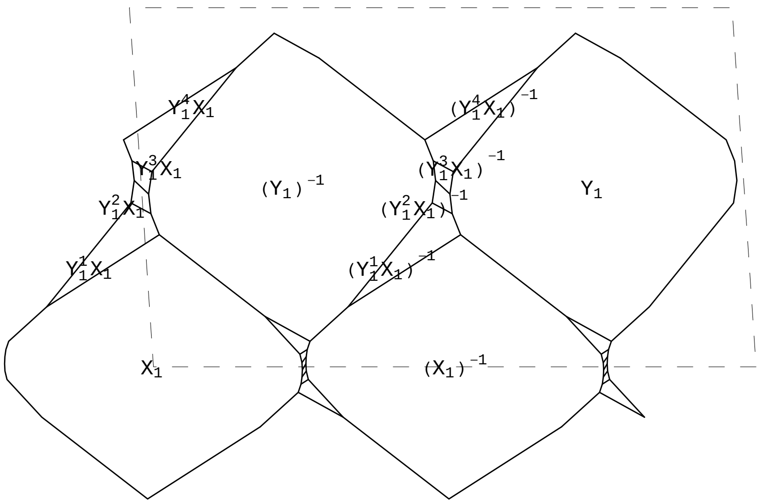
THE AUTOMORPHISM $f_2^3 . f_1^7$



$x = 1.85426 + 0.0686303\,I$, $y = 1.65549 - 0.555067\,I$, $z = 1.59583 + 1.45605\,I$
$t = -0.309055 + 1.1406\,I$

$6 + 7x - 8x^2 - 58x^3 + 44x^4 + 45x^5 + 28x^6 - 71x^7 - 104x^8 + 127x^9 + 64x^{10} - 96x^{11} - 8x^{12} + 32x^{13} - 4x^{14} - 4x^{15} + x^{16}$

THE AUTOMORPHISM $f_2^5 . f_1^7$

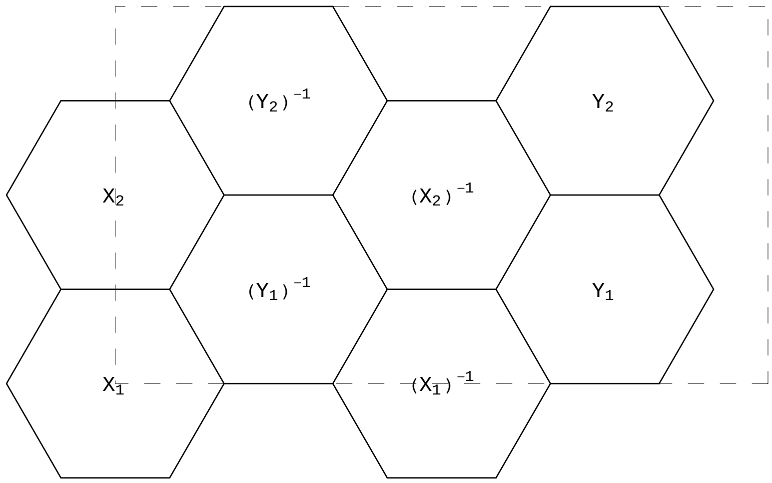


$x = 1.84516 + 0.0815926\,I$, $y = 1.75661 - 0.204541\,I$, $z = 1.63824 + 1.83285\,I$
$t = -0.0799019 + 1.19128\,I$

$12 + 16x - 23x^2 - 188x^3 + 186x^4 + 118x^5 + 359x^6 - 690x^7 - 677x^8 + 1090x^9 + 483x^{10} - 224x^{11} - 1048x^{12} - 376x^{13} + 1668x^{14} + 4x^{15} - 1262x^{16} + 313x^{17} + 481x^{18} - 212x^{19} - 82x^{20} + 58x^{21} + x^{22} - 6x^{23} + x^{24}$

A.2 Fordsche Fundamentalbereiche von $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^{-m})$, $m, n \in \mathbb{N}$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1 . f_2 . f_1$

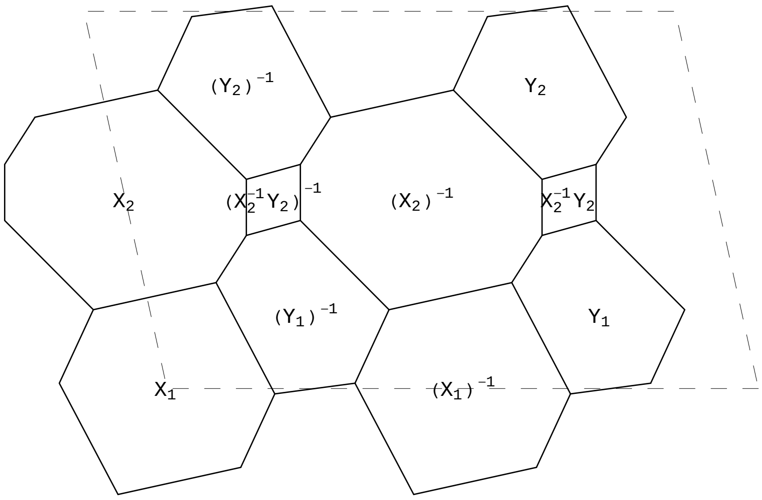


$X_2 = Y_1\ X_1$ and $Y_2 = X_2\ Y_1$

x = 1.5 + 0.866025 I, y = 1.5 − 0.866025 I, z = 1.5 + 0.866025 I
t=−2.94209 · 10^{-15} + 1.1547 I

$3 - 3x + x^2$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^2 . f_2 . f_1$

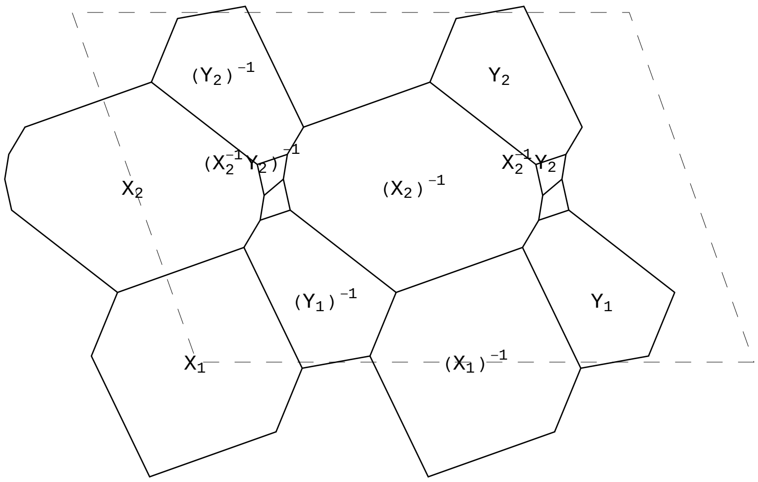


$X_2 = Y_1\ X_1$ and $Y_2 = X_2^2\ Y_1$

x = 1.54521 + 0.715953 I, y = 1.48929 − 1.09608 I, z = 1.59672 + 0.468662 I
t=−0.280896 + 1.27441 I

$16 - 20x^2 + 16x^4 - 6x^6 + x^8$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^3 . f_2 . f_1$

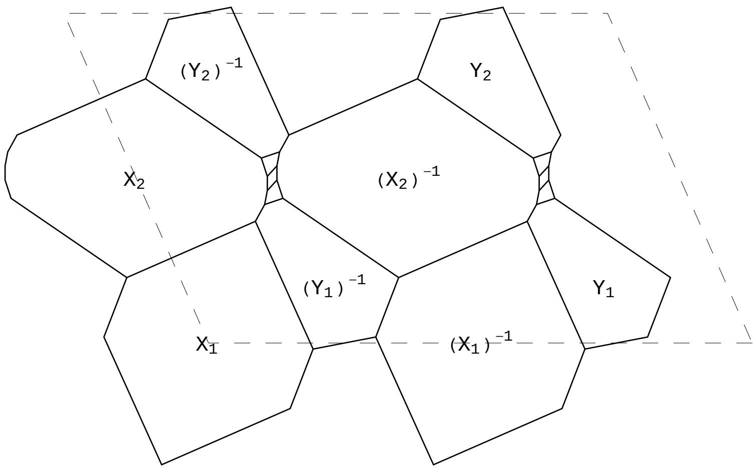


$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2^3 Y_1$

$x = 1.58489 + 0.651066\,I,\ \ y = 1.51691 - 1.2252\,I,\ z = 1.68492 + 0.270992\,I$
$t = -0.447452 + 1.2564\,I$

$6 - 5x + 4x^2 - 9x^3 + 4x^4 + 4x^6 - 4x^7 + x^8$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^4 . f_2 . f_1$

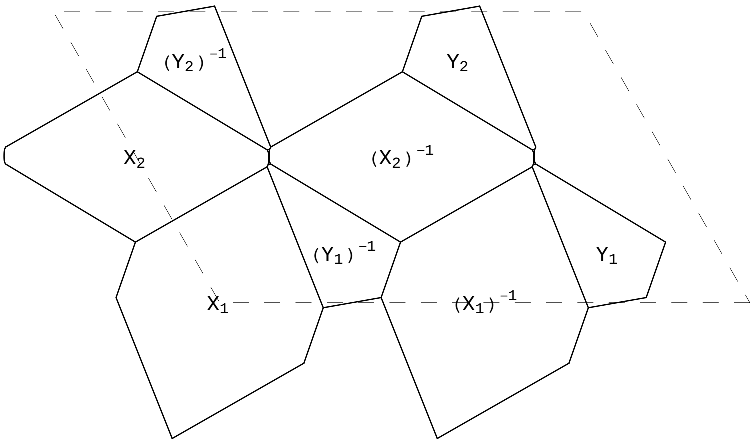


$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2^4 Y_1$

$x = 1.61346 + 0.620374\,I,\ \ y = 1.55042 - 1.29779\,I,\ z = 1.75624 + 0.165693\,I$
$t = -0.531915 + 1.21476\,I$

$32 + 20x^2 - 7x^4 - 43x^6 + 35x^8 - 10x^{10} + x^{12}$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^{10} . f_2 . f_1$

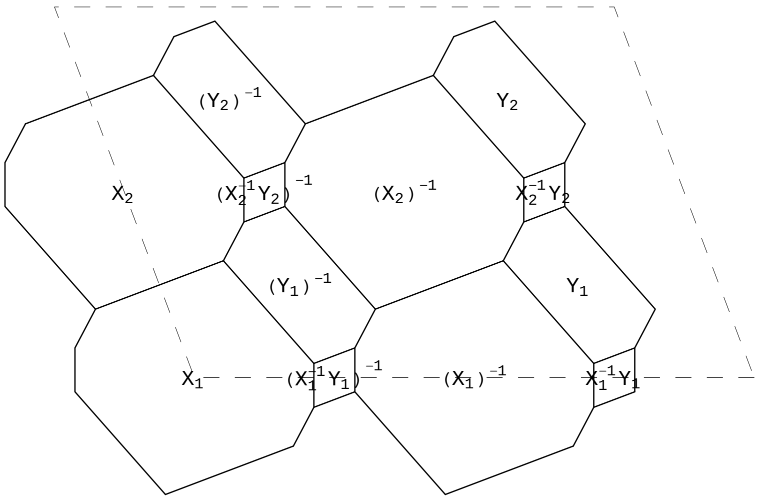


$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2^{10} Y_1$

$x = 1.67284 + 0.584608\,I$, $y = 1.64989 - 1.40184\,I$, $z = 1.92963 + 0.0213263\,I$
$t = -0.628337 + 1.09933\,I$

$16 + 12x^2 + 336x^4 - 1636x^6 + 4996x^8 - 9512x^{10} + 11018x^{12} - 8008x^{14} + 3740x^{16} - 1122x^{18} + 209x^{20} - 22x^{22} + x^{24}$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^2 . f_2 . f_1^2$

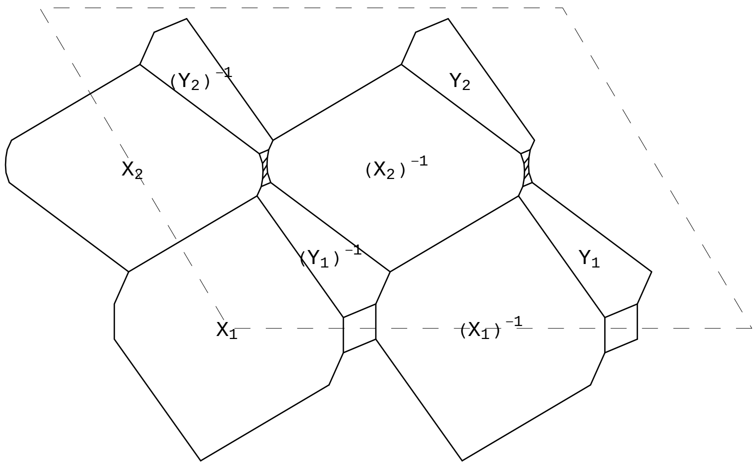


$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2^2 Y_1$

$x = 1.63224 + 0.405233\,I$, $y = 1.5 - 1.32288\,I$, $z = 1.63224 + 0.405233\,I$
$t = -0.5 + 1.32288\,I$

$8 - 5x^2 + x^4$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^5 . f_2 . f_1^2$

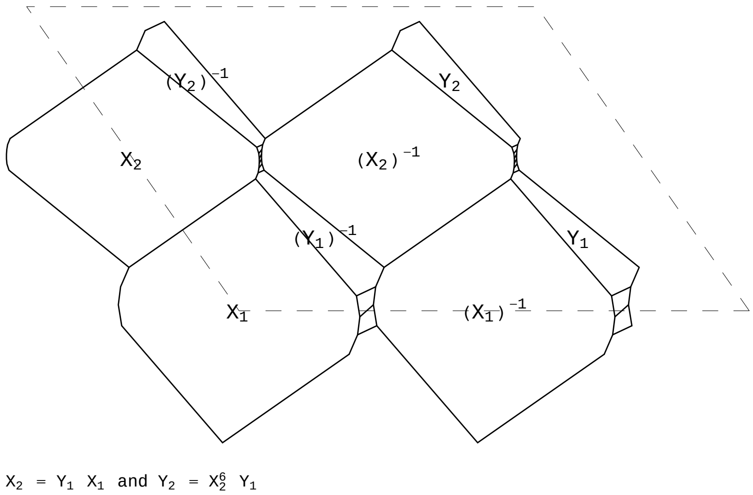


$X_2 = Y_1\ X_1$ and $Y_2 = X_2^5\ Y_1$

$x = 1.6864 + 0.358955\,I$, $y = 1.60076 - 1.56316\,I$, $z = 1.82198 + 0.0985426\,I$
$t = -0.723376 + 1.22469\,I$

$-4 + x^3 + 6\,x^4 - 13\,x^5 - x^6 + 11\,x^7 - 2\,x^8 - 3\,x^9 + x^{10}$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^6 . f_2 . f_1^3$



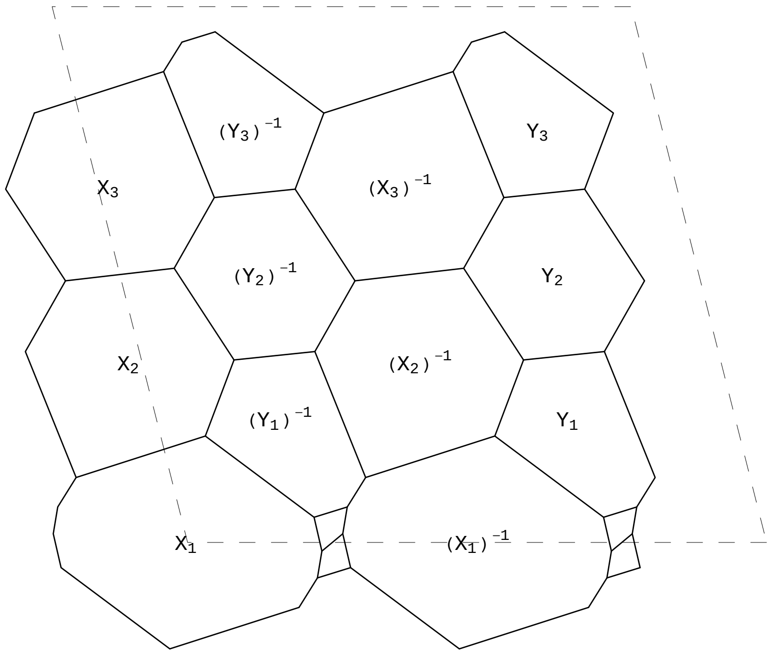
$X_2 = Y_1\ X_1$ and $Y_2 = X_2^6\ Y_1$

$x = 1.75026 + 0.219447\,I$, $y = 1.66433 - 1.71726\,I$, $z = 1.86307 + 0.065796\,I$
$t = -0.832871 + 1.19238\,I$

$64 - 224\,x^2 + 884\,x^4 - 1112\,x^6 - 638\,x^8 + 5529\,x^{10} - 10504\,x^{12} + 11486\,x^{14} - 8102\,x^{16} + 3747\,x^{18} - 1122\,x^{20} + 209\,x^{22} - 22\,x^{24} + x^{26}$

A.3 Fordsche Fundamentalbereiche von $\mathcal{M}((f_2 \circ f_1)^s \circ f_2 \circ f_1^m)$, $m, n \in \mathbb{N}$

THE AUTOMORPHISM $(f_2 \,.\, f_1)^2 \,.\, f_2 \,.\, f_1^3$



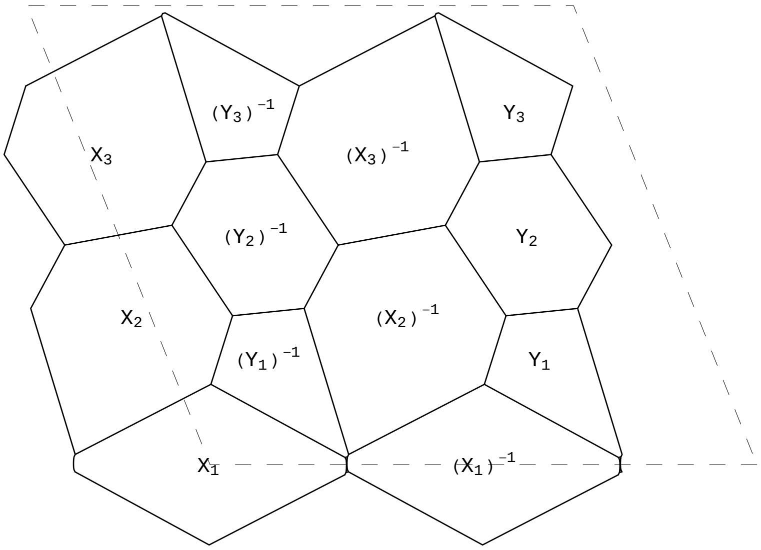
$X_2 = Y_1\ X_1$ and $Y_2 = X_2\ Y_1$

$X_3 = Y_2\ X_2$ and $Y_3 = X_3\ Y_2$

$x = 1.67607 + 0.279871\,I$, $y = 1.50527 - 1.16001\,I$, $z = 1.5532 + 0.728656\,I$
$t = -0.467883 + 1.84917\,I$

$-4 + x^3 + 2\,x^4 + x^5 - 3\,x^6 + x^7$

THE AUTOMORPHISM $(f_2 . f_1)^2 . f_2 . f_1^{10}$



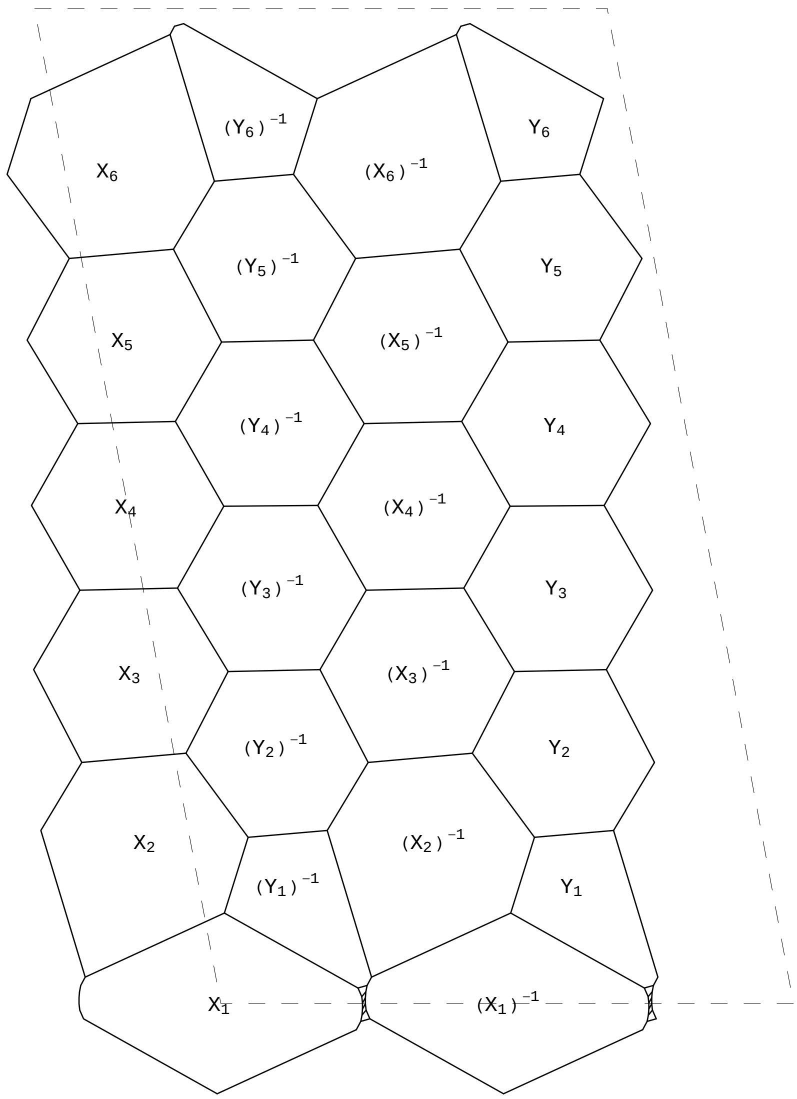
$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2 Y_1$

$X_3 = Y_2 X_2$ and $Y_3 = X_3 Y_2$

$x = 1.92821 + 0.0212478\, I$, $y = 1.60126 - 1.30435\, I$, $z = 1.61764 + 0.682105\, I$
$t = -0.670462 + 1.67969\, I$

$$-8 + 12x + 38x^2 + 33x^3 - 33x^4 - 224x^5 + 10x^6 + 718x^7 - x^8 - 1122x^9 + 935x^{11} - 442x^{13} + 119x^{15} - 17x^{17} + x^{19}$$

THE AUTOMORPHISM $(f_2 . f_1)^5 . f_2 . f_1^6$



$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2 Y_1$

$X_3 = Y_2 X_2$ and $Y_3 = X_3 Y_2$

$X_4 = Y_3 X_3$ and $Y_4 = X_4 Y_3$

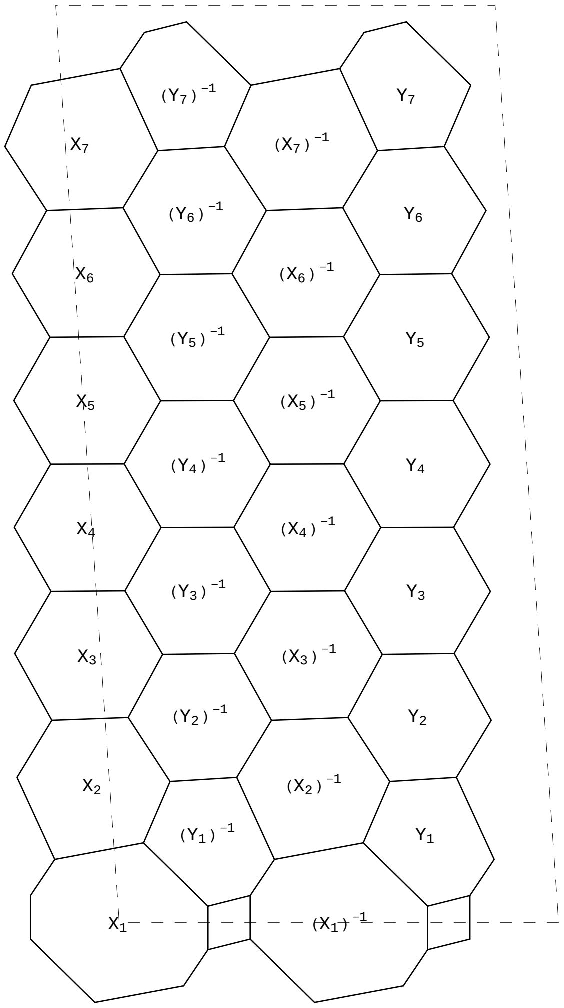
$X_5 = Y_4 X_4$ and $Y_5 = X_5 Y_4$

$X_6 = Y_5 X_5$ and $Y_6 = X_6 Y_5$

$x = 1.84361 + 0.0736162\, I$, $y = 1.55644 - 1.25017\, I$, $z = 1.58498 + 0.713358\, I$
$t = -0.650546 + 3.47499\, I$

$8192 - 12288 x - 24576 x^2 + 14336 x^3 + 48640 x^4 - 30976 x^5 - 126208 x^6 + 224512 x^7 + 362464 x^8 - 976464 x^9 - 730560 x^{10} + 2984184 x^{11} + 1015682 x^{12} - 8129439 x^{13} - 988833 x^{14} + 20379560 x^{15} + 678616 x^{16} - 46363002 x^{17} - 330210 x^{18} + 98108466 x^{19} + 114170 x^{20} - 201788401 x^{21} - 27855 x^{22} + 401738066 x^{23} + 4690 x^{24} - 735065013 x^{25} - 519 x^{26} + 1173941467 x^{27} + 34 x^{28} - 1589474825 x^{29} - x^{30} + 1802240224 x^{31} - 1703466064 x^{33} + 1339033936 x^{35} - 873058388 x^{37} + 470381692 x^{39} - 208346120 x^{41} + 75360384 x^{43} - 22065759 x^{45} + 5168728 x^{47} - 952726 x^{49} + 134910 x^{51} - 14147 x^{53} + 1034 x^{55} - 47 x^{57} + x^{59}$

THE AUTOMORPHISM $(f_2 . f_1)^6 . f_2 . f_1^2$



$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2 Y_1$

$X_3 = Y_2 X_2$ and $Y_3 = X_3 Y_2$

$X_4 = Y_3 X_3$ and $Y_4 = X_4 Y_3$

$X_5 = Y_4 X_4$ and $Y_5 = X_5 Y_4$

$X_6 = Y_5 X_5$ and $Y_6 = X_6 Y_5$

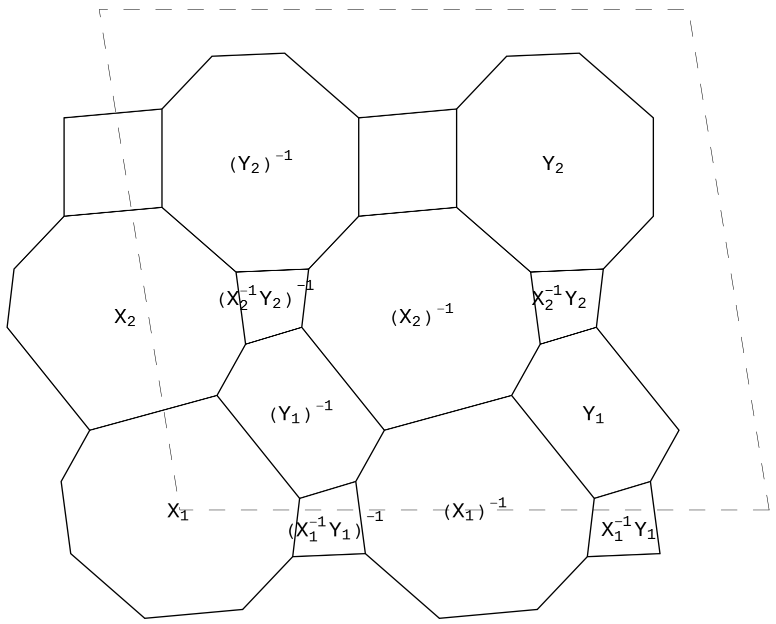
$X_7 = Y_6 X_6$ and $Y_7 = X_7 Y_6$

$x = 1.58829 + 0.484635\, I$, $y = 1.48711 - 1.04451\, I$, $z = 1.52222 + 0.787669\, I$
$t = -0.289074 + 4.1747\, I$

$$\begin{aligned}&8796093022208 - 67070209294336\, x^2 + 273778395316224\, x^4 - 821747502809088\, x^6 + \\ &2083815052804096\, x^8 - 4789098988437504\, x^{10} + 10306577185636352\, x^{12} - 21052475838562304\, x^{14} + \\ &41039610003849216\, x^{16} - 76536177796055040\, x^{18} + 136680051843268608\, x^{20} - \\ &233721952924073984\, x^{22} + 382386925747568640\, x^{24} - 597770611362234368\, x^{26} + \\ &891442247781187584\, x^{28} - 1266133359724494848\, x^{30} + 1710360326259517440\, x^{32} - \\ &2195076567619582208\, x^{34} + 2674452473214002432\, x^{36} - 3091881027744239456\, x^{38} + \\ &3390516993326123864\, x^{40} - 3525758310877682029\, x^{42} + 3475947550147695395\, x^{44} - \\ &3247830114553620901\, x^{46} + 2874952943461038340\, x^{48} - 2409564761921295406\, x^{50} + \\ &1910695087139447012\, x^{52} - 1432102480048170164\, x^{54} + 1013383436940229106\, x^{56} - \\ &676042281209725501\, x^{58} + 424474245097694904\, x^{60} - 250367563933659427\, x^{62} + \\ &138428293225045394\, x^{64} - 71576125651614057\, x^{66} + 34522087661920910\, x^{68} - \\ &15488820124640936\, x^{70} + 6445524060779246\, x^{72} - 2480036375267356\, x^{74} + 879352299906847\, x^{76} - \\ &286287307366480\, x^{78} + 85243232178372\, x^{80} - 23111875485504\, x^{82} + 5677891440270\, x^{84} - \\ &1256790346344\, x^{86} + 249000852654\, x^{88} - 43812485604\, x^{90} + 6781445299\, x^{92} - \\ &912515960\, x^{94} + 105147762\, x^{96} - 10170820\, x^{98} + 803535\, x^{100} - 49816\, x^{102} + 2274\, x^{104} - 68\, x^{106} + x^{108}\end{aligned}$$

A.4 Fordsche Fundamentalbereiche von $\mathcal{M}((f_2 \circ f_1)^s \circ f_2 \circ f_1^{-m})$, $m, n \in \mathbb{N}$

THE AUTOMORPHISM $1 . f_2 . f_1^2 . f_2^2 . f_1^2$

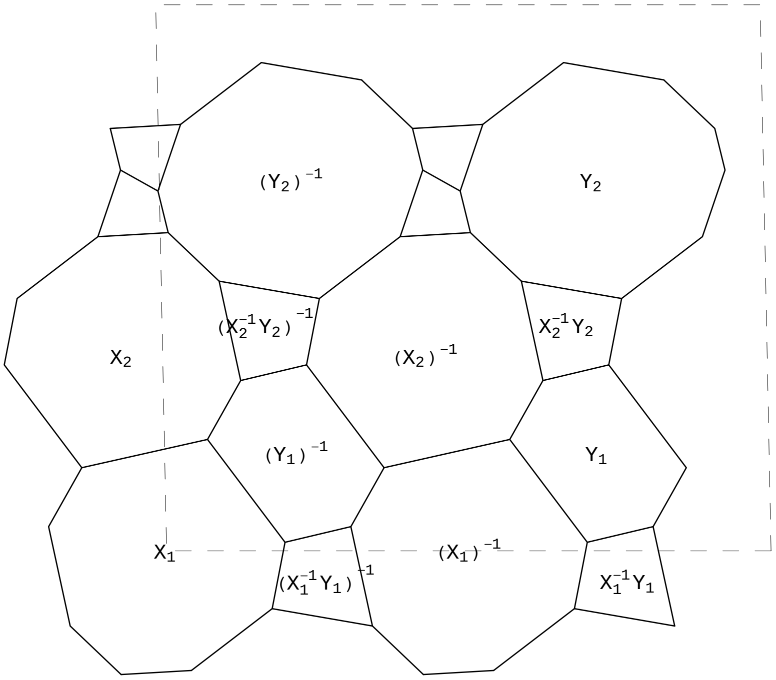


$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2^2 Y_1$

$x = 1.58717 + 0.514872\,I$, $y = 1.4823 - 1.19077\,I$, $z = 1.58717 + 0.514872\,I$
$t = -0.273823 + 1.69705\,I$

$-8 + 4x + 10x^2 - x^3 - 4x^4 + x^6$

THE AUTOMORPHISM $1 . f_2 . f_1^2 . f_2^3 . f_1^2$

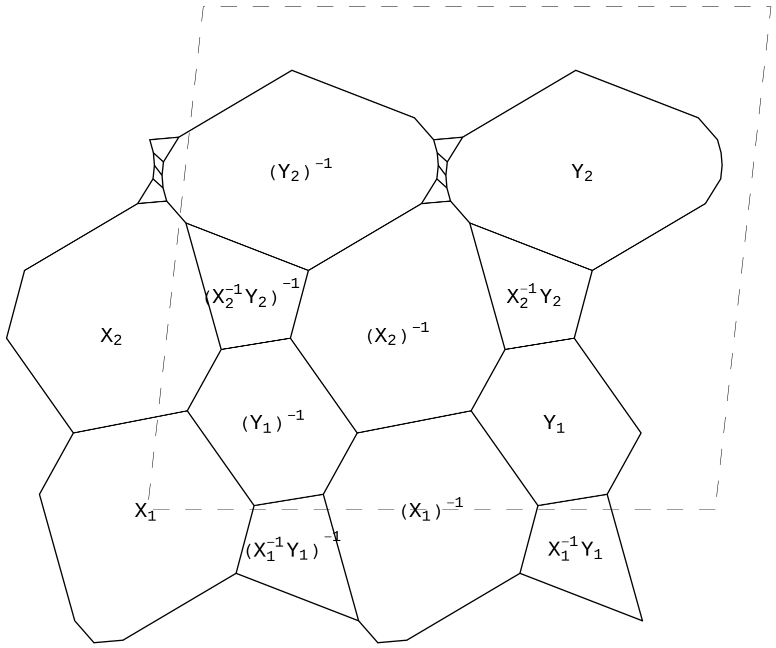


$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2^2 Y_1$

$x = 1.57871 + 0.57964\,I$, $y = 1.49182 - 1.12421\,I$, $z = 1.57871 + 0.57964\,I$
$t = -0.0358995 + 1.8079\,I$

$-4 + 4x^2 - x^3 + 2x^4 - 3x^5 + x^6$

THE AUTOMORPHISM $1 . f_2 . f_1^2 . f_2^5 . f_1^2$

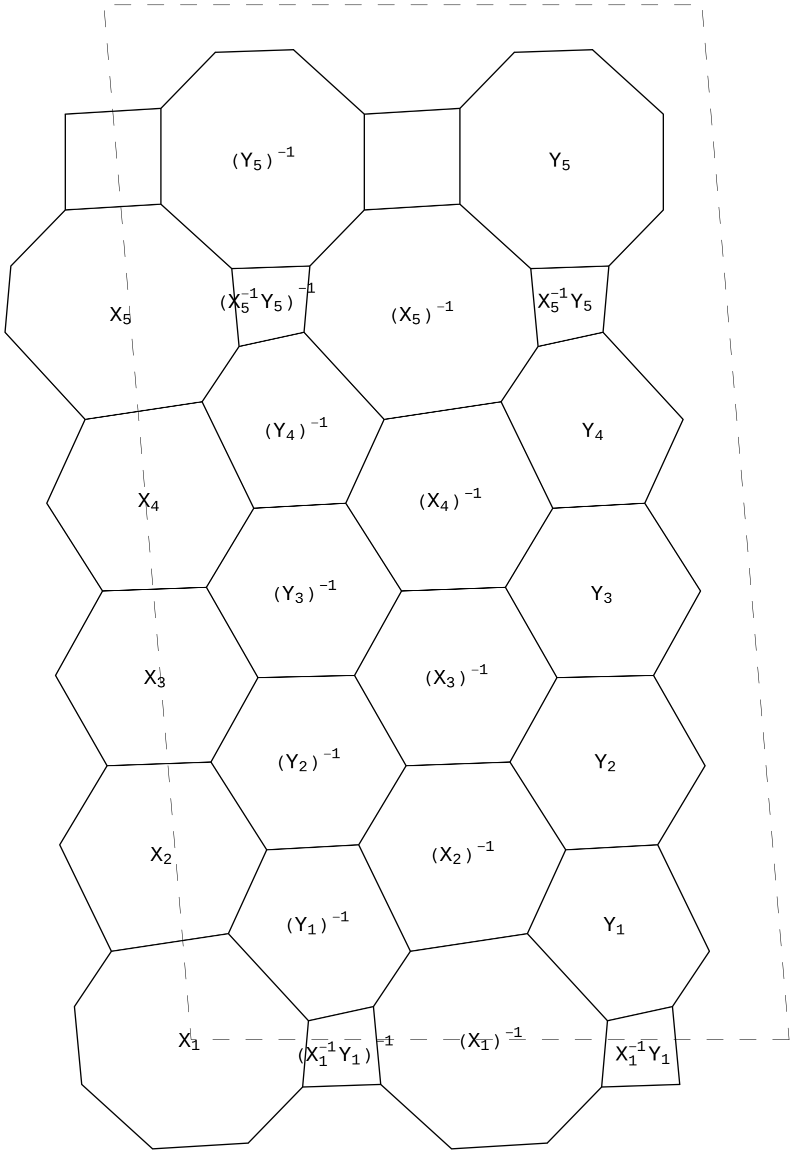


$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2^2 Y_1$

$x = 1.59264 + 0.640299\,I$, $y = 1.52016 - 1.07097\,I$, $z = 1.59264 + 0.640299\,I$
$t = 0.196683 + 1.77327\,I$

$-8 + 3x + 5x^2 - 8x^3 - x^4 + 8x^5 - x^6 - 3x^7 + x^8$

THE AUTOMORPHISM $(f_2 . f_1)^3 . f_2 . f_1^2 . f_2^2 . f_1^2$



$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2 Y_1$

$X_3 = Y_2 X_2$ and $Y_3 = X_3 Y_2$

$X_4 = Y_3 X_3$ and $Y_4 = X_4 Y_3$

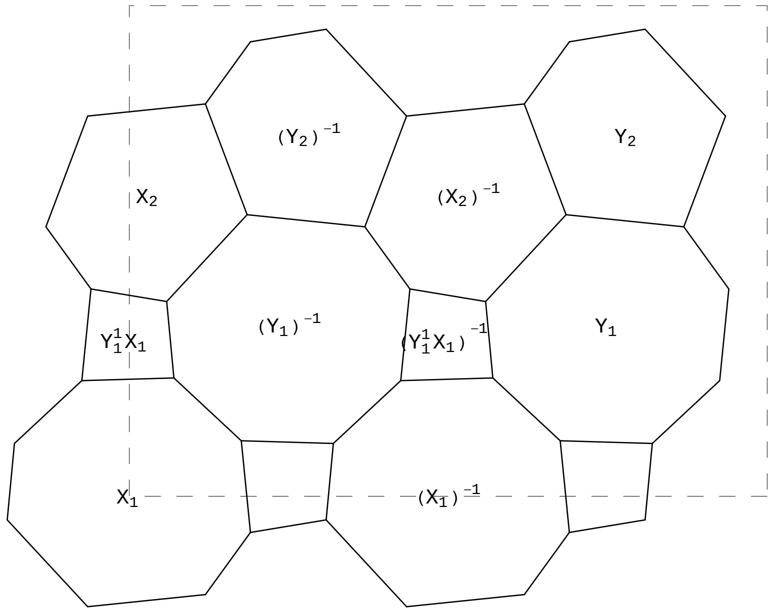
$X_5 = Y_4 X_4$ and $Y_5 = X_5^2 Y_4$

$x = 1.57106 + 0.553552\,I$, $y = 1.48796 - 1.01348\,I$, $z = 1.51811 + 0.799149\,I$
$t = -0.291862 + 3.45873\,I$

$$-8192 + 12288\,x + 8192\,x^2 - 30720\,x^3 - 3584\,x^4 + 37120\,x^5 + 38144\,x^6 - 28416\,x^7 - 117216\,x^8 + 14928\,x^9 + 186496\,x^{10} - 5496\,x^{11} - 197138\,x^{12} + 1399\,x^{13} + 152913\,x^{14} - 234\,x^{15} - 91224\,x^{16} + 23\,x^{17} + 42770\,x^{18} - x^{19} - 15850\,x^{20} + 4607\,x^{22} - 1026\,x^{24} + 167\,x^{26} - 18\,x^{28} + x^{30}$$

A.5 Fordsche Fundamentalbereiche von $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^m)$, $m, n \in \mathbb{N}$

THE AUTOMORPHISM $f_2^2 . f_1 . f_2 . f_1^2$



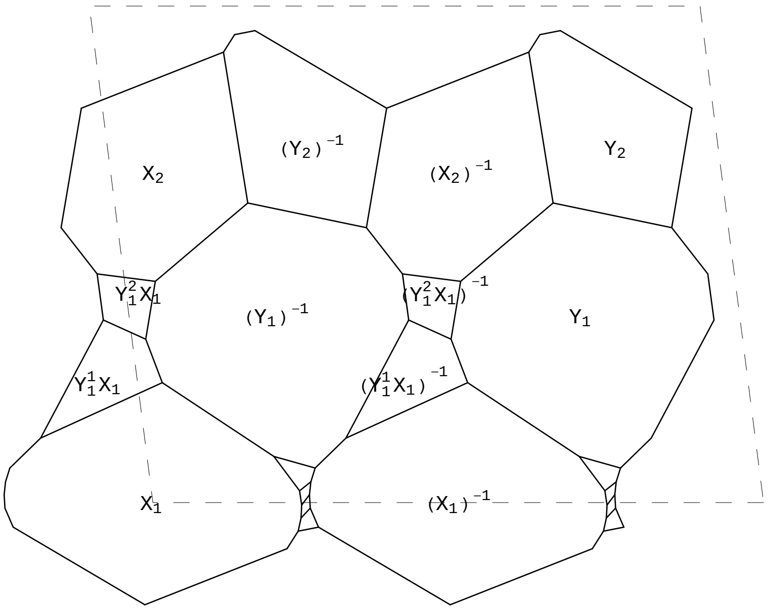
$X_2 = Y_1^2\ X_1$ and $Y_2 = X_2\ Y_1$

$x = 1.56394 + 0.589628\,I$, $y = 1.56394 - 0.589628\,I$, $z = 1.39679 + 1.4985\,I$
$t = -3.4639 \cdot 10^{-13} + 1.53824\,I$

$$3 - 21\,x + 52\,x^2 - 36\,x^3 - 26\,x^4 + 32\,x^5 + 14\,x^6 - 10\,x^7 - 11\,x^8 - 4\,x^9 + 6\,x^{10} + 6\,x^{11} - 3\,x^{12} - 2\,x^{13} + x^{14}$$

$$3 - 21\,y + 52\,y^2 - 36\,y^3 - 26\,y^4 + 32\,y^5 + 14\,y^6 - 10\,y^7 - 11\,y^8 - 4\,y^9 + 6\,y^{10} + 6\,y^{11} - 3\,y^{12} - 2\,y^{13} + y^{14}$$

THE AUTOMORPHISM $f_2^3 . f_1 . f_2 . f_1^5$



$X_2 = Y_1^3 X_1$ and $Y_2 = X_2 Y_1$

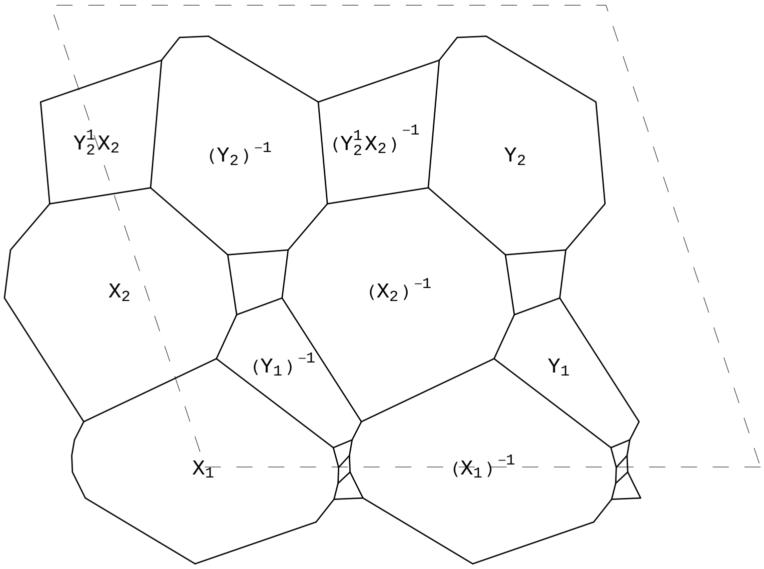
$x = 1.77797 + 0.139555\,I$, $y = 1.64535 - 0.418364\,I$, $z = 1.5221 + 1.61776\,I$
$t = -0.208122 + 1.62637\,I$

$$15 + 43x - 202x^2 - 626x^3 + 955x^4 + 2874x^5 + 175x^6 - 4042x^7 - 10113x^8 - 4944x^9 + 32620x^{10} + 24864x^{11} - 68288x^{12} - 29864x^{13} + 121744x^{14} - 17954x^{15} - 178325x^{16} + 126044x^{17} + 186442x^{18} - 253042x^{19} - 111757x^{20} + 333722x^{21} - 4293x^{22} - 325080x^{23} + 83244x^{24} + 240216x^{25} - 92688x^{26} - 134672x^{27} + 60776x^{28} + 56640x^{29} - 27288x^{30} - 17506x^{31} + 8657x^{32} + 3844x^{33} - 1918x^{34} - 566x^{35} + 283x^{36} + 50x^{37} - 25x^{38} - 2x^{39} + x^{40}$$

$$39 - 89y - 374y^2 + 1090y^3 + 1287y^4 - 4818y^5 - 765y^6 + 4638y^7 + 5579y^8 + 6996y^9 - 16844y^{10} - 31588y^{11} + 31364y^{12} + 50864y^{13} - 51824y^{14} - 37502y^{15} + 64363y^{16} + 3904y^{17} - 55346y^{18} + 13794y^{19} + 39327y^{20} - 10450y^{21} - 31305y^{22} + 2696y^{23} + 26580y^{24} + 2320y^{25} - 19056y^{26} - 4920y^{27} + 10904y^{28} + 4816y^{29} - 5152y^{30} - 2874y^{31} + 2017y^{32} + 1084y^{33} - 614y^{34} - 254y^{35} + 131y^{36} + 34y^{37} - 17y^{38} - 2y^{39} + y^{40}$$

A.6 Fordsche Fundamentalbereiche von $\mathcal{M}(f_2^{-n} \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^m)$, $m, n \in \mathbb{N}$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^2 . f_2^2 . f_1^4$



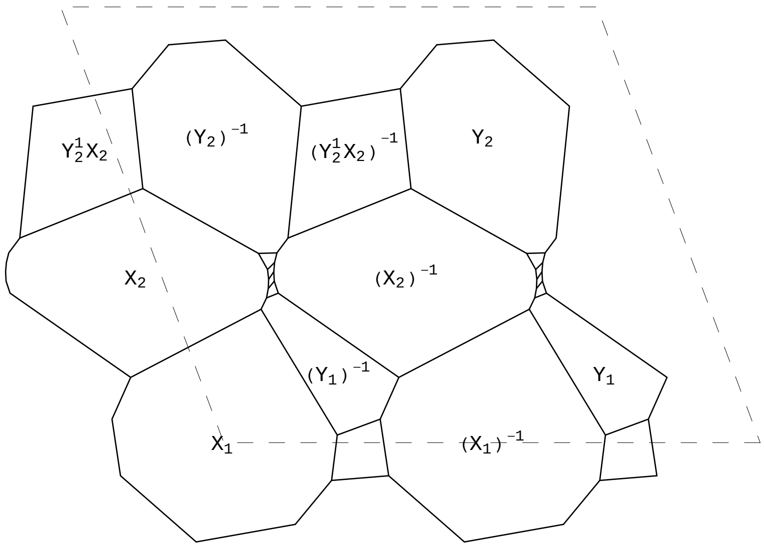
$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2^2 Y_1$

$x = 1.74321 + 0.181291\,I$, $y = 1.53312 - 1.41536\,I$, $z = 1.62531 + 0.464921\,I$
$t = -0.556349 + 1.66202\,I$

$8 - 213x^2 + 2685x^4 - 10588x^6 + 24248x^8 - 37576x^{10} + 44610x^{12} - 48316x^{14} + 57170x^{16} - 70112x^{18} + 75371x^{20} - 64392x^{22} + 41754x^{24} - 19968x^{26} + 6863x^{28} - 1640x^{30} + 258x^{32} - 24x^{34} + x^{36}$

$72 - 1029y^2 + 7373y^4 - 19816y^6 + 24856y^8 - 13276y^{10} + 1122y^{12} - 4336y^{14} + 12606y^{16} - 11424y^{18} + 4419y^{20} - 788y^{22} + 1098y^{24} - 1624y^{26} + 1143y^{28} - 464y^{30} + 114y^{32} - 16y^{34} + y^{36}$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1^5 . f_2^2 . f_1^2$

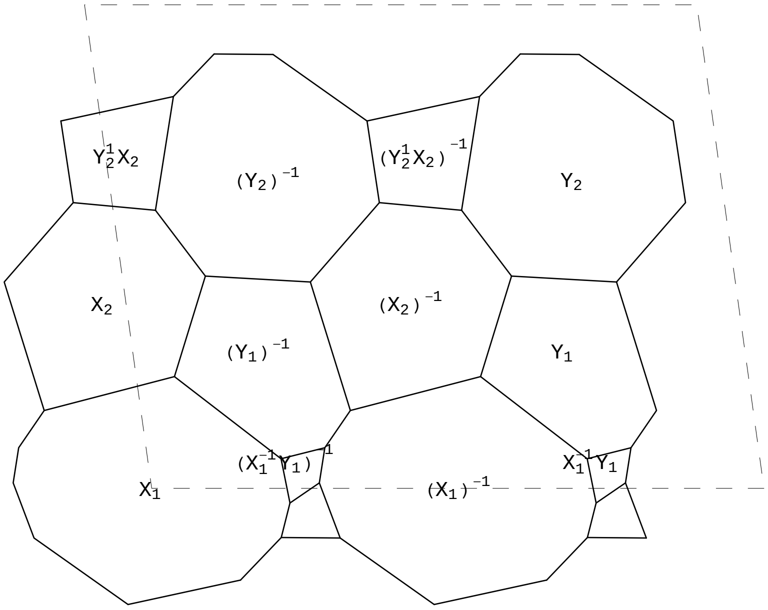


$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2^5 Y_1$

$x = 1.63674 + 0.457083\,I$, $y = 1.56038 - 1.46188\,I$, $z = 1.79954 + 0.115645\,I$
$t = -0.608226 + 1.62562\,I$

A.7 Fordsche Fundamentalbereiche von $\mathcal{M}(f_2^{-n} \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-m})$, $m, n \in \mathbb{N}$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1 . f_2^2 . f_1^3$



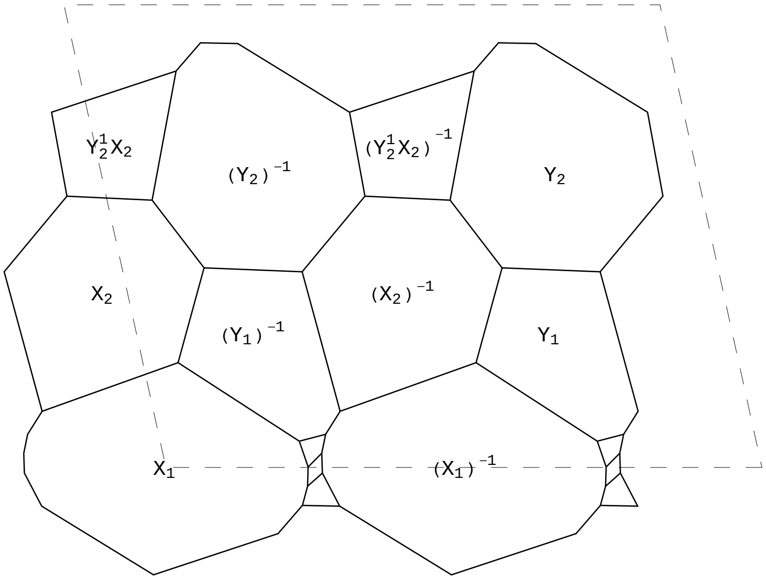
$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2 Y_1$

$x = 1.64912 + 0.335894\,I$, $y = 1.5113 - 1.05179\,I$, $z = 1.53389 + 0.852443\,I$
$t = -0.219315 + 1.57924\,I$

$$72 - 229x^2 + 313x^4 - 112x^6 - 114x^8 + 36x^{10} + 131x^{12} - 136x^{14} + 58x^{16} - 12x^{18} + x^{20}$$

$$32 - 188y^2 + 397y^4 - 418y^6 + 331y^8 - 175y^{10} + 105y^{12} - 35y^{14} + 18y^{16} - 4y^{18} + y^{20}$$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1 . f_2^2 . f_1^4$



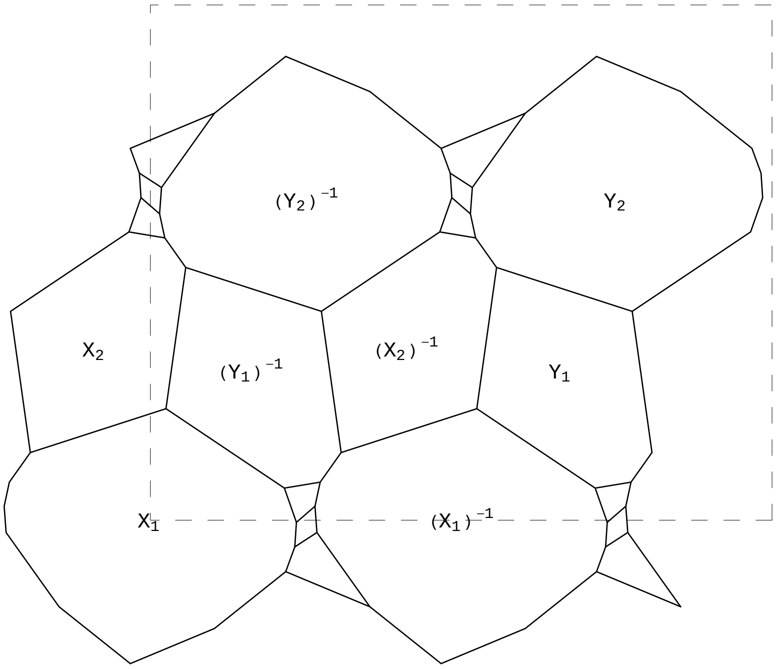
$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2 Y_1$

x = 1.72671 + 0.200458 I, y = 1.53277 − 1.12096 I, z = 1.56046 + 0.814164 I
t=−0.342094 + 1.54992 I

$3 + 31 x + 90 x^2 - 10 x^3 - 255 x^4 - 86 x^5 + 437 x^6 + 60 x^7 - 658 x^8 + 276 x^9 + 648 x^{10} - 744 x^{11} - 204 x^{12} + 960 x^{13} - 248 x^{14} - 794 x^{15} + 349 x^{16} + 428 x^{17} - 210 x^{18} - 142 x^{19} + 71 x^{20} + 26 x^{21} - 13 x^{22} - 2 x^{23} + x^{24}$

$6 + 7 y + 12 y^2 - 244 y^3 + 192 y^4 + 516 y^5 - 484 y^6 - 508 y^7 + 698 y^8 + 64 y^9 - 572 y^{10} + 344 y^{11} + 212 y^{12} - 296 y^{13} - 42 y^{14} + 99 y^{15} + 29 y^{16} + 4 y^{17} - 26 y^{18} - 22 y^{19} + 15 y^{20} + 10 y^{21} - 5 y^{22} - 2 y^{23} + y^{24}$

THE AUTOMORPHISM $f_2 . f_1 . f_2^4 . f_1^4$



$X_2 = Y_1 X_1$ and $Y_2 = X_2 Y_1$

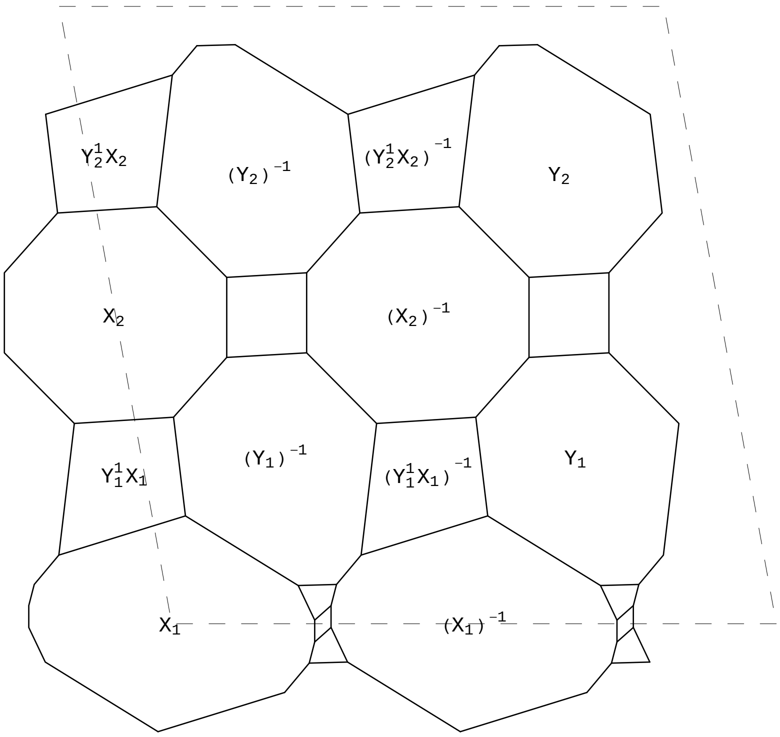
$x = 1.71257 + 0.239711 I$, $y = 1.56849 - 0.982334 I$, $z = 1.56849 + 0.982334 I$
$t = 1.71724 \cdot 10^{-6} + 1.65749 I$

$$6 - 21x - 40x^2 + 835x^3 + 793x^4 - 5736x^5 - 2468x^6 + 20172x^7 + 5678x^8 - 45692x^9 - 20248x^{10} + 66636x^{11} + 57615x^{12} - 55880x^{13} - 108076x^{14} + 11480x^{15} + 151787x^{16} + 25866x^{17} - 175785x^{18} - 8029x^{19} + 164951x^{20} - 65664x^{21} - 108540x^{22} + 141678x^{23} + 28212x^{24} - 167660x^{25} + 32066x^{26} + 137893x^{27} - 49512x^{28} - 83800x^{29} + 36836x^{30} + 38006x^{31} - 18135x^{32} - 12678x^{33} + 6251x^{34} + 3010x^{35} - 1501x^{36} - 480x^{37} + 240x^{38} + 46x^{39} - 23x^{40} - 2x^{41} + x^{42}$$

Wie die Berechnugen nach dem Resultantenverfahren zeigen, ist der Spurenkoerper hier Q(x^2).

A.8 Fordsche Fundamentalbereiche von Torus-Bündeln nach dem Newton-Verfahren

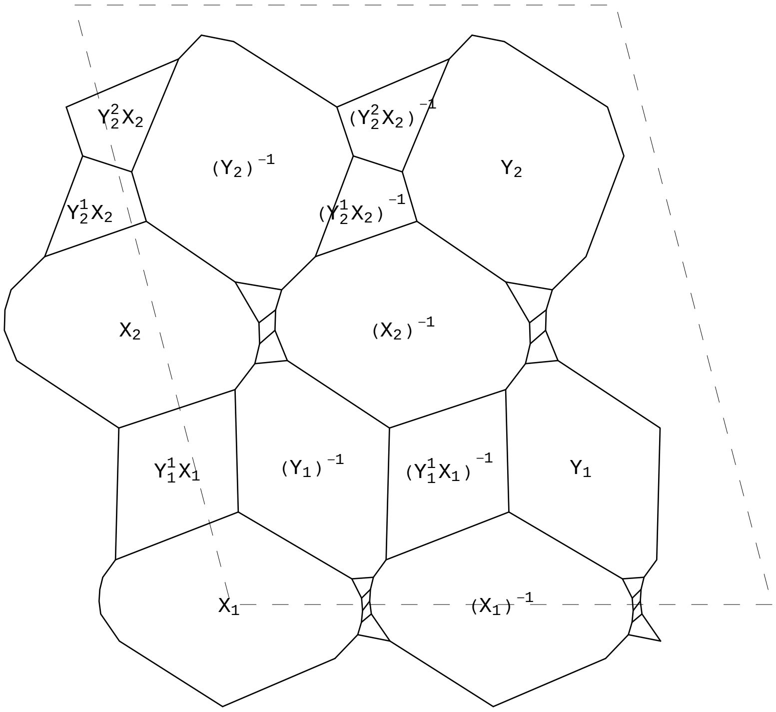
THE AUTOMORPHISM $f_2^2 . f_1^2 . f_2^2 . f_1^4$



$X_2 = Y_1^2 X_1$ and $Y_2 = X_2^2 Y_1$

$x = 1.71427 + 0.217872\,I$, $y = 1.56466 - 0.756558\,I$, $z = 1.49879 + 1.24672\,I$
$t = -0.371716 + 2.04223\,I$

THE AUTOMORPHISM $f_2^2 . f_1^4 . f_2^3 . f_1^5$



$X_2 = Y_1^2\ X_1$ and $Y_2 = X_2^4\ Y_1$

$x = 1.77559 + 0.142959\,I$, $y = 1.59617 - 0.886332\,I$, $z = 1.57312 + 1.10598\,I$
$t = -0.577704 + 2.21376\,I$

B Computer-Programme

In diesem Anhang finden sich die für die Untersuchungen erstellten Programme, zum einen die in der Arbeit genannten Routinen zur Berechnung von $\mathcal{C}(f)$ und $\mathcal{L}(f)$, welche die Rekursion (3.86) - (3.93) automatisieren; zum anderen das Programm FordDomain, welches zu einem Automorphismus in Standarddarstellung und zugehörigem Charaktertripel das kombinatorische Schema nach Abbildung 4 umsetzt und einen metrisch korrekten Fordschen Fundamentalbereich in Projektion auf $\mathbb{C}$ zeichnet. Die in der Arbeit geschilderten Verfahren zur Bestimmung der geometrisch korrekten Charaktere lassen sich prinzipiell auf alle hyperbolischen Torus-Bündel anwenden. Es ergeben sich aber Einschränkungen durch den unumgänglichen Einsatz des Computers, die sich z.B. bei der Nullstellenbestimmung von Polynomen hohen Grades mit großen ganzen Koeffizienten oder bei der sukzessiven Resultantenbildung von Polynomsystemen in mehreren Variablen bemerkbar machen. Alle Prozeduren beziehen sich auf Mathematica 3.0 [74].

B.1 Bestimmung der polynomialen Bestimmungsgleichungen

Zur Vorbereitung werden die Tschebyscheff-Polynome Tscheb und die verwandten Tschebyscheff-Polynome STscheb definiert.

```
Tscheb[x_, k_] := Tscheb[x,k] =
     Expand[x*Tscheb[x, k - 1] - Tscheb[x, k - 2]]
Tscheb[x_, 0] := 0
Tscheb[x_, 1] := 1

STscheb[z_, n_] := STscheb[z,n] =
     Expand[z*STscheb[z, n - 2] - STscheb[z, n - 4]]
STscheb[z_, 0] := 2
STscheb[z_, 1] := 1
STscheb[z_, 2] := z
STscheb[z_, 3] := z - 1
```

Die Routine SortPol bezieht sich auf die Serie $\mathcal{M}(f_2^n \circ f_1^m)$ in Abschnitt 3.4. Sie bestimmt das Polynom, unter dessen Nullstellen sich der gesuchte Charakter x befindet. Als Eingabe sind nur die Exponenten n und m von Nöten. In der angegebenen Fassung sind n und m positiv angenommen. Ist einer der beiden Parameter negativ, muß entsprechend der Regel $p_{-n} = p_n$ leicht umgeschrieben werden.

```
SortPol[n_,m_] := Block[{x,y},
     poly = STscheb[y,n-2] STscheb[x,m-2] - STscheb[y,n+2] STscheb[x,m+2];
     k = Exponent[poly,y];
     For[ pol1=0; pol2=Coefficient[poly,y,0]; i=1, i<k+1, i++,
          If[ Mod[i,2]==0, pol2 = pol2 + Coefficient[poly, y^i]y^i,
             pol1=pol1+Coefficient[poly,y^i]y^i]];
     Factor[Simplify[
          Expand[pol1^2-pol2^2/. {y->x STscheb[x,m]/Sqrt[ If[Mod[m,2]==0,
             x^2-4, x-2] ]}] *
          If[ Mod[m,2]==0, x^2-4, x-2]^(k)
          ]]
```

```
    ]
```

Die Routine FinPol bezieht sich auf die Serie $\mathcal{M}((f_2 \circ f_1)^s \circ f_2 \circ f_1^m)$ in Abschnitt 3.5.1. Auch hier wird das Polynom ermittelt, in dessen Nullstellenmenge sich der gesuchte Charakter x befindet. Als Eingaben werden die Exponenten s und m gebraucht. Auch hier sind s und m positiv. Negatives m führt zu denselben marginalen Veränderungen, die bei SortPol erwähnt wurden.

```
FinPol[s_,m_] := Block[{k, r, x, y, poly},

    (* Rekursionen nach (3.97), (3.98), (3.99) *)

    rx[j_] := rz[j-1]; rx[1] := x;
    ry[j_] := ry[j-1]*rz[j-1] - rx[j-1]; ry[1] := y;
    rz[j_] := rx[j]*ry[j] - ry[j-1]; rz[1] := z;

    k = If[IntegerQ[s/2], s/2, (s-1)/2];

    poly = Numerator[

            Together[

                If[Mod[s,2]==0, rz[k+1] - rz[k], ry[k+2] - ry[k+1]]
                    /.{ z-> y STscheb[x,m+2]/STscheb[x,m]}
                ]

            ];

    r=Exponent[poly,y];

    For[ pol1=0; pol2=Coefficient[poly,y,0]; i=1, i<r+1, i++,

            If[ Mod[i,2]==0, pol2 = pol2 + Coefficient[poly, y^i]y^i,
                pol1=pol1+Coefficient[poly,y^i]y^i]];

    Factor[Numerator[

            Together[ pol1^2-pol2^2/.{ y-> x STscheb[x,m]/Sqrt[ If[Mod[m,2]==0,
                x^2-4, x-2]]}] * If[Mod[m,2]==0, x^2-4, x-2]^(r)
            ]]

    ]
```

Die folgenden Routinen zur Bestimmung der Mengen $\mathcal{L}(f)$, $f = \prod_{j=1}^k f_2^{n_j} f_1^{m_j} \in \mathcal{A}^+$ beziehen sich auf Abschnitt 3.5.2. Sie benötigen als Eingabe eine Liste mit den Exponenten der Art $\{n_l, m_l, \ldots, n_1, m_1\}$.

```
PolSys[Exponenten_] := Block[{n, m, anzahl, i},

    For[i = 1; expo = {First[Exponenten], Last[Exponenten]}, i<Length[Exponenten]
        - 1, i++,

            expo = Join[{Exponenten[[i + 1]]}, expo]
            ];

    anzahl = Length[expo]/2;
    n[l_] := expo[[ Length[expo] - 2l + 1 ]];
    m[l_] := expo[[ Length[expo] - 2l + 2 ]];
    x[l_] := Tscheb[ y[l - 1], n[l - 1] ] * z[l - 1] - Tscheb[ y[l - 1], n[l - 1] - 1 ] *
        x[l - 1]; x[1] = x;
```

```
hilfsterm[l_] := Tscheb[ y[l - 1], n[l - 1] + 1 ] * z[l - 1] - Tscheb[ y[l - 1],
    n[l - 1] ] * x[l - 1];
y[l_] := Tscheb[ x[l], m[l] ] * hilfsterm[l] - Tscheb[ x[l], m[l] - 1 ] * y[l - 1];
    y[1] = y;
z[l_] := Tscheb[ x[l], m[l] + 1 ] * hilfsterm[l] - Tscheb[ x[l], m[l] ] * y[l - 1];
    z[1] = z;
gleichx = Expand[ Tscheb[ y[anzahl], n[anzahl] ] * z[anzahl] - Tscheb[
    y[anzahl], n[anzahl] - 1] * x[anzahl] - x];
gleichz= Expand[ Tscheb[ x, m[1] ] z - y Tscheb[ x, m[1]+1 ] + y[anzahl]
    ];
markoff = x * y * z - x^2 - y^2 - z^2;
]
```

```
PolSysB[Exponenten_] := Block[{n, m, anzahl, i},

    For[i = 1; expo = {First[Exponenten], Last[Exponenten]}, i<Length[Exponenten]
        - 1, i++,

            expo = Join[{Exponenten[[i + 1]]}, expo]
            ];

    anzahl = Length[expo]/2;
    n[l_] := expo[[ Length[expo] - 2l + 1 ]];
    m[l_] := expo[[ Length[expo] - 2l + 2 ]];
    x[l_] := Tscheb[ y[l - 1], n[l - 1] ] * z[l - 1] - Tscheb[ y[l - 1], n[l - 1] - 1 ] *
        x[l - 1]; x[1] = x;
    hilfsterm[l_] := Tscheb[ y[l - 1], n[l - 1] + 1 ] * z[l - 1] - Tscheb[ y[l - 1],
        n[l - 1] ] * x[l - 1];
    y[l_] := Tscheb[ x[l], m[l] ] * hilfsterm[l] - Tscheb[ x[l], m[l] - 1 ] * y[l - 1];
        y[1] = y;
    z[l_] := Tscheb[ x[l], m[l] + 1 ] * hilfsterm[l] - Tscheb[ x[l], m[l] ] * y[l - 1];
        z[1] = z;
    gleichzvar = y Tscheb[ x, m[1]+1 ] - z Tscheb[ x, m[1] ];
    gleichx = Expand[ Tscheb[ gleichzvar, n[anzahl] ] * z[anzahl] - Tscheb[
        gleichzvar, n[anzahl] - 1 ] * x[anzahl] - x];
    gleichz = Expand[Tscheb[ x, m[1] ] z - y Tscheb[ x, m[1]+1 ] + y[anzahl]];
    markkoff = x*y*z - x^2 - y^2 - z^2;
    ]
```

B.2 Das Programm FordDomain

Zur Vorbereitung werden einige einfache Funktionen definiert, die z.T. gegebene MATHEMATICA-Befehle abkürzen. Wichtig ist die Prozedur Spkt, die den Schnittpunkt dreier sich schneidender isometrischer Sphären berechnet.

(Vereinfachende und einfache Definitionen.* Mit *ermittelt den Mittelpunkt der isometrischen Spähre einer $SL_2(\mathbb{C})$-Matrix. *)*

```
Kon[x_] := Conjugate[x];
Pow[list_, k_] := MatrixPower[list, k];
plus1[k_] := k+1;
minus1[k_] := k - 1;
Format[schreibpotenz[x_,y_]] := HoldForm[x^y];
```

```
ko[c_, d_] := -d/c;
Mit[list_] := ko@@list[[2]];
koordR2[z_] := {Re[z],Im[z]};
```

(Berechnung des Schnittpunktes dreier isometrischer Sphären mit dem Befehl* Spkt. *Die Formel stammt aus [3].* S1, S2, S3 *sind $SL_2(\mathbb{C})$-Matrizen. *)*

```
w[S1_, S2_, S3_] := Det[

    {{Abs[S1[[2, 1]]]^2, Kon[S1[[2, 1]]] S1[[2, 2]], Abs[S1[[2, 2]]]^2 - 1},
    {Abs[S2[[2, 1]]]^2, Kon[S2[[2, 1]]] S2[[2, 2]], Abs[S2[[2, 2]]]^2 - 1},
    {Abs[S3[[2, 1]]]^2, Kon[S3[[2, 1]]] S3[[2, 2]], Abs[S3[[2, 2]]]^2 - 1}}
    ];

u[S1_, S2_, S3_] := -I Det[

    {{ S1[[2, 1]] Kon[S1[[2, 2]]], Kon[S1[[2, 1]]] S1[[2, 2]], Abs[S1[[2, 2]]]^2-1},
     {S2[[2, 1]] Kon[S2[[2, 2]]], Kon[S2[[2, 1]]] S2[[2, 2]], Abs[S2[[2, 2]]]^2 - 1},
    {S3[[2, 1]] Kon[S3[[2, 2]]], Kon[S3[[2, 1]]] S3[[2, 2]], Abs[S3[[2, 2]]]^2 - 1}}
    ];

v[S1_, S2_, S3_] := -I Det[

    {{Abs[S1[[2, 1]]]^2, S1[[2, 1]] Kon[S1[[2, 2]]], Kon[S1[[2, 1]]] S1[[2, 2]]},
    {Abs[S2[[2, 1]]]^2, S2[[2, 1]] Kon[S2[[2, 2]]], Kon[S2[[2, 1]]] S2[[2, 2]]},
    {Abs[S3[[2, 1]]]^2, S3[[2, 1]] Kon[S3[[2, 2]]], Kon[S3[[2, 1]]] S3[[2, 2]]}}
    ];
```

Es folgt die Prozedur FordDomain.

(Der Befehl „FordDomain“ benötigt als Eingabe die Exponenten der Monodromie in Standarddarstellung als Liste „Exponenten“= $\{n_l, m_l, \ldots, n_1, m_1\}$ sowie die zuvor ermittelten kanonischen Charaktere x,y,z. *)*

```
FordDomain[Exponenten_, x_, y_, z_] :=


    Block[

            {m, n, X, Y, Xi, Yi, ms1, ms21, ssp11, ssp12, ssp13a, ssp13,
              ms22, ssp14, ssp15, ssp21, ssp22, ms31, ssp23a, ssp23,
              ssp24, ssp25, Liste1, Liste2, Liste3, Liste4, Zusatzliste,
              schreibliste1fkt, schreibliste2fkt, schreibliste3fkt, schreib-
              liste4fkt, intX, intY, Xalt, Yalt , usp0, usp1, usp2, usp3,
              usp4, mit, osp0, osp1, osp2, osp3, osp4, vsp0, vsp1, vsp2,
              vsp3, vsp4, nsp0, nsp1, nsp2, nsp3, nsp4, l0, l1, l2, l3, l4,
              quer1, quer2, quer3, quer4, kasten, t},
```

(Definition der Listen „expo1wahr“ = Exponenten zu f_1 und „expo2wahr“= Exponenten zu f_2 *)*

```
    Block[{i},

            For[i=1; expo1wahr={}; expo2wahr={}, i<Length[Exponenten]+1,
              i++,
```

```
                If[ Mod[i,2]==0, expo1wahr = Join[{Exponenten[[i]]},
                    expo1wahr], expo2wahr= Join[{Exponenten[[i]]},expo2wahr]]
            ]
    ];
```

(∗ Definition der Liste „expo". Es handelt sich um eine Permutation der Exponenten, welche die Kombinatorik des Fordschen Fundamentalbereiches entsprechend dem vorgestellten Schema bestimmt. ∗)

```
Block[{i},
        For[i=1; expoalt={}, i<Length[expo1wahr], i++,
                expoalt = Join[
                        Join[{expo1wahr[[i+1]]}, {expo2wahr[[i]]}],
                            expoalt]]
            ];
expo=Join[{expo1wahr[[1]], Last[expo2wahr]}, expoalt];
```

(∗ Definition der Matrizen, die in einem Block des kombinatorischen Schemas eingehen. ∗)

Xalt = $\{\{x, -1/x\}, \{x, 0\}\}$;
Yalt = $\{\{-z/x, 2z/x - y/x^2\}, \{-y, y + z/x\}\}$;

```
Xneu[k_] := Pow[ Yneu[k-1], expo[[2 k-2]] ].Xneu[k-1];
Yneu[k_] := Pow[ Xneu[k], expo[[2k-1]] ].Yneu[k-1];
Xneu[1] := Xalt;
Yneu[1] := Yalt;
```

*(∗ BAU EINER SCHLEIFE.
Es wird die Blockstruktur des kombinatorischen Schemas ausgenutzt. Pro Schleifendurchlauf wird ein Block bearbeitet. Es werden alle Schnittpunkte von je drei isometrischen Sphären laut Schema berechnet. ∗)*

```
For[i=1; usp1alt={}; usp2alt={}; mittelpunkttext={}, i<Length[expo]/2+1,
    i++,
        m=expo[[2i-1]];
        n=expo[[2i]];
        X=Xneu[i];
        Y=Yneu[i];
        Xi=Inverse[X];
        Yi=Inverse[Y];
```

(∗ Die X-Kombinatorik ∗)
(∗ 1. Schnittpunktspalte – Schnitte mit X ∗)

```
        sp21[k_] := Pow[Xi,k].Y;
        ms21 = Inverse/@ Reverse[ Array[sp21,m] ];
        sx[k_] := Spkt[ X, ms21[[k]], ms21[[k+1]] ] [[1]];
        ssp11 = Array[sx, m-1];
```

```
ssp12 = {Spkt[ X, Yi, Last[ms21] ] [[1]]};

(* 2. Schnittpunktspalte – Schnitte mit X^-1 *)

sxi[k_] := Spkt[ Xi, ms21[[k]], ms21[[k+1]] ] [[1]];
ssp21 = Array[sxi, m-1];
ssp22 = {Spkt[ Xi, Yi, Last[ms21] ] [[1]]};

(* Die Y-Kombinatorik *)
(* 1. Schnittpunktspalte – Schnitte mit Y^-1 *)

syil[k_] := Spkt[ Yi, ms1[[k]], ms1[[k+1]] ] [[1]];
ssp13a = {Spkt[ X, Yi, First[ms1]] [[1]]};
ssp13 = Array[syil, n-1];

(* 2. Schnittpunktspalte – Schnitte mit Y *)

ms31 = Inverse/@ ms1;
syir[k_] := Spkt[ Yi, ms31[[k]], ms31[[k+1]] ] [[1]];
ssp23a = {Spkt[ Xi, Yi, First[ms31]] [[1]]};
ssp23 = Array[syir, n-1];
usp1alt = Join[ usp1alt, Join[ ssp11,ssp12,ssp13a,ssp13 ] ];
usp2alt = Join[ usp2alt, Join[ ssp21,ssp22,ssp23a,ssp23 ] ];

(* Die isometrischen Sphären, die laut Schema zum Ford-
   schen Fundamentalbereich beitragen, werden beschrif-
   tet. Die Bezeichnung soll in den Mittelpunkt der isome-
   trischen Sphäre gesetzt werden. Dazu werden die Mit-
   telpunkte in Listen zusammengefaßt. *)

Liste1 = Map[ koordR2, Map[Mit, ms1] ];
Liste2 = Reverse[ Map[ koordR2, Map[Mit, ms21] ] ] ;
Liste4 = Reverse[ Map[ koordR2, Map[plus1, Map[Mit, ms21]]]];
Liste3 = Map[ koordR2, Map[plus1, Map[Mit, ms1] ]];
Zusatzliste = Map[ koordR2, Map[Mit, {X,Y,Xi,Yi}]];

(* Das Schreiben der Beschriftung. In jedem Schleifen-
   durchlauf wird mit einem internen X und Y gerechnet.
   Die Bezeichnungen der Polygone bzw. isometrischen
   Sphären spiegeln diese Schleifendurchläufe wider. *)

intX = Subscripted["X"[i]];
intY = Subscripted["Y"[i]];
schreibliste3fkt[k_] := Text[
        schreibpotenz[ StringForm[" ‘ ‘ ‘ ‘ ", schreib-
          potenz[intY,k], intX], StringForm["-‘ ‘ ",1] ],
          Liste3[[k]] ];
schreibliste2fkt[k_] := Text[
        schreibpotenz[ StringForm[" ‘ ‘ ‘ ‘ ", schreibpo-
          tenz[intX, StringForm["-‘ ‘ ",k]], intY], StringForm["-
          ‘ ‘ ",1]], Liste2[[k]] ];
```

```
        schreibliste4fkt[k_]:= Text[
                StringForm[" ‘ ‘ ‘ ‘ ", schreibpotenz[intX, StringForm["-
                    ‘ ‘ ",k]],intY], Liste4[[k]] ];
        schreibliste1fkt[k_]:= Text[
                StringForm[" ‘ ‘ ‘ ‘ ", schreibpotenz[intY,k], intX],
                    Liste1[[k]] ];

        mittelpunkttext = Join[
                mittelpunkttext, Join[
                        Array[ schreibliste1fkt, n-1],
                        Array[ schreibliste2fkt, If[ Mod[m,2]==1,
                            (m-1)/2, m/2] ],
                        Array[ schreibliste3fkt, n-1],
                        Array[ schreibliste4fkt, If[Mod[m,2]==1,
                            (m-1)/2, m/2]],
                        {Text[intX, Zusatzliste[[1]] ]},{Text[intY,
                            Zusatzliste[[2]] ]},
                        {Text[ schreibpotenz[intX, StringForm["-
                            ‘ ‘ ",1]], Zusatzliste[[3]] ]},
                        {Text[ schreibpotenz[intY, StringForm["-
                            ‘ ‘ ",1]], Zusatzliste[[4]] ]} ]
                    ];
    ];
```

(∗ ENDE DER SCHLEIFE ∗)

(∗ Es werden noch einige weitere Schnittpunkte berechnet, die sich aus den Translationen mittels L und M ergeben. ∗)

```
sp22[k_] := Pow[ Pow[Y,n].X, k].Y;
ms22 = Inverse[ sp22[1] ];
ssp14 = {Spkt[Yi, Last[ms1],ms22] [[1]]};
ssp24 = {Spkt[Yi,Last[ms31],ms22] [[1]]};
usp1 = Join[usp1alt, ssp14];
usp2 = Join[usp2alt, ssp24];
usp0 = minus1/@usp2;
usp3 = plus1/@usp1;
usp4 = plus1/@usp2;
If[ n==1, osp1 = ssp13a, osp1={Last[ssp13]}];
If[ n==1, osp2 = ssp23a, osp2={Last[ssp23]}];
osp0 = minus1/@osp2;
osp3 = plus1/@osp1;
osp4 = plus1/@osp2;
mit = Mit[Last[ms1]];
versch[k_] := k - mit;
vsp0 = versch/@osp0;
vsp1 = versch/@osp1;
vsp2 = versch/@osp2;
vsp3 = versch/@osp3;
```

```
vsp4 = versch/@osp4;

(* Definition der Listen aller Schnittpunkte. *)

nsp0 = Join[vsp0, usp0];
nsp1 = Join[vsp1, usp1];
nsp2 = Join[vsp2, usp2];
nsp3 = Join[vsp3, usp3];
nsp4 = Join[vsp4, usp4];

(* Die Schnittpunkte liegen als komplexe Zahlen vor und werden in Real-
    und Imaginärteil zerlegt. *)

l0 = Drop[koordR2/@nsp0, -1];
l1 = koordR2/@nsp1;
l2 = koordR2/@nsp2;
l3 = koordR2/@nsp3;
l4 = Drop[koordR2/@nsp4, 1];

(* Das Zeichnen der Verbindungsstrecken zwischen den Schnittpunkten.
    *)
expozahl[k_] := Sum[ expo[[j]], {j, 1, 2k-2} ]; expozahl[1] := 0 ;

For[ i=1; quer1={Line[ {First[l0], First[l1]} ]}; quer2={Line[ {Last[l1], Last[l2]}
    ]}; quer3={Line[ {First[l2],First[l3]} ]}; quer4={Line[ {Last[l3], Last[l4]}
    ]}, i<Length[expo]/2+1, i++,

        querstrecke2[k_] := Line[{l1[[ k+1+expozahl[i] ]], l2[[ k+1+expozahl[i]]]}];
        quer2 = Join[quer2, Array[querstrecke2, expo[[2i-1]] ]];
        querstrecke4[k_] := Line[{l3[[ k+1+expozahl[i] ]], l4[[ k+expozahl[i]]]}];
        quer4 = Join[quer4, Array[querstrecke4, expo[[2i-1]] ]];
        querstrecke3[k_] := Line[{l2[[ k+1+expozahl[i]+expo[[2i-1]]]],
            l3[[k+1+expozahl[i]+expo[[2i-1]] ]]}];
        quer3 = Join[quer3, Array[querstrecke3, expo[[2i]] ]];
        querstrecke1[k_] := Line[{l0[[ k+1+expozahl[i]+expo[[2i-1]]]],
            l1[[ k+1+expozahl[i]+expo[[2i-1]] ]]}];
        quer1 = Join[quer1, Array[querstrecke1, expo[[2i]] ]];

    ];

(* Das Zeichnen des Stabilisators von Unendlich als Parallelogramm
    gebildet aus den Translationen L und M. *)

kasten = Line[{ {2,0},{0,0}, koordR2[mit], {koordR2[mit][[1]] +2, koordR2[mit][[2]]},
    {2,0} }];

(* Das Schreiben der Überschrift – die Monodromie *)
Block[{i},

        For[ i=2; f2=Subscripted[f[2]]; f1=Subscripted[f[1]];
        t=f2^expo2wahr[[1]].f1^expo1wahr[[1]], i<Length[expo1wahr]+1,
            i++,
```

```
        t=f2^expo2wahr[[i]].f1^expo1wahr[[i]].t
    ]];
```

(∗ Die Ausgabe. ∗)

```
Show[
    Graphics[quer1], Graphics[quer2], Graphics[quer3], Graphics[quer4],
        Graphics[Line[l0]], Graphics[Line[l1]], Graphics[Line[l2]], Gra-
        phics[Line[l3]], Graphics[Line[l4]], Graphics[mittelpunkttext],
        Graphics[Dashing[{0.02, 0.02}]], Graphics[Thickness[0.00005]],
        Graphics[kasten], AspectRatio → Automatic, PlotRange
        → All, PlotLabel → StringForm["THE AUTOMORPHISM
        ‘ ‘",t]
    ];
```

(∗ Erklärung der Bezeichnungen laut Rekursion und Angabe der verwendeten numerischen Werte der Charaktere x,y,z. ∗)

```
Block[{i},
    For[ i=2, i< Length[expo]/2+1, i++,
        Print[StringForm["‘ ‘ = ‘ ‘ ‘ ‘ and ‘ ‘ = ‘ ‘
            ‘ ‘ ", Subscripted["X"[i]], Subscripted["Y"[i
            - 1]]^expo[[2i - 2]], Subscripted["X"[i - 1]],
            Subscripted["Y"[i]], Subscripted["X"[i]]^expo[[2i
            - 1]], Subscripted["Y"[i - 1]] ]]
        ]];
    ColumnForm[{StringForm["x = ‘ ‘, y = ‘ ‘, z = ‘ ‘", x, y, z],
        StringForm["t=‘‘", mit]}]
  ]
```

Literatur

[1] R. Adler, C. Tresser, and P. A. Worfolk. Topological conjugacy of linear endomorphisms of the 2-torus. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(4):1633–1652, 1997.

[2] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita. Punctured torus groups and two-parabolic groups. Unpublished, 1998.

[3] P. Alestalo and H. Helling. On torus fibrations over the circle. Ergänzungsreihe 97-005, Universität Bielefeld, Sonderforschungsbereich 343, 1997.

[4] H. Appelgate and H. Onishi. Continued fractions and the conjugacy problem in SL(2,Z). *Comm. Algebra*, 9(11):1121–1130, 1981.

[5] A. Basmajian. Selected problems in Kleinian groups and hyperbolic geometry. In *Lipa's legacy (New York, 1995)*, pages 9–15. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[6] G. Baumslag. *Topics in combinatorial group theory.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[7] R. Benedetti and C. Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry.* Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[8] L. Bers. An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem by Thurston. *Acta Math.*, 141(1-2):73–98, 1978.

[9] M. Bestvina and M. Handel. Train-tracks for surface homeomorphisms. *Topology*, 34(1):109–140, 1995.

[10] S. Betley, J. H. Przytycki, and T. Zukowski. Hyperbolic structures on Dehn filling of some punctured-torus bundles over S^1. *Kobe J. Math.*, 3(2):117–147, 1987.

[11] F. Blumer. Über die verschiedenen Kettenbruchentwicklungen beliebiger reeller Zahlen und die periodischen Kettenbruchentwicklungen quadratischer Irrationalitäten (Untersuchungen zur Theorie der halbregelmäßigen Kettenbruchentwicklungen I.). *Acta Arithmetica*, 3:3–63, 1939.

[12] B. H. Bowditch. A variation of McShane's identity for once-punctured torus bundles. *Topology*, 36(2):325–334, 1997.

[13] B. H. Bowditch. Markoff triples and quasi-Fuchsian groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 77(3):697–736, 1998.

[14] B. H. Bowditch, C. Maclachlan, and A. W. Reid. Arithmetic hyperbolic surface bundles. *Math. Ann.*, 302(1):31–60, 1995.

[15] P. J. Callahan, M. V. Hildebrand, and J. R. Weeks. A census of cusped hyperbolic 3-manifolds. *Math. Comp.*, 68(225):321–332, 1999. With microfiche supplement.

[16] P. J. Callahan and A. W. Reid. Hyperbolic structures on knot complements. *Chaos Solitons Fractals*, 9(4-5):705–738, 1998. Knot theory and its applications.

[17] C. Cao. Some trace inequalities for discrete groups of Möbius transformations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123(12):3807–3815, 1995.

[18] A. J. Casson and S. A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[19] B. Chandler and W. Magnus. The grouptheoretical papers of Jakob Nielsen. In *Jakob Nielsen: collected mathematical papers. Vol. 2*, Contemporary Mathematicians, pages 398–406. Birkhäuser Boston Inc., Boston, Mass., 1986.

[20] M. Culler. Lifting representations to covering groups. *Adv. in Math.*, 59(1):64–70, 1986.

[21] M. Culler, W. Jaco, and H. Rubinstein. Incompressible surfaces in once-punctured torus bundles. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 45(3):385–419, 1982.

[22] M. Culler and P. B. Shalen. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 117(1):109–146, 1983.

[23] N. M. Dunfield. Examples of non-trivial roots of unity at ideal points of hyperbolic 3-manifolds. *Topology*, 38(2):457–465, 1999.

[24] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poénaru, et al. Travaux de Thurston sur les surfaces. *Astérisque*, 66-67:1–284, 1979. Séminaire Orsay.

[25] W. Floyd and A. Hatcher. Incompressible surfaces in punctured-torus bundles. *Topology Appl.*, 13(3):263–282, 1982.

[26] D. Gabai. On 3-manifolds finitely covered by surface bundles. In *Low-dimensional topology and Kleinian groups (Coventry/Durham, 1984)*, pages 145–155. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

[27] F. W. Gehring and G. J. Martin. Iteration theory and inequalities for Kleinian groups. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 21(1):57–63, 1989.

[28] J. Gilman. A discreteness condition for subgroups of PSL(2,C). In *Lipa's legacy (New York, 1995)*, pages 261–267. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[29] H. Helling. Diskrete Untergruppen von SL(2,R). *Invent. Math.*, 17:217–229, 1972.

[30] H. Helling, 1999. Unpublished manuscript.

[31] M. Hildebrand and J. Weeks. A computer generated census of cusped hyperbolic 3-manifolds. In *Computers and mathematics (Cambridge, MA, 1989)*, pages 53–59. Springer, New York, 1989.

[32] C. D. Hodgson, G. R. Meyerhoff, and J. R. Weeks. Surgeries on the Whitehead link yield geometrically similar manifolds. In *Topology '90 (Columbus, OH, 1990)*, pages 195–206. de Gruyter, Berlin, 1992.

[33] W. B. Jones and W. J. Thron. *Continued fractions — Analytic theory and applications*, volume 11 of *encyclopedia of mathematics and its applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1980.

[34] T. Jørgensen. On pairs of once-punctured tori. Manuscript.

[35] T. Jørgensen. On discrete groups of Möbius transformations. *Amer. J. Math.*, 98(3):739–749, 1976.

[36] T. Jørgensen. Traces in 2-generator subgroups of SL(2,C). *Proc. Amer. Math. Soc.*, 84(3):339–343, 1982.

[37] T. Jørgensen and A. Marden. Two doubly degenerate groups. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 30(118):143–156, 1979.

[38] G. Kern-Isberner and G. Rosenberger. Einige Bemerkungen über Untergruppen der PSL(2,C). *Resultate Math.*, 6(1):40–47, 1983.

[39] T. Koch and J. Liesen. The conformal 'bratwurst' map and associated Faber polynomials. *Numer. Math.* Accepted for publication.

[40] A. Leutbecher. Über Spitzen diskontinuierlicher Gruppen von lineargebrochenen Transformationen. *Math. Z.*, 100:183–200, 1967.

[41] S. Levy, editor. *Flavors of geometry.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[42] R. C. Lyndon and P. E. Schupp. *Combinatorial group theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1977. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89.

[43] C. Maclachlan and W. J. Harvey. On mapping-class groups and Teichmüller spaces. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 30(part 4):496–512, 1975.

[44] B. Mangum and P. Shanahan. Three-dimensional representations of punctured torus bundles. *J. Knot Theory Ramifications*, 6(6):817–825, 1997.

[45] B. Maskit. On Poincaré's theorem for fundamental polygons. *Advances in Math.*, 7:219–230, 1971.

[46] D. McCullough. Automorphisms of punctured-surface bundles. In *Geometry and topology (Athens, Ga., 1985)*, pages 179–209. Dekker, New York, 1987.

[47] C. T. McMullen. *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[48] C. Menzel. *On hyperbolicity of manifolds which fiber over the circle with a once-punctured surface of genus 2.* PhD thesis, Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, 1998.

[49] Y. N. Minsky. The classification of punctured-torus groups. Preprint, 1997.

[50] J. W. Morgan. On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds. In J. W. Morgan and H. Bass, editors, *The Smith conjecture*, pages 37–125. Academic Press Inc., Orlando, Fla., 1984.

[51] J. Nielsen. Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden. In *Jakob Nielsen: collected mathematical papers. Vol. 1*, Contemporary Mathematicians, pages 77–89. Birkhäuser Boston Inc., Boston, Mass., 1986.

[52] A. Ol'shanskij and A. Shmel'kin. Infinite groups. In A. Kostrikin and I. Shafarevich, editors, *Algebra. IV*, chapter I. Springer-Verlag, Berlin, 1993. A translation of *Current problems in mathematics. Fundamental directions, Vol. 37 (Russian)*, Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1989, Translation by J. Wiegold.

[53] J.-P. Otal. Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3. *Astérisque*, 235:x+159, 1996.

[54] J. Parker and B. Stratmann. Kleinian groups with singly cusped parabolic fixed points. *Mathematica Gottingensis*, Heft 20, 1997. Preprint.

[55] O. Perron. *Die Lehre von den Kettenbrüchen. Bd I. Elementare Kettenbrüche.* B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1954. 3te Aufl.

[56] V. Poénaru. Travaux de Thurston sur les difféomorphismes des surfaces et l'espace de Teichmüller. In *Séminaire Bourbaki (1978/79)*, pages Exp. No. 529, pp. 66–79. Springer, Berlin, 1980.

[57] J. Porti. Torsion de Reidemeister pour les variétés hyperboliques. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 128(612):x+139, 1997.

[58] A. W. Reid. Some remarks on 2-generator hyperbolic 3-manifolds. In *Discrete groups and geometry (Birmingham, 1991)*, pages 209–219. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[59] A. W. Reid. A non-Haken hyperbolic 3-manifold covered by a surface bundle. *Pacific J. Math.*, 167(1):163–182, 1995.

[60] R. Riley. A quadratic parabolic group. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 77:281–288, 1975.

[61] R. Riley. Applications of a computer implementation of Poincaré's theorem on fundamental polyhedra. *Math. Comp.*, 40(162):607–632, 1983.

[62] G. Rosenberger. Über Tschebyscheff-Polynome, Nicht-Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe und Fibonacci-Zahlen. *Math. Ann.*, 246(3):193–203, 1979/80.

[63] P. Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15(5):401–487, 1983.

[64] C. Series. The geometry of Markoff numbers. *Math. Intelligencer*, 7(3):20–29, 1985.

[65] C. Series. The modular surface and continued fractions. *J. London Math. Soc. (2)*, 31(1):69–80, 1985.

[66] D. Sullivan. Travaux de Thurston sur les groupes quasi-fuchsiens et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrées sur S^1. In *Bourbaki Seminar, Vol. 1979/80*, pages 196–214. Springer, Berlin, 1981.

[67] W. P. Thurston. Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 6(3):357–381, 1982.

[68] W. P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 19(2):417–431, 1988.

[69] W. P. Thurston. The geometry and topology of three-manifolds. Electronic version 1.0, October 1997. Electronic edition of the 1980 lecture notes from Princeton, http://www.msri.org/gt3m/.

[70] W. P. Thurston. Hyperbolic structures on 3-manifolds, II: surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle. Eprint math.GT/9801045, 1998.

[71] C. R. Traina. Trace polynomial for two-generator subgroups of SL(2,C). *Proc. Amer. Math. Soc.*, 79(3):369–372, 1980.

[72] J. R. Weeks. Snappea: a computer program for creating and studying hyperbolic 3-manifolds. Available from http://thames.northnet.org/weeks/.

[73] N. J. Wielenberg. Polyhedral orbifold groups. In *Low-dimensional topology and Kleinian groups (Coventry/Durham, 1984)*, pages 313–321. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

[74] S. Wolfram. *The Mathematica Book*. Wolfram Media/Cambridge University Press, 1996. 3rd ed.