Eindeutigkeit der Fortsetzung von Kurven zu Patches oder gestörten periodischen Pflasterungen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik
an der Universität Bielefeld

vorgelegt von

Ulrike von Nathusius

Bielefeld, Oktober 2001

Inhaltsverzeichnis

Vor Beginn möchte ich Gunnar Brinkmann für die interessante Themenstellung, Olaf Delgado Friedrichs für die gute Betreuung und Andreas Dress für die zuverlässige Unterstützung der Arbeit danken.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Periodische Muster treten häufig auf, sowohl im täglichen Leben, z.B. als Verbundpflaster auf Gehwegen, als auch in der Kunst (ein berühmtes Beispiel ist die Alhambra in Spanien) und, vielleicht wichtiger, als Bauprinzip natürlicher (Molekül–)Strukturen.

Das Interesse an *periodischen Pflasterungen der Ebene* rührt u.a. daher, dass reale Strukturen damit modelliert werden können. Graphit, die häufigste Modifikation des Kohlenstoffs, lässt sich als hexagonales Gitter beschreiben, bei dem die Ecken den Atomen und die Kanten den Bindungen entsprechen. Auch kompliziertere Strukturen kommen vor, wie z.B. Bor—Kohlenstoffverbindungen, in denen sich die Atome in Vierecken und Achtecken anordnen [11]. Kristallstrukturen stellen dreidimensionale Pflasterungen des Raumes dar, die Schnittebenen sind aber wiederum zweidimensional.

Eine systematische mathematische Behandlung periodischer Pflasterungen wird durch die von A.Dress eingeführten Theorie der *Delaneysymbole* (oder Delaney–Dress–Symbole) ermöglicht (s. z.B. [7] oder [6]).

Die Anwendbarkeit der dort entwickelten Modelle auf die Realität ist allerdings eingeschränkt, nicht nur deswegen, weil abstrakte Pflasterungen der Ebene im Gegensatz zu realen unbeschränkt sind, sondern insbesondere dadurch, dass natürliche Verbindungen praktisch nie vollständig periodisch sind. So ist zwar die Bildung von Sechsecken für dreibindigen Kohlenstoff die energetisch günstigste Ringstruktur und darum die häufigste Anordnung, trotzdem können andere Ringgrößen vorkommen. Solche “Unregelmäßigkeiten" in einer Struktur führen dazu, dass die Periodizität verloren geht und die idealisierten mathematischen Modelle in der ursprünglichen Form nicht anwendbar sind. Eine ausführliche mathematische Behandlung gestörter periodischer Pflasterungen findet sich in [2] und [1].

Eine charakteristische Eigenschaft ungestörter periodischer Pflasterungen ist, dass durch einen hinreichend großen, aber beschränkten Teil die gesamte Struktur eindeutig beschrieben werden kann. Daraus folgt insbesondere, dass graphische Darstellungen, die zwangsläufig beschränkt sind, legitime Repräsentationen der ganzen Pflasterung sind.

Anders ist die Situation bei gestörten periodischen Pflasterungen. Offensichtlich gilt, dass man außer dem *gestörten Bereich* (der Begriff wird in Kapitel 2 noch formal spezifiziert) auch Regeln vorgeben muss, nach der weitere Komponenten angebaut werden sollen. Im Unterschied zum periodischen Fall kann es aber tatsächlich vorkommen, dass auch dadurch die unendliche Struktur noch nicht eindeutig beschrieben wird.

Ein verwandtes Problem ist die Frage, ob eine vorgegebene Kurve nur auf eine Weise nach festgelegten Regeln mit Flächen ausgefüllt werden kann. In Kapitel 2.2 wird eine Notation eingeführt, die zeigt, dass es sich bei beiden Fragen eigentlich um dasselbe Problem handelt.

1.2 Anwendungen

Nanotubes (oder Röhrenfullerene) sind chemische Moleküle, bei denen die Frage nach der Eindeutigkeit der Fortsetzung von Störungen sehr wichtig ist. Diese Moleküle sind eine spezielle Gruppe der 1986 von Kroto und anderen entdeckten Fullerene [10]. Wie alle Fullerene bestehen sie aus dreibindigen Kohlenstoffatomen, die sich in genau zwölf Fünfecken und einer unbestimmten Anzahl von Sechsecken anordnen. Durch das Vorhandensein von Fünfecken wird im Gegensatz zum Graphitgitter eine Krümmung verursacht, die zu einer sphärischen Form des Moleküls führt. Nanotubes zeichnen sich — grob gesprochen — dadurch aus, dass je sechs der zwölf Fünfecke relativ dicht beieinander liegen. Als Form ergibt sich dadurch eine "Röhre" aus Sechsecken, abgeschlossen durch zwei "Kappen", die aus Sechsecken und je sechs Fünfecken bestehen. Durch die im Verhältnis zum Durchmesser (Größenordnung $2-30nm$) sehr große Länge (Größenordnung bis zu $10\mu m$) ist es sinnvoll, Nanotubes zunächst einmal als einseitig unendliche *Halbröhren* (Halftubes) zu modellieren. Das ist aber nichts anderes als ein durch sechs

Fünfecke “gestörtes ” hexagonales Gitter, mithin eine gestörte periodische Pflasterung.

Man kann Halbröhren in Abhängigkeit davon, auf welche Weise die Sechseckflächen zu Röhren “verklebt” sind, in verschiedene Klassen einteilen. Zu beachten ist, dass die Grenzziehung zwischen Kappe und Röhre rein technischer Natur ist und von daher gewisse Spielräume in der genauen Definition zulässt.

Ein generischer Ansatz, um für jede Klasse von Röhren alle möglichen verschiedenen Halbröhren zu konstruieren, besteht darin, erst die dazu passenden unterschiedlichen Kappen zu konstruieren, da sich die Röhren einer Klasse hinsichtlich ihrer Struktur nicht unterscheiden. Dieses Verfahren beinhaltet aber zwei grundsätzliche Schwierigkeiten: einerseits können unterschiedliche Kappen die gleiche Halbröhre ergeben, andererseits bleibt die Eindeutigkeitsfrage, ob eine Kappe zwangsläufig nur zu genau einer Halbröhre passt. Das erste Problem kann mit geschickten Isomorphievermeidungsverfahren gelöst werden (s.[3]), für das zweite braucht man allgemeine Kriterien, die angeben, unter welchen Umständen Fortsetzungen eindeutig sind.

Die Bedeutung der zweiten Fragestellung, nämlich wann ein Rand eindeutig ausfüllbar ist, lässt sich ebenfalls an einer chemischen Anwendung illustrieren. Mit “Benzenoiden” werden polyzyklische Kohlenwasserstoffverbindungen bezeichnet, bei denen die Kohlenstoffatome in Sechseckringen organisiert sind, die als Teil des hexagonalen Gitters aufgefasst werden können. Atome am Rand sind außerdem noch mit je einem Wasserstoffatom verbunden, um die richtige Valenz zu erhalten. Bei dieser Klasse von Molekülen gilt, dass der Rand das Innere eindeutig bestimmt.

Nun gibt es aber auch ähnliche Strukturen, die “Helizene”, bei denen die Sechsecke schraubenartig angeordnet sind und damit keinen Teil des hexagonalen Gitters mehr bilden. Das legt nahe, ganz generell von der Einbettung der Gesamtstruktur in das hexagonale Gitter abzusehen. Diese — bisher noch nicht im Labor beobachteten — abstrakten Strukturen werden als “Fusene” bezeichnet. Eine naheliegende Vermutung ist, dass auch in diesem Fall ein solcher Patch durch seinen Rand eindeutig bestimmt ist. Überraschenderweise ist das aber nicht der Fall, wie in [8] gezeigt wurde.

Diese Problematik wurde schon mehrfach von theoretischen Chemikern wie auch von namhaften Mathematikern übersehen. Daran lässt sich ersehen, wie suggestiv der Irrtum ist, dass die fragliche Eindeutigkeit immer vorausgesetzt werden könne.

1.3 Überblick

In dieser Arbeit wird untersucht, welche gestörte periodische Pflasterungen schon eindeutig durch einen beschränkten Ausschnitt, der die Störung enthält, und eine reguläre Pflasterung beschrieben werden können, und welche *Patches* — d.h. also einfach zusammenhängende, beschränkte Ausschnitte einer periodischen Pflasterung — eindeutig durch ihren Rand bestimmt sind.

In Kapitel 2 werden wichtige grundlegende Begriffe eingeführt, darunter insbesondere gängige Notationen der Pflasterungstheorie. Es sind Ergänzungen und leichte Modifikationen nötig, um die Terminologie an die Erfordernisse der Problemstellung anzupassen.

Anschließend wird eine Terminologie entwickelt, die den Zusammenhang zwischen dem Fortsetzungs– und dem Ausfüllungsproblem verdeutlicht. Die Idee dabei ist, auch im Fortsetzungsproblem nur eine Kurve zu betrachten, die mittels einer "Labelung" hinreichend genaue Informationen darüber enthält, wie weitere Flächen an die Kurve angefügt werden sollen. Es geht also bei beiden Fragen letztlich um die Fortsetzung einer gelabelten Kurve, unabhängig davon, ob diese Fortsetzung beschränkt oder unbeschränkt ist.

In Kapitel 3 wird eine Konstruktion vorgestellt, die selbst in homogenen Situationen, also in jenen Fällen, in denen nur ein Flächentyp und nur Ecken desselben Grades auftreten, eine Kurve mit mehrdeutiger Ausfüllung erzeugt. Außerdem wird gezeigt, dass nicht nur im Fall der hexagonalen Patches mit inneren Ecken vom Grad 3 — wie in [8] behandelt —, sondern ganz allgemein für homogene Ausfüllungen die Anzahl der benötigten Flächen für alle Ausfüllungen der gleichen Kurve die gleiche ist.

Auch für den unendlichen Fall wird gezeigt, dass es Kurven bzw. Patches gibt, die mehrdeutig fortsetzbar sind. Außerdem wird angegeben, wie man durch Zusammensetzung entsprechender Kurven weitere mit der gleichen Eigenschaft konstruieren kann und wie es zumindest in manchen Fällen möglich ist, aus einem "Ausfüllungsbeispiel" ein "Fortsetzungsbeispiel" zu konstruieren und umgekehrt.

In Kapitel 4 werden Kriterien entwickelt, wann eine Kurve die Position mindestens einer Nachbarfläche eindeutig bestimmt. Weiterhin werden Fälle angegeben, in denen diese Kriterien für eine geeignete unendliche Folge partieller Fortsetzungen erfüllt sind, so dass die gesamte Fortsetzung eindeutig ist.

Der Fortsetzungsbegriff ist so gewählt, dass vorhandene Ecken und Kanten nicht identifiziert werden, insbesondere also an jeden Teil des Randes wirklich eine neue Fläche angelegt werden muss. Für einen besonders wichtigen Fall ist aber sogar eine Verallgemeinerung möglich: In Kapitel 5 geht es um den Fall, dass eine Kurve geschlossen und überschneidungsfrei in die periodische Pflasterung eingebettet werden kann. Die Eindeutigkeit des endlichen Inneren ist dann offensichtlich, aber auch die Eindeutigkeit der unendlichen Fortsetzung kann gezeigt werden, und zwar für einen verallgemeinerten Fortsetzungsbegriff, der auch die Identifizierung vorhandener Ränder erlaubt.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Pflasterungen und Kammernsysteme

Zunächst werden als Basis für die weitere Arbeit wichtige Begriffe definiert. Benötigt werden Grundlagen der Graphentheorie und der Pflasterungstheorie. Die elementare Terminologie aus der Graphentheorie wird vorausgesetzt (siehe dafür z.B. [9] oder [4]). Zu erwähnen ist lediglich, dass ein Graph hier immer einfache Kanten und keine Loops hat.

Da die Terminologie der Pflasterungen nicht so gängig wie die der Graphen ist und zum Teil erhebliche Unterschiede in den Bezeichnungen möglich sind, wird eine kurze Einführung gegeben, in welchem Sinne die Begriffe hier verwendet werden.

Definition 2.1 *Ein System T von abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{E}^2$ heißt* **Pflasterung der Ebene**, *wenn folgende Bedingungen dafür erfüllt sind:*

(i) Für alle $t, t' \in T$ gibt es nur dann eine offene Menge $A \subset t \cap t'$, wenn $t = t'$.

(ii) Es gilt $\bigcup_{t \in T} t = \mathbb{E}^2$, d.h. die Elemente von T überdecken die Ebene.

(iii) Jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{E}^2$ schneidet höchstens endlich viele $t \in T$ (lokalendlich)*.*

(iv) Es gibt reelle Zahlen $r \leq R$, so dass jedes $t \in T$ einen offenen Ball vom Radius r enthält und in einem offenen Ball vom Radius R enthalten ist (balanciert)*.*

(v) *Jedes* $t \in T$ *ist homöomorph zu* $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \quad | \parallel x \parallel \leq 1\}$ (zellulär).

(vi) *Der Schnitt von je zwei Elementen aus* T *ist eine disjunkte Vereinigung endlich vieler Mengen, von denen jede entweder ein Punkt oder homöomorph zu* $[0, 1]$ *ist.*

Die Elemente $t \in T$ *heißen* **Flächen**. *Eine* **Kante** *von* T *ist eine maximale, zusammenhängende Teilmenge* k *von* $t \cap t'$, *wobei* t, t' *Flächen sind und* $k \cong [0, 1]$. *Eine* **Ecke** *von* T *ist ein Punkt, der in mindestens drei Flächen liegt. Als Kurzschreibweise für die Ecken–, Kanten– und Flächenmenge wird jeweils* $\mathcal{V}(T), \mathcal{E}(T)$ *und* $\mathcal{F}(T)$ *verwendet.*

Eine Pflasterung heißt **periodisch**, *falls es linear unabhängige Vektoren* v *und* w *gibt, so dass für beliebige* $i, j \in \mathbb{Z}$ *und beliebige* $t \in T$ *stets* $\{x + (iv + jw) \mid x \in t\} \in T$ *gilt.*

In manchen Arbeiten wird der Begriff allgemeiner, z.B. ohne die Eigenschaften lokalendlich, balanciert und zellulär, definiert.

Im Zusammenhang mit "gestörten" Pflasterungen (der Begriff wird später noch genauer erläutert), sind lokale Strukturen innerhalb der Pflasterung von Bedeutung. Diese werden in folgender Definition beschrieben:

Definition 2.2 *Eine* **Teilpflasterung** *von* T *ist eine Teilmenge von Flächen einer Pflasterung* T.

Ein **Patch** $\boldsymbol{P}$ *ist eine endliche Teilpflasterung einer Pflasterung* T, *so dass* $\bigcup_{t \in F(P)} t$ *einfach zusammenhängend ist.*

Der einer (Teil–)Pflasterung P **zu Grunde liegende Graph** $G(P) = (\mathcal{V}P, \mathcal{E}P)$ *besteht aus der Eckenmenge* $\mathcal{V}P := V(P)$ *von* P *und einer Kantenmenge* $\mathcal{E}P \subset \mathcal{V}P \times \mathcal{V}P$, *die dadurch definiert ist, dass ein Tupel* $(v, w) \in \mathcal{V}P \times \mathcal{V}P$ *eine Kante ist, wenn* $v \neq w$, *und es eine Kante* $e \in \mathcal{E}(P)$ *der Pflasterung gibt, die* v *und* w *enthält.*

Für Patches P_1, P_2 *mit* $T \supset P_1 \supset P_2$ *ist* $\boldsymbol{P_1} \setminus \boldsymbol{P_2}$ *die Teilpflasterung von* T, *die aus den Flächen von* P_1 *besteht, die nicht in* P_2 *enthalten sind.*

Eine **äquivariante Pflasterung** *ist ein Tupel* (T, Γ), *bestehend aus einer Pflasterung* T *und einer diskreten Gruppe von Homöomorphismen* Γ *mit der Eigenschaft, dass für alle* $t \in T$ *und* $\gamma \in \Gamma$ *stets* $\gamma(t) \in T$ *gilt. Die Gruppe* Γ *operiert in natürlicher Weise auf der Menge* T.

Die etwas ungewöhnliche Definition eines Patches hat im Wesentlichen technische Gründe, da man sich so die schon definierten Strukturen der Pflasterung zu Nutze machen kann. Faktisch ist die Pflasterung, von der ein Patch Teil sein soll, nicht weiter von Interesse und wird auch nur dann erwähnt, wenn sie benötigt wird. Der zu Grunde liegende Graph eines Patches ist zweizusammenhängend.

Diese Art der Beschreibung von Pflasterungen ist zwar sehr suggestiv, lässt sich aber mathematisch nicht besonders gut handhaben. Um das zu verbessern, entwickelte A.Dress eine Theorie, in der durch eine bestimmte "Triangulierung" jede Pflasterung in eine abstrakte algebraische Struktur überführt werden kann (siehe z.B. [7]).

Zunächst wird diese Struktur allgemein — also unabhängig von Pflasterungen — beschrieben, mit einigen Ergänzungen und Modifikationen, die im Zusammenhang mit gestörten Pflasterungen nötig sein werden.

Definition 2.3

(i) *Ein* **Kammernsystem** *ist eine Menge* $\boldsymbol{\mathcal{C}}$*, auf der die freie Coxeter Gruppe* $\Sigma := \Sigma_2 = \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_i^2 = \mathrm{id} \rangle$ *von rechts operiert. Meistens wird nicht nur die zu Grunde liegende Menge, sondern auch das Kammernsystem mit* $\mathcal{C}$ *bezeichnet. Die* Σ*-Operation induziert eine Abbildung*

$$\begin{aligned} \zeta : \mathcal{C} \times I &\rightarrow \mathcal{C} \\ (C, i) &\mapsto C\sigma_i \end{aligned}$$

(ii) *Ein* **Quasikammernsystem** *besteht aus einer Menge* $\mathcal{C}$ *und einer Abbildung* ζ*,*

$$\begin{aligned} \zeta : \mathcal{C} \times I &\rightarrow \mathcal{C} \\ (C, i) &\mapsto C\sigma_i \end{aligned}$$

die nicht auf ganz $\mathcal{C} \times I$ *definiert ist.* Σ *operiert also nicht im eigentlichen Sinne auf* $\mathcal{C}$*, da nicht jedes* $\sigma \in \Sigma$ *auf jedes* $C \in \mathcal{C}$ *angewendet werden kann, wir werden aber trotzdem diese Bezeichnung verwenden.*

(iii) *Ein* **reduziertes Wort** $\tau \in \Sigma$ *ist ein Tupel* $\boldsymbol{\tau} = (\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_n})$ *mit* $i_j \in \{0, 1, 2\}$ *für* $j = 1, \ldots, n$*, welches für alle* $1 \leq j < n$ *die Bedingung* $\sigma_{i_j} \neq \sigma_{i_{j+1}}$ *erfüllt. Wir definieren für* $C \in \mathcal{C}$ *und* $\tau = (\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_n}) \in \Sigma$

$$\begin{aligned} C\sigma_{i_1} &:= \zeta(C, i_1) \qquad \textit{falls definiert, und} \\ C\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_n} &:= \zeta(C\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_{n-1}}, i_n), \end{aligned}$$

wenn für alle $j = 1, \dots, n$ die Komponenten $C\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_j}$ definiert sind. Andernfalls heißt $C\tau$ undefiniert.

(iv) *Sei $\mathcal{C}$ ein (Quasi–)Kammernsystem, $C \in \mathcal{C}$ und $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in \Sigma$ ein reduziertes Wort. Für $n = 1$ ist* $\boldsymbol{C\tau}$*$= C\tau_1$ definiert, wenn es eine Kammer $C' \in \mathcal{C}$ gibt, so dass $C' = C\tau$. Induktiv überträgt man das auf $n > 1$, indem $C\tau$ definiert ist, wenn $C\tau_1 \dots \tau_{n-1}$ definiert ist und es eine Kammer $C' \in \mathcal{C}$ gibt mit $C' = C\tau_1 \dots \tau_n$.*

(v) *Ein (Quasi–)Kammernsystem $\mathcal{C}$ heißt* **endlich***, wenn die zu Grunde liegende Menge endlich ist.*

(vi) *Ein (Quasi–)Kammernsystem $\mathcal{C}$ heißt* **zusammenhängend***, wenn es für alle Paare $C, C' \in \mathcal{C}$ ein reduziertes Wort $\tau \in \Sigma$ gibt, so dass gilt $C = C'\tau$.*

(vii) *Seien $(i, j) \in \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$ und $1 \leq k \in \mathbb{N}$. Es wird folgende Schreibweise für $(\sigma_i\sigma_j)$–Pfade in Kammernsystemen verwendet (analog für die entsprechenden Pfade eines Quasikammernsystems, sofern sie definiert sind):*

$$\begin{aligned} [\sigma_i\sigma_j]^{2k} &:= (\sigma_i\sigma_j)^k \\ [\sigma_i\sigma_j]^{2k-1} &:= (\sigma_i\sigma_j)^{k-1}\sigma_i \end{aligned}$$

(viii) *Für ein (Quasi–)Kammernsystem $\mathcal{Q}$ definieren wir den* **(verallgemeinerten) $\boldsymbol{i}$–Orbit** *als:*

$$\langle C\rangle_i \;:=\; \{C' \in \mathcal{Q} \;\mid\; \text{es gibt } n \in \mathbb{N}_0, \text{ so dass } C' = C\sigma_i^n\}$$

und den **(verallgemeinerten) $\boldsymbol{(i, j)}$–Orbit** *als:*

$$\begin{aligned} \langle C\rangle_{ij} \;:=\; \{C' \in \mathcal{Q} \;\mid\; & \text{es gibt } m \in \mathbb{N}_0, \text{ so dass entweder} \\ & C' = C[\sigma_i\sigma_j]^m \text{ oder } C' = C[\sigma_j\sigma_i]^m\} \end{aligned}$$

(ix) *Zu einem (Quasi–)Kammernsystem $\mathcal{C}$ definiert man eine Abbildung durch:*

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \times I \times I &\to \mathbb{Q} \\ (C, i, j) &\mapsto r_{ij}(C) := \frac{1}{2} \mid \langle C\rangle_{ij} \mid \end{aligned}$$

Die Definition “verallgemeinerter Orbit” ist als Anpassung für Quasikammernsysteme notwendig, da dort ein Orbit nicht unbedingt definiert sein muss. Ist das aber der Fall, stimmt der Orbit mit dem verallgemeinerten überein, so dass im Folgenden zur Vereinfachung die eigentlich missbräuchliche Bezeichnung “Orbit” auch für die verallgemeinerten Orbits gewählt werden kann.

Sowohl in Kammernsystemen als auch in Quasikammernsystemen soll Σ immer frei auf der Menge operieren. Damit erhält man folgendes: ist der (i,j)–Orbit einer Kammer C vollständig definiert, gilt $r_{ij}(C) = \inf(k \in \mathbb{N} \mid k > 0, C(\sigma_i\sigma_j)^k = C)$, was der üblichen Definition der Abbildung r_{ij} entspricht.

Bemerkung 2.4 *Die Gültigkeit folgender Gleichungen kann für beliebige* $(i,j) \in \{(0,1),(0,2),(1,2)\}$ *und* $1 \leq k \in \mathbb{N}$ *leicht nachgerechnet werden:*

$$\begin{aligned}
[\sigma_i\sigma_j]^{2k}\sigma_i &= [\sigma_i\sigma_j]^{2k+1} \\
[\sigma_i\sigma_j]^{2k}\sigma_j &= [\sigma_i\sigma_j]^{2k-1} \\
[\sigma_i\sigma_j]^{2k-1}\sigma_i &= [\sigma_i\sigma_j]^{2k-2} \\
[\sigma_i\sigma_j]^{2k-1}\sigma_j &= [\sigma_i\sigma_j]^{2k}
\end{aligned}$$

Definition 2.5 *Sei $\mathcal{Q}$ ein (Quasi–)Kammernsystem. Der* **Graph $\boldsymbol{G(\mathcal{Q}) = (V, E, \Theta)}$ von $\boldsymbol{\mathcal{Q}}$** *ist ein Tripel, bestehend aus der Eckenmenge $V = V_0 \cup V_1 \cup V_2$ und der Kantenmenge $E = E_0 \cup E_1 \cup E_2$, die folgendermaßen definiert sind:*

$$\begin{aligned}
V_i &:= \{v_i(C) \mid C \in \mathcal{Q}\} \text{ mit } v_i(C) := \langle C \rangle_{jk} \\
E_i &:= \{e_i(C) \mid C \in \mathcal{Q}\} \text{ mit } e_i(C) := \langle C \rangle_{i},
\end{aligned}$$

sowie einer Abbildung $\Theta : E \to \binom{V}{2}$, gegeben durch $\Theta(e_i(C)) := (v_k(C), v_j(C))$. Dabei gelte jeweils für die verwendeten Indizes $\{i,j,k\} = \{0,1,2\}$.

Die **Dimension** *einer Ecke wird durch* $\dim(v_i(C)) := i$ *und die einer Kante durch* $\dim(e_i(C)) := i$ *definiert.*

Eine Kammer $C \in \mathcal{Q}$ ist in genau drei Kanten, nämlich $e_i(C)$ für $i \in \{0,1,2\}$, enthalten. Jede dieser Kanten hat die durch Θ bestimmten eindeutigen Endecken $v_k(C)$ und $v_j(C)$. Damit können wir die Kammer C mit dem durch ihre Ecken induzierten Untergraphen von $G(\mathcal{Q})$ identifizieren. Im Folgenden wird selten explizit unterschieden, ob eine Kammer als Graph oder als abstraktes Element eines Kammernsystem gemeint ist, aber die daraus resultierende Ungenauigkeit im Sprachgebrauch ist unproblematisch, da sich die Interpretation aus dem Kontext ergibt.

Das rechtfertigt folgenden Sprachgebrauch:

Bemerkung 2.6 *Für alle $i \in \{0,1,2\}$ sind die Ecken $v = v_i(C)$ und die Kanten $e = e_i(C)$* **in C enthalten**, *notiert $\boldsymbol{v \in C}$ bzw. $\boldsymbol{e \in C}$.*

Pflasterungen und Kammernsysteme hängen auf sehr natürliche Weise zusammen. Die "Topologische Realisierung" eines Kammernsystems mittels dreidimensionaler Standardsimplizes liefert den Übergang von der kombinatorischen Struktur zu einer geometrischen (für eine genaue Beschreibung siehe z.B. [5]), so dass man ein Kammernsystem auch als (Dreiecks–)Pflasterung auffassen kann. Dabei entspricht jeder Kammern eine Fläche, deren (maximal) drei Nachbarn durch die Operation Σ bestimmt sind.

Umgekehrt kann man aus einer Pflasterung T ein Kammernsystem konstruieren. Die Kammernmenge $\mathcal{C}_T$ wird von Dreiecken gebildet, die durch eine **baryzentrische Unterteilung** von T entstehen, d.h. ins Innere jeder Ecke, Kante und Fläche der ursprünglichen Pflasterung wird eine neue Ecke gelegt und mit den Nachbarecken verbunden. Ungeachtet der Bezeichnungsweise muss es sich nicht notwendigerweise um die Schwerpunkte handeln; ein beliebiger Punkt im Inneren ist jeweils ausreichend.

Die Randecken einer Kammer $C \in \mathcal{C}_T$ werden entsprechend ihrer Funktion in der Pflasterung T bezeichnet, d.h. $v_i(C)$ ist die Ecke, die in T einem i–dimensionalen Objekt entspricht, also $v_0(C)$ einer ursprünglichen Ecke, $v_1(C)$ einer Kante und $v_2(C)$ einer Fläche. Für alle $i \in \{0,1,2\}$ und $C \in \mathcal{C}_T$ ist $\boldsymbol{e_i(C)}$ die eindeutige Kante in C, die $v_i(C)$ nicht enthält.

Die Operation von Σ auf einer Kammer $C \in \mathcal{C}_T$ ist nun definiert durch $C\sigma_i := C'$, wobei C' gerade die Kammer ist, die mit C die Kante $e_i(C) = e_i(C')$ teilt. Mit dieser Definnition bildet $\mathcal{C}_T$ ein Kammernsystem.

Die Übereinstimmung in der Bezeichnungen für Ecken und Kanten mit denen eines Kammerngraphen ist nicht zufällig, da der Graph, der durch die Ecken und Kanten der baryzentrischen Unterteilung von T gebildet wird, isomorph zum Graphen des zugehörigen Kammernsystems ist.

Man kann eine Fläche in der Pflasterung T, die eine Kammer $C \in \mathcal{C}_T$ enthält, auch als $(0,1)$–Orbit von C beschreiben. Als Kurzschreibweise für diese Fläche bzw. die Kammernmenge des Orbits wird i.a. $\boldsymbol{f_C}$ verwendet.

Umgekehrt werden die $(0,1)$–Orbits von (Quasi–)Kammernsystemen auch als Flächen bezeichnet. Die $(1,2)$–Orbits entsprechen Ecken der ursprünglichen Pflasterung.

Für eine äquivariante Pflasterung (T,Γ) gibt es sogar immer eine baryzentrische Unterteilung $\mathcal{C}_T$, die invariant unter Γ ist. Damit induziert Γ eine Gruppe von Σ–Automorphismen Γ^*, die auf $\mathcal{C}_T$ operiert.

Damit haben wir alles Notwendige zusammen, um Delaneysymbole einzuführen. Hier begnügen wir uns mit einer knappen Definition; für eine ausführlichere Behandlung s. z.B. [7].

Definition 2.7 *Das* **Delaneysymbol** *einer äquivarianten Pflasterung* (T,Γ) *ist ein Tripel* $(\mathcal{D}, m_{01}, m_{02})$*, wobei* $\mathcal{D} := \mathcal{C}_T/\Gamma^*$ *die Delaneymenge ist, und* m_{01} *bzw.* m_{12} *Abbildungen von der Delaneymenge in die natürlichen Zahlen sind:*

$$\begin{aligned} m_{ij} : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{N} \\ m_{ij}(\Gamma^* C) &:= r_{ij}(C). \end{aligned}$$

Die Wahl der Kammer C*, die ein* Γ^**–Orbit repräsentiert, spielt keine Rolle. Als Kurzschreibweise wird das gesamte Delaneysymbol oft mit* $\mathcal{D}$ *abgekürzt.*

Sofern es nicht explizit anders vorgeschrieben wird, soll im Folgenden für alle Delaneysymbole $\mathcal{D}$ gelten, dass sie zu einer Pflasterung korrespondieren, wie sie in 2.1 definiert ist.

Ein fundamentaler Satz aus [5] wird ohne Beweis zitiert. Er besagt, dass die periodische Pflasterung durch ihr Delaneysymbol eindeutig bestimmt wird:

Theorem 2.8 *Zwei äquivariante Pflasterungen* (T,Γ) *und* (T',Γ') *sind genau dann isomorph, wenn ihre Delaneysymbole* $\mathcal{D}$ *und* $\mathcal{D}'$ *isomorph sind.*

Dieses Ergebnis wird noch häufiger in dieser Arbeit benötigt.

Durch die baryzentrische Unterteilung eines Patches P — oder allgemein einer Teilpflasterung — erhält man in analoger Weise ein endliches Quasikammernsystem $\mathcal{Q}_P$, für das außerdem gilt, dass $C\sigma_i$ nur für $i = 2$ undefiniert ist. Folgende Definitionen beschreiben Eigenschaften von Abbildungen zwischen (Quasi–)Kammernsystemen.

Morphismen zwischen (Quasi–)Kammernsystemen erhalten die Struktur, die durch die Σ–Operation gegeben ist. "Fehler" (oder Störungen) können darin bestehen, dass die Σ–Operation bzw. die Abbildung r_{ij} nicht übertragen wird. Bei Quasikammernsystemen kann außerdem der Fall eintreten, dass es Kammern gibt, bei denen eine Operation nur auf dem Bild oder nur auf dem Urbild definiert ist.

Auch Delaneysymbole sind Σ–Mengen, so dass Morphismen zwischen einem (Quasi–)Kammernsystem und einem Delaneysymbol weitgehend analog definiert werden können.

Definition 2.9 *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ (Quasi–)Kammernsysteme, für die die Abbildungen r bzw. r' wie in Definition 2.3, (ix) definiert sind. $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, m_{01}, m_{12})$ sei ein Delaneysymbol. Gegeben sind Abbildungen $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ und $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Für die unten verwendeten Indizes gelte jeweils $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$.*

(i) Eine **Eckensingularität** *von ψ ist eine Ecke $v = v_k(C)$, für deren inzidente Kammern gilt $r_{ij}(C) \neq r'_{ij}(\psi(C))$, oder dass einer der (i, j)–Orbits von C bzw. $\psi(C)$ vollständig definiert ist, der andere aber nicht. Eine Eckensingularität von φ ist eine Ecke $v = v_k(C)$, für deren Kammern gilt $r_{ij}(C) \neq m_{ij}(\varphi(C))$, falls der (i, j)–Orbit in $\mathcal{C}$ vollständig definiert ist, oder $r_{ij}(C) > m_{ij}(\varphi(C))$ sonst.*

(ii) Eine **Kantensingularität** *von ψ bzw. φ ist eine Kante $e = e_k(C)$, deren Ecken keine Eckensingularitäten sind und für deren inzidente Kammern entweder $\psi(C\sigma_k) \neq \psi(C)\sigma_k$ bzw. $\varphi(C\sigma_k) \neq \varphi(C)\sigma_k$ gilt, oder, dass entweder nur $C\sigma_k$ oder nur $\psi(C)\sigma_k$ bzw. $\varphi(C)\sigma_k$ definiert ist.*

(iii) Eine Abbildung von (Quasi–)Kammernsystemen oder von einem (Quasi–)Kammernsystem in ein Delaneysymbol, die mit den (definierten) Σ–Operationen verträglich ist, d.h. also ohne Singularitäten, heißt **Σ–Morphismus** *von (Quasi–)Kammernsystemen.*

(iv) Eine entsprechende Abbildung mit höchstens endlich vielen Singularitäten heißt **partieller Σ–Morphismus***.*

(v) Ein Σ–Morphismus zwischen (Quasi–)Kammernsystemen heiße **(partieller) Σ–Isomorphismus***, wenn er außerdem noch bijektiv ist und die Umkehrabbildung ebenfalls (bis auf endlich viele Singularitäten) mit der Σ–Operation verträglich ist.*

Betrachtet man einen Patch als Teil einer Pflasterung, muss zwischen verschiedenen Σ–Operationen unterschieden werden. Wir verwenden für die auf

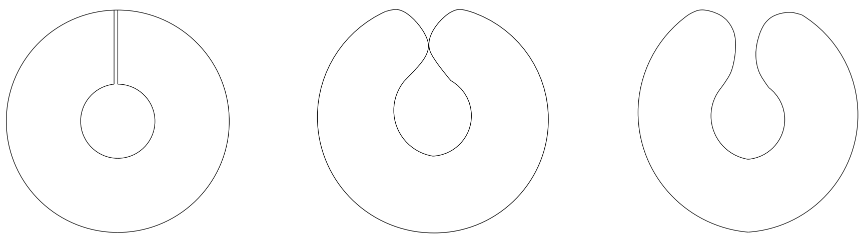

Abbildung 2.1: Teilsystem, das 1. nicht induziert, 2. induziert, aber nicht zusammenhangstreu und 3. zusammenhangstreu ist.

ganz $\mathcal{C}_T$ definierten Operationen die Bezeichnungen $\Sigma = \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ und für die des Quasikammernsystems $\hat{\Sigma} = \langle \hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2 \rangle$. Es ist naheliegend zu fordern, dass sie auf dem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen müssen. Das führt zu folgender Definition:

Definition 2.10 *Gegeben sei eine Pflasterung T mit dem dazugehörigen Kammernsystem $\mathcal{C}_T$. Ein Quasikammernsystem $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}_T$, auf dem $\hat{\Sigma}$ operiert, heißt ein* **Teilsystem** *von $\mathcal{C}_T$, wenn für alle $i \in \{0, 1, 2\}$ und alle $C \in \mathcal{Q}$, für die $C\hat{\sigma}_i$ definiert ist, $C\hat{\sigma}_i = C\sigma_i$ gilt. $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}_T$ heißt ein* **induziertes Teilsystem** *von $\mathcal{C}_T$, wenn außerdem für alle $C \in \mathcal{Q}$, für die auch $C\sigma_i \in \mathcal{Q}$ gilt, $C\hat{\sigma}_i$ definiert ist.*

Ein induziertes Teilsystem $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}_T$ heißt **zusammenhangstreu** *(bezüglich T), wenn alle $C, C' \in \mathcal{Q}$, die im selben verallgemeinerten (i, j)–Orbit bezüglich Σ liegen, auch im selben verallgemeinerten (i, j)–Orbit bezüglich $\hat{\Sigma}$ liegen.*

Ein Quasikammernsystem $\mathcal{Q}$ heißt **(induziert, zusammenhangstreu) einbettbar** *in $\mathcal{C}_T$, wenn es isomorph zu einem (induzierten, zusammenhangstreuen) Teilsystem von $\mathcal{C}_T$ ist, d.h., wenn es ein (induziertes, zusammenhangstreues) Teilsystem $\hat{\mathcal{Q}}$ von $\mathcal{C}_T$ und einen Σ-Isomorphismus $\kappa : \hat{\mathcal{Q}} \to \mathcal{Q}$ gibt. $\hat{\mathcal{Q}}$ heißt* **(induzierte, zusammenhangstreue) Einbettung** *von $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{C}_T$.*

Es ist i.a. nicht nötig, zwischen den Mengen $\mathcal{Q}$ und $\hat{\mathcal{Q}}$ zu unterscheiden. Darum wird als vereinfachende Schreibweise die Notation $\boldsymbol{\mathcal{Q} \subset_{\hat{\Sigma}} \mathcal{C}_T}$ bzw. $\boldsymbol{\mathcal{C}_T \supset_{\hat{\Sigma}} \mathcal{Q}}$, gegebenenfalls sogar ohne Angabe der $\hat{\Sigma}$–Operation, verwendet.

Der **Rand $\boldsymbol{R(\mathcal{Q})}$** *(oder Eckenrand) eines Quasikammernsystems $\mathcal{Q}$ besteht aus den Kammern, für die mindestens ein (i, j)–Orbit bezüglich Σ nicht vollständig definiert ist. Das* **Innere** *von $\mathcal{Q}$ ist definiert als die Menge $\boldsymbol{I(\mathcal{Q})} := \mathcal{Q} \setminus R(\mathcal{Q})$.*

Der **Kantenrand $\boldsymbol{\mathcal{K}(\mathcal{Q})} \subset \boldsymbol{\mathcal{Q}}$** *besteht aus den Kammern C, für die es ein $i \in \{0, 1, 2\}$ gibt, so dass $C\sigma_i$ nicht definiert ist.*

Der **Randgraph $\boldsymbol{G_R(\mathcal{Q})}$** *besteht aus den Kanten $e \in E(R(\mathcal{Q}))$, die nur aus einer Kammer bestehen, und deren inzidenten Ecken. Der Randgraph eines Teilsystems $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}_T$ ist der Randgraph des zugehörigen (nicht eingebetteten) Quasikammernsystems.*

Werden die gleichen Bezeichnungen auf einen Patch P angewendet, ist immer die Eigenschaft des dazugehörigen Quasikammernsystems $\mathcal{Q}_P$ gemeint. P muss nicht notwendigerweise zusammenhangstreu bezüglich jeder Pflasterung sein, in die er sich einbetten lässt. Ist die Einbettung von P in T zusammenhangstreu, gilt für die topologische Realisierung von $\mathcal{Q}_P$, dass sie einfach zusammenhängend ist.

Zu beachten ist, dass auch eine nicht induzierte Einbettung eines Patches einen Randgraphen besitzt, der ein Zykel ist, da sich die Definition auf den nicht eingebetteten Graphen bezieht.

2.2 Gelabelte Kurven

Im folgenden Teil wird das Konzept der Fortsetzung gelabelter Kurven eingeführt. Dieses ermöglicht, den Zusammenhang zwischen den beiden Fragestellungen — d.h. die Fortsetzung einer "Störung" zu einer Pflasterung und die Ausfüllung eines gegebenen Randes — herzustellen.

Definition 2.11 *Definiere eine* **Kurve** *als einfachen Zykelgraphen Z mit der Eckenmenge* $\boldsymbol{V(Z)}$ *und der Kantenmenge* $\boldsymbol{E(Z)}$.

Eine **gelabelte Kurve** *ist ein Tupel, bestehend aus einer Kurve Z zusammen mit einer Labelung L, die aus den Abbildungen* del $:E(Z) \to \mathcal{D}$, zahl $:V(Z) \to \mathbb{Z}^+$ *und* dim $:V(Z) \cup E(Z) \to \{0, 1, 2\}$ *besteht. $\mathcal{D}$ ist dabei ein vorgegebenes Delaneysymbol. Eine* **doppelt gelabelte Kurve** *ist eine Kurve Z zusammen mit zwei Labelungen L_1 und L_2.*

Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{V_i(Z)} := \{v \in V(Z) \mid \dim(v) = i\}$ *die Menge der Ecken mit Dimension i.*

Die Labelung enthält die notwendigen Informationen darüber, wie Z als Randgraph eines Quasikammernsystems aussehen soll. Die Abbildungen geben Art und Anzahl der Randkammern an. Das Bild einer Ecke bzw. Kante unter dim entspricht genau der Dimension, wie sie für Ecken eines Kammernsystems definiert ist. Strenggenommen müssten die Bezeichnungen erst unterschieden werden, in der nächsten Definition wird der einheitliche Sprachgebrauch aber gerechtfertigt.

Formal wird das folgendermaßen definiert:

Definition 2.12 *Sei* $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ *und* $\mathcal{D}$ *ein Delaneysymbol. Eine* **Fortsetzung einer gelabelten Kurve** (Z, L) *mit* $L = (\text{del}, \text{zahl}, \text{dim})$ *ist ein Tupel* $(\mathcal{Q}, \varphi)$*, bestehend aus einem zusammenhängenden Quasikammernsystem* $\mathcal{Q}$ *und einem* Σ*–Morphismus* $\varphi : \mathcal{Q} \to \mathcal{D}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(i) Es gibt einen Graphenisomorphismus $F : Z \to G_R(\mathcal{Q})$ *zwischen* Z *und dem Randgraphen* $G_R(\mathcal{Q})$ *von* $\mathcal{Q}$*.*

(ii) $\dim(v) = \dim(F(v))$ *für alle* $v \in V(Z)$*.*

(iii) $\dim(e) = \dim(F(e))$ *für alle* $e \in E(Z)$*.*

(iv) $\text{zahl}(v) = 2r_{ij}(C)$ *für ein* $C \in \mathcal{Q}$ *mit* $F(v) = v_k(C)$*, wobei* $k = \dim(v)$*.*

(v) $\text{del}(e) = \varphi(C)$ *für ein* $C \in \mathcal{Q}$ *mit* $F(e) = e_k(C)$*, wobei* $k = \dim(e)$*.*

Die Fortsetzung einer doppelt gelabelten Kurve (Z, L_1, L_2) *wird für beide Abbildungen einzeln analog zum einfachen Fall definiert.*

Die Abbildung F *heißt* **mit der Fortsetzung verträglich***.*

Eine gelabelte Kurve (Z, L) *heißt* **fortsetzbar** *(bezüglich* $\mathcal{D}$*), wenn es eine Fortsetzung gibt, deren Randgraph gerade* Z *ist. Sie heißt* **eindeutig fortsetzbar***, wenn alle Fortsetzungen isomorph sind.*

Eine Fortsetzung heißt **endlich** *bzw.* **unendlich***, wenn die Kammernmenge endlich bzw. unendlich ist.*

Genau genommen müsste man immer von einer “Fortsetzung bezüglich $\mathcal{D}$” sprechen, aber da das Delaneysymbol fest vorgegeben sein soll, sind auch ohne diesen Zusatz keine Missverständnisse möglich.

Es gibt offensichtlich notwendige Kriterien, die eine gelabelte Kurve erfüllen muss, um fortsetzbar sein zu können. Für $v, w \in V(Z)$ mit $(v, w) = e \in E(Z)$ muss z.B. gelten, dass $\{\dim(v), \dim(w), \dim(e)\} = \{0, 1, 2\}$, da es sonst kein Kammernsystem geben kann, das eine solche Kante enthält. Außerdem folgt aus der Definition für einen Σ–Morphismus, dass für alle Kammern, die an Z grenzen, $r_{ij}(C) \leq m_{ij}(\varphi(C))$ gilt. Für $e = (u, v) \in E(Z)$ muss dementsprechend gelten: $\text{zahl}(v) \leq 2m_{ij}(\text{del}(e))$ und $\text{zahl}(u) \leq 2m_{ik}(\text{del}(e))$ mit $i = \dim(e)$, $j = \dim(u)$ und $k = \dim(v)$.

Quasikammernsysteme, die eine Fortsetzung einer gelabelten Kurve darstellen, können sehr unterschiedlich beschaffen sein. Für die anfängliche Fragestellung sind aber einige Fälle von besonderem Interesse, die daher eine spezielle Bezeichnung bekommen.

Definition 2.13 *Die Fortsetzung Q einer gelabelten Kurve (Z, L) heißt* **Patchausfüllung***, wenn sie endlich und ihre topologische Realisierung einfach zusammenhängend ist. Sie heißt* **Ebenenfortsetzung***, wenn sie unendlich und ihre topologische Realisierung homöomorph zur Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq 1\}$ ist.*

Lemma 2.14 *Es gibt gelabelte Kurven (Z, L) mit endlicher Fortsetzung, die keine Patchausfüllung ist oder mit unendlicher Fortsetzung, die keine Ebenenfortsetzung ist.*

Beweis: Die Aussage erscheint auf den ersten Blick etwas überraschend, da Patchausfüllungen und Ebenenfortsetzungen die suggestivsten Fortsetzungen sind. Man kann aber Beispiele angeben, die nicht den Bedingungen aus 2.13 genügen:

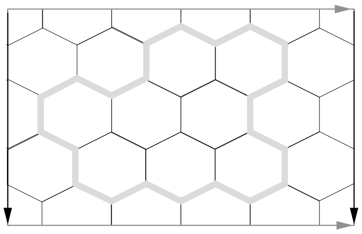

Abbildung 2.2: Zwei endliche Fortsetzungen der gleichen Kurve

In Abb. 2.2 sieht man einen entlang der Pfeile "aufgeschnittenen" Torus, der mit Sechsecken gepflastert ist. Die grau markierte Kurve hat in beide Richtungen eine endliche Fortsetzung, wovon aber nur eine homöomorph zur Kreisscheibe ist. Die andere ist gerade der Torus ohne diese Kreisscheibe. Die gleiche Konstruktion ist für beliebige Pflasterungen des Torus möglich.

Um eine unendliche Fortsetzung zu erhalten, die keine Ebenenfortsetzung ist, kann man in Abb. 2.3 die Pfeile identifizieren und erhält dadurch einen mit

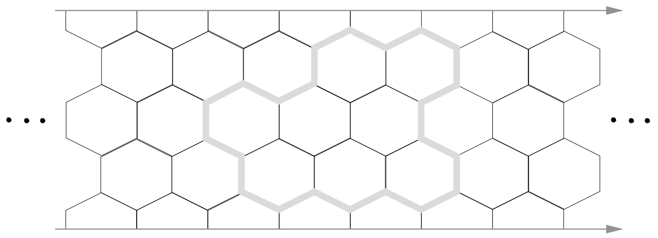

Abbildung 2.3: Fortsetzung einer Kurve zu einer “Zylinderpflasterung”

Sechsecken gepflasterten Zylinder. Die Kurve hat wieder zwei Fortsetzungen, erstens die Patchausfüllung vom ersten Fall und zweitens eine unendliche Fortsetzung, die homöomorph zum Zylinder ohne die offene Kreisscheibe ist. Auch hier ist das Verfahren nicht auf Sechseckgitter beschränkt. □

Bei einer doppelt gelabelten Kurve (Z, L_1, L_2) ist es naheliegend, auch die Vereinigung von Fortsetzungen zu den beiden Labelungen zu betrachten. Insbesondere interessiert man sich dabei für den Fall, dass die Kombination zu keinen neuen Singularitäten bezüglich des Delaneysymbols $\mathcal{D}$ führt. In der nächsten Definition sind die dafür benötigten Bedingungen aufgeführt.

Definition 2.15 *Gegeben sei eine doppelt gelabelte Kurve* (Z, L_1, L_2) *mit* $L_i = (\mathrm{del}_i, \mathrm{zahl}_i, \mathrm{dim}_i)$ *für* $i = 1, 2$. L_1 *und* L_2 *heißen* **komplementär**, *wenn für alle* $e \in E(Z)$ *bzw.* $v \in V(Z)$ *folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $\mathrm{dim}_1(e) = \mathrm{dim}_2(e)$ *und* $\mathrm{dim}_1(v) = \mathrm{dim}_2(v)$.

(ii) $\mathrm{del}_1(e)\sigma_j = \mathrm{del}_2(e)$ *mit* $j := \mathrm{dim}_1(e)$.

(iii) $\mathrm{zahl}_1(v) + \mathrm{zahl}_2(v) = 2m_{ij}(del_1(e'))$
wobei $\{i, j, \mathrm{dim}_1(v)\} = \{0, 1, 2\}$ *und* v *inzident mit* $e' \in E(Z)$

(Z, L_1, L_2) *heißt* **kompatibel fortsetzbar**, *wenn* L_1 *und* L_2 *komplementär sind und es zu beiden Labelungen eine Fortsetzung* $(\mathcal{Q}_i, \varphi_i)$ *gibt, wobei der jeweilige* Σ*–Morphismus* $\varphi_i : \mathcal{Q}_i \to \mathcal{D}$ *ins gleiche Delaneysymbol abbildet.*

Wenn eine Kurve (Z, L_1, L_2) kompatibel fortsetzbar ist, beinhaltet das außer der Fortsetzbarkeit von (Z, L_1) und (Z, L_2), dass die Kammern, die an der Kurve eine Kante teilen, mit der Operation auf $\mathcal{D}$ verträglich sind und sich die Eckengrade der beiden Fortsetzungen auf der Kurve zu dem passenden Grad im Delaneysymbol $\mathcal{D}$ aufsummieren.

Bemerkung 2.16 *Zu einer gelabelten Kurve* (Z, L) *kann man die komplementäre Labelung* L^c *konstruieren, indem man die dazugehörigen Abbildungen passend definiert. Setze also für alle* $v \in V(Z)$ *und* $e \in E(Z)$

(i) $\dim^c(e) := \dim(e)$ *und* $\dim^c(v) := \dim(v)$

(ii) $\mathrm{del}^c(e) := \mathrm{del}(e)\sigma_j$ *mit* $j := \dim(e)$

(iii) $\mathrm{zahl}^c(v) = 2m_{ij}(del(e')) - \mathrm{zahl}(v)$
wobei $\{i, j, \dim(v)\} = \{0, 1, 2\}$ *und* $v \in e' \in E(Z)$

L^c *heißt* **Komplement** *von* L.

Das Komplement ist gerade so definiert, dass man die Fortsetzungen einer komplementär gelabelten Kurve "zusammenkleben" kann und daraus ein zu $\mathcal{D}$ korrespondierendes Kammernsystem erhält. Was das genau heißt, wird im nächsten Lemma ausgeführt und bewiesen. Obwohl der Beweis rein technisch ist, wird er exemplarisch ausgeführt, da die Methode im Folgenden noch öfter verwendet wird.

Lemma 2.17 *Gegeben sei eine doppelt gelabelte, kompatibel fortsetzbare Kurve* (Z, L, L^c)*. Man kann aus beliebigen Fortsetzungen (bezüglich* $\mathcal{D}$*)* $(\mathcal{C}^*, \varphi^*)$ *von* (Z, L) *und* $(\mathcal{C}^c, \varphi^c)$ *von* (Z, L^c) *ein Kammernsystem* $\mathcal{C}$ *konstruieren, das singularitätenfrei auf* $\mathcal{D}$ *abbildbar ist.*

Beweis: Seien $F^* \to Z$ bzw. $F^c \to Z$ mit φ^* bzw. φ^c kompatible Graphenisomorphismen. Definiere die Kammernmenge von $\mathcal{C}$ als die Vereinigung der beiden Quasikammernsysteme, also $\mathcal{C} := \mathcal{C}^* \cup \mathcal{C}^c$. Die Operationen auf den Quasikammernsystemen seien mit Σ^* bzw. Σ^c bezeichnet. Innerhalb der beiden Quasikammernsysteme, die die Komponenten von $\mathcal{C}$ bilden, überträgt sich die Σ–Operation für $\mathcal{C}$ direkt aus den Teilen, es muss also nur noch festgelegt werden, wie σ_i auf einer Kammer C operieren soll, für die $C\hat{\sigma}_i$ bzw. $C\sigma_i^c$ undefiniert ist. Sei o.B.d.A. $C \in \mathcal{C}^*$. Da Z isomorph zu den Randgraphen beider Komponenten ist, ist $C\sigma_k^*$ undefiniert genau dann, wenn es eine Kante $e \in E(Z)$ gibt mit $\dim(e) = k$ und $F^*(e) = \langle C\rangle_k$. Da $\mathcal{C}^c$ eine Fortsetzung von (Z, L^c) ist, folgt aus der Definition 2.12, dass es zu e genau ein $C' \in \mathcal{C}^c$ mit $F^c(e) = \langle C'\rangle_k$ gibt. Darum kann man $C\sigma_k := C'$ setzen. Das gleiche Argument gilt für $C \in \mathcal{C}^c$, wenn $C\sigma_k^c$ undefiniert ist.

Die Abbildung $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ wird gegeben durch

$$\varphi(C) := \begin{cases} \varphi^*(C) & \text{falls } C \in \mathcal{C}^* \\ \varphi^c(C) & \text{sonst} \end{cases}$$

Um zu beweisen, dass φ ein Σ–Morphismus ist, muss man erstens zeigen, dass $\varphi(C)\sigma_i = \varphi(C\sigma_i)$ für alle $C \in \mathcal{C}$ und $i \in \{0,1,2\}$ und zweitens $r_{ij}(C) = m_{ij}(\varphi(C))$. Beides ergibt sich unmittelbar daraus, dass φ^* und φ^c singularitätenfrei und die beiden Labelungen komplementär sind. □

Handelt es sich bei den Fortsetzungen um eine Patchausfüllung und eine Ebenenfortsetzung, kann man die Labelungen als "Innen" und "Außen" interpretieren, was auch dem intuitiven Verständnis entspricht. Ist dies aber nicht der Fall, hat man einfach nur zwei gleichwertige Seiten der Kurve.

Aus einem einfach zusammenhängenden Quasikammernsystem kann man eine gelabelte Kurve erhalten, indem der Randgraph von $\mathcal{Q}$ die Kurve bildet und die Labelung durch die benachbarten Kammern bestimmt wird.

Lemma 2.18 *Gegeben ein Delaneysymbol $\mathcal{D}$, ein Patch P, dessen Quasikammernsystem mit $\mathcal{Q}_P$ bezeichnet wird und ein Σ–Morphismus $\varphi_P : \mathcal{Q}_P \to \mathcal{D}$. Es gibt genau eine gelabelte Kurve (Z, L), die $(\mathcal{Q}_P, \varphi_P)$ als Fortsetzung hat.*

Beweis: Die Existenz einer solchen Kurve (Z, L) ist offensichtlich, da wir sie unmittelbar aus dem Rand von $\mathcal{Q}_P$ konstruieren können. Angenommen, es gäbe eine Kurve (Z', L'), die ebenfalls $(\mathcal{Q}_P, \varphi_P)$ als Fortsetzung hätte. Da sowohl Z als auch Z' zu $G_R(\mathcal{Q}_P)$ isomorph sind, gilt $Z \cong Z'$. Die Übereinstimmung der beiden Labelungen ergibt sich ebenfalls unmittelbar aus der Definition einer Fortsetzung. □

Das rechtfertigt folgende Definition:

Definition 2.19 *Gegeben ein endliches, einfach zusammenhängendes Quasikammernsystem $\mathcal{Q}_P$, ein Delaneysymbol $\mathcal{D}$ und eine Abbildung $\varphi_P : \mathcal{Q}_P \to \mathcal{D}$. Die von $\mathcal{Q}_P$ bezüglich $\mathcal{D}$ und φ_P* **induzierte Randkurve** *(Z, L), $L = (\mathrm{del}, \mathrm{zahl}, \mathrm{dim})$ ist die Kurve, die $(\mathcal{Q}_P, \varphi_P)$ als Fortsetzung hat.*

Ist $\mathcal{Q}_P$ das von einem Patch induzierte Quasikammernsystem, ergeben sich, da die Kurve immer nur entlang von Flächengrenzen verläuft, für die Labelungsabbildungen einige Einschränkungen im Vergleich zum allgemeinen Fall, und zwar gerade die, die in Kapitel 4 gefordert werden. Es ist $\dim(e) = 2$ für alle $e \in E(Z)$, woraus $\dim(v) \neq 2$ für alle $v \in V(Z)$ folgt. Außerdem gilt $\mathrm{zahl}(v) = 2$ für alle $v \in V_1(Z)$.

Satz 2.20 *Gegeben eine periodische Pflasterung T_p und ein Delaneysymbol $\mathcal{D}$ mit einem Σ–Morphismus $\varphi : \mathcal{C}_{T_p} \to \mathcal{D}$. Zu jeder kompatibel fortsetzbaren*

Kurve bezüglich $\mathcal{D}$ mit einer Patchausfüllung und einer Ebenenfortsetzung findet man einen einfachen, geschlossenen Pfad in T_p und umgekehrt.

Beweis: Ein einfacher, geschlossenen Pfad in T_p begrenzt ein einfach zusammenhängendes Quasikammernsystem. Dieses induziert in offensichtlicher Weise eine kompatibel fortsetzbare Kurve.

Hat man umgekehrt eine kompatibel fortsetzbare Kurve, erzeugen nach 2.17 die beiden Quasikammernsysteme zusammen ein Kammernsystem $\mathcal{C}$, zu dem es eine singularitätenfreie Abbildung ins Delaneysymbol gibt. Laut Theorem 2.8 gilt, dass Kammernsysteme, die singularitätenfrei ins selbe Delaneysymbol abbildbar sind, auch isomorph sein müssen. Somit korrespondiert $\mathcal{C}$ zur periodischen Pflasterung T_p. $\square$

Kapitel 3

Nichteindeutigkeit von Fortsetzungen

3.1 Kurven mit mehrdeutiger Patchausfüllung

Zunächst steht noch die Begründung aus, dass die Eindeutigkeit der Fortsetzung von Kurven tatsächlich ein Problem darstellen kann. Im Falle der Patchausfüllung mit Hexagonen und Ecken vom Grad drei haben das Guo, Hansen und Zheng in [8] gezeigt, indem sie ein Paar unterschiedlicher Patches mit gleicher Randkurve angegeben haben.

Man kann sich in Abbildung 3.1 durch Vergleich der markierten Sechsecke davon überzeugen, dass die beiden Patches unterschiedlich sind. Gäbe es nämlich einen Isomorphismus zwischen den Patches, müsste dieser insbesondere auch die Ränder aufeinander abbilden. Da die markierten Sechsecke eine eindeutige Randkonfiguration mit drei benachbarten Ecken von Grad zwei haben, müssen diese Flächen durch den Isomorphismus aufeinander abgebildet werden. Das gleiche gilt für die beiden Nachbarflächen, wobei diese beim ersten Patch keinen weiteren gemeinsamen Nachbarn haben, im zweiten aber schon. Darum ist ein solcher Isomorphismus nicht möglich.

Die Gleichheit der beiden Ränder erkennt man durch Vergleich der zyklischen Sequenzen von Eckengraden.

Damit hat man folgendes Ergebnis:

Satz 3.1 *Es gibt Kurven (Z, L), die unterschiedliche Patchausfüllungen haben.*

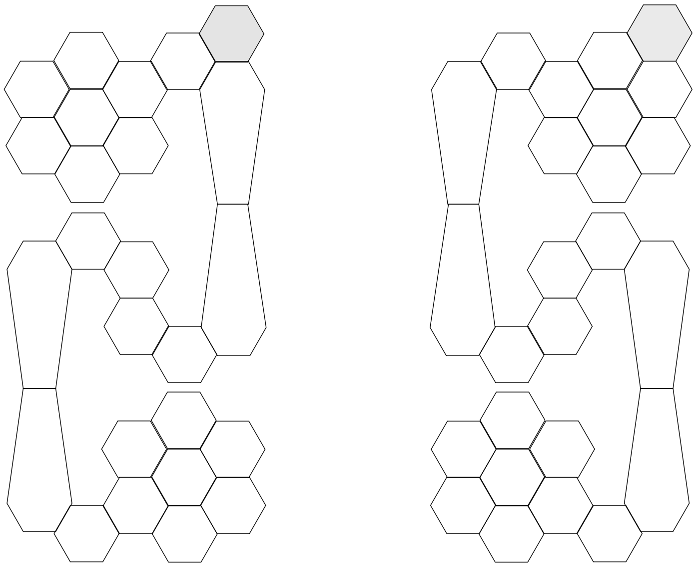

Abbildung 3.1: Unterschiedliche Sechseckpatches mit dem gleichen Rand.

Die Entfernung der markierten Flächen von beiden Patches aus Abb. 3.1 ergibt isomorphe Graphen mit der Eigenschaft, dass die Symmetriegruppe des Graphen kleiner ist als die des Randes. Auf diese Weise lassen sich mehrere Paare unterschiedlicher Patches mit gleichem Rand erzeugen, indem Flächen angefügt werden, die symmetrieäquivalent unter der Symmetriegruppe des Randes aber nicht der des Patches sind. In [8] werden die inneren Patches "irreduzibel" (irreducible) und die markierten Flächen "entfernbar" (removable) genannt. Alle bekannten Beispiele für Kurven, die keine eindeutige Patchausfüllung haben, lassen sich auf Patches mit diesen Symmetrieeigenschaften zurückführen.

Obwohl die inneren, irreduziblen Patches als Graphen isomorph sind, kann man sie doch als unterschiedliche Fortsetzungen einer gelabelten Kurve (Z, L) betrachten, nämlich dann, wenn eine "Markierung" an der Kurve Z von dem Isomorphismus respektiert werden soll. Da diese etwas allgemeinere Bedeutung von Eindeutigkeit an einigen Stellen wesentlich ist, wird dafür eine feste Bezeichnung eingeführt.

Definition 3.2 *Eine* **markierte gelabelte Kurve** *ist ein Tripel* (Z, L, e), *wobei* (Z, L) *eine gelabelte Kurve ist und* $e =\in E(Z)$ *eine ihrer Kanten. Die* **Fortsetzung** *von* (Z, L, e) *ist ein Tripel* $(\mathcal{Q}, \varphi, k)$, *wobei* $(\mathcal{Q}, \varphi)$ *eine Fortsetzung von* (Z, L) *und* $k \in E(G_R(\mathcal{Q}))$ *eine Kante des Randgraphen ist, so dass es einen mit* φ *verträglichen Graphenisomorphismus* $F : Z \to G_R(\mathcal{Q})$

gibt, der außerdem $F(e) = k$ erfüllt.

Sind Missverständnisse ausgeschlossen, wird manchmal schon das Kammernsystem $\mathcal{Q}$ als Fortsetzung bezeichnet.

Eine markierte gelabelte Kurve (Z, L, e) heißt **eindeutig fortsetzbar***, wenn für je zwei Fortsetzungen $(\mathcal{Q}_1, \varphi_1, k_1)$ und $(\mathcal{Q}_2, \varphi_2, k_2)$ ein Σ–Isomorphismus $\psi : \mathcal{Q}_1 \rightarrow \mathcal{Q}_2$ existiert, der außer den Abbildungen φ_1 und φ_2 auch die markierte Kante respektiert, also $\psi(k_1) = k_2$ erfüllt.*

Eine gelabelte Kurve (Z, L) heißt **eindeutig fortsetzbar***, wenn für alle $e \in E(Z)$ die markierte Kurve (Z, L, e) eindeutig fortsetzbar ist.*

Genau genommen müsste man eine gerichtete Kante als Marke wählen, um zu vermeiden, dass die Fortsetzung einer markierten Kurve (Z, L, e) als eindeutig gilt, wenn sie im intuitiven Sinn nicht eindeutig fortsetzbar ist. Dieser Fall tritt ein, wenn die Kante e durch eine Spiegelung auf sich selbst abgebildet wird, obwohl die Fortsetzung selber diese Spiegelungsachse nicht hat. Diese Situation ist aber nicht problematisch, da markierte Kurven ohnehin nur ein Werkzeug darstellen, um die Eindeutigkeit der Fortsetzung bei unmarkierten Kurven zu definieren. Im eben beschriebenen Spezialfall gibt es nämlich immer eine Kante $e' \in E(Z)$ — beispielsweise eine Nachbarkante von e — dergestalt, dass (Z, L, e') nicht eindeutig fortsetzbar ist.

Hat man einen Patch wie beispielsweise den irreduziblen Kern aus Abb. 3.1, bei dem der Rand eine höhere Symmetriegruppe als das Innere hat, lässt sich daraus leicht eine markierte gelabelte Kurve erhalten, die nicht eindeutig fortsetzbar ist. Als markierte Kante wählt man beispielsweise gerade solche, die an die zusätzliche Fläche angrenzt. Damit ließen sich beide Patches (ohne die zusätzliche Fläche) als Ausfüllung von (Z, L, e) verstehen, wobei kein Isomorphismus die markierten Kanten aufeinander abbilden könnte. Es gilt also folgendes:

Lemma 3.3 *Gegeben eine gelabelte Kurve (Z, L) und eine Ausfüllung $(\mathcal{Q}_Z, \varphi_Z)$. Ist $Aut(Z) \supset Aut(\mathcal{Q}_Z)$, so gibt es eine Kante $e \in E(Z)$, für die (Z, L, e) nicht eindeutig fortsetzbar ist.*

Beweis: Da die Symmetriegruppe von Z größer ist als die von $\mathcal{Q}_Z$, kann man ein Kantenpaar $e, e' \in E(Z)$ wählen, das symmetrieäquivalent bezüglich der Gruppe von Z aber nicht der von $\mathcal{Q}_Z$ ist. Dann ist $\mathcal{Q}_Z$ sowohl die Ausfüllung von (Z, L, e) als auch die von (Z, L, e').

Es gibt einen Automorphismus des Randes, der e' auf e abbildet. Wendet man den auf den Rand von $\mathcal{Q}_Z$ als Ausfüllung von (Z, L, e') an, erhält man einen Patch $\mathcal{Q}'$, der eine Ausfüllung von (Z, L, e) ist. Gäbe es einen Isomorphismus $\psi : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$, der die Marke respektiert, hätte man auch einen Automorphismus von $\mathcal{Q}_Z$, der e und e' aufeinander abbildet, was nach Voraussetzung nicht möglich ist. $\square$

Je nachdem, ob man die Marke benötigt, werden in der weiteren Arbeit sowohl markierte als auch unmarkierte gelabelte Kurven betrachtet.

3.1.1 Konstruktion von (m, k)–Patches

Die hexagonale Patchausfüllung ist nicht der einzige Fall, in der eine mehrdeutige Fortsetzung vorkommt. Um dies zu verallgemeinern, führen wir eine spezielle Klasse von Patchausfüllungen ein, die anschaulich gerade solche Ausfüllungen beschreiben, bei denen zu Grunde liegenden Patch die Flächen– und Eckengrade im Inneren überall identisch sind. Diese Eigenschaft kann man durch spezielle Delaneysymbole $\mathcal{D}_{m,k}$ beschreiben, nämlich mit $\mathcal{D}_{m,k} = \{d\}$, $m_{01}(d) = k$ und $m_{12}(d) = m$ für vorgegebene Parameter m und k.

Definition 3.4 *Gegeben ein Delaneysymbol $\mathcal{D}_{m,k}$ und eine gelabelte Kurve (Z, L), die $\dim(e) = 2$ für alle $e \in E(Z)$ erfüllt. Eine* **(m, k)–Ausfüllung** *(oder ein (m, k)–Patch) ist ein Quasikammernsystem $\mathcal{Q}_P$, für das es einen Σ–Morphismus $\varphi : \mathcal{Q}_P \to \mathcal{D}$ gibt und das eine Ausfüllung von (Z, L) ist.*

Für $v \in V_0(\mathcal{Q}_P)$ und C_v aus dem $(1, 2)$–Orbit von v wird $\deg(v) := r_{12}(C_v)$ definiert.

Im Bezug auf den Patch, der dem Quasikammernsystem $\mathcal{Q}_P$ zu Grunde liegt, ist $\deg(v)$ natürlich nichts anderes als der Eckengrad von v.

Die in [8] betrachteten hexagonalen Patches entsprechen also dem Parametersatz $(3, 6)$. Es ist zu beachten, dass hier auch Delaneysymbole möglich sind, die nicht zu einer Pflasterung der euklidischen Ebene korrespondieren, sondern zur Sphäre oder der hyperbolischen Ebene.

Wegen der Einschränkungen, die bei einer (m, k)–Ausfüllung gefordert sind, können die zur Labelung gehörenden Abbildungen nicht frei gewählt werden, wenn eine (m, k)–Ausfüllung möglich sein soll. Aus $\dim(e) = 2$ folgt $\dim(v) \in \{0, 1\}$, also $V_2(Z) = \emptyset$. Es gilt $\mathrm{del}(v) = d$ für alle $v \in V(Z)$, da $\mathcal{D}$ nur aus diesem einen Element besteht. Es ist $\mathrm{zahl}(v) = 2$ für alle $v \in V_1(Z)$. Die Ecken

$v \in V_0(Z)$ haben (in P) den Grad $\deg(v) = \frac{1}{2}\text{zahl}(v) + 1$. Da nach Definition $\deg(v) \leq m$ gelten muss, erhält man die Gleichung $\text{zahl}(v) \leq 2m - 2$, so dass $\text{zahl}(v)$ außerdem gerade sein muss.

Die gelabelte Kurve ist also schon vollständig festgelegt, wenn man die Grade der Ecken der Dimension 0 festlegt. Das führt uns zu folgender Schreibweise:

Notation 3.5 Den Rand R eines Patches kann man eindeutig beschreiben, indem ausschließlich die Randecken aus $V_0(Z)$ durch ihren Grad kodiert werden. Kommt ein Eckengrad oder eine Folge von Eckengraden mehrfach hintereinander vor, wird dies durch einen entsprechenden Exponenten ausgedrückt. Ist ein Exponent 0, fällt der davon betroffene Eintrag weg.

Theorem 3.6 *Zu jedem gegebenen Paar* $(m, k) \notin \{(3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$ *gibt es einen* (m, k)*–Patch* P*, dessen Rand* $R(P)$ *eine höhere Symmetrie als* P *hat.*

Beweis: Man konstruiert zu gegebenen Parametern (m, k) einen rotationssymmetrischen Patch $P = P(m, k)$, dessen Randkurve zusätzlich noch eine Spiegelsymmetrie hat.

Die Basis für diese Konstruktion ist ein Patch P_0, der die Symmetrie eines Rechtecks und zwei nicht benachbarte innere Flächen f_1 und f_2 hat, deren Eckenkoronen K_1 bzw. K_2 — also die innere Fläche zusammen mit allen Nachbarflächen, die mindestens eine Ecke mit ihr gemeinsam haben[1] — sich in mindestens einer Kante (und bis zu drei Flächen) überlappen und dadurch den Patch bilden. Eine schematische Darstellung davon ist in nebenstehender Abbildung angegeben.

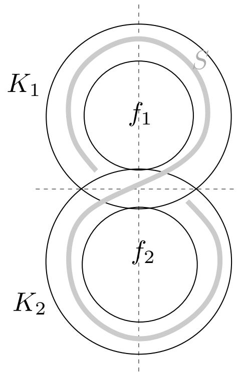

Abbildung 3.2: Schematische Darstellung von P_0

Man konstruiert nun P, indem aus P_0 eine S–förmige Komponente gebildet wird, die gerade die äußeren Flächen der Eckenkoronen abdeckt, und die an ihren Enden mit jeweils einer ganzen Eckenkorona verklebt wird. Um einen Patch P mit Rotationssymmetrie zu erhalten, müssen die inneren Flächen f_1 und f_2 durch zwei Spiegelungen von P_0 ineinander überführt werden können.

[1] Für eine formale Definition s. Def. 5.4.

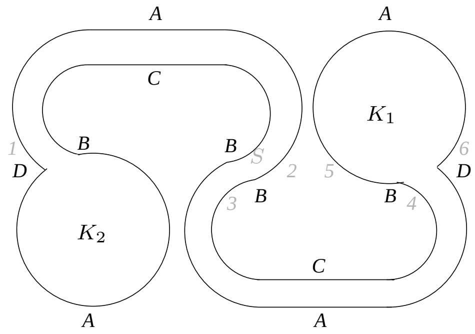

Abbildung 3.3: Schematische Darstellung des Patches P

Abb. 3.3 zeigt die allgemeine Form dieses Patches.
Abhängig von der Parität der Parameter m, k unterscheidet sich der Rand des Patches. Die angegebene Unterteilung der Randsequenz in die Segmente $A = A(m, k), B = B(m, k), C = C(m, k)$ und $D = D(m, k)$ ist aber allgemein verwendbar. Man kann für jeden Fall ausgewählte Randecken dergestalt auswählen und labeln, dass die Segmente von ihnen begrenzt werden.

Die Randkomponente A beschreibt den Rand von Ecke 1 bis 2, jeweils einschließlich der Randecken. B sei der Rand zwischen 2 und 3 (ohne die Ecken selber), C wieder von 3 bis 4, B zwischen 4 und 5 und A von 5 bis 6. Das Randstück D liegt zwischen 6 und 1. Danach wiederholt sich die Abfolge der Randkomponenten.

Für bestimmte Konfigurationen des Randes werden Abkürzungen eingeführt, die in allen Fällen gültig bleiben, nämlich $\alpha := 32^{k-3}$ und $\beta := 32^{k-4}$.

Je nach Parität der Parameter unterscheiden wir auf Grund der Lage der inneren Flächen zueinander drei Fälle. Zum Teil können Parameterpaare mit "kleinem" [2] m bzw. k noch Unterfälle bilden.

Fall: $\underline{m \text{ und } k \text{ sind gerade}, k > 6.}$ Da die Eckengrade größer als zwei sein sollen, gilt $m \geq 4$. An diesem Fall wird die Konstruktion exemplarisch ausführlich vorgestellt.

In Abb. 3.4 ist ein Beispiel für diese Konstruktion gezeigt, an der auch die Labelung des Randes verdeutlicht wird. Die Kanten, an denen die S–Komponenten mit den Koronen identifiziert wird, sind grau hervorgehoben.

Wir beginnen bei (einer) Ecke mit Label "1". Die S–Komponente entsteht durch Entfernung der beiden inneren Flächen. Da alle anderen Flächen min-

[2] was das genau bedeutet, wird an den entsprechenden Stellen präzisiert

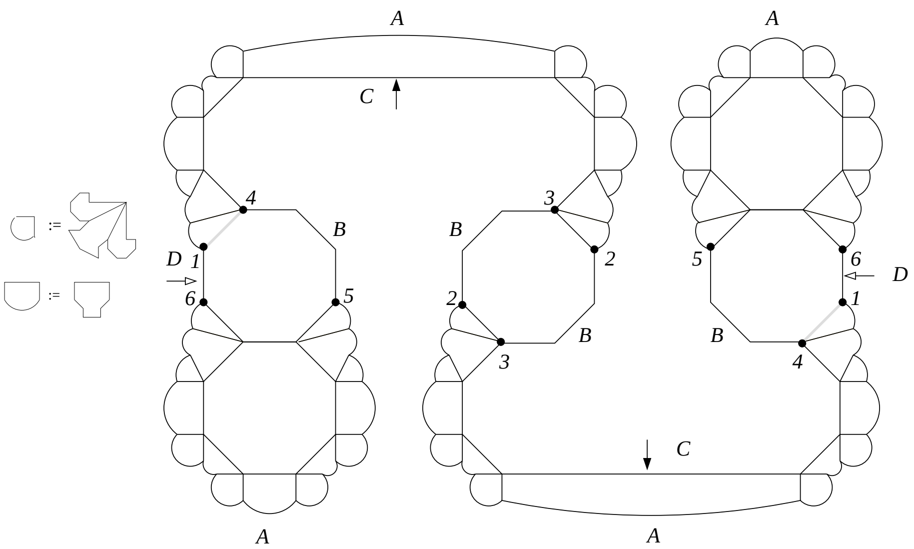

Abbildung 3.4: Beispiel mit $(m, k) = (6, 8)$

destens eine Ecke mit einer inneren Fläche gemeinsam hatten, haben sie nach deren Entfernung einen nicht zusammenhängenden Schnitt mit dem Rand; genauer gesagt hat jede Fläche zwei Randkomponenten, die aus mindestens einer Ecke bestehen.

Der besseren Übersicht halber werden zuerst einige Randkonfigurationen separat betrachtet. Das "Umrunden einer Ecke" — also die Folge der Randeckengrade einer maximalen Folge benachbarter Flächen, deren gegenüberliegende Randkomponente aus einer Ecke v besteht — lässt sich als $(32^{k-3})^{m-3} = \alpha^{m-3}$ formalisieren. Bis auf v gehören alle Ecken einer dieser Fläche auch zum Rand des Patches. Zwei davon haben den Grad 3, da sie noch an eine weitere Fläche angrenzen. (Die Folge der Ecken von Grad 2 wird darum immer wieder von Ecken mit Grad 3 unterbrochen.) Alle anderen, die im Rand vorkommen, haben aber Grad 2, so dass sich der Exponent $k-3$ daraus ergibt. Der Exponent $m-3$ ergibt sich aus der Tatsache, dass von den maximal m an v möglichen Flächen eine nicht vorhanden ist und zwei weitere eine größere zweite Randkomponente haben, die aus einer ganzen Kante besteht. Mit einem ähnlichen Argument wie eben erhält die Sequenz, die dem Umrunden einer Kante entspricht, die Form $32^{k-4} = \beta$.

Die Randkomponente A besteht im Wesentlichen aus Kopien von $\beta\alpha^{m-3}$, und wir erhalten folgende Formel:

$$A = \alpha^x(\beta\alpha^{m-3})^{k-2}\beta\alpha^x 3$$

Für diesen Fall gilt $x = x(m, k) = m - 3$, da wie im Inneren von A genau drei Flächen aus der Nachbarschaft der umrundeten Ecke nichts zu diesem Randsegment beitragen. A ist ganz offensichtlich spiegelsymmentrisch.

Für B gilt mit einem geeignet gewählten $y = y(m, k)$:

$$B = 2^y$$

Dabei ist hier $y = \frac{k}{2} - 2$, da die mittlere Fläche genau in der Mitte geteilt wird, und jede Hälfte gerade $\frac{k}{2} - 2$ Ecken von Grad 2 hat. Zwei Ecken jeder Hälfte haben einen höheren Grad und gehören schon zur nächsten bzw. vorigen Randkonfiguration.

Als nächstes verläuft der Rand quasi an der Innenseite einer Fläche, man bekommt daher

$$C = m^k.$$

Danach hat man konstruktionsbedingt Kopien der Randabschnitte B und A, und zuletzt den Abschnitt D, bevor sich die gesamte Abfolge wiederholt. D besteht genau wie B nur aus Ecken vom Grad 2. Allerdings sind hier noch weniger frei, da eine davon durch die Identifizierung einer Korona mit der S–Komponente einen höheren Grad bekommt und die zweite zur inneren Ecke wird. Es gilt also

$$D = 2^{y-2}$$

Als Sequenz für den Rand von P erhalten wir:

$$R(P) \quad = \quad ABCBADABCBAD$$

Aus dieser Abfolge und der Spiegelsymmetrie der Einzelkomponenten erhält man für die zyklische Randsequenz die Existenz zweier Spiegelachsen, nämlich eine durch die beiden Kopien von C und die andere jeweils durch D. In Abb. 3.4 sind die entsprechenden Stellen durch Pfeile markiert.

Die Fälle $k = 6$ und $k = 4$ unterscheiden sich in einigen Details vom allgemeinen Fall. Für $\underline{k = 4}$ und $m > 4$ fallen einerseits alle Randteile weg, bei denen ein Exponent $k - 4$ oder $\frac{k}{2} - 2$ vorkommt. Außerdem ist die Überschneidung der beiden Koronen mit drei Flächen größer (s. Abb. 3.5). Darum ist auch die Kante, entlang derer die Koronen mit der S–Komponente identifiziert

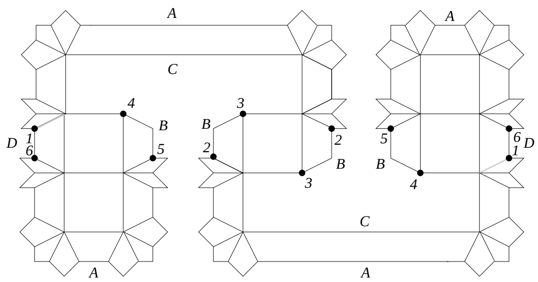

Abbildung 3.5: Beispiel mit $(m, k) = (6, 4)$

werden, an einer anderen Stelle. An derjenigen Fläche der Korona, die eine Kante mit der inneren Fläche gemeinsam hat, gibt es nämlich nur eine Kante im Rand, die nicht in Frage kommt, da bei Verklebung der Komponenten der Grad der Ecken zu groß würde. Stattdessen wird die angrenzende Kante im Rand verwendet, die zu einer Fläche mit nur einer inneren Ecke gehört. An A verändert sich darum der Exponent x zu $m - 4$. Der Exponent y, der u.a. in B auftritt, wird zu $y = k - 3 = 1$, da die Sequenz von Ecken mit Grad 2 in diesem Fall zu einer anderen Fläche gehört. Die mittig geteilte Fläche trägt nämlich gar keine Ecken von Grad zwei zum Rand bei. Aus dem Grund erhält man $C = 3m^k3$. $D = 2^{y-1}$ fällt praktisch weg, es ist also $y = 1$.

Für $(m, k) = (4, 4)$ ist $A = (\beta\alpha)^{k-2}\beta 3$, $B = 2$, $C = 3m^k3$ und $D = 2^0$.[3]

Für $\underline{k = 6}$ sind x und y identisch zum Fall $k > 6$. Das gleiche gilt für B und C. D fällt dagegen weg, und die Endecken der beiden Randteile, die sonst mit A bezeichnet wären, fallen zusammen. Damit müssen wir im Gesamtrand A durch ein ebenfalls spiegelsymmetrisches $\bar{A}$ ersetzen, was gerade aus zwei Kopien von A durch Identifizieren der Endecken entsteht. Wir erhalten $R(P) = \bar{A}BCB\bar{A}BCB$, also wieder eine Struktur mit zwei Spiegelachsen.

Fall: $\underline{m \geq 4 \text{ sei gerade und } k \geq 5 \text{ ungerade.}}$ In diesem Fall braucht man die größte Anzahl von Flächen, da sich die beiden Koronen nur in einer Kante überlappen (s. Abb. 3.6). Dies ergibt sich daraus, dass die senkrechte Spiegelachse, da k ungerade ist, durch je eine Ecke der inneren Fläche verlaufen muss, und wegen des geraden Eckengrades zwei Flächen notwendig sind, um die horizontale Spiegelachse zu erhalten.

Es gilt wieder $A = \alpha^x(\beta\alpha^{m-3})^{k-1}\alpha^x 3$ mit $x = \frac{m}{2} - 2$ und $B = 2^y$ mit $y = \frac{k-1}{2} - 2$. Außerdem haben wir $C = 32^{y+1}(\frac{m}{2} + 1)m^{k-1}(\frac{m}{2} + 1)2^{y+1}3$ und $D = 2^y 32^y$.

[3]Eine Darstellung eines Patches mit $(m, k) = (4, 4)$ findet sich in Abb. 3.17.

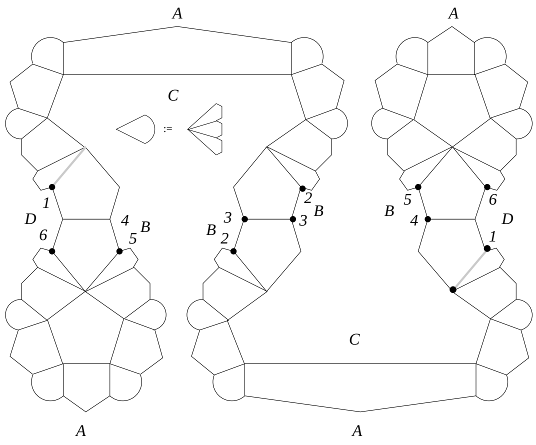

Abbildung 3.6: Beispiel mit $(m, k) = (6, 5)$

Fall: $m > 3$ ist ungerade und $k \geq 3$ beliebig. In diesem Fall liegen die beiden zentralen inneren Flächen der Koronen dergestalt zueinander, dass eine Ecke aus jedem Rand durch eine gemeinsame Kante verbunden wird (s. Abb. 3.7). Darum ist hier auch die Parität der Flächengröße unerheblich, da die beiden Flächen im Zentrum der S–Komponente an einer Achse gespiegelt werden können, die senkrecht zu der gemeinsamen Kante verläuft. A und B sind

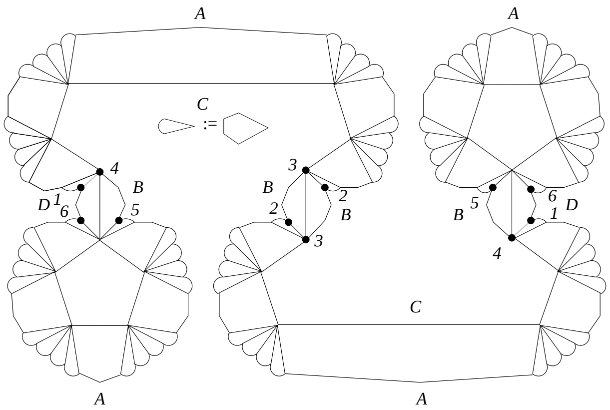

Abbildung 3.7: Beispiel mit $(m, k) = (7, 5)$

wieder von der gleichen Form wie im Fall (gerade, ungerade), mit $x = \frac{m-1}{2} - 2$ und $y = k - 3$. Außerdem haben wir $C = \frac{m+3}{2} m^{k-1} \frac{m+3}{2}$ und $D = 2^{y-1}$.

Fall: $m = 3$ und $k > 5$ beliebig. Wie im Fall $m = 4$ ergeben sich hier einige Änderungen, da manche Exponenten der allgemeinen Formel wegfallen oder nicht definiert sind. Es ist $A = \beta^{k-2}3$, $B = 2^y$ mit $y = k - 4$, $C = m^{k+1}$ und $D = 2^{y-2}$. Der irreduzible Kern der Patches in Abb. 3.1 am Anfang des

Kapitels stellt einen solchen $(3,6)$–Patch dar.

Für $\underline{(m,k)=(5,3)}$ ist $A=323$, $B=232$, $C=m^{k+1}$ und $D=3$.

Bleibt noch zu zeigen, dass der Patch diese Symmetrie des Randes nicht hat. Angenommen, die Spiegelsymmetrie des Randes wäre auch eine des Patches. Bei dieser Spiegelung werden Randkomponenten, die zu Flächen mit zusammenhängendem Randschnitt gehören, auf solche in der S–Komponente — also mit mehreren Randkomponenten — abgebildet. Dies ist für einen Automorphismus eines Patches nicht möglich. □

Da eine Randsequenz praktisch nur eine Kurzschreibweise für eine gelabelte Kurve ist, hat man auch eine gelabelte Kurve (Z,L) mit dieser Eigenschaft.

Das folgende Korollar folgt unmittelbar aus Theorem 3.6 und Lemma 3.3:

Korollar 3.7 *Zu jedem gegebenen Paar* $(m,k) \notin \{(3,3),(3,4),(4,3)\}$ *gibt es eine Kurve* (Z,L,e)*, die nicht eindeutig fortsetzbar ist.*

Für die vollständige Behandlung des Problems bleiben noch die Fälle zu überprüfen, die durch das letzte Theorem nicht abgedeckt werden, also die kleinen Parametersätze $(m,k) \in \{(3,3),(3,4),(4,3)\}$. Für diese kann man zeigen, dass es nicht möglich ist, Ränder zu konstruieren, die verschiedene Ausfüllungen haben, da die niedrigen Ecken- und Flächengrade eine eindeutige Ausfüllung erzwingen.

Um das zu zeigen, brauchen wir erst ein paar Vorüberlegungen. Für das Maß, in dem die Eckengrade auf dem Rand von m abweichen, wird ein eigener Parameter eingeführt.

Definition 3.8 *Gegeben eine Kurve* (Z,L) *und ein* $m \in \mathbb{N}$*. Das* **Defizit** *von* Z *(bezüglich* m*) ist definiert als*

$$D_m(Z) := \sum_{v \in V_0(Z)} m - (\frac{1}{2}\mathrm{zahl}(v) + 1).$$

Mit **Sekante** *sei eine innere Kante eines Patches* P *bezeichnet, deren Endecken auf dem Rand von* P *liegen.*

Da für die Randecken einer Patchausfüllung $\deg(v) = \frac{1}{2}\mathrm{zahl}(v) + 1$ gilt, gibt das Defizit im Patch gerade an, wieviele Kanten an jeder Randecke fehlen, um m zu erreichen.

Lemma 3.9 *Gegeben eine Kurve* (Z, L) *mit einer* (m, k)*–Ausfüllung* $\mathcal{Q}_P$*, die das Quasikammernsystem eines Patches* P *ist. Mit* $f := |\mathcal{F}(P)|$ *sei die Zahl der (beschränkten) Flächen, mit* $e := |\mathcal{E}(P)|$ *die Zahl der Kanten und* $v := |\mathcal{V}(P)|$ *die Zahl der Ecken von* P *bezeichnet.* $n := \frac{|Z|}{2}$ *sei die Zahl der Randkanten von* P *und* $D := D_m(Z)$*. Dann gelten folgende Gleichungen:*

$$f = e - v + 1 \tag{3.1}$$
$$e = \frac{kf + n}{2} \tag{3.2}$$
$$v = \frac{kf + n + D}{m} \tag{3.3}$$
$$D = \frac{2}{k-2}(k + n + v(\frac{km}{2} - k - m)) \tag{3.4}$$

Beweis: (3.1) ist gerade die Euler Formel, wenn die unbeschränkte Fläche nicht mitgezählt wird. Für (3.2) und (3.3) zählt man die Ecken bzw. Kanten von jeder Fläche, wobei aber berücksichtigt werden muss, dass im Inneren jede Kante doppelt und jede Ecke m–fach gezählt ist, durch den Rand eine weitere Fläche der Länge n dazukommt, und die Ecken auf dem Rand nur $\deg(v) \leq m$–fach gezählt werden.

Die letzte Formel für das Defizit erhält man durch Umformung der ersten drei Gleichungen. □

Lemma 3.10 *Für* $k, m \in \mathbb{N}$ *und* $m \geq 3$ *gilt* $\frac{km}{2} - k - m = 0$ *genau dann, wenn* $(m, k) \in \{(3, 6), (4, 4), (6, 3)\}$*.*

Beweis: Aus $\frac{km}{2} - k - m = 0$ folgt $k = 2\frac{m}{m-2}$. Da $m > 2$ gilt auch $k > 2$. k aufgefasst als Funktion $k(m)$ ist monoton fallend. Da $k(7) < 3$, kann k nur die ganzzahligen Werte $k \in \{3, 4, 5, 6\}$ annehmen. Für $k = 5$ ist m nicht ganzzahlig, also kommen nur die Paare $(3, 6), (4, 4), (6, 3)$ in Frage, wie man der Tabelle entnehmen kann.

k	6	4	3.3	3
m	3	4	5	6

□

Aus Gleichung 3.4 und dem Lemma 3.10 kann man die Tatsache folgern, dass in diesen drei Fällen das Defizit sogar unabhängig von der Eckenzahl ist und mit $D = \frac{2}{k-2}(k + n)$ alleine abhängig von der Randlänge und der vorgegebenen Flächengröße.

Theorem 3.11 *Für* $(m, k) \in \{(3, 3), (3, 4), (4, 3)\}$ *gibt es keine Randkurve, die mit unterschiedlichen* (m, k)*–Patches gefüllt werden kann.*

Beweis: Es wird die Gleichung (3.4) aus Lemma 3.9 verwendet.

Fall $(m, k) = (3, 3)$: Werden diese Parameter in (3.4) eingesetzt, erhalten wir $D = 6 + 2n - 3v$.

Angenommen, es gibt keine Ecke von Grad 2 (**2–Ecke**) auf dem Rand, d.h. alle Randecken haben den Grad 3, so errechnen wir ein Defizit $D = 0$. Dies eingesetzt in die Formel ergibt

$$n = \frac{3}{2}v - 3$$

Also muss v gerade sein und $v \leq 6$ gelten, da andernfalls die Randlänge n größer als die Zahl der Ecken wäre. Als untere Schranke können wir $v > 2$ annehmen, um mindestens ein Dreieck zu erhalten. Aus $v = 4$ folgt $n = 3$, wodurch ein Tetraeder eindeutig induziert wird. Im letzten Fall $v = 6$ gilt $n = 6$, d.h. alle Ecken liegen im Rand. Ein solcher Rand kann gar nicht ausgefüllt werden, ohne zusätzliche Ecken im Inneren einzufügen. Dies sieht man folgendermaßen: wählt man eine Ecke a im Rand, muss diese mit den jeweiligen übernächsten Ecken a_1, a_2 eine Kante bilden, damit Dreiecke entstehen. Zwischen a und a_1 befindet sich genau eine Ecke auf dem Rand, die nur Grad zwei hat und die wegen der Kante (a, a_1), die den Patch in zwei Komponenten teilt, mit keiner weiteren Ecke verbunden sein kann. Das ist ein Widerspruch, da im Fall $(m, k) = (3, 3)$ jede Ecke den Grad vier haben soll.

Eine 2–Ecke auf dem Rand induziert immer eine eindeutige Fläche. Darum kann man die Behauptung mit vollständiger Induktion folgern. (Dieses Argument wird später in Kapitel 4 verallgemeinert und formalisiert.)

Fall $(m, k) = (4, 3)$: Mit diesen Parametern bekommen wir als Defizit $D = 2n - 2v + 6$. Zuerst wird gezeigt, dass nur ganz spezielle Patches in diesem Fall keine Sekante haben.

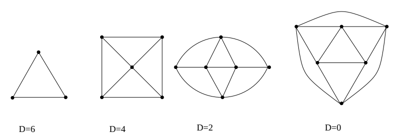

Abbildung 3.8: $(4, 3)$–Patches ohne Sekante

Eine ähnliche Argumentation wie eben führt zu dem Ergebnis, dass D gerade sein muss und $D \leq 6$ erfüllt. Die Zahl der inneren Ecken errechnet sich als

$v - n = 3 - \frac{D}{2}$, ist für vorgegebenes D also fix. Wenn man annimmt, dass es keine Sekante gibt, sieht man leicht, dass Abb. 3.8 alle Möglichkeiten für $(4,3)$–Patches mit dieser Eigenschaft zeigt, und dass diese Patches durch die Randkurve jeweils wohldefiniert sind.

Es gebe also eine Sekante. Wir werden zeigen, dass es dann auch eine 2–Ecke auf dem Rand gibt. Wähle eine Sekante s, deren Ecken minimalen Abstand entlang des Randes haben. P_1 sei die Komponente, die von diesem minimalen Pfad und s berandet wird. Wegen der Minimalität von s enthält P_1 keine Sekante, und ist darum entweder eine Fläche — was heißt, dass es eine 2–Ecke im Rand gibt — oder eine der speziellen Konfigurationen aus Abb. 3.8. Die drei Patches davon, die aus mehr als einer Fläche bestehen, haben nur Ecken von mindestens Grad drei im Rand. Das bedeutet für die angrenzende Komponente P_2, dass sie nur aus einer Fläche besteht und es darum wieder eine 2–Ecke im Rand gibt.

Der Fall $(m,k) = (3,4)$ kann analog behandelt werden. In diesem Fall induzieren jeweils zwei benachbarte Randecken vom Grad 2 eine eindeutige anzufügende Fläche. Patches, die keine zwei benachbarte 2–Ecken enthalten, gehören zu einer Menge eindeutiger Konfigurationen. Für das Defizit gilt $D = 4 + n - v$ und damit $v - n = 4 - D$ für die inneren Ecken. Über die Parität kann man hier nichts aussagen, aber es gilt $D \leq 4$.

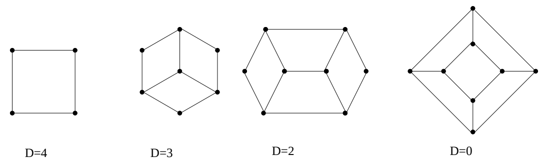

Abbildung 3.9: $(3,4)$–Patches ohne Sekante

Ein Rand mit $D = 1$ kann gar nicht ohne eine Sekante ausgefüllt werden, man kann also wie im obigen Fall argumentieren, wenn eine Sekante da ist. □

Die Eindeutigkeit der Spezialkonfigurationen ohne innere Fläche wird in Satz 4.20 noch formal gezeigt. Bei diesen kleinen Patches kann man sich auch durch direkte Fallunterscheidung von der Richtigkeit der Aussage überzeugen.

3.1.2 Eindeutigkeit der Flächenzahl

In [8] wurde gezeigt, dass trotz möglicher Mehrdeutigkeit der Ausfüllung im dort betrachteten Spezialfall die Anzahl der Flächen unabhängig von der speziellen Ausfüllung ist. Auch dieses Resultat lässt sich auf beliebige (m,k)–Patches verallgemeinern; wenn $(m,k) \notin \{(6,3),(4,4),(3,6)\}$, kann man die Flächenzahl sogar lediglich an Hand zweier Randparameter berechnen.

Satz 3.12 *Sei $m,k \in \mathbb{N}$, $m,k \geq 3$, $(m,k) \notin \{(6,3),(4,4),(3,6)\}$, (Z,L) eine Kurve, die eine (m,k)-Ausfüllung hat und $D := D_m(Z)$. Dann ist die Zahl f der Flächen einer beliebigen (m,k)-Ausfüllung gegeben durch*

$$f = \frac{2(m-n-D)+nm}{2(m+k)-km}$$

und damit nur von den Parametern n und D abhängig.

Beweis: Diese Formel für die Flächenzahl ergibt sich aus Lemma 3.9. Dazu setzt man die Gleichungen (3.2) und (3.3) in (3.1) ein, und erhält nach einigen Umformungen:

$$f = e - v + 1 = \frac{kf+n}{2} - \frac{kf+n+D}{m} + 1 = \frac{2(m-n-D)+nm}{2(m+k)-km}$$

Damit haben wir also eine allgemeine Formel für die Flächenzahl einer (m,k)–Ausfüllung, die außer m und k nur die Randparameter n und D verwendet. Dies geht allerdings nur, sofern der Bruch überhaupt definiert ist, d.h. immer, wenn $2(m+k)-km \neq 0$. Für Parameterpaare, die das nicht erfüllen, gilt auch $\frac{km}{2}-m-k=0$, und damit nach Lemma 3.10 $(m,k) \in \{(6,3),(4,4),(3,6)\}$. □

In den Fällen $(m,k) \in \{(6,3),(4,4),(3,6)\}$ gilt nicht mal die Aussage, dass die Zahl der Flächen nur von den Parameterm D und n abhängt. Nach Lemma 3.10 sind in diesen Fällen D und n voneinander abhängig, so dass man damit eine Flächenzahl hätte, die einzig von einer der Variablen abhängt. In Abb. 3.10 sind Beispiele dafür angegeben, dass diese Aussage nicht stimmt.

Theorem 3.13 *Alle (m,k)-Ausfüllungen einer Kurve (Z,L) haben die gleiche Flächenzahl.*

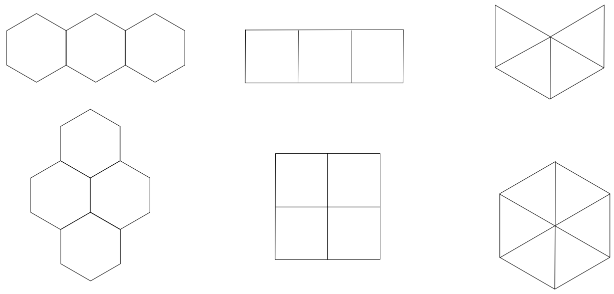

Abbildung 3.10: Patches mit gleichem D und n, bei denen die Anzahl der Flächen unterschiedlich ist

Es müssen, bevor man das Theorem beweisen kann, nur noch die drei Sonderfälle $(m, k) \in \{(6,3), (4,4), (3,6)\}$ behandelt werden. Diese kann man mit einer ähnlichen Methode zeigen, wie sie in [8] für den $(3,6)$ Fall verwendet wurde. Zuerst wird der Fall $(6,3)$ gezeigt, für den die Abweichung vom Sechseckfall am größten ist.

Man betrachte die Einbettung des Dreieckgitters T_d in die euklidische Ebene, bei der alle Dreiecke gleiche Seitenlängen haben. Man kann ein Koordinatensystem so in das Gitter legen, dass ein Dreieck durch die Eckpunkte $(0,0), (0,2), (2,2)$ und ein anderes durch $(0,0), (2,0), (2,2)$ bestimmt wird (s.Abb 3.11). Die Projektion einer Ecke $v \in \mathcal{V}(T_d)$ des Gitters auf die Abszis-

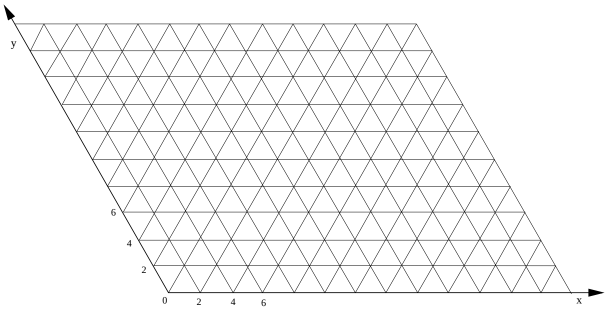

Abbildung 3.11: Dreieckgitter in der Ebene mit Koordinatensystem

se bzw. Ordinate wird mit $x(v) \in \mathbb{N}$ bzw. $y(v) \in \mathbb{N}$ bezeichnet. Eine Kante $e = (v, w) \in \mathcal{E}(T_d)$ heißt **vertikal**, wenn die Abszissenwerte $x(v) = x(w)$ erfüllen, d.h. also, wenn e parallel zu der y-Achse ist. Nach Konstruktion hat jedes Dreieck genau eine vertikale Kante und damit zwei, die es nicht sind. Die Menge der Kanten, die nicht vertikal sind, bezeichnen wir mit $\boldsymbol{\mathcal{E}_{nv}(T_d)}$.

Diesen Kanten kann man mittels einer Abbildung $\lambda : \mathcal{E}_{nv}(T_d) \to \mathbb{N}$ eine Zahl zuordnen, indem für $e = (v, w)$ $\lambda(e) := \frac{y(v)+y(w)}{2}$ gesetzt wird. $\lambda(e)$ heißt das **Level** der Kante e.

Sei nun ein Rand R und eine $(6, 3)$–Ausfüllung P davon gegeben. Betrachtet man zu P und T_d das jeweilige (Quasi–) Kammernsystem, gibt es einen Σ–Morphismus $\psi : \mathcal{Q}_P \to \mathcal{C}_{T_d}$. Dieser induziert eine pfaderhaltende Abbildung der Ecken von P auf eine Teilmenge der Ecken von T_d, die im Folgenden auch mit ψ bezeichnet sein soll, da wir die Abbildung der Kammernsysteme nicht weiter brauchen. Auf Kanten können wir diese Abbildung kanonisch übertragen, indem eine Kante $e = (v, w)$ aus P abgebildet wird auf $\psi(e) := (\psi(v), \psi(w))$.

Eine Kante $e \in \mathcal{E}(P)$ heißt **vertikal**, wenn das zugehörige Bild $\psi(e) \in T_d$ vertikal ist. $\mathcal{E}_{nv}(P)$ ist die Menge der Kanten in P, die nicht vertikal ist. O.B.d.A. kann man annehmen, dass es eine Kante $e \in \mathcal{E}_{nv}(P)$ gibt mit $\lambda(\psi(e)) \leq 1$ und $\lambda(\psi(e')) \geq 0$ für alle $e' \in \mathcal{E}_{nv}(P)$.

Auf dieser Menge $\mathcal{E}_{nv}(P)$ der nicht vertikalen Kanten von P kann man eine Relation definieren: für $e, f \in \mathcal{E}_{nv}(P)$ gilt $e \leq f$, wenn es eine Folge nicht vertikaler Kanten $e = e_1, \ldots, e_n = f$, und eine Folge von Dreiecken $d_1, \ldots d_{n-1} \in P$ gibt mit $e_i, e_{i+1} \in d_i$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$, und $\lambda(e) \leq \lambda(f)$. Da je zwei aufeinanderfolgende Kanten e_i, e_{i+1} zu einem Dreieck gehören, müssen sie auch eine Ecke v_i gemeinsam haben. Für $i = 1, \ldots n$ gilt $e_i = (v_{i-1}, v_i)$. Die beiden anderen Randecken v_{i-1}, v_{i+1} bilden die dritte, vertikale Kante im Dreieck. Für den Abstand dieser Ecken gilt also $y(v_{j+1}) - y(v_{j-1}) = 2$.

Lemma 3.14 *Diese Relation $\leq$ bildet auf der Menge $\mathcal{E}_{nv}(P)$ eine Halbordnung.*

Beweis: Man sieht leicht, dass sie reflexiv und antisymmetrisch ist. Die Transitivität zeigt man durch Kombinieren der Folgen nicht–vertikaler Kanten. □

Seien $E_1 \ldots, E_n$ die Äquivalenzklassen paarweise vergleichbarer (nicht vertikaler) Kanten, die durch die Halbordnung induziert sind. Jede Klasse bildet eine Kette, die ein maximales Element $e_i^{\max}$ und ein minimales $e_i^{\min}$ hat. Die Kanten $e_i^{\max}$ und $e_i^{\min}$ heißen **assoziiert**. Im Folgenden soll "Kette" immer maximale Kette bedeuten, d.h. eine solche Äquivalenzklasse bezeichnen.

Die Ketten überdecken den ganzen Patch, darum erhält man eine erste Formel für die Zahl der Flächen in P:

Lemma 3.15 *Die Anzahl der Flächen in P ist*

$$h(P) = \sum_{i=1}^{n} (|E_i| - 1)$$

Beweis: Jede Fläche in P hat zwei nicht vertikale Kanten, die in einer der Ketten liegen müssen, und jede innere Kante einer Kette ist in zwei Dreiecken enthalten. Also ist die Zahl der Flächen gerade gleich der Kantenzahl abzüglich eins, wegen der Randkante. □

Damit uns dieses Ergebnis überhaupt etwas nützt, brauchen wir die Anzahl der Kanten in einer Kette. Diese berechnet man mit Hilfe der Level ihrer Bilder unter ψ:

Lemma 3.16 $$|E_i| - 1 = \lambda(\psi(e_i^{\max})) - \lambda(\psi(e_i^{\min}))$$

Beweis: Sei $e_i^{\min} = f_1 \leq \ldots \leq f_l = e_i^{\max}$ die Folge von Kanten in E_i, wobei $l := |E_i|$. Aufeinanderfolgende Kanten f_j, f_{j+1} gehören zur selben Fläche d_j in P. Da die Abbildung ψ pfaderhaltend ist und "vertikal" in P verträglich mit T_d definiert ist, sind auch die Bilder $\psi(f_j)$ und $\psi(f_{j+1})$ in T_d im selben Dreieck und ebenfalls nicht vertikal.

Die Skalierung des Koordinatensystems ermöglicht die Berechnung des Abstands zweier nicht vertikaler Kanten $e_{j+1} = (v_j, v_{j+1})$ und $e_j = (v_{j-1}, v_j)$ des gleichen Dreiecks, nämlich als

$$\lambda(\psi(e_{j+1})) - \lambda(\psi(e_j))$$

$$= \frac{y(v_{j+1}) + y(v_j)}{2} - \frac{y(v_j) + y(v_{j-1})}{2}$$

$$= \frac{y(v_{j+1}) - y(v_{j-1})}{2} = 1$$

Den Abstand entfernterer Kanten kann man daraus induktiv berechnen und erhält so die Behauptung. □

Lemma 3.17 *Gegeben ein Rand R und zwei verschiedene Patchausfüllungen $P := P(R)$ und $P' := P'(R)$. Alle maximalen (minimalen) Kanten in P sind auch maximal (minimal) in P'.*

Beweis: Sei $e = (v_1, v_2) \in R$ eine fest gewählte, nicht vertikale Kante auf dem Rand. Für die pfaderhaltende Abbildung ψ können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Abszissenwerte der beiden Ecken $x(\psi(v_1)) < x(\psi(v_2))$ erfüllen.

Eine zyklische Labelung der Randecken, beginnend mit v_1, v_2, induziert eine Orientierung auf dem Randpfad. Da jede nicht vertikale Kante des Randes entweder minimal oder maximal ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $e = e_i^{\max}$ gilt. In diesem Fall ist der Patch immer "rechts" von einer gerichteten Kante. Hat man eine beliebige, nicht vertikale Randkante (v_j, v_{j+1}) mit $x(\psi(v_j)) < x(\psi(v_{j+1}))$, so gilt, dass das angrenzende innere Dreieck rechts der Kante (v_j, v_{j+1}) nur solche Kanten enthält, deren Level höchstens gleich dem von (v_j, v_{j+1}) ist. Gleichheit gilt dabei allenfalls für eine vertikale Kante im gleichen Dreieck, so dass jede nicht vertikale Kante im gleichen Dreieck echt kleiner ist. Damit kann (v_j, v_{j+1}) nicht minimal sein. Es gilt also, dass alle nicht vertikale Kanten (v_j, v_{j+1}) mit $x(\psi(v_j)) < x(\psi(v_{j+1}))$ maximal sind.

Die pfaderhaltende Abbildung ψ', die zu P' gehört, kann so gewählt werden, dass ebenfalls $x(\psi'(v_1)) < x(\psi'(v_2))$ gilt, so dass dieselben nicht vertikalen Kanten wie bei P maximal bzw. minimal sind. $\square$

Damit haben wir alles nötige zusammen, um die Zahl der Flächen unabhängig von der speziellen Ausfüllung zu berechnen. Es wird nur noch die Kommutativität der Addition verwendet.

Satz 3.18 *Für einen gegebenen Rand R, der mit einem $(6,3)$–Patch ausgefüllt werden kann, ist die Zahl der Dreiecke einer Ausfüllung wohldefiniert.*

Beweis: Seien P und P' Patchausfüllungen von R, und ψ bzw. ψ' die pfaderhaltenden Einbettungen der Ränder auf einen Teil des Dreieckgitters T_d. Durch Anwendung der Aussagen von Lemma 3.15 und 3.16 erhalten wir die Anzahl von Flächen in P durch:

$$
\begin{aligned}
h(P) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda(\psi(e_i^{\max})) - \lambda(\psi(e_i^{\min}))) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda(\psi(e_i^{\max})) - \sum_{i=1}^{n} \lambda(\psi(e_i^{\min})) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda(\psi'(e_i^{'\max})) - \sum_{i=1}^{n} \lambda(\psi'(e_i^{'\min})) \text{ (wegen Lemma 3.17)} \\
&= h(P')
\end{aligned}
$$

Da aber die Einbettung des Randes unabhängig vom Inneren und damit für alle Ausfüllungen gleich ist, gilt diese Zahl für alle $(6,3)$–Ausfüllungen des gegebenen Randes R. □

Damit kommen wir zum Beweis von Theorem 3.13:
Für $(m,k) \notin \{(6,3),(4,4),(3,6)\}$ folgt die Aussage aus Satz 3.12.

Der Fall $(m,k) = (6,3)$ ist in Satz 3.18 gezeigt.

Den Fall $(3,6)$ führt man auf den vorigen Fall zurück. Gegeben ist ein Rand mit zwei Sechseckausfüllungen. Für jeden wählt man eine Unterteilung, die ein $(6,3)$–Patch ist. Eine solche Unterteilung erhält man, indem eine zusätzliche Ecke in jede Fläche gelegt und mit allen anderen Ecken dieser Fläche verbunden wird. Die neuen Ecken haben damit nach Konstruktion Grad sechs, und die alten erhalten für jede benachbarte Fläche eine zusätzliche Kante, so dass sie auch auf sechs Nachbarkanten kommen. In der Randsequenz erhöht sich — unabhängig von der Ausfüllung — 2 auf 3 und 3 auf 5, da jede Ecke von Grad 2 an genau einer und jede von Grad 3 an zwei Flächen liegt. Also haben beide Patches die gleiche Zahl von Dreiecken. Da ein Sechseck aber eine feste Zahl von Dreiecken enthält, folgt für beide Ausfüllungen aus der Gleichheit der Anzahl von Dreiecken auch die Gleichheit der Anzahl der Sechsecken.

Im Fall $(4,4)$ wäre diese Methode prinzipiell auch möglich. Da man aber eine Unterteilung zum $(6,3)$–Patch durch Unterteilung der Vierecke mittels Diagonalen realisieren würde, hätte man eine Verkleinerung der Symmetriegruppe. Dadurch kann man nicht mehr ohne weiteres annehmen, dass der Rand verschiedener unterteilter Ausfüllungen gleich bleibt, sondern müsste das erst zeigen. Also ist es hier einfacher, den Beweis wie im $(6,3)$–Fall durchzuführen. Das Level der "nicht vertikalen" — hier also der horizontalen Kanten — wird direkt durch den Ordinatenwert der Ecken definiert, ansonsten geht der Beweis analog und wird darum hier nicht weiter ausgeführt. □

Die Aussage kann man nicht auf allgemeinere Patchausfüllungen übertragen, bei denen verschiedene Flächengrößen erlaubt sind, wie man am Stone–Wales Patch in Abbildung 3.12 sehen kann.

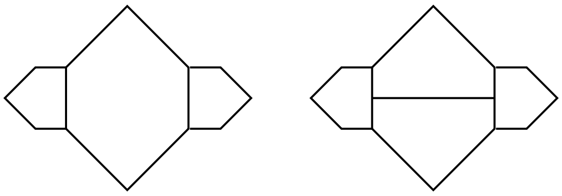

Abbildung 3.12: Der gleiche Rand, einmal mit einem Sechseck und zwei Fünfecken, das andere Mal mit jeweils zwei Sechs– und zwei Fünfecken gefüllt.

3.2 Ebenenfortsetzungen, die nicht eindeutig sind

Die Frage nach der Eindeutigkeit von (Ebenen–)Fortsetzungen ist erstmals von G.Brinkmann gestellt worden, der eine Kurve mit zwei verschiedenen Fortsetzungen konstruiert hat (Abb. 3.13). Bei dem Bild wird — im Unter-

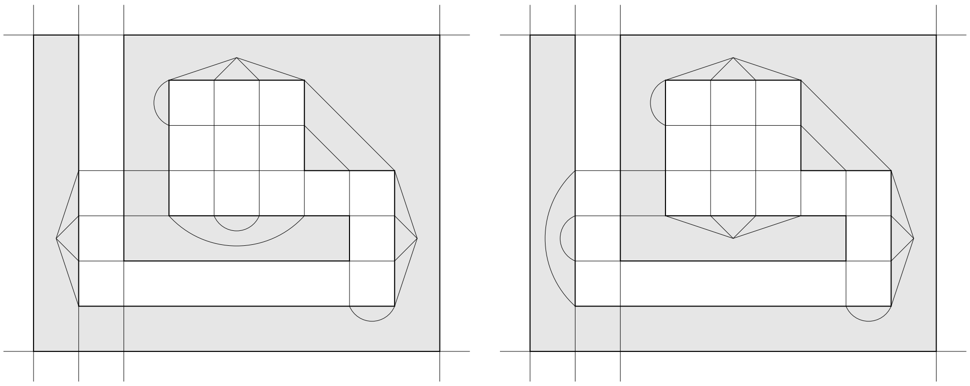

Abbildung 3.13: Verschiedene Ebenenfortsetzungen der gleichen (ausgefüllten) Kurve zu einem Viereckgitter

schied zu dem in dieser Arbeit i.A. verwendeten Fortsetzungsbegriff — das Innere der Kurve durch einen Patch ausgefüllt, der nicht dem periodischen Muster entspricht. Der durch das Innere hervorgerufene Symmetriebruch verdeutlicht die beiden verschiedenen Einbettungsmöglichkeiten der Kurve. Soll das Innere nicht berücksichtig werden, kann man den gleichen Effekt erreichen, indem die Fortsetzung einer markierten gelabelten Kurve betrachtet wird oder über einen Symmetriebruch des Randes, wie für das Dreieckgitter in Abb. 3.14 gezeigt wird.

Die Fortsetzungen sind verschieden, wie in in Abb. 3.15 illustriert ist: der Pfad in der Fortsetzung links im Bild ist durch keinen Isomorphismus auf die

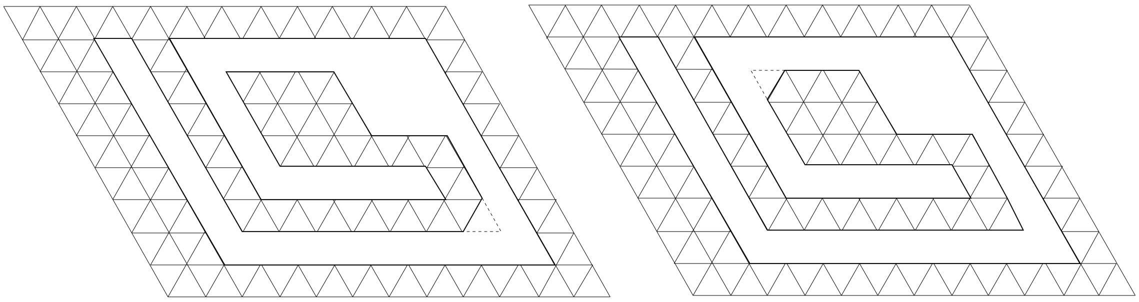

Abbildung 3.14: Verschiedene Ebenenfortsetzungen der gleichen Kurve zu einem Dreieckgitter

andere Fortsetzung übertragbar.

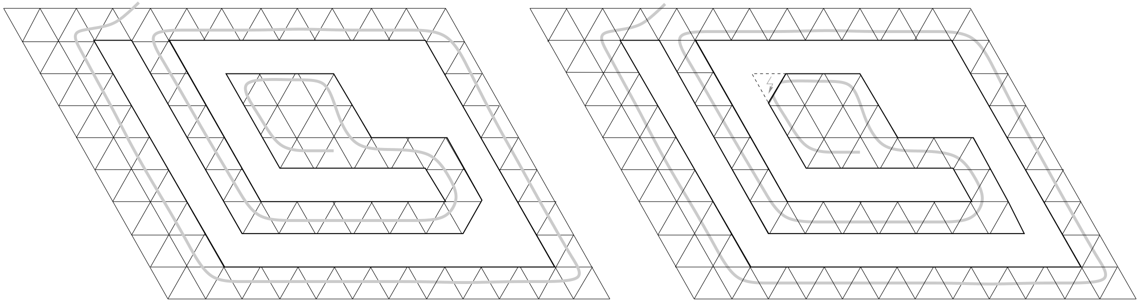

Abbildung 3.15: Pfad, der nur in einer Fortsetzung möglich ist

Ergänzt man in beiden Fortsetzungen die gestrichelt dargestellten Dreiecke, sind sie Spiegelbilder voneinander. Man hat also wieder das gleiche Prinzip wie im endlichen Fall, dass es schon reicht, eine Kurve zu finden, die eine höhere Symmetrie als die Fortsetzung hat. Mit der gleichen Konstruktionsidee kann man eine Kurve konstruieren, deren Sechseckfortsetzung nicht eindeutig ist (Abb. 3.16).

Damit haben wir auch für Ebenenfortsetzungen die allgemeine Aussage:

Theorem 3.19 *Es gibt Kurven (Z, L), die unterschiedliche Ebenenfortsetzungen haben.*

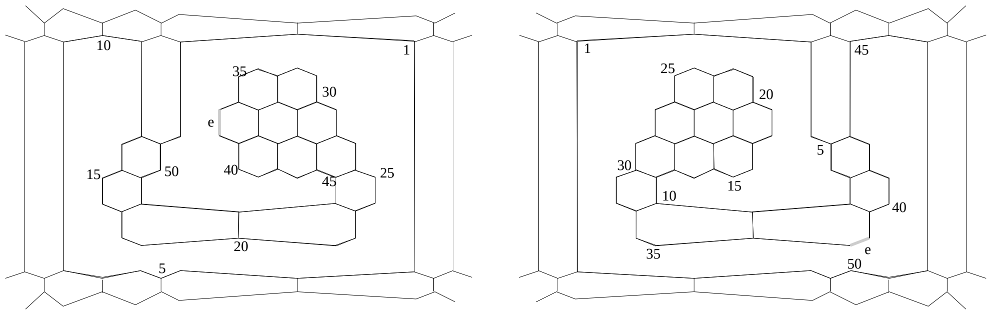

Abbildung 3.16: Verschiedene Ebenenfortsetzungen der gleichen markierten Kurve zu einem Sechseckgitter

3.3 Weitere Konstruktionen

Im folgenden Abschnitt werden Methoden skizziert, mit denen man weitere Kurven konstruieren kann, die nicht eindeutig fortsetzbar sind. Hier bieten sich auch viele Fragen an, die noch weiter untersucht werden können.

3.3.1 Zusammensetzung von Kurven

Ein Verfahren, mit dem man beliebig viele Kurven konstruieren kann, die nicht eindeutig fortsetzbar sind, ist die Verknüpfung mehrerer Kurven. Das wird an einem Beispiel für die Patchausfüllung vorgestellt. Gegeben seien zwei Kopien eines (m, k)–Patches, bei dem die Randkurve eine höhere Symmetrie als das Innere hat. Die Existenz eines solchen Patches wurde in Theorem 3.6 gezeigt. Abb. 3.17 zeigt einen $(4, 4)$–Patch.

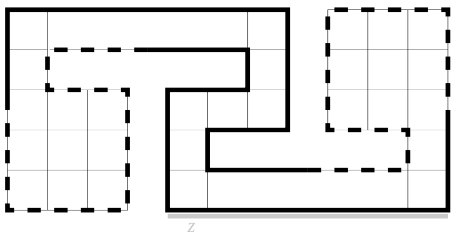

Abbildung 3.17: Viereckpatch

Wir bezeichnen mit P, P' bzw. R, R' die beiden Patches bzw. ihre Ränder. Wähle Randkomponenten z aus R und z' aus R', die symmetrieäquivalent bezüglich des Randes sind. Dafür hat man mehrere Möglichkeiten, je nachdem, an welcher Stelle des Patches sie liegen, allerdings dürfen bei dem

Identifizieren von z und z' keine Singularitäten entstehen. In (m, k)–Patches können Kantensingularitäten ohnehin nicht auftreten, aber die Eckengrade der zu identifizierenden Ecken müssen sich dort zu $m + 2$ aufsummieren.

Identifiziert man die beiden Patches entlang der Randkomponenten z und z', erhält man einen Patch $\bar{P}$, der je nach Wahl von z und z' unterschiedlich ausfällt. Die Kombinationsmöglichkeiten des Beispiels aus Abb. 3.17 sind in den Abb. 3.18–3.20 gezeigt.

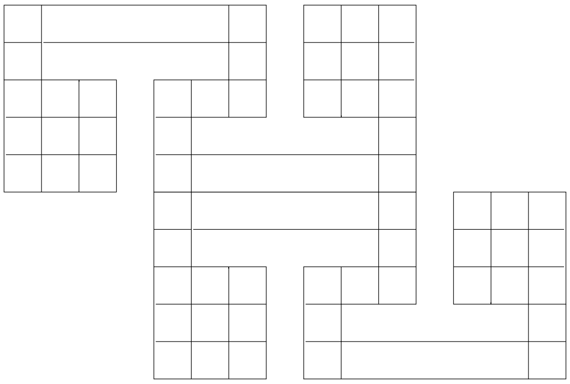

Abbildung 3.18: Keine benachbarten inneren Flächen

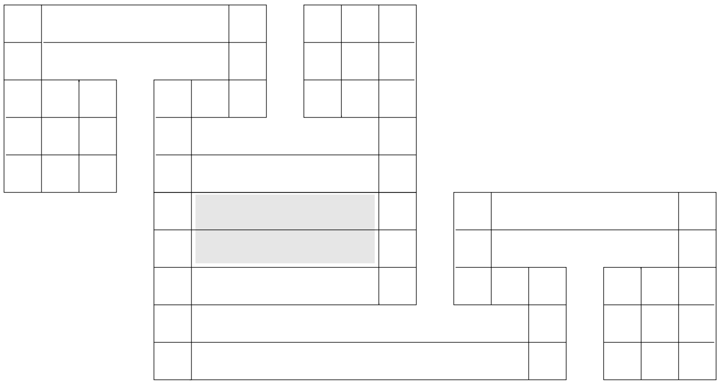

Abbildung 3.19: Zwei benachbarte innere Flächen

Alle diese Patches haben nach Konstruktion den gleichen Rand R', wie man auch anhand der Bilder nachvollziehen kann. Die Verschiedenheit der Patchausfüllungen kann man an einem ganz einfachen Kriterium überprüfen, nämlich anhand der Anzahl innerer Flächen. In Patch 3.18 gibt es nur die isolierten inneren Flächen der ursprünglichen Komponenten, im zweiten gibt es zwei und im dritten vier benachbarte innere Flächen.

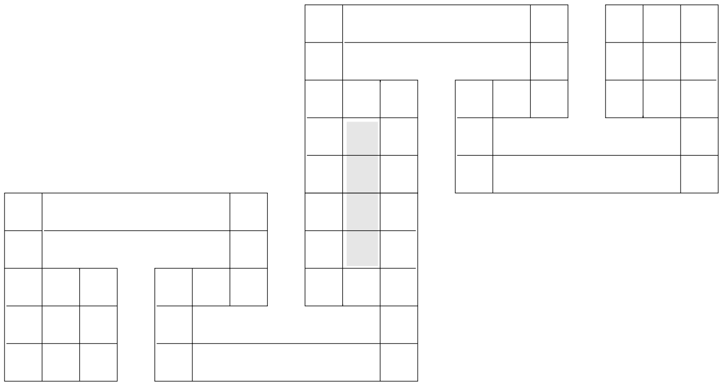

Abbildung 3.20: Vier benachbarte innere Flächen

3.3.2 Zusammenhang zwischen Patchausfüllungen und Ebenenfortsetzungen

In [1] wurde gezeigt, dass außerhalb einer hinreichend groß gewählten Umgebung verschiedene Ebenenfortsetzungen einer Kurve (Z, L) isomorph sind. Das heißt also, dass der Unterschied zwischen verschiedenen Fortsetzungen sich auf den "Ring" zwischen der Kurve und dem Rand dieser Umgebung beschränkt. Dies kann man zumindest in manchen Fällen ausnutzen, um Kurven mit mehrdeutiger Patchausfüllung zu konstruieren. Dazu muss man aus diesem Ring einen Patch machen, also den einfachen Zusammenhang herstellen. Wenn das geht, hat man eine Methode, mit der sich aus Kurven mit mehrdeutiger Ebenenfortsetzung welche konstruieren lassen, die mehrere Patchausfüllungen haben.

$\mathcal{Q}_1$ und $\mathcal{Q}_2$ seien verschiedene Ebenenfortsetzungen einer Kurve (Z, L) und $\mathcal{Q}$ mit $\mathcal{Q}_1 \supset \mathcal{Q} \subset \mathcal{Q}_2$ der unendliche Teil der Fortsetzungen, der für beide gleich ist. Eine naheliegende Idee ist es, in beiden Fortsetzungen einen Pfad p zu suchen, der den Rand (Z, L) mit $\mathcal{Q}$ verbindet, ohne Z zu schneiden. Schneidet man den Ring entlang eines Pfades auf, erhält man in beiden Fortsetzungen einen Patch. Damit die Ränder dieser Patches gleich sind, muss der Schnittpfad eine sehr starke Bedingung erfüllen: erstens muss er in $\mathcal{Q}_1$ und $\mathcal{Q}_2$ an der gleichen Stelle von Z beginnen, und zweitens muss der Endpunkt in $\mathcal{Q}$ auch äquivalent bezüglich des Isomorphismus sein. Gibt es einen solchen Pfad, sind die beiden Patches verschieden, da man andernfalls einen Isomorphismus zwischen den Ebenenfortsetzungen konstruieren könnte.

In Abb. 3.21 sind zwei Fortsetzungen der selben Kurve gezeigt, bei denen ein Pfad mit der gewünschten Eigenschaft existiert. Dieser Schnittpfad begrenzt zusammen mit dem Rand von $\mathcal{Q}$ und Z einen Patch, dessen Rand nicht eindeutig ausfüllbar ist. Ob es einen solchen Pfad aber immer gibt, ist noch nicht bekannt.

Durch Entfernung von Flächen, die in beiden Fortsetzungen dieselbe Änderung des Randes bewirkt, erhält man einen (im Sinne von [8]) "irreduziblen" Kern, der in dem hier angeführten Beispiel wieder die Eigenschaft hat, einen Rand mit höherer Symmetrie zu haben.

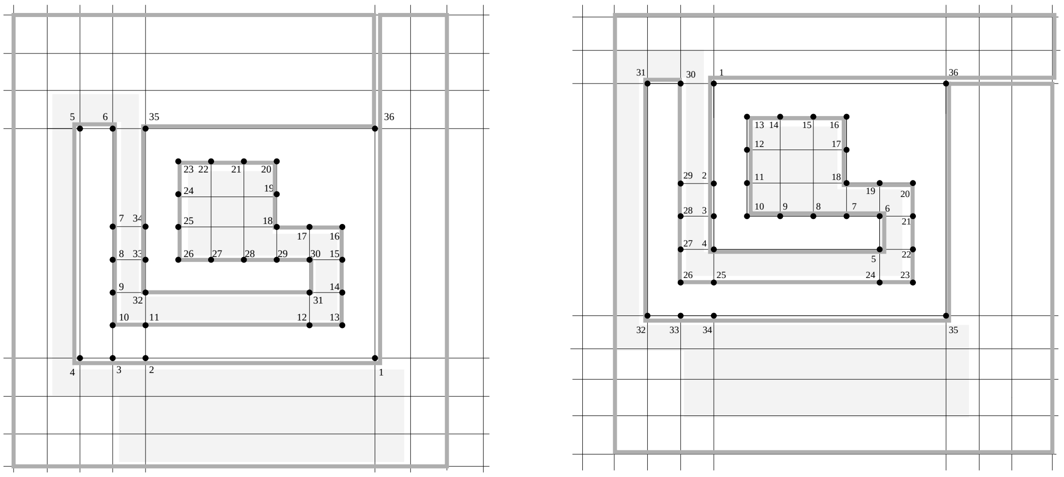

Abbildung 3.21: Die breite graue Linie gibt den Rand des Patches an, der durch Aufschneiden entlang des Pfades p entsteht. Grau unterlegt sind die Flächen, die zum irreduziblen Kern gehören.

Umgekehrt stellt sich die Frage, ob man aus einer Kurve mit einer nicht eindeutigen Patchausfüllung auch eine ebensolche Ebenenfortsetzung konstruieren kann. Ein möglicher Ansatz dazu ist die Umkehrung der eben beschriebenen Technik, indem verschiedene Ausfüllungen der gleichen Kurve jeweils zu einem "Ring" verklebt werden.

Die Patches P_1 und P_2 aus Abb. 3.22 erhält man, indem zwei Kopien des Patches P aus Abb. 3.17 an verschiedenen Stellen des Patches, die aber symmetrieäquivalent bezüglich des Randes sind, um so viele Flächen ergänzt werden, dass sie ins reguläre Gitter eingebettet werden können. Die Randkurve ist dadurch für beide Patches wieder gleich und wird mit Z bezeichnet.

Da die Einbettungen nicht zusammenhangstreu sind, ergeben sich bei beiden Patches beschränkte Gebiete des Gitters außerhalb von Z. Diese werden von einer Kurve Z' begrenzt, von der man leicht sehen kann, dass sie für beide Patches gleich ist.

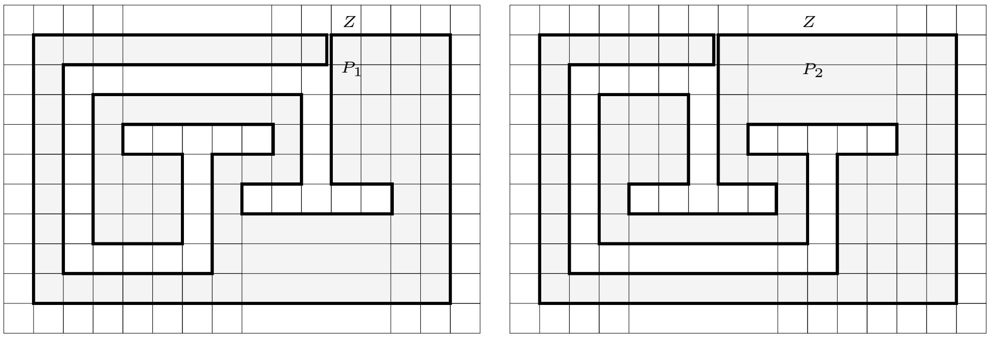

Abbildung 3.22: Einbettungen von P_1 und P_2 in das periodische Gitter

Z' ist offensichtlich fortsetzbar, da für $x \in \{0, 1\}$ jeweils P_x zusammen mit dem unbeschränktem Gebiet eine Ebenenfortsetzung ist (s. 3.23). Wären die beiden Fortsetzungen gleich, könnte man daraus auch die Isomorphie der Patchausfüllungen von Z folgern, was zum Widerspruch führt.

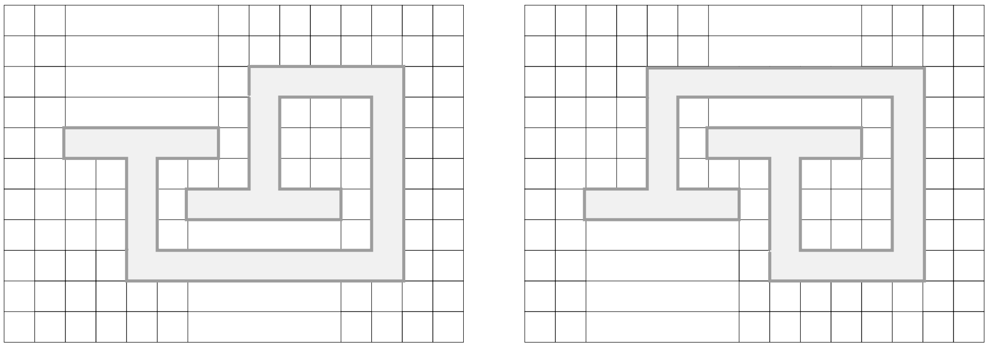

Abbildung 3.23: Die beiden Fortsetzungen der Kurve Z'

Die Erweiterung der Ausgangspatches um zusätzliche Flächen dient vor allem dazu sicherzustellen, dass die Kurve überhaupt fortsetzbar ist. Ebenfalls notwendig ist es dafür, dass die Eckengrade der zu identifizierenden Kanten so eine Konstruktion zulassen, ohne Singularitäten bei der Abbildung ins Delaneysymbol zu erzeugen.

Kapitel 4

Induktive Fortsetzung

Im nächsten Kapitel geht es darum, in einer Fortsetzung $(\mathcal{Q}, \varphi)$ von den zu Z benachbarten $(0,1)$–Orbits — also den Flächen der Pflasterung — diejenigen herauszufinden, die durch Z, L und $\mathcal{D}$ schon eindeutig bestimmt sind. Wenn es solche für geeignet gewählte partielle Fortsetzungen immer gibt, kann man die Fortsetzung einer Kurve Fläche für Fläche "aufbauen", so dass jeder Schritt eindeutig ist.

Auch hier werden fortsetzbare gelabelte Kurven (Z, L) betrachtet, bei denen die Kanten $e \in E(Z)$ zu "echten" Kanten einer Pflasterung gehören. Wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, sind in diesem Kapitel alle Kurven fortsetzbar und es gilt $\dim(e) = 2$ für alle $e \in E(Z)$. Solche Kurven werden hier manchmal als "Standardkurven" bezeichnet.

4.1 Ergänzbare Flächen

Ob benachbarte Ecken des Randes zur gleichen Fläche gehören oder nicht, lässt sich unabhängig von der speziellen Fortsetzung schon anhand der Labelung feststellen. Um das zu verdeutlichen, brauchen wir zuerst eine genaue Beschreibung dieser Eigenschaft.

Definition 4.1 *Als* **Segment** *einer gelabelten Kurve* (Z, L) *wird ein Teilpfad* $z = (v_1, \ldots, v_n)$ *von* Z *mit* $v_1, \ldots, v_n \in V(Z)$ *und* $n = |z| \leq |Z|$ *bezeichnet, für den gilt:*

$$\mathrm{zahl}(v_i) \begin{cases} = & 2 \quad \textit{für } i \in \{1, n\} \\ > & 2 \quad \textit{sonst.} \end{cases}$$

Die Ecken v_1, v_n heißen **Endecken**. *Zwei Segmente heißen* **benachbart**, *wenn eine Endecke übereinstimmt.*

Die Definition gewährleistet, dass ein Segment sich genau einer Fläche zuordnen lässt. Umgekehrt ist damit noch lange nichts über die Eindeutigkeit einer Fortsetzung gesagt, da es nämlich möglich ist, dass diese Fläche weitere — allerdings nicht benachbarte — Segmente im Rand hat. Ein Segment kann auch lediglich aus einer Ecke bestehen.

Bemerkung 4.2 *Ist (Z, L) eine gelabelte (Standard–)Kurve und $(\mathcal{Q}, \varphi)$ eine Fortsetzung, wobei $F : Z \to G_R(\mathcal{Q})$ ein Graphenisomorphismus ist, so bildet der Rand $R(\mathcal{Q})$ ein Quasikammernsystem mit folgender Operation:*

$$C\hat{\sigma}_i := \begin{cases} C\sigma_i & \text{falls es ein } v \in V(Z) \text{ gibt mit:} \\ & F(v) = v_k(C) \text{ oder } F(v) = v_j(C) \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere ist $C\hat{\sigma}_i$ nicht definiert, wenn $C\sigma_i$ nicht definiert ist. Damit ist das Bild von Z unter F auch eine Komponente des Randgraphen von $R(\mathcal{Q})$. Die Operation ist also nur dann definiert, wenn eine gemeinsame Ecke der (als Graph aufgefassten) Kammern C und $C\sigma_i$ im Rand liegt.

Ist $C^r \in \mathcal{K}(\mathcal{Q})$ eine Kammer, deren $(0,1)$–Orbit $\langle C^r\rangle_{01} =: f_{C^r}$ in $\mathcal{Q}$ vollständig definiert ist, so kann man auf der Kammernmenge $R(\mathcal{Q}) \cup f_{C^r}$ eine Operation wie folgt definieren:

$$C\hat{\sigma}_i^* := \begin{cases} C\hat{\sigma}_i & \text{falls definiert} \\ C\sigma_i & \text{falls } i \in \{0,1\} \text{ und } C \in f_{C^r} \\ \text{nicht definiert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Im allgemeinen wird zur Vereinfachung die Operation auf $R(\mathcal{Q}) \cup f_{C^r}$ ebenfalls mit $\hat{\Sigma}$ bezeichnet. Für die Abbildung r_{ij} aus Definition 2.3, (ix) wird nicht gekennzeichnet, auf welcher Operation sie basiert, da sich das stets aus dem Kontext ergibt.

Lemma 4.3 *Gegeben sei eine gelabelte Kurve (Z, L). Für jede Fortsetzung $\mathcal{Q}$ ist der Rand $R(\mathcal{Q})$ zusammenhängend.*

Beweis: Es gibt einen Isomorphismus $F : Z \to G_R(\mathcal{Q})$. Da Z zusammenhängend ist, gilt das gleiche also auch für $G_R(\mathcal{Q})$. Da nach Definition jede Kammer aus $R(\mathcal{Q})$ mindestens eine Ecke mit $F(Z)$ gemeinsam hat, können wir eine Abstandsfunktion "dist" zwischen zwei Kammern $C, C' \in R(\mathcal{Q})$ definieren, indem wir $\mathrm{dist}(C, C') := \min\{d(v, v') \mid v, v' \in V(Z), F(v) \in C, F(v') \in C'\}$ setzen, wobei $d(v, v')$ die Länge des minimalen Pfades zwischen v und v' in Z ist.

Kammern $C, C' \in R(\mathcal{Q})$ mit $\mathrm{dist}(C, C') = 0$ sind im gleichen Orbit, es gibt also ein $k \in \{0, 1, 2\}$ und $v \in V(Z)$ mit $F(v) = v_k(C) = v_k(C')$. Da nach Definition der gesamte Orbit von C zu $R(\mathcal{Q})$ gehört, sind C und C' trivialerweise durch einen Pfad $\tau = [\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j]^m$ verbindbar. Haben C, C' den Abstand $\mathrm{dist}(C, C') = 1$, gibt es eine Kante $e \in E(Z)$ mit $\dim(e) = i$, so dass $\Theta(e) = (v_k(C), v_j(C'))$. Damit gibt es $m, m' \in \mathbb{N}$ mit $C = C[\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j]^m[\sigma_k\sigma_i]^{m'}$. Durch vollständige Induktion über den Abstand der Kammern kann man den Zusammenhang des Quasikammernsystems beweisen. □

Als nächstes wird gezeigt, dass man zwischen den Randkammern zweier Fortsetzungen einen Σ–Isomorphismus finden kann.

Lemma 4.4 *Die Labelung von (Z, L) induziert auf den Randkammern von je zwei ihrer Fortsetzungen $(\mathcal{Q}_1, \varphi_1), (\mathcal{Q}_2, \varphi_2)$ einen $\hat{\Sigma}$–Isomorphismus ψ, der mit den Abbildungen φ_1 und φ_2 kommutiert.*

Beweis: Es seien für $x \in \{0, 1\}$ mit $G_R(\mathcal{Q}_x)$ wieder die Randgraphen von $R(\mathcal{Q}_x)$ bezeichnet und mit $F_x : Z \to G_R(\mathcal{Q}_x)$ ein mit der jeweiligen Fortsetzung verträglicher Graphenisomorphismus. Sei $e \in E(Z)$ fest gewählt. In den Fortsetzungen gibt es jeweils eine Kammer $C_x \in R(\mathcal{Q}_x)$, so dass $F_x(e)$ in C_x enthalten ist. Es gilt $\varphi_1(C_1) = \mathrm{del}(e) = \varphi_2(C_2)$.

Wir konstruieren aus $R(\mathcal{Q}_1)$ einen Graphen G mit gefärbten Kanten, der die Struktur des Quasikammernsystems vollständig erhält. Die Eckenmenge $V(G)$ sei isomorph zu der Kammernmenge, wobei wir den Isomorphismus mit $\psi_1 : V(G) \to R(\mathcal{Q}_1)$ bezeichnen. Zwei Ecken $v, w \in V(G)$ sind für $i \in \{0, 1, 2\}$ genau dann durch eine mit i gefärbte Kante (oder i–Kante) verbunden, wenn $\psi_1(v) = \psi_1(w)\sigma_i$ gilt.

Für jede Ecke $w \in V(G)$ gilt $\deg(w) = 2$. Um das zu zeigen, muss man die Eigenschaften von $C := \psi_1(w) \in R(\mathcal{Q}_1)$ verwenden. Für C gibt es wegen der Standardisierung der Kurve nur zwei Möglichkeiten: entweder enthält C nur eine Ecke aus $F_1(V_0(Z))$ im Rand — dann ist $C\hat{\sigma}_0$ nicht definiert, dafür aber $C\hat{\sigma}_1$ und $C\hat{\sigma}_2$ — oder C enthält je eine Ecke aus $F_1(V_0(Z))$ und $F_1(V_1(Z))$ — dann ist $C\hat{\sigma}_0$ und $C\hat{\sigma}_1$ definiert, nicht aber $C\hat{\sigma}_2$. Aus dieser Eigenschaft und dem Zusammenhang von $R(\mathcal{Q}_1)$ (s. Lemma 4.3) folgt, dass G

ein Zykel ist. Konstruktionsbedingt ist jede zweite Kante von G eine 1–Kante. Die Abstände zwischen den 0–Kanten bzw. den 2–Kanten sind gerade durch die Werte der Abbildung zahl gegeben, also unabhängig von der speziellen Fortsetzung. Damit konstruiert man auch aus dem Rand $R(\mathcal{Q}_2)$ den gleichen Graphen. Wir erhalten einen weiteren Isomorphismus $\psi_2 : V(G) \to R(\mathcal{Q}_2)$, der die $\hat{\Sigma}$–Struktur respektiert. O.B.d.A. kann man ψ_1 und ψ_2 dergestalt wählen, dass für ein $v \in V(G)$ und jedes $x \in \{1,2\}$ gilt, dass $\psi_x(v) = C_x$. Durch Verkettung dieser beiden Abbildungen konstruiert man einen Σ–Isomorphismus $\psi := \psi_2 \circ \psi_1^{-1} : R(\mathcal{Q}_1) \to R(\mathcal{Q}_2)$.

Die Verträglichkeit mit φ_i sieht man folgendermaßen: Es gilt nach Konstruktion $\varphi_1(C_1) = \varphi_2(\psi(C_1)) = \varphi_2(C_2)$. Da $R(\mathcal{Q}_1)$ zusammenhängend ist, gibt es für jede Kammer $C \in R(\mathcal{Q}_1)$ einen Pfad $\tau \in \hat{\Sigma}$, so dass $C = C_1\tau$. Außerdem ist $R(\mathcal{Q}_1)$ singularitätenfrei; damit ist $\varphi_1(C) = \varphi_1(C_1\tau) = \varphi_1(C_1)\tau = \varphi_2(\psi(C_1))\tau = \varphi_2(\psi(C_1\tau)) = \varphi_2(\psi(C))$. □

Dieses Ergebnis kann man auf markierte gelabelte Kurven unmittelbar übertragen, da der mittels F definierte Isomorphismus ψ zweier Fortsetzungen auch die Marke respektiert.

Die folgenden Definitionen geben eine Beschreibung, was es für eine Kurve bedeutet, zumindest lokal eindeutig fortgesetzt werden zu können.

Definition 4.5 *Gegeben eine Kurve (Z, L) mit einer Fortsetzung $(\mathcal{Q}, \varphi)$. Sei $C^r \in \mathcal{K}(\mathcal{Q})$ eine an Z angrenzende Kammer, deren $(0,1)$–Orbit vollständig definiert ist, und $e := e_2(C^r) \in E(Z)$ die an C^r liegende Randkante. Die durch $\langle C^r \rangle_{01}$ bestimmte Fläche wird mit f_{C^r} bezeichnet.*

f_C heißt **ergänzbar**, *wenn für alle Fortsetzungen $(\mathcal{Q}_Z, \varphi_Z)$ von (Z, L) mit dem Σ–Isomorphismus $\psi : R(\mathcal{Q}) \to R(\mathcal{Q}_Z)$ gilt:*

(i) ψ ist erweiterbar zu einem $\hat{\Sigma}$–Isomorphismus $\psi^* : R(\mathcal{Q}) \cup f_{C^r} \to R(\mathcal{Q}_Z) \cup f_{\psi(C^r)}$, der mit φ und φ_Z kommutiert.

(ii) Die Quasikammernsysteme $\mathcal{Q} \setminus f_{C^r}$ und $\mathcal{Q}_Z \setminus f_{\psi(C^r)}$ sind Fortsetzungen einer neuen gelabelten Kurve (Z', L').

Auch bei markierten gelabelten Kurven kann man den Begriff einer ergänzbaren Fläche verwenden, indem an ψ die zusätzliche Forderung gestellt wird, dass es die Marke respektiert.

Die Erweiterbarkeit der Abbildung ψ bedeutet, dass es auch in jeder anderen Fortsetzung der Kurve an der entsprechenden Stelle eine gleichartige — d.h.

aus der gleichen Anordnung “äquivalenter” Kammern bestehende — Fläche gibt. Das reicht aber noch nicht für die Eindeutigkeit dieser Fläche, da sie in verschiedenen Fortsetzungen mit weiteren Stellen des Randes identifiziert sein könnte. Dass so etwas nicht passiert, wird durch die zweite Bedingung gewährleistet.

Diese Kriterien lassen sich nicht ohne weiteres überprüfen, da bei allen zulässigen Fortsetzungen untersucht werden müsste, ob der Isomorphismus zwischen den Rändern erweiterbar ist. Ein einfacher handhabbares Kriterium wird in den Sätzen 4.8 und 4.11 angegeben. Vorher wird jedoch eine schwächere Aussage gezeigt, nämlich wann ψ immerhin zwischen zwei festen Fortsetzungen um eine Fläche erweitert werden kann, ohne eine der beiden Bedingungen zu verletzen.

Lemma 4.6 *$(\mathcal{Q}_1, \varphi_1)$ und $(\mathcal{Q}_2, \varphi_2)$ seien Fortsetzungen der Kurve (Z, L). $\psi : R(\mathcal{Q}_1) \to R(\mathcal{Q}_2)$ ist ein mit φ_1 und φ_2 verträglicher Σ–Isomorphismus. Gibt es eine Kammer $C^r \in \mathcal{Q}_1$, deren $(0,1)$–Orbit $f_{C^r} := \langle C^r \rangle_{01}$ einen Schnitt mit Z hat, der gerade aus einem Segment z besteht, und ist auch der Schnitt von $f_{\psi(C^r)} := \langle \psi(C^r) \rangle_{01}$ mit dem Rand zusammenhängend, gelten folgende Aussagen:*

(i) ψ ist erweiterbar zu einem $\hat{\Sigma}$–Isomorphismus $\psi^* : R(\mathcal{Q}_1) \cup f_{C^r} \to R(\mathcal{Q}_2) \cup f_{\psi(C^r)}$, der mit den Abbildungen ins Delaneysymbol verträglich ist.

(ii) $\mathcal{Q}_1 \backslash f_{C^r}$ und $\mathcal{Q}_2 \backslash f_{\psi(C^r)}$ sind Fortsetzungen einer neuen gelabelten Kurve (Z', L').

Beweis: $\hat{\Sigma}$ bezeichnet die Operation auf $R(\mathcal{Q}_1)^* := R(\mathcal{Q}_1) \cup f_{C^r}$ bzw. auf $R(\mathcal{Q}_2)^* := R(\mathcal{Q}_2) \cup f_{\psi(C^r)}$ entsprechend der Bemerkung 4.2.

Wir definieren analog zum Beweis von Lemma 4.4 einen Graphen G, der durch $R(\mathcal{Q}_1) \cup f_{C^r}$ induziert wird, indem die Eckenmenge durch die Kammern und die gefärbten i–Kanten durch die entsprechenden σ_i–Operationen gegeben sind. Im Unterschied zum Graphen, der lediglich aus $R(\mathcal{Q}_1)$ konstruiert wird, gibt es hier zwei Ecken mit Grad 3. Es handelt sich dabei um jene, die durch ψ_1 auf die durch (Z, L) eindeutig bestimmten Kammern C, C' in f_{C_r} abgebildet werden, auf denen $\hat{\sigma}_2$ bezüglich der Operation auf $R(\mathcal{Q}_1)$ bzw. $R(\mathcal{Q}_2)$ definiert ist. Durch Hinzunahme der gesamten Fläche ist auch $\hat{\sigma}_0$ jeweils definiert. Die Länge der Pfade, die C und C' in $R(\mathcal{Q}_1)$ verbinden, ist durch (Z, L) bestimmt. Da der Schnitt von f_{C^r} mit $F_1(Z)$ zusammenhängend sein soll, ist durch die Abbildung φ_1 auch die Länge des Pfades eindeutig bestimmt, der C und C' in f_{C^r} außerhalb von $R(\mathcal{Q}_1)$ verbindet. Da der so entstandene Graph wieder nur von der gelabelten Kurve abhängig ist und die Σ–Struktur des Quasikammernsystems ein–eindeutig widerspiegelt, ergibt sich durch $R(\mathcal{Q}_2)$ der gleiche Graph, so dass wir wieder einen Σ–Isomorphismus ψ^* der erweiterten Ränder konstruieren können. Wie in 4.4 muss eine Kante der Kurve festgelegt werden, so dass die dazugehörigen Kammern von ψ aufeinander abgebildet werden.

Da für $C \in R(\mathcal{Q}_1)$ $\psi^* = \psi$ gilt, folgt die Verträglichkeit mit φ_1 und φ_2 in diesem Fall ohnehin. Für $C \notin R(\mathcal{Q}_1)$ kann man analog zum Beweis von 4.4 den Zusammenhang und die Singularitätenfreiheit von $R(\mathcal{Q}_1)$ nutzten.

Damit ist ψ^* ein Σ–Isomorphismus und der erste Teil der Aussage gezeigt.

Für den zweiten ist noch zu zeigen, dass ${\mathcal{Q}_1}^* := \mathcal{Q}_1 \setminus f_{C^r}$ und ${\mathcal{Q}_2}^* := \mathcal{Q}_2 \setminus f_{\psi(C^r)}$ Fortsetzungen der selben gelabelten Kurve (Z', L') sind. Sei t_1 bzw. t_2 die Randkomponente von f_{C^r} bzw. $f_{\psi(C^r)}$, die nicht zu $F_x(Z)$ gehört. Da $r_{01}(C^r) = r_{01}(\psi(C^r))$, sind die Pfade isomorph und können darum einheitlich mit t bezeichnet werden. Da sowohl $\mathcal{Q}_1$ als auch $\mathcal{Q}_2$ Fortsetzungen von (Z, L) sind, sind die induzierten Randgraphen G_1 und G_2 in beiden Fortsetzungen Zykel. Sei Z' die Kurve, die aus Z entsteht, indem man in Z die Randkomponente z durch einen Pfad z' ersetzt, der isomorph zu t ist.

Der von ${\mathcal{Q}_x}^*$ induzierte Randgraph G'_x enthält für $x \in \{1, 2\}$ die Ecken $F_x(V(Z)\setminus V(z))\cup V(t)$. Angenommen, ${\mathcal{Q}_x}^*$ wäre unzusammenhängend, dann könnte der Rand kein Zykel sein sondern würde aus mehreren, nicht notwendig disjunkten Zykeln bestehen, von denen mindestens einer den Pfad t enthielte. Ersetzt man diesen wieder durch den Pfad $F_x(z)$, dessen Ecken nach Voraussetzung an keiner weiteren Stelle von Z vorkommen, kann sich die Zusammenhangseigenschaft nicht ändern, es wäre also im Widerspruch zur Voraussetzung schon $\mathcal{Q}_x$ nicht zusammenhängend. Damit sind auch G'_x Zykel, und es gibt Graphenisomorphismen $F'_x : Z' \to G'_x$.

Die Gleichheit der Abbildung "dim" folgt unmittelbar aus der Konstruktion. Seien $v = v_0, v_1, \ldots, v_n = w$ die Ecken vom Teilpfad z'. Für die Endecken v, w von z bzw. z' gilt: $\mathrm{zahl}'(v) = \mathrm{zahl}(v) - 2$ und $\mathrm{zahl}'(w) = \mathrm{zahl}(w) - 2$, unabhängig von der Fortsetzung. Seien $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$. Zu $v' \in z'$ mit $v' \notin \{v, w\}$ sei $k \in \{0, 1\}$ die Dimension und $C \in F'_x(v')$. Dann gilt, dass $\mathrm{zahl}'_x(v') = 2(m_{ij}(\varphi_x(C)) - \hat{r}_{ij}(C))$.

Sei $e \in E(Z')$ eine beliebige Kante und $C_x := F_x^{-1}(e)$ die in der jeweiligen Fortsetzung angrenzende Kammer. Es gilt, da die Abbildungen ins Delaneysymbol mit ψ^* verträglich sind: $\mathrm{del}_1(e) = \varphi_1(C_1) = \varphi_2(\psi^*(C_1)) = \varphi_2(C_2) =$

$\mathrm{del}_2(e)$. Also hat man die Gleichheit der Labelungen L'_1, L'_2 und damit die zweite Behauptung ebenfalls gezeigt. □

Für die Abbildung zahl′ kann man die Werte sogar genau angeben, es gilt $\mathrm{zahl}'(v') = 2$ für $v' \in V(z')$ mit $\dim'(v') = 1$ und $\mathrm{zahl}'(v') = 2(m_{ij}(\varphi_i(C))-2)$ sonst. Für den Beweis genügt aber, dass die Abbildung in beiden Fortsetzungen gleich ist.

Auf markierte gelabelte Kurven kann man den Satz unmittelbar übertragen, da ψ die Marke respektiert. Gegebenenfalls braucht Z' eine neue Marke, falls die von Z in dem Segment z lag.

4.1.1 Ergänzbare Kanten

In diesem Abschnitt wird ein Kriterium vorgestellt, das es erlaubt, aus einer einfach überprüfbaren Eigenschaft einer einzelnen Fortsetzung schon auf die Existenz einer ergänzbaren Fläche zu schließen. Da uns nun die Hilfsmittel aus dem letzten Abschnitt zur Verfügung stehen, müssen vorerst nicht mehr die Details der Quasikammernsysteme berücksichtigt werden. Wir können graphentheoretisch mittels der Struktur der Pflasterung argumentieren. Die Begriffe Ecken, Kanten und Flächen bezeichnen im Folgenden also die entsprechenden Objekte des der Pflasterung (bzw. des Patches, wenn es sich um endliche Strukturen handelt) zu Grunde liegenden Graphen. Zu einem Quasikammernsystem $\mathcal{Q}$ bezeichne $T_\mathcal{Q}$ eine Teilpflasterung, deren baryzentrische Unterteilung isomorph zu $\mathcal{Q}$ ist. Für die Eckenmenge gilt $V_0(\mathcal{Q}) = \mathcal{V}(T_\mathcal{Q})$, und jede Kante $e \in \mathcal{E}_1(T_\mathcal{Q})$ entspricht genau einem Kantenpaar aus $E_1(\mathcal{Q})$.

Definition 4.7 *Sei (Z, L) eine gelabelte Kurve mit einer Fortsetzung $(\mathcal{Q}, \varphi)$. Eine Kante $e = (v, w) \in \mathcal{E}(T_\mathcal{Q})$ heißt* **ergänzbar***, wenn es ein Segment $z \subset Z$ gibt, von dem $v, w \in Z$ die Endecken sind.*

Eine ergänzbare Kante e begrenzt also eine Fläche, deren Schnitt mit dem Rand aus einem Segment z besteht, wie in Abb. 4.1 dargestellt ist.

Im folgenden Satz wird der Zusammenhang dieser Bezeichnung zum Begriff der Ergänzbarkeit von Flächen hergestellt.

Satz 4.8 *$(\mathcal{Q}, \varphi)$ sei eine Fortsetzung der Kurve (Z, L). Gibt es eine ergänzbare Kante $(v, w) = e \in \mathcal{E}(T_\mathcal{Q})$, dann gilt: das Segment z begrenzt zusammen mit der Kante e eine Fläche f, die ergänzbar ist.*

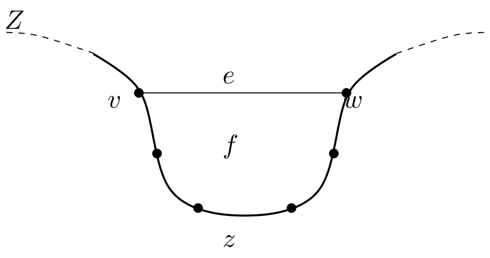

Abbildung 4.1: Eine ergänzbare Kante mit ihrer angrenzenden Fläche

Beweis: Die Existenz der Fläche f sowie deren einfach zusammenhängender Schnitt mit Z ergibt sich aus der Definition 4.1 eines Segments.

Man zeigt zuerst, dass in jeder Fortsetzung $\mathcal{Q}'$ die an z angrenzende Fläche einen zusammenhängenden Schnitt mit Z hat. Dies ist leicht einzusehen, da andernfalls die Kante (v, w) in $\mathcal{Q}'$ an einer weiteren Stelle von Z vorkommen müsste. Dies kann nicht sein, da Z in $\mathcal{Q}'$ nicht überschneidungsfrei und $\mathcal{Q}'$ damit nicht zusammenhängend wäre.

Also hat man nach 4.6 für jede weitere Fortsetzung $\mathcal{Q}'$ einen Σ–Isomorphismus $\psi : R(\mathcal{Q}) \to R(\mathcal{Q}')$, der sich mit $C^r \in f \cap \mathcal{K}(Q)$ zu einem Σ–Isomorphismus $\psi^* : R(\mathcal{Q}) \cup f_{C^r} \to R(\mathcal{Q}') \cup f_{\psi(C^r)}$ fortsetzen lässt, und sowohl $\mathcal{Q} \setminus f_{C^r}$ als auch $\mathcal{Q}' \setminus f_{\psi(C^r)}$ sind Fortsetzungen einer gelabelten Kurve $(Z'L')$. Das ist genau die Bedingung für eine ergänzbare Fläche. $\square$

4.1.2 Ergänzbare Ecken

Kommt in einer Fortsetzung keine ergänzbare Kante vor, besteht immer noch die Möglichkeit, mittels einer ähnlichen Eigenschaft eine ergänzbare Fläche vom Rand her zu bestimmen.

Definition 4.9 *Sei $(\mathcal{Q}, \varphi)$ eine Fortsetzung einer gelabelten Kurve (Z, L). Eine Ecke $v \in V_0(\mathcal{Q})$ mit $n := \deg(v)$ heißt* **ergänzbar***, wenn es eine zyklische Labelung der Nachbarecken $v_1, \ldots, v_n$ von v gibt, so dass die Ecken $v_2, \ldots, v_n$ auf Z liegen und für $i = 3, \ldots, n$ jeweils die Ecken v_{i-1} und v_i ein Randsegment begrenzen.*

Bemerkung 4.10 *Neben den schon in Definition 4.9 eingeführten Benennungen im Zusammenhang mit einer ergänzbaren Ecke bezeichnen wir für $i = 3, \ldots, n$ mit z_i das Segment, das von den Ecken v_{i-1} und v_i begrenzt wird. Das zu v_2 und z_3 benachbarte Segment heiße z_2 und das zu v_n und z_n*

benachbarte z_1. Mit f_i wird die an z_i angrenzende Fläche bezeichnet. Die an z_1 und z_2 angrenzende Flächen f_1 und f_2 können durchaus mehrere Randsegmente haben.

In Abb. 4.2 werden mögliche Konfigurationen ergänzbarer Ecken zusammen mit der gerade eingeführten Notation veranschaulicht.

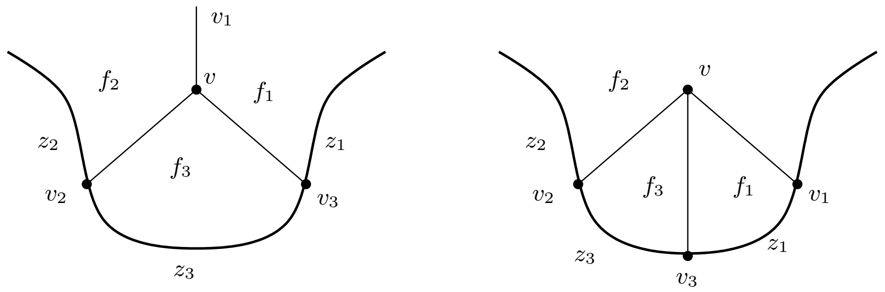

Abbildung 4.2: Ergänzbare Ecken

Analog zu den ergänzbaren Kanten wird gezeigt, dass an eine ergänzbare Ecke mindestens eine ergänzbare Fläche grenzt.

Satz 4.11 *$(\mathcal{Q}, \varphi)$ sei eine Fortsetzung der Kurve (Z, L). Gibt es eine ergänzbare Ecke $v \in V_0(\mathcal{Q})$ mit $n := \deg(v)$, dann gilt mit den Bezeichnungen aus 4.10: die durch die Segmente z_i für $i = 3, \ldots, n$ bestimmten Flächen $f_3, \ldots, f_n$ sind ergänzbar.*

Beweis: Nach Definition haben die Flächen $f_3, \ldots, f_n$ einen zusammenhängenden Schnitt mit dem Rand. Für $i = 3, \ldots, n$ liegt an z_i eine Fläche der Größe $|z_i| + 2$, d.h. ihr Rand besteht aus z_i und den beiden Kanten (v_{i-1}, v) und (v_i, v). Damit sind durch die Kurve (Z, L) schon $n - 1$ von v ausgehende Kanten in jeder Fortsetzung eindeutig als innere Kanten bestimmt.

Wäre nun die Ecke v in einer Fortsetzung in $V(Z)$ enthalten, hätte sie dort zwei benachbarte Kanten aus $E(Z)$, wodurch sich im Widerspruch zur Voraussetzung ein Grad von $n + 1$ ergäbe. □

An Abb. 4.2 sieht man, dass für ergänzbare Ecken, deren Nachbarn alle im Rand liegen, sogar eine Fläche mehr ergänzbar ist als im anderen Fall. Für unsere weitere Argumentation ist es aber völlig ausreichend, nur eine ergänzbare Fläche pro Ecke zu haben.

Korollar 4.12 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 4.11. Dann gibt es mindestens eine ergänzbare Fläche in $(\mathcal{Q}, \varphi)$.*

Beweis: Dies gilt, da der Eckengrad in den hier betrachteten Pflasterungen mindestens drei beträgt. Damit ist mindestens eine an v angrenzende Fläche ergänzbar. □

Veranschaulichen kann man sich die Fälle, in denen es eine ergänzbare Ecke bzw. Kante gibt, indem man bei einer "Einbuchtung" des Randes eine Stelle betrachtet, die durch eine starke "Krümmung" entweder schon eine eindeutige Fläche oder die Anordnung mehrerer entlang des Randes benachbarte Flächen um eine gemeinsame Ecke erzwingt.

4.2 Existenz ergänzbarer Flächen

Die bisherigen Ergebnisse versetzen uns in die Lage, anhand des Randes und der Abbildung ins Delaneysymbol manche ergänzbare Flächen eindeutig zu bestimmen, unabhängig von einer speziellen Fortsetzung. Diese Flächen sind zum Erkennen einer eindeutigen Fortsetzung besonders wichtig, darum bekommen sie eine eigene Bezeichnung:

Definition 4.13 *Ergänzbare Flächen, die durch eine ergänzbare Ecke oder Kante einer Fortsetzung bestimmt sind, heißen* **erkennbar***.*

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass erkennbare Flächen immer ergänzbar sind. In den folgenden Abschnitten wird untersucht, welche Kurven in ihrer Fortsetzung erkennbare Flächen haben.

4.2.1 Dünne Patches

Wie in der Einleitung erwähnt sind endliche Ausfüllungen, vor allem solche, die homöomorph zur Kreisscheibe sind, von großer praktischer Relevanz. Von daher ist die Untersuchung der Bedingungen, unter denen eine Patchausfüllung eindeutig ist, als solche von Interesse. Darüber hinaus sind die folgenden Ergebnisse auch für Ebenenfortsetzungen verwendbar. Es soll weiterhin $\dim(e) = 2$ für alle Kanten einer Kurve (Z, L) gelten. Dies ist aber insbesondere für alle Patchausfüllungen erfüllt, wenn (Z, L) durch einen (aus kompletten Flächen bestehenden) Patch induziert ist.

Im Folgenden befassen wir uns mit Patches, die noch eine bestimmte Zusatzbedingung erfüllen, nämlich die, dass jede Fläche aus dem Inneren einen nicht leeren Schnitt mit dem Rand hat. Der Bequemlichkeit halber bekommen diese Patches eine eigene Bezeichnung:

Definition 4.14 *Eine Patchausfüllung P einer gelabelten Kurve (Z, L) heißt* **dünn**, *wenn alle $(0,1)$–Orbits, also Flächen, mindestens eine Ecke mit Z gemeinsam haben.*

Eine Fläche von P, deren Schnitt mit dem Rand nicht zusammenhängend ist, heißt **trennende Fläche**.

Ein Patch P, der keine trennende Fläche hat, heißt **irreduzibel**.

Zwei Flächen heißen **benachbart**, *wenn sie eine gemeinsame Kante haben.*

$W(P)$ sei der von den Ecken im Inneren von P induzierte Untergraph.

Es wird darum gehen, aus den Eigenschaften einer dünnen Patchausfüllung auf beliebige andere Ausfüllungen der gleichen Kurve zu schließen. Zuerst untersuchen wir daher Eigenschaften dünner Patches.

Lemma 4.15 *Gegeben ein dünner Patch P und die dadurch induzierte gelabelte Kurve (Z, L). Der durch die inneren Ecken erzeugte Untergraph $W := W(P)$ ist zykelfrei. Enthält P keine trennende Fläche, ist W zusammenhängend.*

Beweis: Ein Zykel von W würde eine innere Fläche umschließen, ist also nicht erlaubt.

Angenommen, W bestände aus Komponenten $W_1, \dots W_n$. Betrachte den Patch P_1, der durch Vereinigung aller zu W_1 benachbarten Flächen entsteht. Der Zusammenhang von P_1 folgt daraus, dass W_1 zusammenhängend ist. Wäre P_1 nicht einfach zusammenhängend, gäbe es eine Zusammenhangskomponente von $P \setminus P_1$, die von Flächen aus P_1 umschlossen würde (s. Abb. 4.3).

Der Rand von P_1 ist eine Jordankurve J und enthält nach Konstruktion keine Ecken aus W_1. J besteht aus Komponenten, die zu Z gehören und aus solchen im Inneren von P. Wähle eine solche Komponente k aus dem Inneren von P. Deren Randecken x_1, x_2 gehören zu Z. Angenommen, es existiert eine Ecke $v \in k$, deren inzidente Kanten zu einer Ecke w im Inneren von J führten. Die Ecke v sei von allen Ecken mit dieser Eigenschaft so gewählt, dass sie einen minimalen Abstand zu x_1 hat. w kann keine innere Ecke sein, da in dem Fall w und damit auch v zu W_1 gehörten. Andererseits kann diese Kante auch nicht zum Rand führen, da die Fläche mit v, x_1 und w im

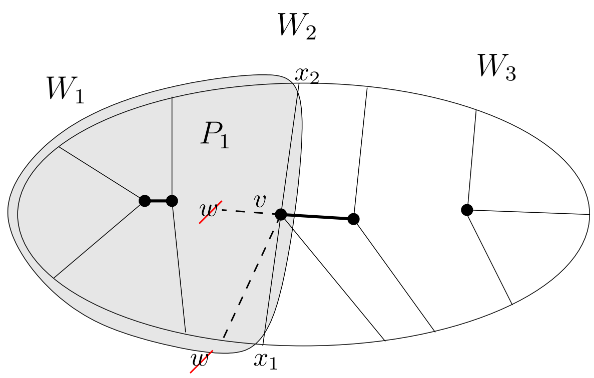

Abbildung 4.3: Komponente W_1

Rand keine Ecke mit W_1 gemeinsam hätte und somit außerhalb von J läge. Also grenzt die Komponente k an genau eine Fläche f im Inneren von J, die nach Voraussetzung einen zusammenhängenden Schnitt mit dem Rand haben muss. Das geht aber nur, wenn $f = P_1$ ist und steht somit im Widerspruch zu $W_1 \neq \emptyset$. $\square$

Bemerkung 4.16 *Als* **Basispatches** *werden Patches bezeichnet, die keine trennende Fläche haben und bei denen $|W| \leq 1$ gilt. Die dafür möglichen Konfigurationen sind in Abb. 4.4 dargestellt.*

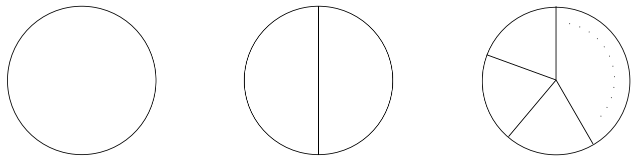

Abbildung 4.4: Basispatches B_1, B_2 und B_3

Lemma 4.17 *Enthält ein dünner Patch P keine trennende Fläche, ist jedes Blatt von W eine ergänzbare Ecke.*

Beweis: Im Fall $W = \emptyset$ ist nichts zu zeigen, da es keine Blätter gibt.

Sei also $W \neq \emptyset$, v ein Blatt von W und $n := \deg(v)$. v hat $n-1$ inzidente Ecken im Rand Z liegen, erfüllt damit schon eine notwendige Bedingung.

Da v ein Blatt ist, kann es höchstens eine innere Ecke w als Nachbarn haben. In diesem Fall bezeichne die Flächen an der Kante (v, w) mit f_1, f_2 und die anderen in zyklischer Ordung um v mit $\{f_3, \dots f_{\deg(v)}\}$. Wenigstens diese Flächen haben auch jeweils zwei zu v inzidente Ecken aus Z im Rand. Dabei seien v_{i-1} und v_i gerade die Ecken, die an f_i angrenzen.

Begrenzten nun v_{i-1} und v_i kein Segment, gäbe es eine weitere Fläche angrenzend an f_i, was hieße, dass der Schnitt von f_i mit dem Rand nicht zusammenhängend und f_i somit eine trennende Fläche ist, im Widerspruch zur Annahme. Also sind alle Bedingungen für eine ergänzbare Ecke erfüllt. □

Korollar 4.18 *Jeder irreduzible Patch P, der nicht einer der Basispatches ist, hat zwei erkennbare Flächen, die an verschiedenen ergänzbaren Ecken liegen und somit keine Kante gemeinsam haben.*

Beweis: Wegen der Irreduzibilität von P gibt es keine trennende Fläche, also ist $W := W(P)$ nach Lemma 4.15 zusammenhängend. Außerdem gilt $|W| \geq 2$, da P kein Basispatch ist. Darum gibt es mindestens zwei Blätter von W, die nach Lemma 4.17 jeweils ergänzbare Ecken v_1 und v_2 sind. Aus den dazu inzidenten Mengen von ergänzbaren Flächen wählt man je eine aus. Der Rand dieser Flächen besteht jeweils aus einem Randsegment und zwei Kanten, die vom Rand nach v_1 bzw. v_2 führen, also nicht identisch sein können. □

Im folgenden Lemma wird gezeigt, dass in (fast) allen dünnen Patches mindestens zwei erkennbare Flächen vorkommen. Da diese Eigenschaft für irreduzible Patches schon gezeigt ist, werden die anderen entlang trennender Flächen aufgeteilt, um in den Komponenten jeweils erkennbare Flächen zu bestimmen. Gezeigt werden muss dann noch, dass beim erneuten "Zusammensetzen" der Einzelkomponenten bei mindestens zwei erkennnbaren Flächen diese Eigenschaft erhalten bleibt.

Satz 4.19 *Sei P' ein dünner Patch, der kein Basispatch ist und (Z, L) die durch P' induzierte Kurve. Jede Patchausfüllung $\mathcal{Q}_Z$ von (Z, L) hat zwei nicht benachbarte ergänzbare Flächen.*

Beweis: Sei P ein minimales Gegenbeispiel. Wegen 4.18 kann P nicht irreduzibel sein, daher gibt es eine trennende Fläche f. Nach Entfernung von f entstehen Komponenten $P_1, \dots, P_n$, wobei wir f so wählen können, dass o.B.d.A. P_1 minimal ist ("minimal" heißt hier, dass es keine weitere trennende Fläche von P gibt, die eine ganz in P_1 enthaltene Komponente begrenzt). Wir bezeichnen den Schnittpfad von P_1 und f mit r.

Sowohl P_1 als auch der Rest $P^* := P \setminus P_1$ von P — der nach Konstruktion wieder ein Patch ist, wie man sich leicht überzeugen kann — enthalten wegen der Minimalität von P zwei erkennbare Flächen ohne gemeinsame Kante. Es muss also gezeigt werden, dass in beiden Teilen mindestens eine dieser erkennbaren Flächen auch bezüglich P erhalten bleibt.

Wir beginnen mit P_1, und zwar mit den Fällen, bei denen P_1 irreduzibel ist. $W := W(P)$ sei der durch die inneren Ecken von P induzierte Graph. Sei P_1 ein Basispatch.

Ist die irreduzible Komponente $P_1 = B_1$, besteht sie aus einer Fläche, die nur eine Kante e mit f gemeinsam haben kann. Gäbe es nämlich weitere Ecken r, dürfte von dort aus keine weitere Kante starten, da diese entweder ins Innere von B_1 oder von f führen würde. Der Grad wäre also höchstens 2, was nicht erlaubt ist. Darum ist e eine ergänzbare Kante und B_1 nach Lemma 4.8 eine erkennbare Fläche.

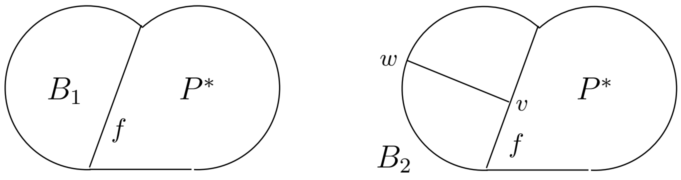

Abbildung 4.5: Die irreduzible Komponente besteht aus B_1 oder B_2

Sei $P_1 = B_2$, d.h., P_1 bestehe aus zwei Flächen, die durch eine Kante $e = (v, w)$ getrennt sind. Die an B_2 angrenzende trennende Fläche f muss o.B.d.A. v im Rand haben. Bei allen anderen Möglichkeiten, wie B_2 und f zueinander liegen könnten, wäre eine der beiden Flächen aus B_2 trennend oder im Inneren. Die Ecke v ist ergänzbar, da sie außer w noch genau zwei Nachbarecken hat, die auf dem Rand von P bleiben, und die Flächen aus B_2 einen zusammenhängenden Schnitt mit dem Rand haben.

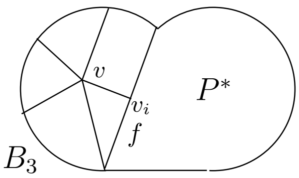

Abbildung 4.6: Die irreduzible Komponente besteht aus B_3

Ist $P_1 = B_3$, gibt es $\deg(v)$ Ecken $v_1, \ldots, v_{\deg(v)}$ auf dem Rand von P_1, die zu der inneren Ecke v führen. Analog zum Fall $P_1 = B_2$ sieht man leicht, dass die trennende Fläche f genau ein v_i in ihrem Rand hat. (v, v_i) ist die einzige Kante an v, die zu W gehört, andernfalls entstünde eine innere Fläche. v ist also ein Blatt. Aus der Konstruktion folgen auch die weiteren für eine ergänzbare Ecke geforderten Eigenschaften. Da $\deg(v) \geq 3$, und alle zu v benachbarten Flächen in B_3 sind, bleibt mindestens eine

Fläche daraus erkennbar und hat höchstens eine Ecke mit P^* gemeinsam.

Als nächstes müssen wir noch den Fall betrachten, dass P_1 keiner der Basispatches ist. Sei zunächst P_1 irreduzibel, d.h. es gibt keine trennende Fläche, und $W_1 := W(P_1)$ ist zusammenhängend. Wegen 4.18 kann man annehmen, dass die ergänzbaren Flächen f_1, f_2 an verschiedenen ergänzbaren Ecken w_1, w_2 liegen und keine Kante gemeinsam haben. Angenommen, P^* hätte von beiden Flächen eine Ecke v_1 bzw. v_2 im Rand, die nicht notwendigerweise verschieden sein müssen (s.Abb. 4.7). Da W_1 zusammenhängend ist, gibt es einen Pfad im Inneren, der w_1 und w_2 verbindet. Außerdem gibt es nach Konstruktion für $i = 1, 2$ jeweils eine Kante, die w_i mit v_i verbindet. Verbindet man nun v_1 und v_2 entlang des Randes von P^* und setzt diesen Pfad mit den Kanten (v_i, w_i) und dem Pfad zwischen w_1 und w_2 zusammen, ergibt sich daraus eine Jordankurve, die mindestens eine Fläche h in ihrem Inneren hat. Das kann aber nicht sein, da h einen leeren Schnitt mit dem Rand hätte.

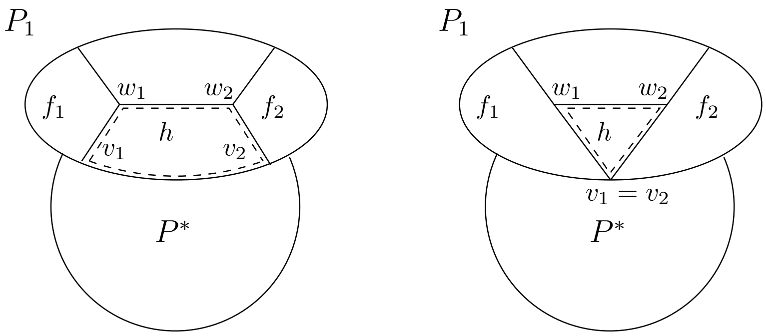

Abbildung 4.7: Einzige Möglichkeit, P^* mit P_1 zu verbinden, so dass f_1 und f_2 tangiert sind, P_1 aber keine trennende Fläche enthält

Ist P_1 nicht irreduzibel, gibt es darin eine trennende Fläche g, die wegen der Minimalität von P_1 keine trennende Fläche von P sein darf und die darum mindestens eine Ecke mit dem Schnittpfad r von f und P_1 gemeinsam hat.

Erkennbare Flächen haben immer einen zusammenhängenden Schnitt mit dem Rand. Wegen der Minimalität von P_1 haben alle Flächen aus P_1 einen zusammenhängenden Schnitt mit Z; andernfalls könnte man f durch eine trennende Fläche ersetzen, die eine kleinere Komponente begrenzt.

Es gibt in P_1 nach Annahme zwei erkennbare Flächen f_1, f_2. Hat mindestens eine davon einen leeren Schnitt mit r, bleibt diese auch in P als erkennbare Fläche erhalten. Es reicht also , den Fall zu betrachten, bei dem beide

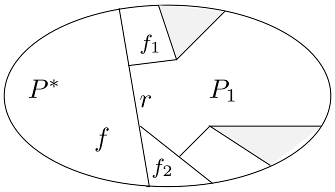

Abbildung 4.8: Grau unterlegt sind jeweils Flächen, die bezüglich P erkennbar wären

Flächen an r angrenzen. Da P dünn ist, haben sie mindestens eine Ecke mit Z gemeinsam. Die beiden Flächen f_1 und f_2 sind durch g getrennt, haben also allenfalls eine Ecke von r gemeinsam.

Ist f_1 durch eine ergänzbare Ecke v bestimmt, gibt es zwei Möglichkeiten: v kann als Element von W_1 Grad 0 oder Grad 1 haben. Im ersten Fall muss es mindestens 3 Nachbarecken v_1, v_2, v_3 geben, die alle im Rand von P_1 liegen. Mindestens zwei davon, o.B.d.A. v_1 und v_2, sind im Rand von P, d.h. auf Z, sonst entstünde eine innere Fläche. Die von (v, v_1) und (v, v_2) begrenzte Fläche bliebe auch in P ergänzbar. Im zweiten Fall hat v mindestens eine Nachbarecke w im Inneren von P_1. Die Ecken v und w sind Teil der selben Zusammenhangskomponente von W_1, die außer v noch ein weiteres Blatt haben muss. Das ist eine ergänzbare Ecke, da alle Flächen in P_1 wegen der Minimalität von P_1 einen zusammenhängenden Schnitt mit Z haben. Andererseits muss die daran angrenzende erkennbare Fläche verschieden von f_2 sein, da f_1 und f_2 in verschiedenen Komponenten bezüglich g liegen (s. Abb. 4.8).

Ist f_1 durch eine ergänzbare Kante $e = (v, w)$ bestimmt, ist es nicht möglich, dass entweder beide Ecken nicht auf r oder beide nicht auf Z liegen. Im ersten Fall hätte man eine trennende oder eine erkennbare Fläche von P und im zweiten eine innere Fläche. Sei o.B.d.A. v die Ecke, die nicht auf Z, und w diejenige, die nicht auf r liegt.

v kann auf r höchstens einen Nachbarn haben, der nicht gleichzeitig auf Z liegt. Wäre nämlich in dem Teil von r, der f_1 begrenzt, eine weitere Ecke, könnte diese nur den Grad 2 haben.

In P muss v ein Blatt von W sein: gäbe es nämlich mehr als eine Nachbarecke, wäre diese im Inneren von P_1. Mit dem gleichen Argument wie im vorigen Fall könnte man zeigen, dass es eine weitere von f_2 verschiedene erkennbare Fläche geben muss. Als Blatt von W mit angrenzenden Flächen, die außer f alle einen zusammenhängenden Schnitt mit Z haben, ist v auch in P ergänzbar, und die dadurch bestimmte erkennbare Fläche liegt in P_1.

Also bleibt eine erkennbare Fläche von P_1 in allen Fällen auch in P erhalten. Eine der beiden erkennbaren Flächen aus P^* kann gerade f sein; die andere ist aber von der Vereinigung mit P_1 nicht betroffen, bleibt also ebenfalls erhalten. □

Fasst man die bisherigen Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen, erhält man einen wichtigen Satz, der ein Kriterium für die eindeutige Fortsetzbarkeit von Kurven liefert. Hier wird sogar nur gebraucht, dass es in jedem dünnen Patch mindestens eine erkennbare Fläche gibt.

Theorem 4.20 *Ist (Z, L) die von einem dünnen Patch P induzierte Kurve, ist $\mathcal{Q}_P$ die einzige Ausfüllung von (Z, L).*

Beweis: Angenommen, es gäbe eine andere Fortsetzung $\mathcal{Q}_{P'}$. Dann gibt es einen Σ–Isomorphismus $\psi : \mathcal{Q}_P \to \mathcal{Q}_{P'}$ zwischen den Rändern der Quasikammernsysteme. Da P nach Satz 4.19 eine ergänzbare Fläche f hat, ist ψ auf $R(\mathcal{Q}_P) \cup f_{C^r}$ erweiterbar, wobei C^r eine Kammer aus dem Schnitt von $\mathcal{K}(\mathcal{Q}_P)$ und f ist. Außerdem gilt, dass $\mathcal{Q}_P \setminus f_{C^r}$ wieder eine Kurve induziert, für die $\mathcal{Q}_{P'} \setminus f_{\psi(C^r)}$ auch eine Fortsetzung ist. Der neu entstandene Patch ist ebenfalls dünn, da diese Eigenschaft durch die Entfernung einer Fläche nicht verändert wird, und enthält somit auch eine ergänzbare Fläche. Das kann man induktiv fortsetzen, bis P und P' zu Basispatches reduziert sind. Da diese nur aus ergänzbaren Flächen bestehen, müssen schon P und P' isomorph sein. □

Eine Folgerung, die sich aus diesem Theorem ergibt, ist die Tatsache, dass mehrdeutige Ausfüllungen mindestens eine Fläche in ihrem Inneren haben müssen, die keine Ecke oder Kante mit dem Rand gemeinsam hat.

Theorem 4.20 kann auch auf Ebenenfortsetzungen angewandt werden, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird.

Kapitel 5

Verallgemeinerung des Fortsetzungsbegriffs

5.1 Fortsetzungen von Patches

Bisher wurden ausschließlich Fortsetzungen von gelabelten Kurven betrachtet; die ursprüngliche Fragestellung bezog sich aber darauf, Patches zu einer unendlichen Pflasterung der Ebene fortzusetzen. Die bisherige Terminologie lässt sich mittels der induzierten Randkurve aus Definition 2.19 leicht übertragen.

Definition 5.1 *Gegeben ein Patch P, das dadurch bestimmte Quasikammernsystem $\mathcal{Q}_P$, ein Delaneysymbol $\mathcal{D}$, ein partieller Σ–Morphismus $\varphi : \mathcal{Q}_P \to \mathcal{D}$, der keine Singularitäten auf dem Kantenrand hat und die von $\mathcal{Q}_P$ bezüglich $\mathcal{D}$ und φ induzierte Randkurve (Z, L) mit ihrem Komplement (Z, L^c).*

P heißt **fortsetzbar** *bezüglich $\mathcal{D}$, wenn die gelabelte Kurve (Z, L^c) eine Ebenenfortsetzung $(\mathcal{Q}_Z, \varphi_Z)$ hat.*

Als erstes soll gezeigt werden, dass diese Definition dem intuitiven Verständnis entspricht, d.h., dass die Fortsetzung zusammen mit dem Quasikammernsystem des Patches eine Pflasterung bildet, die mittels eines partiellen Σ–Morphismus, dessen Singularitäten nur im Inneren des Patches liegen, in das Delaneysymbol $\mathcal{D}$ abgebildet werden kann.

Lemma 5.2 *Ein Patch P ist genau dann fortsetzbar, wenn es eine Pflasterung T mit ihrem korrespondierenden Kammernsystem $\mathcal{C}$ gibt, in das $\mathcal{Q}_P$ zusammenhangstreu einbettbar ist und einen partiellen Σ–Morphismus $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, dessen (endlich viele) Singularitäten in $I(\mathcal{Q}_P)$ liegen. Dabei ist eine Fortsetzung der von $\mathcal{Q}_P$ induzierten Kurve gerade $\mathcal{C} \setminus \mathcal{Q}_P$.*

Beweis: Nimm erst an, dass P fortsetzbar ist. Dann hat das Komplement (Z, L^c) der durch $\mathcal{Q}_P$ induzierten Kurve (Z, L) eine Fortsetzung $(\mathcal{Q}_Z, \varphi_Z)$. Definiere die Kammernmenge $\mathcal{C} := \mathcal{Q}_Z \cup \mathcal{Q}_P$. Darauf operiert Σ, indem sich jeweils, sofern definiert, die Operation von $\mathcal{Q}_Z$ bzw. $\mathcal{Q}_P$ überträgt. Auf einer Kammer C, die eine Kante e des Randes enthält, ist die Operation σ_2 in dem jeweiligen Quasikammernsystem nicht definiert. In diesem Fall wird $C\sigma_2$ durch die Kammer definiert, die in diesem jeweils anderen Quasikammernsystem an e liegt.

Definiere die Abbildung $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ durch

$$\varphi(C) = \begin{cases} \varphi_P(C) & \text{falls } C \in \mathcal{Q}_P \\ \varphi_Z(C) & \text{sonst} \end{cases}$$

Sie ist wohldefiniert, da $\mathcal{Q}_Z \cap \mathcal{Q}_P = \emptyset$ gilt.

Die Abbildung φ ist ein partieller Σ–Morphismus, da die dafür notwendigen Eigenschaften auf dem Rand aus der Komplementarität von L und L^c folgen und sich ansonsten aus den Quasikammernsystemen vererben.

Für die andere Richtung wählt man einfach Z isomorph zum Randpfad der Einbettung $\mathcal{Q}_P$. Das Quasikammernsystem $\mathcal{C} \setminus \mathcal{Q}_P$ ist gerade eine Fortsetzung von Z. Es ist zusammenhängend, da $\mathcal{Q}_P$ zusammenhangstreu eingebettet ist.
$\square$

Dieser Satz erlaubt es, die Fortsetzung eines Patches durch das entsprechende unendliche Kammernsystem zu beschreiben.

Definition 5.3 *Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen aus Lemma 5.2. $(\mathcal{C}, \varphi)$ heißt* **Fortsetzung von $\mathcal{Q}_P$**.

Sei (Z, L) die von P induzierte Kurve und (Z, L^c) das Komplement. P bzw. $\mathcal{Q}_P$ heißt **eindeutig fortsetzbar**, *wenn für alle Kanten $e \in E(Z)$ die markierte Kurve (Z, L^c, e) eindeutig fortsetzbar ist.*

Für unmarkierte Kurven wäre es für die Eindeutigkeit der Fortsetzung eines Patches noch nicht hinreichend, dass die induzierte Kurve eindeutig fortsetzbar ist. In dem Fall könnte es nämlich immer noch mehrere Möglichkeiten geben, den Patch in die Pflasterung "einzukleben", je nachdem, wie die Symmetriegruppen von Patch, gelabelter Kurve und dem Äußeren beschaffen sind. Im Bezug auf eine markierte Kurve gibt es dafür aber immer nur eine Möglichkeit.

In den meisten Fällen ist es hinreichend, die eindeutige Fortsetzbarkeit für eine Markierung des Randes zu fordern. Hat man aber einen Patch, bei dem die Spiegelsymmetrie des Randes eine Kante $e \in E(Z)$ auf sich selber abbildet, kann die Situation auftreten, dass zwar (Z, L^c, e) eindeutig fortsetzbar ist, das gleiche für andere $e' \in E(Z)$ aber nicht gilt.

Es ist zu beachten, dass die Fortsetzung eines Patches nicht nur aus der Fortsetzung der Kurve besteht, sondern das Quasikammernsystem des Patches beinhaltet.

5.2 Echte Fortsetzungen

Für das Ausfüllungsproblem liefert die Tatsache, dass es keine inneren Flächen gibt, ein gutes Kriterium für die Eindeutigkeit einer Fortsetzung, wie in Theorem 4.20 gezeigt wurde. Dies kann man umgekehrt auch für die Fortsetzung eines Patches ausnutzen.

Die Idee der folgenden Konstruktion besteht darin, dass innerhalb einer gegebenen Fortsetzung der Patch und seine nächsten "Nachbarschaften" daraufhin untersucht werden, ob diese zusammen einfach zusammenhängend sind. Wenn das der Fall ist, können weitere Flächen nur in sehr eingeschränktem Maße dergestalt angebaut werden, dass sie einen Schnitt mit dem Rand haben, der nicht zusammenhängend ist. Damit gibt es weniger Anbaumöglichkeiten als im allgemeinen Fall, wodurch unter bestimmten Voraussetzungen schon Eindeutigkeit induziert wird. Um die "Nachbarschaften" zu präzisieren, brauchen wir erst einige Begriffe.

Definition 5.4 *Gegeben ein Patch P_0 mit einer Fortsetzung $(\mathcal{C}, \varphi)$. $\mathcal{Q}_0$ sei das durch P_0 induzierte Quasikammernsystem. Definiere für $i \in \mathbb{N}_0$ das Komplement von $\mathcal{Q}_i$ als ${\mathcal{Q}_i}^c := \mathcal{C} \setminus \mathcal{Q}_i$.*

Die **erste (Ecken–)Korona** *von $\mathcal{Q}_0$ (bzw. P_0) in $\mathcal{C}$ besteht aus $\mathcal{Q}_0$ vereinigt mit der Menge der $(0,1)$–Orbits von Kammern in $R({\mathcal{Q}_0}^c)$ und wird mit $\mathcal{Q}_1$ bezeichnet.*

Die ***n*–te (Ecken–)Korona** *von* $\mathcal{Q}_0$ *in* $\mathcal{C}$ *erhält man durch die Vereinigung der* $(n-1)$*–ten Korona mit der Menge der* $(0,1)$*–Orbits von Kammern in* $R({\mathcal{Q}_{n-1}}^c)$*.*

Ein Quasikammernsystem $\mathcal{Q}_{i+\epsilon}$ *mit* $\mathcal{Q}_{i+1} \supset \mathcal{Q}_{i+\epsilon} \supset \mathcal{Q}_i$ *heißt* **Zwischenkorona** *von* $\mathcal{Q}_{i+1}$ *und* $\mathcal{Q}_i$*.*

Eine **echte Fortsetzung** *eines Patches* P *ist eine Fortsetzung, in der alle kompletten Eckenkoronen von* P *einfach zusammenhängend sind.*

Anstelle von Eckenkoronen könnte man auch Kantenkoronen betrachten, die analog definiert sind, abgesehen davon, dass die $(0,1)$–Orbits von Kammern aus $\mathcal{K}({\mathcal{Q}_i}^c)$ statt aus $R({\mathcal{Q}_i}^c)$ verwendet werden. Die Abkürzung "Korona" soll aber im Folgenden die Eckenkorona bezeichnen.

Es stellt sich die Frage, ob und wie man in einer echten Fortsetzung eine ergänzbare Fläche finden kann. Im nächsten Lemma wird gezeigt, dass bei aufeinander folgenden Koronen an jede Zwischenkorona noch eine Fläche "angebaut" werden kann.

Im folgenden Beweis wird häufiger die Formulierung verwendet, dass eine Fläche in zwei Fortsetzungen einen zusammenhängenden Schnitt mit dem Rand hat. Formal müsste man natürlich zwischen der Fläche in einer Fortsetzung und ihrem Bild in der anderen unterscheiden, die beide diese Eigenschaft besitzen sollen. Die leicht missbräuchliche Bezeichnung dient aber der Vereinfachung der Darstellung.

Satz 5.5 *Gegeben ein Patch* P *mit dem induzierten Quasikammernsytem* $\mathcal{Q}_0$ *und zwei Fortsetzungen* $(\mathcal{C}, \varphi)$ *und* $(\mathcal{C}'\varphi')$*. Die Koronen* $\mathcal{Q}_i$ *in* $\mathcal{C}$ *bzw.* ${\mathcal{Q}_i}'$ *in* $\mathcal{C}'$ *seien für* $i = 1, \ldots, m+1$ *einfach zusammenhängend. Dann folgt für alle* $i = 1, \ldots, m$*, dass sich ein* Σ*–Isomorphismus* $\psi : \mathcal{Q}_i \to {\mathcal{Q}_i}'$ *zu* $\psi' : \mathcal{Q}_{i+1} \to {\mathcal{Q}_{i+1}}'$ *fortsetzen lässt.*

Beweis: Sei $\mu := |\mathcal{Q}_{i+1} \setminus \mathcal{Q}_i|$ die Zahl der neuen Flächen in der $i+1$–ten Korona. Wir zeigen, dass es eine Folge $\mathcal{Q}_i = {\mathcal{Q}_i}^{(0)}, \ldots, {\mathcal{Q}_i}^{(\mu)} = \mathcal{Q}_{i+1}$ einfach zusammenhängender Zwischenkoronen gibt, so dass ${\mathcal{Q}_i}^{(j+1)}$ aus ${\mathcal{Q}_i}^{(j)}$ durch Hinzufügung einer Fläche besteht, die in beiden Fortsetzungen einen einfach zusammenhängenden Schnitt mit dem Rand hat.

Betrachte zuerst den Fall, dass sowohl in $\mathcal{C}$ als auch in $\mathcal{C}'$ bis zur $(m+1)$–ten außer den kompletten Koronen auch alle Zwischenkoronen einfach zusammenhängend sind. Dann haben alle Flächen von $\mathcal{Q}_{i+1}$ bzw. ${\mathcal{Q}_{i+1}}'$ einen zusammenhängenden Schnitt mit der vorigen Korona. Der Randisomorphismus $\psi : R(\mathcal{Q}_i) \to R(\mathcal{Q}_i{}')$ kann nach Lemma 4.6 auf eine beliebige Fläche $f \in \mathcal{Q}_{i+1} \setminus \mathcal{Q}_i$ ausgedehnt werden. Da in $\mathcal{C}'$ alle Zwischenkoronen ebenfalls einfach zusammenhängend sind, hat die f entsprechende Fläche f' in $\mathcal{Q}_{i+1}{}'$ die gleiche Eigenschaft. Sind also C bzw. C' Kammern aus dem jeweiligen $(0,1)$–Orbit, welches f bzw. f' definiert, so gilt, dass die Vereinigungen $\mathcal{Q}_i \cup f_C$ und $\mathcal{Q}_i{}' \cup f'_C$ einfach zusammenhängend und die induzierten Randkurven gleich sind. f_C bzw. f'_C bezeichnen hier wieder die Kammern der jeweiligen $(0,1)$–Orbits. Induktiv kann man die Argumentation auf alle Flächen aus $\mathcal{Q}_{i+1} \setminus \mathcal{Q}_i$ anwenden, so dass man eine Folge von Zwischenkoronen mit der gewünschten Eigenschaft erhält, indem jeweils eine beliebige Fläche der nächsten Korona hinzugefügt wird.

Es gebe also in einer Fortsetzung eine Zwischenkorona, die nicht einfach zusammenhängend ist. Wir zeigen zuerst, dass es für jedes Paar einfach zusammenhängender, isomorpher Zwischenkoronen $\mathcal{Q}_i{}^*$ mit $\mathcal{Q}_i \subseteq \mathcal{Q}_i{}^* \subset \mathcal{Q}_{i+1}$ und $\mathcal{Q}_i{}'^*$ mit $\mathcal{Q}_i{}' \subseteq \mathcal{Q}_i{}'^* \subset \mathcal{Q}_{i+1}{}'$ eine Fläche f aus $\mathcal{Q}_{i+1} \setminus \mathcal{Q}_i{}^*$ gibt, die in beiden Fortsetzungen einen zusammenhängenden Schnitt mit dem Rand hat.

Man kann — o.B.d.A. in $\mathcal{C}$ — eine minimale Zahl n von Flächen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{Q}_{i+1} \setminus \mathcal{Q}_i{}^*$ wählen, so dass der durch $\mathcal{Q}_i \cup f_1 \cup \ldots f_n$ induzierte Patch nicht einfach zusammenhängend ist. Sei K eine beschränkte Zusammenhangskomponente, die von $\mathcal{Q}_{i+1} \setminus (\mathcal{Q}_i{}^* \cup f_1 \cup \ldots f_n)$ begrenzt wird. Da alle Flächen aus $\mathcal{Q}_{i+1}$ eine Ecke mit $\mathcal{Q}_i{}^*$ gemeinsam haben müssen, ist K ein dünner Patch.

K teilt mit $\mathcal{Q}_i{}^*$ einen zusammenhängenden Randpfad r: Wäre dies nicht der Fall, gäbe es mindestens zwei Randkomponenten r_1 und r_2. Zwischen diesen hätte K Randkomponenten s_1, s_2, die zu $f_1, \ldots f_n \in \mathcal{Q}_{i+1}$ gehören. Man kann eine Jordankurve konstruieren, die durch r_1, K, r_2 und $\mathcal{Q}_i{}^*$ verläuft. Diese muss entweder s_1 oder s_2 in ihrem Inneren haben, samt der angrenzenden Flächen aus $\mathcal{Q}_{i+1}$. Damit wären diese unnötig zum Abtrennen einer Komponente und n nicht minimal.

Jedes f_k hat mindestens eine Kante mit K gemeinsam: Da schon gezeigt wurde, dass r zusammenhängend ist, besteht der Schnitt von K mit den Flächen $f_1, \ldots, f_n$ aus $\mathcal{Q}_{i+1} \setminus \mathcal{Q}_i{}^*$ auch nur aus einem Pfad s. Die Kanten von s liegen an je zwei Flächen, eine aus K und eine aus der Menge $f_1, \ldots, f_n$. Die zu s benachbarten Flächen, die nicht zu K gehören, trennen K schon vollständig ab und müssen darum wegen der Minimalität von n aus der gesamten Menge $f_1, \ldots, f_n$ bestehen. Man sieht auch leicht, dass es im Fall $n > 1$ für alle $k \in \{1, \ldots n\}$ ein $j \in \{1, \ldots n\}$ gibt, so dass f_k mindestens eine Ecke aus dem Inneren von s mit f_j teilt.

Es gilt $n \leq 2$: Wähle ein beliebiges f_k. Es wurde schon gezeigt, dass f_k mindestens eine Ecke v mit einer anderen Fläche f_j gemeinsam hat, die nicht in $\mathcal{Q}_i{}^*$ liegt. Sowohl f_k als auch f_j haben eine Ecke v_k bzw. v_j mit $\mathcal{Q}_i$ gemeinsam. Damit können wir nun eine Jordankurve konstruieren, die durch $\mathcal{Q}_i{}^*, v_k, f_k, v, f_j, v_j$ verläuft und sich in $\mathcal{Q}_i{}^*$ wieder schließt. Im Inneren dieser Kurve liegt die Komponente K, da v nicht zu $\mathcal{Q}_i{}^*$ gehört und von daher an Flächen von $\mathcal{Q}_{i+1}$ angrenzen muss.

Ist $n = 2$, haben alle Flächen aus K einen zusammenhängenden Schnitt mit Z: gäbe es in einer der Fortsetzungen eine Fläche, die das nicht erfüllte, wäre sie alleine schon ausreichend, um eine umschlossene Komponente zu erzeugen, und n wäre nicht minimal.

Übrig bleibt der Fall $n = 1$: Definiere dafür $K^* := K \cup f_1$. Wir zeigen, dass K^* einfach zusammenhängend ist. Der Zusammenhang folgt daraus, dass K nach Konstruktion diese Eigenschaft hat, und die Fläche f_1 wie oben gezeigt mindestens eine Kante mit K teilt.

Der einfache Zusammenhang ergibt sich daraus, dass eine Fläche, die von K^* umschlossen wäre, wegen des einfachen Zusammenhangs der kompletten Koronen nicht Teil einer höheren Korona, also ab $i + 1$, sein darf. Wäre sie aus $\mathcal{Q}_{i+1} \setminus \mathcal{Q}_i{}^*$, würde sie zu K gehören. Also müsste sie aus $\mathcal{Q}_i{}^*$ sein. $\mathcal{Q}_i{}^*$ ist aber selber einfach zusammenhängend, könnte damit allenfalls als Ganzes von K^* umschlossen werden.

Sei also angenommen, dass $\mathcal{Q}_i{}^*$ vollständig im Inneren einer von K^* erzeugten endlichen Zusammenhangskomponente liegt. Es gibt eine Jordankurve J_1 durch $\mathcal{Q}_i{}^*$ und f_1, die K im Inneren hat. Außerdem gibt es eine weitere durch K und f_1, die $\mathcal{Q}_i{}^*$ umläuft. J_2 kann nicht vollständig im Inneren von J_1 liegen. Umgekehrt könnte J_1 im Inneren von J_2 sein, das hieße aber, dass K auch im Inneren von J_2 liegt, und J_2 selber nur durch f_1 verläuft. Das geht nicht, da f_1 nicht der Bedingung für die Zellularität genügte. Nimmt man an, dass J_1 und J_2 sich schneiden, kann man daraus eine Kurve J_3 konstruieren, die K und $\mathcal{Q}_i{}^*$ im Inneren hat, aber auch nur durch f_1 verliefe.

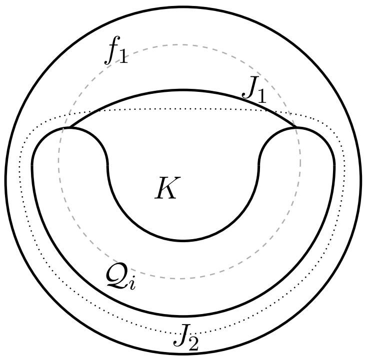

Abbildung 5.1: Skizze der Jordankurven J_1 und J_2

K^* ist nach Konstruktion auch ein dünner Patch. Sei (Z^*, L^*) die durch K^* induzierte Randkurve. Nach Satz 4.19 hat jede Ausfüllung davon zwei nicht benachbarte, ergänzbare Flächen, wenn sie kein Basispatch B_2 oder B_3 ist (B_1 kommt hier nicht in Frage, da mindestens eine Fläche in K und eine als f_1 vorkommen muss).

Fall 1, $K^* = B_2$: K kann nur aus einer Fläche f bestehen, die genau eine Kante mit f_1 gemeinsam hat. Diese Kante und damit auch f ist ergänzbar.

Fall 2, $K^* = B_3$: Hier gibt es zwei Möglichkeiten, wo die Ecke v liegen kann, nämlich entweder im Schnitt von K und f_1, oder im Inneren von K. Bei beiden Varianten sieht man leicht, dass die Ecke ergänzbar ist, und mindestens eine der angrenzenden ergänzbaren Flächen auch an Z liegt.

Fall 3, K^* hat zwei nicht benachbarte ergänzbare Flächen. Nur eine davon kann f_1 sein, die andere muss in K liegen und somit auch bezüglich des Randes Z ergänzbar sein.

Nun sind wir in der Lage, die Folge von Zwischenkoronen zu konstruieren. Man setzt erst $\mathcal{Q}_i{}^* := \mathcal{Q}_i$. Da $\mathcal{Q}_i$ einfach zusammenhängend ist, gibt es also eine Fläche f, die in $\mathcal{Q}_i$ und $\mathcal{Q}_i{}'$ einen zusammenhängenden Schnitt mit dem Rand hat.

Sei also die Existenz der Folge für ein beliebiges $\iota < \mu$ schon gezeigt. Zu $\mathcal{Q}_i{}^* := \mathcal{Q}_i{}^{(\iota)}$ gibt es wieder eine Fläche mit der gewünschten Eigenschaft. Daraus folgt die Hilfsbehauptung.

Aus Lemma 4.6 folgt, dass ein Σ–Isomorphismus $\psi : R(\mathcal{Q}_i{}^*) \to R(\mathcal{Q}_i{}')$ ausgedehnt werden kann zu einem, der eine Fläche f umfasst, die in beiden Fortsetzungen einen einfach zusammenhängenden Schnitt mit dem Rand hat. Damit kann man also wie im Fall, dass alle Zwischenkoronen einfach zusammenhängend sind, mittels Induktion über die Flächen aus $\mathcal{Q}_{i+1} \setminus \mathcal{Q}_i$ den Σ–Isomorphismus $\psi : R(\mathcal{Q}_i) \to R(\mathcal{Q}_i{}')$ ausdehnen auf $\psi' : R(\mathcal{Q}_{i+1}) \to R(\mathcal{Q}_{i+1}{}')$. □

Mit Hilfe dieses Satzes kann man nun eine globale Aussage treffen:

Theorem 5.6 *Alle echten Fortsetzungen eines Patches P sind isomorph.*

Beweis: Angenommen, es gäbe zwei echte Fortsetzungen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}'$ von P, die nicht isomorph wären. Wir bezeichnen mit $\mathcal{Q}_0$ das von P induzierte Quasikammernsystem und mit $\mathcal{Q}_i$ bzw. $\mathcal{Q}_i{}'$ die i–te Korona in $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{C}'$. Dann gibt es einen maximalen Index $i \in \mathbb{N}$, so dass Korona $\mathcal{Q}_i$ und $\mathcal{Q}_i{}'$ noch übereinstimmen. Da beides echte Fortsetzungen sind, folgt aus Satz 5.5, dass $\mathcal{Q}_{i+1} \cong \mathcal{Q}_{i+1}{}'$, was ein Widerspruch zur Maximalität von i ist. □

Dieses Ergebnis ist nicht auf die Fortsetzung von Patches beschränkt, es lässt sich dafür nur besonders einfach formulieren. Bei der Verallgemeinerung auf die Fortsetzung von Kurven kann man nicht mehr den einfachen Zusammenhang der kompletten Koronen direkt verwenden, da die Ebenenfortsetzung einer Kurve (Z, L) nie einfach zusammenhängend ist, sondern immer ein Loch — nämlich das Innere der Kurve — enthält. “Füllt” man das aber mit einer geeignet gewählten Fläche, ist das Theorem 5.6 genauso anwendbar wie für Patches.

Entsprechende Aussagen kann man auch ohne Weiteres auf Kantenkoronen übertragen. Im Beweis von Satz 5.5 wird nur verwendet, dass die Flächen der $(i+1)$–ten Korona mindestens eine Ecke mit der i–ten gemeinsam haben. Das ist bei Kantenkoronen trivialerweise auch erfüllt. Damit gilt folgender Satz:

Satz 5.7 *Es gibt nur eine Fortsetzung eines Patches P, in der die Kantenkoronen von P einfach zusammenhängend sind.*

5.3 Einbettbare Kurven

Ein Spezialfall, in dem die Fortsetzung eines Patches immer eindeutig ist, wird im folgenden Satz beschrieben, nämlich dass der Rand des Patches geschlossen und überschneidungsfrei in das Kammernsystem der entsprechenden periodischen Pflasterung “eingebettet” werden kann. Dazu brauchen wir eine genaue Definition:

Definition 5.8 *Eine gelabelte Kurve (Z, L) heißt (induziert, zusammenhangstreu)* **einbettbar** *in ein Kammernsystem $\mathcal{C}$, wenn sie eine Patchausfüllung $\mathcal{Q}_Z$ hat, die (induziert, zusammenhangstreu) in $\mathcal{C}$ einbettbar ist.*

Lemma 5.9 *Alle Patchausfüllungen einer einbettbaren Kurve (Z, L) sind in das Kammernsystem $\mathcal{C}_T$ der periodischen Pflasterung zum Delaneysymbol $\mathcal{D}$ einbettbar.*

Beweis: Angenommen, es gäbe eine Patchausfüllung $\mathcal{Q}$, für die das nicht gilt. $\mathcal{Q}_Z$ bezeichne die einbettbare Patchausfüllung von (Z, L). $\mathcal{C}_a := \mathcal{C}_T \setminus \mathcal{Q}_Z$ ist eine Fortsetzung von (Z, L^c). Nach Lemma 2.17 kann man aus $\mathcal{C}_a$ und $\mathcal{Q}$ ein Kammernsystem zusammensetzen, welches singularitätenfrei in $\mathcal{D}$ abbildbar und damit nach Theorem 2.8 isomorph zu $\mathcal{C}_T$ ist. Also ist auch $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{C}_T$ einbettbar. □

Mit Hilfe der beiden Hilfssätze 5.9 und 4.3 kann man einen Eindeutigkeitssatz für die Patchausfüllung zeigen.

Satz 5.10 *Sei $\mathcal{D}$ das Delaneysymbol zu einer periodischen Pflasterung T. Ist (Z, L) in das Kammernsystem $\mathcal{C}_T$ der Pflasterung einbettbar, so ist für alle $e \in E(Z)$ die Patchausfüllung von (Z, L, e) eindeutig.*

Beweis: Seien $(\mathcal{Q}_1, \varphi_1)$ und $(\mathcal{Q}_2, \varphi_2)$ Ausfüllungen von (Z, L). Für $x \in \{0, 1\}$ bezeichne $G_x := G_R(\mathcal{Q}_x)$ den Randgraph der jeweiligen Ausfüllung, und $F_x : Z \to G_x$ seien Graphenisomorphismen. Dann sind für ein beliebiges $e \in E(Z)$ die Tupel $(\mathcal{Q}_1, \varphi_1, F_1(e))$ und $(\mathcal{Q}_2, \varphi_2, F_2(e))$ Ausfüllungen von (Z, L, e). Nach Lemma 5.9 sind beide in $\mathcal{C}_T$ einbettbar. Im weiteren Beweis bezeichnen wir mit $\mathcal{Q}_x$ die Einbettungen der beiden Ausfüllungen in die periodische Pflasterung $\mathcal{C}_T$.

Die Kammernmengen der Kanten $F_x(e)$ bestehen jeweils aus einer eindeutigen Kammer, die wir als Referenzkammer verwenden und mit $C_x^r := F_x(e)$ bezeichnen. Da beide Quasikammernsysteme Ausfüllungen der selben gelabelten Kurve sind, gilt $\varphi_1(C_1^r) = \varphi_2(C_2^r) = \mathrm{del}(e)$. Damit gibt es einen Automorphismus γ von $\mathcal{C}_T$, der $\gamma(C_1^r) = C_2^r$ erfüllt.

Da $\mathcal{Q}_1$ einfach zusammenhängend ist, gibt es für alle $C \in \mathcal{Q}_1$ ein Wort $\tau \in \Sigma$, so dass $C = C_1^r\tau$ in $\mathcal{Q}_1$ definiert ist. Also können wir eine Abbildung

$$\begin{array}{rcll} \psi : \mathcal{Q}_1 & \to & \mathcal{Q}_2 & \quad\text{definieren durch} \\ C & \mapsto & \psi(C) := C_2^r\tau & \quad\text{für } C = C_1^r\tau \in \mathcal{Q}_1. \end{array}$$

Für die Wohldefiniertheit reicht es zu zeigen, dass ein Pfad $\tau \in \Sigma$, für den $C_1^r\tau$ in $\mathcal{Q}_1$ definiert ist, mit C_2^r als Bezugskammer auch in $\mathcal{Q}_2$ definiert ist.

Angenommen, es gäbe $\tau \in \Sigma$, das diese Bedingung nicht erfüllt. Dann gibt es $i \in \{0, 1, 2\}$ und Wörter $\tau_1, \tau_2 \in \Sigma$ mit $\tau = \tau_1\sigma_i\tau_2$, so dass $C_2^r\tau_1$ in $\mathcal{Q}_2$ definiert ist, $C_2^r\tau_1\sigma_i$ aber nicht. Damit ist $C := C_2^r\tau_1 \in R(\mathcal{Q}_2)$, und es gibt wegen Lemma 4.3 ein Wort $\rho \in \Sigma$ mit $C = C_2^r\rho$, so dass $C_2^r\rho$ in $R(\mathcal{Q}_2)$ definiert ist. Da die Ränder durch die Labelung bestimmt sind, ist $C_1^r\rho$ auch in $R(\mathcal{Q}_1)$ definiert. Da C_1^r und C_2^r durch den Automorphismus γ aufeinander abgebildet werden, muss auch in $\mathcal{Q}_1$ gelten, dass $C_1^r\tau_1 = C_1^r\rho$. Daraus folgt $C_1^r\tau_1 \in R(\mathcal{Q}_1)$ und $C_1^r\tau_1\sigma_i$ nicht definiert, im Widerspruch zur Annahme, dass $C_1^r\tau$ in $\mathcal{Q}_1$ definiert ist.

Es gibt eine Umkehrabbildung, die genau analog definiert ist, so dass man daraus auch die Bijektivität erhält. Damit hat man gezeigt, dass je zwei Fortsetzungen der Kurve (Z, L, e) isomorph sind. $\square$

Auch für Fortsetzungen unmarkierter Kurven bleibt die Konstruktion des Isomorphismus dieselbe, so dass folgendes Korollar gilt:

Korollar 5.11 *Mit den Voraussetzungen von Satz 5.10 gilt: Auch (Z, L) selber hat eine eindeutige Patchausfüllung.*

Nicht nur die Patchausfüllungen, wie in Satz 5.10 gezeigt, sind bei einbettbaren Kurven eindeutig bestimmt, sondern auch deren Ebenenfortsetzungen. Mit den bisherigen Mitteln kann man diese Aussage nur für zusammenhangstreu einbettbare Kurven zeigen. Obgleich Theorem 5.17 die Verallgemeinerung der Aussage beinhaltet, wird der Beweis für den Spezialfall aus technischen Gründen schon hier durchgeführt.

Theorem 5.12 *Sei die gelabelte Kurve (Z, L) zusammenhangstreu einbettbar in das Kammernsystem $\mathcal{C}_T$ der zu $\mathcal{D}$ gehörigen periodischen Pflasterung T. Dann gibt es für alle $e \in E(Z)$ genau eine Fortsetzung von (Z, L^c, e).*

Beweis: Nach Satz 5.10 hat (Z, L, e) eine eindeutige Patchausfüllung $(\mathcal{Q}_P, \varphi_P, e_P)$, die laut Lemma 5.9 in $\mathcal{C}_T$ einbettbar ist. Das durch die Kammernmenge $\mathcal{C}_T \setminus \mathcal{Q}_P$ induzierte Quasikammernsystem bildet mit der entsprechend eingeschränkten Abbildung ins Delaneysymbol eine Fortsetzung von (Z, L^c).

Sei $(\mathcal{C}_1, \varphi_1)$ eine beliebige Fortsetzung von (Z, L^c) mit dem Graphenisomorphismus $F_1 : Z \to G_R(\mathcal{C}_1)$. Dann ist $(\mathcal{C}_1, \varphi_1, F_1(e))$ eine Fortsetzung von (Z, L^c, e).

Wir können nach Lemma 2.17 ein Kammernsystem ${\mathcal{C}_1}' := \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{Q}_P$ konstruieren, das singularitätenfrei in $\mathcal{D}$ abbildbar ist. Nach Theorem 2.8 ist ${\mathcal{C}_1}'$ also isomorph zu $\mathcal{C}_T$. Da $\mathcal{Q}_P$ auch in $\mathcal{C}_T$ einbettbar ist, können wir insbesondere einen Σ–Isomorphismus $\psi_1 : {\mathcal{C}_1}' \to \mathcal{C}_T$ finden, der die jeweils eingebetteten Kopien des Patches $\mathcal{Q}_P$ aufeinander abbildet, indem die markierten Kanten, die ja zu äquivalenten Kammern gehören, aufeinander abgebildet werden. Sei nun $(\mathcal{C}_2, \varphi_2, F_2(e))$ eine weitere Fortsetzung von (Z, L^c, e). Mit dieser kann man die gleiche Konstruktion durchführen, so dass man ein zu $\mathcal{C}_T$ isomorphes Kammernsystem ${\mathcal{C}_2}'$ erhält mit einem Σ–Isomorphismus $\psi_2 : {\mathcal{C}_2}' \to \mathcal{C}_T$, der auf $\mathcal{Q}_P$ als Identität wirkt. Die Verkettung $\psi^* := \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ ist wieder ein Σ–Isomorphismus, der die Kopien von $\mathcal{Q}_P$ aufeinander abbildet und e respektiert. Betrachtet man also $\psi^* |_{{\mathcal{C}_1}' \setminus \mathcal{Q}_P} = \psi^* |_{\mathcal{C}_1}$, erhält man einen Σ–Isomorphismus der Fortsetzungen von (Z, L^c). $\square$

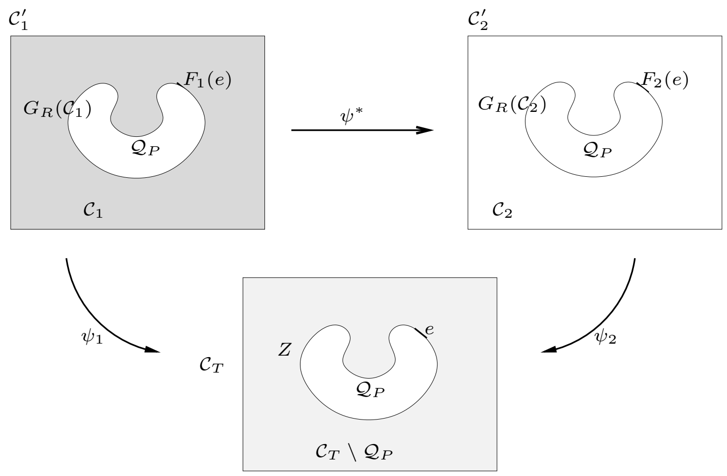

Abbildung 5.2: Schematische Darstellung der Kammernsysteme von Beweis 5.12

5.4 Schwache Fortsetzungen

Eine Generalisierung von Theorem 5.12 ist möglich, wenn man sich vom eigentlichen Fortsetzungbegriff etwas entfernt, d.h. wenn man zulässt, dass $\mathcal{Q}_P$ nicht mal induziert in die gestörte Pflasterung eingebettet ist. Allerdings ist es dann nicht möglich, Lemma 2.17 anzuwenden, so dass dafür eine Alternative gefunden werden muss, die nicht auf zusammenhangstreue Einbettungen beschränkt ist.

Die Definition für "Fortsetzung eines Patches", wie sie bisher verwendet wurde, bildet zwar sehr gut die intuitive Vorstellung ab, da an jede Randkante des Patches eine neue Fläche "angeklebt" wird, beinhaltet aber eine gewisse Beschränkung, da der Ausgangspatch in der Fortsetzung einfach zusammenhängend sein muss. An Abb. 5.3 sieht man, dass der gleiche Patch in zwei verschiedenen Fortsetzungen so eingebettet werden kann, dass er einmal zusammenhangstreu ist und einmal nicht.

In manchen Zusammenhängen ist es sinnvoll, einen etwas allgemeineren Begriff der Fortsetzung zuzulassen. Das würde einer Situation entsprechen, bei der an die Außenränder des Patches nicht immer neue Flächen angebaut werden müssen, sondern auch Randstücke miteinander idenitifiziert werden dürfen.

Um diese Bedingung formal zu definieren, wird die zur Definition äquivalente Bedingung aus Lemma 2.17 verwendet und abgewandelt.

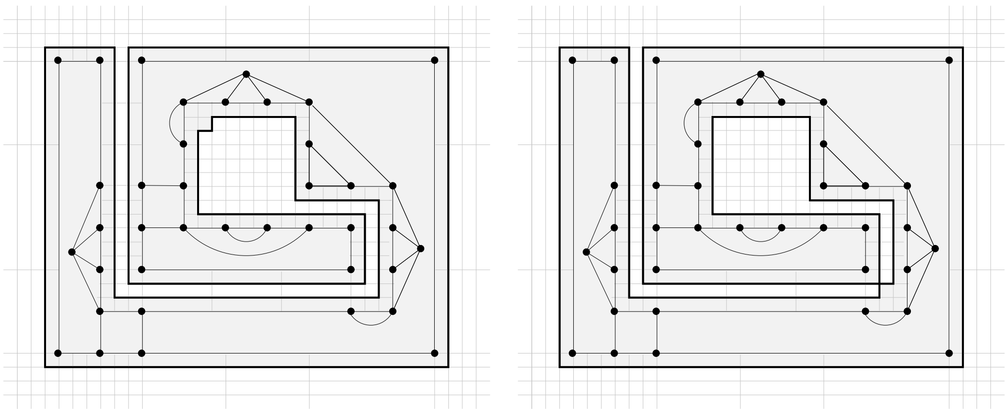

Abbildung 5.3: Verschiedene Einbettungen des gleichen Patches, der aus 3.13 durch Unterteilung von Flächen abgeleitet ist.

Definition 5.13 *Ein Patch P heißt* **schwach fortsetzbar**, *wenn es eine Pflasterung T mit ihrem korrespondierenden Kammernsystem $\mathcal{C}$ gibt, in das $\mathcal{Q}_P$ einbettbar ist und einen partiellen Σ–Morphismus $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, dessen (endlich viele) Singularitäten in $I(\mathcal{Q}_P)$ liegen. $(\mathcal{C}_T, \varphi)$ heißt* **schwache Fortsetzung** *von $\mathcal{C}_P$.*

Der Unterschied zu der Definition für Fortsetzbarkeit besteht darin, dass das Äußere von dem Patch nicht notwendigerweise zusammenhängend sein muss. Darum kann man auch nicht einfach die Definition 5.1 umformulieren, da diese schon auf der Fortsetzung einer Kurve, also einem zusammenhängenden Quasikammernsystem, basiert.

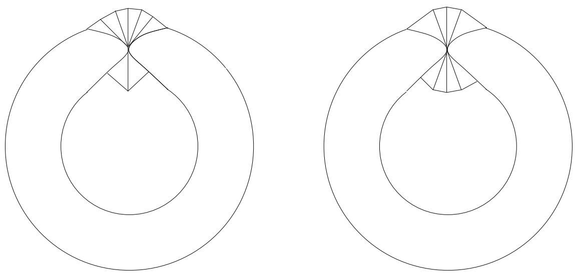

Abbildung 5.4: Eine unterschiedliche Zahl von Kammern auf beiden Seiten des Berührungspunktes

Sind die Einbettungen nicht zusammenhangstreu, gibt es eine einfache notwendige Bedingung dafür, dass Fortsetzungen gleich sind. In Abbildung 5.4

sieht man eine schematische Darstellung zweier Einbettungen, die nicht zusammenhangstreu sind und bei denen die Berührungspunkte der Ränder nicht gleich sind. In so einem Fall kann man schon ausschließen, dass die Fortsetzungen isomorph sind. Diese Bedingung wird in Gleichung 5.1 der folgenden Definition formalisiert.

Definition 5.14 *Gegeben die Tupel* $(\mathcal{C}_1, \varphi_1)$ *und* $(\mathcal{C}_2, \varphi_2)$*, wobei* $\mathcal{C}_x$ *für* $x \in \{1,2\}$ *ein Kammernsystem und* $\varphi_x : \mathcal{C}_x \to \mathcal{D}$ *ein partieller* Σ*–Morphismus ist.*

$(\mathcal{C}_1, \varphi_1)$ *und* $(\mathcal{C}_2, \varphi_2)$ *heißen* **schwach *P*–isomorph***, wenn*

(i) $\mathcal{Q}_P$ *sowohl in* $\mathcal{C}_1$ *als auch in* $\mathcal{C}_2$ *einbettbar ist, wobei wir die jeweiligen Einbettungen mit* $\mathcal{Q}_{P_1}$ *bzw.* $\mathcal{Q}_{P_2}$ *bezeichnen, so dass für* $x \in \{1,2\}$ *die Singularitäten von* φ_x *im Inneren* $I(\mathcal{Q}_{P_x})$ *liegen und*

(ii) es einen $\hat{\Sigma}$*–Isomorphismus* $\psi : \mathcal{Q}_{P_1} \to \mathcal{Q}_{P_2}$ *gibt, der auf den Rändern mit* φ_1 *und* φ_2 *verträglich ist*[1]*.*

$(\mathcal{C}_1, \varphi_1)$ *und* $(\mathcal{C}_2, \varphi_2)$ *heißen* ***P*–isomorph***, wenn außerdem für alle* $C, C' \in \mathcal{C}_1$ *und alle* $(i,j) \in \{(0,1),(0,2),(1,2)\}$ *sowie für alle* $k \in \mathbb{N}$ *erfüllt ist, dass*

$$C \;=\; C'[\sigma_i\sigma_j]^k \iff \psi(C) = \psi(C')[\sigma_i\sigma_j]^k \tag{5.1}$$

Die Abbildung ψ *heißt* **(schwacher) *P*–Isomorphismus***.*

Die Operationen in (5.1) sind tatsächlich solche aus Σ und nicht aus $\hat{\Sigma}$.

Der Zusammenhang von Fortsetzungen mit P–Isomorphie wird im nächsten Lemma dargestellt.

Lemma 5.15 *Gegeben ein Patch* P*.*

(i) Je zwei Fortsetzungen von P *sind* P*–isomorph.*

(ii) Je zwei schwache Fortsetzungen von P *sind schwach* P*–isomorph aber nicht notwendigerweise* P*–isomorph.*

[1] $\hat{\Sigma}$ bezeichne jeweils die Operationen auf $\mathcal{Q}_{P_1}$ oder $\mathcal{Q}_{P_2}$, und Σ die auf dem gesamten Kammernsystem

(iii) Sind zwei Kammernsysteme P–isomorph und ist $\mathcal{Q}_P$ jeweils zusammenhangstreu eingebettet, sind sie Fortsetzungen von P.

Beweis: Zu (i): Seien $(\mathcal{C}_1, \varphi_1)$ und $(\mathcal{C}_2, \varphi_2)$ Fortsetzungen von P. Für $x \in \{0, 1\}$ sei mit $\mathcal{Q}_{P_x}$ die (zusammenhangstreue) Einbettung von $\mathcal{Q}_P$ in die Fortsetzung $\mathcal{C}_x$ bezeichnet. Sei $\psi : \mathcal{Q}_{P_1} \to \mathcal{Q}_{P_2}$ ein Σ–Isomorphismus, der die Ränder respektiert.

Die Verträglichkeit mit den Abbildungen ins Delaneysymbol muss nur für eine Kammer $C \in R(\mathcal{Q}_{P_1})$ gezeigt werden, da der Rand laut Lemma 5.2 singularitätenfrei und laut Lemma 4.3 zusammenhängend ist, so dass daraus die Behauptung für alle Kammern des Randes folgt. $F_x : Z \to G_R(\mathcal{Q}_{P_x})$ seien die Graphenisomorphismen der Ränder. Wähle $C \in \mathcal{K}(\mathcal{Q}_{P_1})$. Dafür gibt es ein $e \in E(Z)$ mit $C = F_1(e)$, und es gilt $\varphi_1(C) = \mathrm{del}(e) = \varphi_2(\psi(C))$.

Da $\mathcal{Q}_P$ in beiden Fortsetzungen zusammenhangstreu eingebettet ist, liegt entweder $C'[\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j]^k$ oder $C'[\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j]^{m_{ij}(\varphi_1(C'))-k}$ vollständig im Inneren von $\mathcal{Q}_P$. Daraus erhält man die Bedingung 5.1. $\square$

Zu (ii): Seien $(\mathcal{C}_1, \varphi_1)$ und $(\mathcal{C}_2, \varphi_2)$ schwache Fortsetzungen von P. Es werden die Bezeichnungen von (i) übernommen, wobei die Einbettungen hier nicht zwangsläufig zusammenhangstreu sind. Die Verträglichkeit mit den Abbildungen ins Delaneysymbol kann analog zum ersten Fall gezeigt werden. Dass die Zusatzbedingung nicht unbedingt erfüllt sein muss, sieht man an Abb. 5.3.

(iii) folgt aus Lemma 5.2 und der Definition 5.3. $\square$

Bevor man Theorem 5.12 selber verallgemeinern kann, wird erst die Verallgemeinerung von Lemma 2.17 benötigt.

Lemma 5.16 *Sei P ein Patch, und das Kammernsystem $\mathcal{C}$ zusammen mit dem partiellen Σ–Morphismus $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine schwache Fortsetzung des aus P erhaltenen Quasikammernsystems $\mathcal{Q}_P$. Die durch $\mathcal{Q}_P$ induzierte gelabelte Kurve (Z, L) habe eine Patchausfüllung $(\mathcal{Q}_Z, \varphi_Z)$. Dann kann man aus $\mathcal{C} \setminus \mathcal{Q}_P$ und $\mathcal{Q}_Z$ ein Kammernsystem $\mathcal{C}^*$ konstruieren, das singularitätenfrei auf $\mathcal{D}$ abbildbar ist.*

Beweis: Da L die von $\mathcal{Q}_P$ induzierte Labelung ist, und $\mathcal{Q}_Z$ eine Patchausfüllung von (Z, L), gibt es einen Σ–Isomorphismus $\psi : R(\mathcal{Q}_P) \to R(\mathcal{Q}_Z)$, also zwischen den Rändern der beiden Quasikammernsysteme, den man so wählen kann, dass für ein $C \in R(\mathcal{Q}_P)$

$$\varphi(C) \quad = \quad \varphi_Z(\psi(C)) \text{ gilt sowie} \tag{5.2}$$

$$\varphi_Z(C) \quad = \quad \varphi(\psi^{-1}(C)) \tag{5.3}$$

für ein $C \in R(\mathcal{Q}_Z)$. Da die Ränder singularitätenfrei sind, gelten die beiden Gleichungen für alle $C \in R(\mathcal{Q}_P)$ bzw. $C \in R(\mathcal{Q}_Z)$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \supset \mathcal{Q}_P \supset R(\mathcal{Q}_P) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & R(\mathcal{Q}_Z) \subset \mathcal{Q}_Z \arrow[dl, "\varphi_Z"] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd}$$

Abbildung 5.5: Die Gleichungen 5.2 und 5.3 beschreiben dieses kommutative Diagramm.

Konstruiere auf der Kammernmenge $\mathcal{C}^* := (\mathcal{C} \setminus \mathcal{Q}_P) \cup \mathcal{Q}_Z$ eine Σ–Operation wie folgt: mit * seien die Objekte bezeichnet, die als Elemente von $\mathcal{C}^*$ aufgefasst werden; so ist z.b. $C^* \in \mathcal{C}^*$ eine Kammer, deren "Urbild" C entweder in $\mathcal{Q}_Z$ oder in $\mathcal{C} \setminus \mathcal{Q}_P$ liegt.

Wie verwenden im Folgenden eine abkürzende Schreibweise, die auf der anschaulichen Vorstellung beruht, dass einerseits jede Kammer einem Dreieck der baryzentrischen Unterteilung einer Pflasterung entspricht und andererseits Z (eigentlich natürlich ein Bild von Z) das Quasikammernsystem $\mathcal{Q}_Z$ in $\mathcal{C}^*$ berandet: Für $C \in \mathcal{C}^*$ und $i \in \{0,1,2\}$ gelte $\boldsymbol{C\sigma_i \cap C \in Z}$: $\Longleftrightarrow$ $\{C, C\sigma_i\} \notin E_i(\mathcal{Q}_Z) \cup E_i(\mathcal{C} \setminus \mathcal{Q}_P)$. Analog gilt $C\sigma_i \cap C \notin Z :\Longleftrightarrow \{C, C\sigma_i\} \in E_i(\mathcal{Q}_Z) \cup E_i(\mathcal{C} \setminus \mathcal{Q}_P)$.

Die Σ–Operationen auf $\mathcal{C}^*$ sind wie folgt definiert:

$$C^*\sigma_i \quad := \quad \begin{cases} (C\sigma_i)^* & \text{für } C\sigma_i \cap C \notin Z & \text{Fall 1} \\ (\psi(\psi^{-1}(C)\sigma_i))^* & \text{für } C \in \mathcal{Q}_Z, \psi^{-1}(C)\sigma_i \in \mathcal{Q}_P, & \\ & \quad C\sigma_i \cap C \in Z & \text{Fall 2} \\ (\psi^{-1}(C)\sigma_i)^* & \text{für } C \in \mathcal{Q}_Z, \psi^{-1}(C)\sigma_i \notin \mathcal{Q}_P, & \\ & \quad C\sigma_i \cap C \in Z & \text{Fall 3} \\ (\psi(C\sigma_i))^* & \text{für } C \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{Q}_P,\ C\sigma_i \cap C \in Z & \text{Fall 4} \end{cases}$$

Diese Definition sieht auf den ersten Blick sehr unübersichtlich aus, trägt aber nur den verschiedenen Fällen Rechnung, wie eine Kammer und ihr Bild unter σ_i in der ursprünglichen Pflasterung $\mathcal{C}$ zueinander liegen können. In Abbildung 5.6 sind die verschiedenen Fälle grob skizziert. Man kann sich durch Nachrechnen davon überzeugen, dass die Operation wohldefiniert ist.

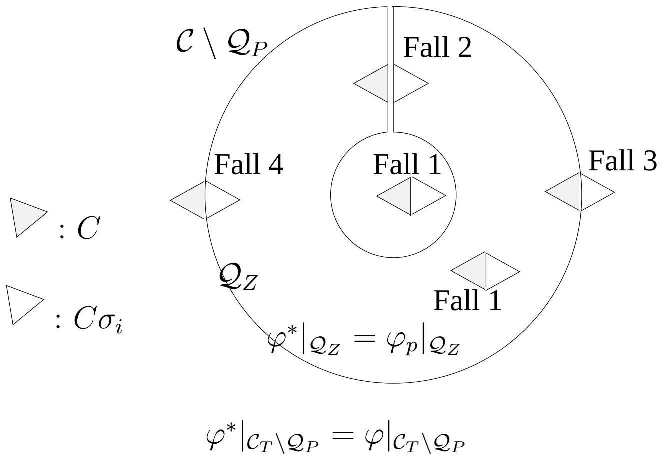

Abbildung 5.6: Möglichkeiten, wie C und $C\sigma_i$ in $\mathcal{C}^*$ zueinander liegen können

Eine Abbildung $\varphi^* : \mathcal{C}^* \to \mathcal{D}$ wird definiert durch

$$\varphi^*(C) := \begin{cases} \varphi_Z(C) & \text{falls } C \in \mathcal{Q}_Z \\ \varphi(C) & \text{sonst} \end{cases}$$

Es wird gezeigt, dass φ^* ein (singularitätenfreier) Σ–Morphismus ist; zuerst, dass für alle $C \in \mathcal{C}^*$ und $i \in \{0, 1, 2\}$ $\varphi^*(C^*\sigma_i) = \varphi^*(C^*)\sigma_i$ gilt.

Fall 1, d.h. $C\sigma_i \cap C \notin Z$:

$$\varphi^*(C^*\sigma_i) = \varphi^*((C\sigma_i)^*)$$

$$= \begin{cases} \varphi_Z(C\sigma_i) & : \quad C, C\sigma_i \in \mathcal{Q}_Z \\ \varphi(C\sigma_i) & : \quad C, C\sigma_i \in \mathcal{C}_T \setminus \mathcal{Q}_P \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \varphi_Z(C)\sigma_i & : \quad C, C\sigma_i \in \mathcal{Q}_Z \\ \varphi(C)\sigma_i & : \quad C, C\sigma_i \in \mathcal{C}_T \setminus \mathcal{Q}_P \end{cases} = \varphi^*(C^*)\sigma_i$$

Fall 2, d.h. $C \in \mathcal{Q}_Z, \psi^{-1}(C)\sigma_i \in \mathcal{Q}_P,\ C\sigma_i \cap C \in Z$:

$$\varphi^*(C^*\sigma_i) \overset{\text{Def}}{=} \varphi^*((\psi(\psi^{-1}(C)\sigma_i))^*) = \varphi_Z(\psi(\psi^{-1}(C)\sigma_i))$$
$$\overset{(5.2)}{=} \varphi(\psi^{-1}(C)\sigma_i) = \varphi(\psi^{-1}(C))\sigma_i \overset{(5.3)}{=} \varphi_Z(C)\sigma_i = \varphi^*(C^*)\sigma_i$$

Fall 3, d.h. $C \in \mathcal{Q}_Z, \psi^{-1}(C)\sigma_i \notin \mathcal{Q}_P,\ C\sigma_i \cap C \in Z$:

$$\varphi^*(C^*\sigma_i) = \varphi^*((\psi^{-1}(C)\sigma_i)^*) = \varphi(\psi^{-1}(C)\sigma_i)$$
$$\overset{(5.3)}{=} \varphi_Z(C)\sigma_i = \varphi^*(C^*)\sigma_i$$

Fall 4, d.h. $C \in \mathcal{C}_T \setminus \mathcal{Q}_P,\ C\sigma_i \cap C \in Z$:

$$\begin{aligned}&\varphi^*(C^*\sigma_i) = \varphi^*((\psi(C\sigma_i))^*) = \varphi_Z(\psi(C\sigma_i))\\ &\overset{(5.2)}{=} \varphi(C\sigma_i) = \varphi(C)\sigma_i = \varphi^*(C^*)\sigma_i\end{aligned}$$

Außerdem muss gezeigt werden, dass $m_{jk}(\varphi^*(C^*)) = r_{jk}(C^*)$ für alle $C^* \in \mathcal{C}^*$ und $j, k \in \{0, 1, 2\}$ mit $j \neq k$ gilt.

Ist der (j, k)–Orbit von C^* vollständig in $\mathcal{Q}_Z$ bzw. $\mathcal{C}_T \setminus \mathcal{Q}_P$, ist die Gleichung erfüllt, da sowohl $\mathcal{Q}_Z$ als auch $\mathcal{C}_T \setminus \mathcal{Q}_P$ singularitätenfrei sind.

Bleibt zu zeigen, dass $r_{jk}(C^*) = m_{jk}(\varphi^*(C^*))$ auch dann gilt, wenn der Orbit von C^* Kammern des Randes und des Äußeren enthält.

Betrachte zuerst den Fall, dass $C^* \in \mathcal{Q}_Z$.

$$\begin{aligned}r_{jk}(C^*) &= r_{jk}(\psi^{-1}(C)) && \text{(da die Ränder von } \mathcal{Q}_P \text{ und } \mathcal{Q}_Z \text{ isomorph sind)}\\ &= m_{jk}(\varphi_Z(\psi^{-1}(C))) && \text{(da } R(\mathcal{Q}_P) \text{ singularitätenfrei ist)}\\ &= m_{jk}(\varphi_Z(C)) && \text{(da } \psi \text{ ein } \Sigma\text{–Morphismus ist)}\\ &= m_{jk}(\varphi^*(C^*)) && \text{(nach Definition von } \varphi^*)\end{aligned}$$

Sei nun $C^* \in \mathcal{C}^* \setminus \mathcal{Q}_Z$. Im (j, k)–Orbit von C^* gibt es auch eine Kammer $C^*_z \in \mathcal{Q}_Z$ aus dem (j, k)–Orbit von C^*, d.h. es gilt $r_{jk}(C^*) = r_{jk}(C^*_z)$. Auf C^* kann man die gleiche Argumentation wie im ersten Fall anwenden und erhält somit $r_{jk}(C^*_z) = m_{jk}(\varphi^*(C^*_z)) = m_{jk}(\varphi^*(C^*))$. Daraus folgt die Behauptung.

Also ist φ^* singularitätenfrei. □

Theorem 5.17 *Sei P ein schwach fortsetzbarer Patch und das Kammernsystem $\mathcal{C}$ zusammen mit dem partiellen Σ–Morphismus $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine schwache Fortsetzung des aus P erhaltenen Quasikammernsystems $\mathcal{Q}_P$. Sei (Z, L, L^c) die durch $\mathcal{Q}_P$ in $\mathcal{C}$ induzierte gelabelte Kurve und $\mathcal{C}_p$ ein Kammernsystem, das durch $\varphi_Z : \mathcal{C}_p \to \mathcal{D}$ singularitätenfrei ins Delaneysymbol abgebildet wird.*

Ist (Z, L, L^c) einbettbar in $\mathcal{C}_p$, ist $\mathcal{C}$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Im Beweis von Theorem 5.12 wird der einfache Zusammenhang von $\mathcal{Q}_P$ in $\mathcal{C}$ nur implizit durch das Lemma 2.17 verwendet. Ersetzt man das durch das gerade gezeigte 5.16, kann der Rest des Beweises aus Lemma 5.12 übernommen werden. □

Kapitel 6

Diskussion und Ausblick

Die Hauptergebnisse der Arbeit sind Sätze zur Eindeutigkeit von Fortsetzungen gelabelter Kurven, wie sie in Definition 2.12 beschrieben sind.

Die hier entwickelte Terminologie bietet ein Werkzeug, welches die beiden nur dem ersten Anschein nach verschiedenen Probleme erstens der Ausfüllung und zweitens der Fortsetzung einer gegebenen Kurve gleichermaßen zu behandeln erlaubt. Eine zentrale Rolle spielen dabei vor allem der Begriff des "Quasikammernsystems", der eine Verallgemeinerung des Kammernsystems darstellt, und der einer "gelabelten Kurve", der verdeutlicht, dass es bei der Fortsetzung von Patches, wie in der Einleitung diskutiert, gar nicht auf das Innere ankommt; es wird lediglich eine "Vorschrift" benötigt, welche die Art der Fortsetzung bestimmt.

Im Folgenden wird die Bedeutung der Ergebnisse in Bezug auf die ursprüngliche Fragestellung diskutiert, in wie weit Patches bzw. Pflasterungen eindeutig durch ihren Rand bzw. einen bestimmten endlichen Ausschnitt und eine Abbildung in ein Delaneysymbol $\mathcal{D}$ beschrieben werden können. Ferner werden neue Fragen vorgestellt, die sich aus den erzielten Resultaten ergeben.

Bei Ebenenfortsetzungen ist die Frage nach der Eindeutigkeit besonders wichtig: Da eine unendliche Struktur nicht vollständig beschrieben werden kann, ist die Suche nach einer endlichen Kodierung unvermeidlich.

Die Ergebnisse zeigen zusammengefasst, dass in den wichtigsten Fällen die Eindeutigkeit einer endlichen Darstellung gewährleistet ist. *Echte Fortsetzungen*, wie in Definition 5.4 eingeführt, entsprechen zum einen am ehesten der anschaulichen Vorstellung von Fortsetzungen; zum anderen kann man die Bedingungen dieser Definition auch algorithmisch nutzen. Die Hilfsmittel zum Beweis der Aussagen — *erkennbare Flächen* (s. Definition 4.13), die durch *ergänzbare Kanten und Ecken* (s. Definitionen 4.7 und 4.9) einer Fortsetzung bestimmt sind — erlauben es, aus lokalen Informationen einer Fortsetzung auf Strukturen aller (echten) Fortsetzungen zu schließen. Theorem 5.6 gewährleistet, dass man die eindeutig bestimmte echte Fortsetzung erhält, wenn man mit den vom Rand her erkennbaren Flächen startet.

Auch bei der Fortsetzung von Nanotube–Caps zu einseitig unendlichen Halbröhren(s. 1.2 in Kapitel 1) interessiert man sich ausschließlich für echte Fortsetzungen, also jene, bei denen die Koronen einfach zusammenhängend sind. Diese sind laut Theorem 5.6 eindeutig bestimmt.

Könnte man zeigen, dass die Existenz einer echten Fortsetzung einer Kurve schon impliziert, dass in allen Fortsetzungen die kompletten Koronen einfach zusammenhängend sind, wäre eine weitere Verallgemeinerung des Ergebnisses von Theorem 5.6 möglich. In diesem Fall ergäbe sich unmittelbar die stärkere Aussage, dass die Eindeutigkeit der Fortsetzung schon aus der Existenz einer echten Fortsetzung folgt.

In Kapitel 5 wird eine allgemeine Lösung für den Fall angegeben, dass die Kurve überschneidungsfrei und geschlossen in das korrespondierende periodische Gitter einbettbar ist. Da die gesamte Fragestellung ein schönes Beispiel dafür ist, wie irreführend die "natürliche Intuition" sein kann, ist der Wert eines solchen echten Beweises sehr hoch anzusetzen, auch wenn die Eindeutigkeit in diesem Spezialfall kaum bezweifelt wurde.

Endliche Strukturen, wie sie bei Patchausfüllungen auftreten, kann man immer eindeutig beschreiben, notfalls durch eine vollständige Adjazenzliste, was sicher nicht effizient, aber immerhin richtig ist. Hier ist die Problemstellung also nicht von so fundamentaler theoretischer Bedeutung wie bei den Ebenenfortsetzungen. Dafür ist die praktische Anwendbarkeit in Bezug auf die Effizienz der Kodierung unmittelbar einsichtig, da der Rand nur linear mit der Anzahl der Ecken wächst, das Innere hingegen quadratisch.

Wenn man erst einmal ein Beispiel für eine mehrdeutige Fortsetzung gesehen hat, ist die Existenz unendlich vieler mehrdeutiger (m, k)–Patches für fast jedes Tupel (m, k) zwar nicht mehr sehr überraschend; wichtig ist jedoch der Beleg, dass die Mehrdeutigkeit keine Besonderheit einzelner Parameter ist, sondern dass die Struktur von den Parametern weitgehend unabhängig ist (von den "ausgearteten" Fällen $(3, 3), (3, 4)$ und $(4, 3)$ einmal abgesehen).

Die Verallgemeinerung dieser Konstruktion auf beliebige Delaneysymbole ist auf natürliche Art und Weise möglich, wie z.B. Abb. 6.1 zeigt. Die systema-

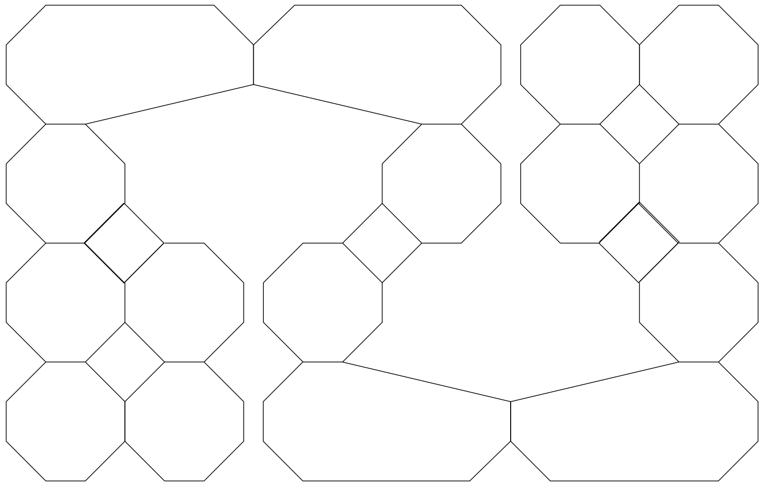

Abbildung 6.1: Verallgemeinerung der Konstruktion aus Theorem 3.6

tische Ausarbeitung einer generalisierten Lösung wäre aber trotzdem noch wünschenswert.

Auf Grund der Eindeutigkeit von dünnen Patches ist die Existenz einer inneren Fläche ein notwendiges Kriterium für die Nichteindeutigkeit. Alle konstruierten Patche haben aber (mindestens) zwei innere Flächen, die bei der hier verwendeten Konstruktion aus Symmetriegründen erzwungen sind. Wäre ganz allgemein die Existenz zweier innerer Flächen eine notwendige Bedingung für Mehrdeutigkeit, so könnte man eventuell die Minimalität der hier konstruierten (m, k)–Patches zeigen, da diese aus zwei inneren Flächen und der gerade nötigen Anzahl äußerer Flächen bestehen.

Der Nachweis der Flächenzahl als Invariante der Ränder von (m, k)–Patches ist ein wichtiger Schritt zum Verständnis der Problematik. In manchen Fällen hängt die Flächenzahl sogar nur vom Defizit (s. Definition 3.8) und der Randlänge, also von erstaunlich wenigen Randinformationen, ab. Interessanterweise sind es gerade die Parameter, die zu einer Pflasterung der euklidischen Ebene korrespondieren, bei denen der gesamte Rand als Information benötigt wird.

Die Eindeutigkeit der Flächenzahl könnte genau wie die Eindeutigkeit dünner Patches besonders für eine Anwendung in der Chemie von Interesse sein.

Wichtig ist auch die Frage, die in [8] schon gestellt wurde: Gibt es mehrdeutige Patches, die nicht auf solche mit den typischen Symmetrieeigenschaften, nämlich eine höhere Symmetrie im Rand als im Inneren, zurückführbar sind? Falls es (irreduzible) Beispiele mit trivialer Symmetrie des Randes gibt, so sind sie unzweifelhaft noch erheblich schwerer zu finden als die bisher bekannten, da die bisherigen Konstruktionen vollständig auf Symmetrieargumenten beruhen.

In Abschnitt 3.3 sind interessante offene Probleme aufgeführt, die Patchausfüllungen und Ebenenfortsetzungen gleichermaßen betreffen. Zentral ist dabei die Frage, wie man aus bekannten Kurven, die nicht eindeutig fortsetzbar sind, neue konstruieren kann. Insbesondere wurde ein Beispiel dafür gezeigt, wie man aus einer mehrdeutig fortsetzbaren Kurve durch Zusammensetzen weitere erhält. Hier stellt sich die Frage, ob das für alle Kurven dieser Art möglich ist. Auch die Umwandlung von Kurven mit mehrdeutiger Ebenenfortsetzung in solche mit mehrdeutiger Patchausfüllung und umgekehrt verdiente noch eine ausführlichere Untersuchung.

Diese Arbeit liefert Antworten auf wichtige Fragen im Zusammenhang mit der Eindeutigkeit von Fortsetzungen. Gleichzeitig ergeben sich eine Reihe neuer Fragen, die weitere Untersuchungen sehr wünschenswert machen. Man darf hoffen, dass die hier eingeführte Methodik sich bei deren Lösung weiterhin als nützlich erweisen wird.

Index

Literaturverzeichnis

[1] L. Balke. Classification of disordered tilings. *Annals of Combinatorics*, 1997.

[2] G. Brinkmann. Disorder in periodic tilings. Preprint.

[3] G. Brinkmann, U. von Nathusius, and A.H.R. Palser. A constructive enumeration of nanotube caps. *Discrete Applied Mathematics.* to appear.

[4] R. Diestel. *Graphentheorie.* Springer–Verlag, 1996.

[5] A.W.M. Dress. Relaxations of periodicity in the topological theory of tilings. *Journal de physique, Colloque C3, supplément au no 7, Tome 47*, pages 29–40, 1986.

[6] A.W.M. Dress. Presentations of discrete groups, acting on simply connected manifolds. *Adv. in Math.*, 63:196–212, 1987.

[7] A.W.M. Dress and D.H. Huson. On tilings of the plane. *Geometriae Dedicata*, 24:295–310, 1987.

[8] X. Guo, P. Hansen, and M. Zheng. Boundary uniqueness of fusenes. *Les Cahiers du GERAD*, 2000.

[9] F. Harary. *Graph Theory.* Addison–Wesley Publishing Company, 1969.

[10] H.W. Kroto, J.R. Heath, S.C. O'Brien, R.F. Curl, and R.E. Smalley. C_{60}: Buckminsterfullerene. *Nature*, 318:162–163, 1985.

[11] J. van Duijn, K. Suzuki, and J.P. Attfield. Boron–Carbon Order in CeB_2C_2. *Angew. Chemie*, 2000.

Diese Arbeit ist auf alterungsbeständigem Papier gedruckt.