Projektive und Cayley-Kleinsche Geometrien

A. L. Oniščik, R. Sulanke

29. Januar 2004

Copyright

Vorwort

Die projektive Geometrie und die in sie eingebetteten Cayley-Kleinschen Geometrien sind ein recht altes Gebiet der Geometrie, das im 19. Jahrhundert in Arbeiten von V. Poncelet, J. Gergonne, Ch. v. Staudt, A.-F. Möbius, A. Cayley, F. Klein, S. Lie, N. I. Lobatschewski und vielen anderen entstand. Obwohl dieses Gebiet eine der Grundlagen der algebraischen Geometrie ist und viele Anwendungen in der Differentialgeometrie hat, wird es seit Jahren im allgemeinen Lehrbetrieb der deutschen Universitäten – und nicht nur an diesen – sehr vernachlässigt. Auch in der neueren Fachliteratur werden diese klassischen Aspekte der Geometrie wenig berücksichtigt. Eher findet man hier die synthetische projektive Geometrie und manche aktuellen Anwendungen zum Beispiel der endlichen Geometrien, auf die wir in unserem Buch nur mit einigen Hinweisen eingehen. Wir wollen vielmehr eine systematische Darstellung der auf den Begriff des Vektorraums gestützten projektiven Geometrie geben, der das erste Kapitel unseres Buches gewidmet ist, um dann im zweiten Kapitel die wichtigsten klassischen Geometrien nach den Prinzipien von A. Cayley und F. Klein systematisch zu entwickeln, die auf der Auszeichnung eines Absoluts und der Untersuchung der sich daraus ergebenden Invarianten geometrischer Objekte beruhen. Diese durch die lineare Algebra und die Theorie der Transformationsgruppen bestimmten Methoden sind es gerade, die in der algebraischen und der Differentialgeometrie benötigt werden. Darüber hinaus kann man sie als einen integrierenden Faktor für die Entwicklung der Analysis betrachten, wobei wir besonders an die auf der Theorie der Lieschen Gruppen fußende harmonische oder geometrische Analysis denken. Wenn wir auch überall dort, wo es keine besonderen Anstrengungen erfordert, von Vektorräumen über beliebigen Schiefkörpern ausgehen, so widmen wir uns doch hauptsächlich den Geometrien über den reellen, komplexen oder quaternionischen Zahlen. Die Auswirkungen von Erweiterungen oder Einschränkungen der Skalarbereiche auf die betrachteten Geometrien werden untersucht. Neben der reellen projektiven Geometrie stellen wir auch einige elementar seltener behandelte komplexe und quaternionische Geometrien ausführlich dar. Auf die elementare konforme oder Möbius-Geometrie gehen wir detailliert ein. Die *Oktaven- und Oktavengeometrien*, die nicht den klassischen Serien Liescher Gruppen, sondern den Ausnahmegruppen zuzuordnen sind, bleiben außerhalb des Rahmens unseres Buches; zu diesem Thema verweisen wir auf H. Freudenthal [33] und H. Salzmann, D. Betten, Th. Grundhöfer, H. Hähl, R. Löwen, M. Stroppel [71].

Wir hoffen, mit dieser systematischen Darstellung allen denen ein nützliches Werkzeug in die Hand zu geben, die sich selbständig oder etwa in speziellen Seminaren den jeweils benötigten Hintergrund erarbeiten wollen. Die systematische Gliederung, vollständige Darstellung der Beweise, eingestreute Übungsaufgaben und ein ausführlicher Index sollen die Auswahl des gerade interessierenden Materials und seine Aneignung erleichtern. Das Buch ist als ein Hand- und Arbeitsbuch gedacht und keineswegs als eine Vorlage für eine Vorlesung.

Ein dem Leser bald offenbar werdender Mangel des Buches ist die fehlende oder höchstens sehr lose Verbindung des Stoffes mit seiner Historie. Die Darstellung folgt keineswegs der historischen Entwicklung; das würde den Umfang des Buches sehr vergrößern sowie Zeit und Arbeitskraft der Autoren und auch der Leser überfordern. Wir ließen uns eher von der Systematik des Gegenstandes aus heutiger Sicht leiten und benutzen die auch in anderen Gebieten der Mathematik verwendeten Strukturen wie etwa Gruppen oder Vektorräume, die sich ja gerade im Zusammenhang mit der Geometrie herausgebildet haben, von Anfang an als Ausgangspunkt unserer Darstellung. Die Bezeichnung von Sätzen, Prinzipien usw. mit den Namen von Mathematikern fassen wir eher als eine dem Üblichen folgende Nomenklatur auf als eine Aussage über die Priorität oder Urheberschaft des betreffenden Mathematikers an dem Ergebnis. Wollte man diese Aussagen als historisch korrekte Behauptungen der Urheberschaft interpretieren, so behauptete man ja implizit, die gesamte Literatur, ja sogar den Briefwechsel und die überlieferten mündlichen Aussagen vor dieser Zeit durchsucht zu haben, um das Vorhandensein eines Vorläufers auszuschließen, ein Unterfangen, dessen sich die Autoren nicht rühmen wollen.

Wir beabsichtigten nicht, eine vollständige Bibliographie dieses Gebietes aufzulisten. Es ist ja heute nicht schwer, sich aus den vorhandenen Datenbanken beliebig ausführliche Bibliographien zusammen zu stellen. Wir verweisen nur auf die bei der Bearbeitung des Stoffes herangezogenen Titel, wobei der Zufall und die subjektive Auswahl eine nicht unbedeutende Rolle spielen. Sehr häufig haben wir die bekannten grundlegenden Bücher von E. Artin [3] und R. Baer [4] benutzt. Natürlich haben wir auch unseren Lehrern für Hinweise und Orientierungen zu danken, die wir seit unserem Studium und in langen Jahren gemeinsamer Arbeit erhielten, und die, vielleicht mitunter unbewusst, in dieses Buch eingegangen sind. Besonders zu erwähnen sind hier sicher die Vorlesungen, Seminare und Schriften von W. Blaschke, E. B. Dynkin, L. A. Kaloujnine, A. G. Kurosch, P. K. Raschewski und H. Reichardt.

Es seien hier noch einige Lehrbücher und Monographien genannt, die unser Thema aus anderer Sicht oder mit anderen Schwerpunkten behandeln. Zuerst ist hier der Ergebnisbericht von J. Dieudonné [31] zu erwähnen, der allgemeinere und detailliertere Resultate als unser Buch sowie eine umfangreiches Literaturverzeichnis enthält. Das sehr interessante und kurz gefasste Lehrbuch von A. Beutelspacher und U. Rosenbaum [11] enthält neben den analytischen auch die *synthetischen Grundlagen der projektiven Geometrie* sowie aktuelle Anwendungen auf *Codierungstheorie* und *Kryptographie.* Dort wird auch die *endliche Geometrie* berücksichtigt, der speziell die zweibändige Monographie [9], [10] von A. Beutelspacher gewidmet ist, siehe auch L. M. Batten, A. Beutelspacher [5]. Das Buch [6] von W. Benz enthält interessante Charakterisierungssätze geometrischer Transformationen unter schwachen Voraussetzungen, so die Sätze von Beckmann und Quarles für euklidische Isometrien, und den Satz von A. D. Alexandrow über Lorentztransformationen. In diesem Buch werden auch die Geometrien von Lie und Laguerre behandelt, die in das vorliegende Buch nicht aufgenommen wurden. Interessantes konkretes Material unter dem Gesichtspunkt von Klein's Erlanger Programm enthält das Buch [7] von W. Benz. Dort findet man neben den klassischen Geometrien Beschreibungen des Einsteinschen Zylinder-Universums und der de-Sitter-Welt. Der inhaltsreiche Übersichtsartikel [55] von Linus Kramer beschreibt die aktuelle Entwicklung der projektiven Geometrie; in ihm werden die Struktur der projektiven Gruppe, die Zuammenhämge zwischen Inzidenzeigenschaften und algebraischen Eigenschaften des Skalarbereiches, Verallgemeinerungen des Fundamentalsatzes, Tits- Gebäude, Moufang-Ebenen, polare Räume und quadratische Formen betrachtet, wobei besonderes Gewicht auf nicht kommutative Skalarbereiche gelegt wird.

Für das Verständnis unseres Buches ist die Kenntnis der Grundbegriffe der linearen Algebra und der auf ihr beruhenden affinen und euklidischen Geometrie, wie sie üblicher Weise im ersten Studienjahr eines Mathematik- oder Physikstudiums gelehrt werden, eine unabdingbare Voraussetzung. Dazu gehört auch die Kenntnis der affinen Klassifikation der Quadriken und ihre euklidische Verfeinerung mittels der Hauptachsentransformation.

Wir verwenden diese Begriffe und Resultate oft ohne spezielle Hinweise. Natürlich ist es für die Autoren und diejenigen Leser, welche die beiden Bände der Reihe „Algebra und Geometrie" [63, 64] kennen oder besitzen, angebracht und bequem, die Beziehungen zu den dort dargestellten Gegenständen zu nutzen. Daher zitieren wir oft Stellen, z. Bsp. Satz 1 aus § 4.2 von [63], als Satz I.4.2.1 und entsprechend etwa § 6.2 aus [64] als § II.6.2. Der Leser kann anstelle dieser Bücher natürlich auch andere Lehrbücher heranziehen, die zumeist entsprechende Informationen enthalten. Vorkenntnisse über differenzierbare Mannigfaltigkeiten oder Liesche Gruppen sind für das Verständnis des Buches nicht erforderlich. Der Anhang „Bezeichnungen" enthält einige in den ersten beiden Bänden eingeführte Bezeichnungen, sowie einige in diesem Buch nicht explizit behandelte Definitionen allgemein üblicher Termini. Wir waren bemüht, einen ausführlichen Index zu erstellen. Allerdings sind die Eintragungen in der Regel nicht gedoppelt; man findet zum Beispiel „orthogonale Gruppe" nur unter „Gruppe, orthogonale". Zitate auf Stellen in dem Buch selbst sind nach dem vielfach üblichen Schema formuliert; so bedeutet Satz 5 den Satz 5 in demselben Abschnitt, Satz 6.3 den Satz 3 in Abschnitt 6 desselben Kapitels und Folgerung 1.3,4 die Folgerung 4 im Abschnitt 3 des Kapitels 1; analog für Formeln: (2.5.19) ist Formel (19) im Abschnitt 5 des Kapitels 2.

Die etwa 50 den Text begleitenden Abbildungen wurden zumeist mit Hilfe des Programms *Mathematica* von St. Wolfram [83] angefertigt. Dieses Programm stellt viele Möglichkeiten zu numerischen und symbolischen Berechnungen zur Verfügung und enthält einen vielseitigen grafischen Apparat zur Visualisierung ebener und räumlicher geometrischer Objekte, der naturgemäß an die euklidische Geometrie gebunden ist. Auf der Homepage

http://www-irm.mathematik.hu-berlin.de/ sulanke

kann man einige in diesem Programm geschriebene Notebooks finden, die bei der Erarbeitung des Buches entwickelt wurden und die Möglichkeiten von Mathematica erweitern. Zu erwähnen ist hier die pseudo-euklidische Geometrie, mit deren Hilfe Relativitätstheorie, Möbius-Geometrie, Liesche Kugelgeometrie und auch, über die Killingformen, halbeinfache Lie-Algebren bearbeitet werden können. Ausführlich wurde die dreidimensionale euklidische und die Möbius-Geometrie der k-Sphären, $k = 0, 1, 2$, behandelt. Einige in diesen Notebooks mit Hilfe symbolischer Rechnungen gewonnene Formeln, welche in Analogie zum Coxeter-Abstand von Hypersphären Möbius-Invarianten durch euklidische Invarianten ausdrücken, sind in unser Buch aufgenommen worden. Man findet dort auch einen sehr schnellen Orthogonalisierungs-Algorithmus nach Erhard Schmidt und ein Orthogonalisierungsverfahren für Vektorfolgen pseudo-euklidischer Räume. Damit sind Möglichkeiten erschlossen, die wegen des Umfanges und der Komplexität der Rechnungen mit traditionellen Methoden „per Hand" kaum zu erreichen wären. Ihre Grenzen findet die sogenannte „künstliche Intelligenz" recht bald dann, wenn sie den finiten algorithmischen Boden verlässt und sich dem in der modernen Mathematik alltäglichem begrifflichen Denken zuzuwenden versucht. Schon die naive Mengenlehre in Mathematica zu implementieren stösst auf erhebliche Probleme, wie der Entwurf eines diesbezüglichen Systems von Mathematica Notebooks und Packages zeigt, das man auch auf dieser Homepage findet.

Die technische Anfertigung des Manuskripts in LaTeX sowie der Abbildungen wurden vom zweitgenannten Autor ausgeführt, der eventuelle Unvollkommenheiten zu entschuldigen bittet. Für die Unterstützung und Hilfe bei dieser Arbeit bedanken wir uns bei der Humboldt-Universität zu Berlin, und besonders bei deren Mitarbeitern Frau H. Pah-

lisch und den Herren H. Gollek, J. Gehne und H. Spitzer. Herrn Bernd Wegner von der Technischen Universität Berlin danken wir herzlich für sein Interesse an unserer Arbeit und seine Bemühungen um eine Publikation. Leider blieben, gemessen an dem ursprünglichen Plan des Buches, noch viele Wünsche und Fragen offen. Besonders bedauern wir, dass die elementare symplektische Geometrie zu kurz gekommen ist. Bei dem wachsendem Umfang des Manuskripts und der langen Zeit, die wir für manche Vorhaben noch benötigen würden, haben wir uns entschlossen, uns jetzt auf die unserer Meinung nach wichtigsten Gegenstände zu beschränken und das Manuskript in der vorliegenden Form der Öffentlichkeit zugänglich zu machen. Wir bitten den Leser um Nachsicht und Unterstützung: Für Kritiken, Fehlerkorrekturen und andere Hinweise sind die Autoren sehr dankbar. Wir denken und hoffen, dass es manchen Kollegen und vielen Studenten Anlass zu eigenen Überlegungen und Grundlage für eigene Untersuchungen sein wird.

Berlin, im Januar 2004

A. L. Oniščik, R. Sulanke

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Projektive Geometrie

In diesem Kapitel wird die projektive Geometrie gestützt auf die lineare Algebra dargestellt. Es beginnt mit motivierenden Betrachtungen von Zentralprojektionen, die uns auf die Definition der projektiven Geometrie als Verband der Unterräume eines Vektorraums führen. Das erste zu beweisende grundlegende Resultat ist der Hauptsatz der projektiven Geometrie, der die geometrischen Eigenschaften aufs engste mit den algebraischen Eigenschaften verknüpft: Ist die Dimension mindestens zwei, also für die Ebene und höherdimensionale projektive Räume, so folgt aus der geometrischen Isomorphie die algebraische: Kollineationen, das sind bijektive Abbildungen, welche Geraden wieder in Geraden überführen, gibt es dann und nur dann, wenn die Dimensionen der Räume übereinstimmen und die Skalarbereiche isomorph sind. Der eindimensionale Fall, also die projektiven Geraden, erfordern eine besondere Behandlung, weil hier die Kollineationsbedingung nicht wirken kann; es wird das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten als grundlegende projektive Invariante eingeführt und der Staudtsche Hauptsatz bewiesen: die Invarianz des Doppelverhältnisses folgt schon aus der Invarianz der harmonischen Lage. Der Dualität der Vektorräume entspricht eine gleich bezeichnete geometrische Dualität der projektiven Geometrien. Diese Dualität ermöglicht die Betrachtung von Korrelationen, das sind bijektive Abbildungen von Punkträume auf Hyperebenenräume, welche die Inzidenz erhalten. Die symmetrischen Autokorrelationen werden klassifiziert, was uns auf die Klassifikation der schiefsymmetrischen und der hermiteschen Biformen führt. Geometrisch werden diese Klassifikationen im schiefsymmetrischen Fall als lineare Geradenkomplexe und im hermiteschen Fall als Hyperquadriken interpretiert, deren Klassifikation über den Skalarbereichen der reellen, komplexen und quaternionischen Zahlen vollständig ausgeführt wird. Abschließend untersuchen wir noch die geometrischen Implikationen, die sich aus Erweiterungen oder Einschränkungen der Skalarbereiche ergeben; insbesondere erhalten wir so die Hopfschen Faserungen, die eine wichtige Rolle in der Topologie spielen.

1.1 Projektive Räume

1.1.1 Definition und einfache Eigenschaften

Es gibt zwei vom Ansatz her wesentlich verschiedene Zugänge zur projektiven Geometrie, den *synthetischen* und den *analytischen,* den man besser den linear-algebraischen nennen sollte, da in ihm nicht die Analysis, sondern die lineare Algebra die Basis darstellt und die Methoden liefert. Die Bezeichnung „Analytische Geometrie“ hat sich jedoch in der historischen Entwicklung fest eingebürgert. In der synthetischen Geometrie sind Mengen geometrischer Elemente verschiedener Art, zum Beispiel Punkte, Geraden, Ebenen, vorgegeben, zwischen denen Relationen bestehen, die axiomatisch festgelegt sind; die Axiome entsprechen anschaulichen geometrischen Vorstellungen. Wir wählen jedoch hier den Zugang über die lineare Algebra, der zwar abstrakter, aber dafür wesentlich allgemeiner und im Grunde auch einfacher ist; es muss keine spezielle, in ihrer Axiomatik häufig zu variierende Theorie aufgebaut werden, sondern man stützt sich allein auf den Begriff des Vektorraumes, der grundlegend für die Analysis und viele Anwendungen der Mathematik und damit für jeden Mathematiker obligatorisch ist und wohl überall schon in der Anfangsphase des Studiums vermittelt wird. Die synthetische projektive Geometrie ist in den umfangreichen, schon in den Jahren 1910 und 1918 erschienenen zwei Bänden [79] von O. Veblen und J. W. Young systematisch dargestellt worden. Eine besondere Rolle spielt dabei der zweidimensionale Fall, also die ebene projektive Geometrie, vgl. G. Pickert [65], auf deren im Ansatz einfache axiomatische Darstellung wir noch in diesem Abschnitt kurz eingehen. Hier ergeben sich interessante Zusammenhänge zwischen der synthetischen Axiomatik und den algebraischen Eigenschaften des Skalarbereiches der entsprechenden analytischen Geometrie, der sich aus den synthetischen Axiomen konstruieren lässt. Umgekehrt erkennt man diese Zusammenhänge, indem man fragt, bei welchen analytischen projektiven Geometrien gewisse synthetische Axiome erfüllt sind. Eine sehr anschauliche Einführung in die ebene projektive Geometrie findet man in H. S. M. Coxeter [29].

Im Folgenden setzen wir stets voraus, dass ein Vektorraum $\boldsymbol{V}$ über einem Schiefkörper K gegeben sei[1]. Die Menge der eindimensionalen Unterräume von $\boldsymbol{V}$ wird mit $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{V})$ bezeichnet und der *zu $\boldsymbol{V}$ gehörende projektive Raum* genannt. Oft werden die projektiven Räume als Erweiterungen der affinen Punkträume durch eine so genannte *unendlich ferne Hyperebene* definiert. Die eindimensionalen Unterräume des zur affinen Geometrie gehörenden Vektorraums entsprechen bijektiv den Scharen paralleler Geraden des affinen Punktraums, die entstehen, wenn man die Vektoren des Unterraums an den Punkten des affinen Punktraums anträgt, also die Orbits des Unterraums im Punktraum betrachtet. Anschaulich kann man sich vorstellen, dass sich alle Geraden einer solchen Parallelenschar in einem einzigen unendlich fernen Punkt schneiden. Die Menge aller dieser den verschiedenen Parallelenscharen entsprechenden unendlich fernen Punkte bilden die zu adjungierende unendlich ferne Hyperebene. Die Präzisierung dieser anschaulichen Vorstellung ist zwar elementar, jedoch langwierig und mühevoll. Viel einfacher ist es, von der oben angegebenen Definition auszugehen und die affine Geometrie durch Auszeichnung einer beliebigen, dann *unendlich fern* genannten Hyperebene in die projektive einzubet-

[1] Der einzige, für das folgende wesentliche Schiefkörper ist der Schiefkörper der Quaternionen $\mathbf{H}$. Die Unterscheidung von rechtem und linken Vektorraum ist nur wesentlich, wenn K nicht kommutativ ist. Für den Anfang genügt es, K als Körper etwa der reellen oder komplexen Zahlen vorauszusetzen und den üblichen Vektorraumbegriff zugrunde zu legen.

ten, vgl. Abschnitt 5 dieses Kapitels. Am Beispiel der projektiven Ebene veranschaulichen wir diese Betrachtungen. In Beispiel 2 weiter unten werden wir erkennen, dass für die Beschreibung von Zentralprojektionen die projektive Erweiterung des Punktraums notwendig und zweckmäßig ist:

Beispiel 1. Die reelle projektive Ebene. Es sei $\boldsymbol{V} = \mathbf{R}^3$ der dreidimensionale Vektorraum über dem Körper $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen und $\boldsymbol{A}^3$ der zugehörige affine Raum, den wir als unseren Anschauungsraum interpretieren. Mit $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{A}^3$ bezeichnen wir den Punkt mit den Koordinaten $(0,0,1)$, also den Einheitspunkt auf der z-Achse. Trägt man die eindimensionalen Unterräume von $\boldsymbol{V}$ vom Punkt $\boldsymbol{e}$ aus an, so erhält man eine Bijektion von $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{V})$ auf die Menge der Geraden durch $\boldsymbol{e}$, vgl. Abb. 1.1. Analog erhält man durch Abtragen der zweidimensionalen Unterräume von $\boldsymbol{V}$ an $\boldsymbol{e}$ eine Bijektion der Menge dieser Unterräume auf die Menge der Ebenen durch $\boldsymbol{e}$.

Die zur x,y-Ebene $\boldsymbol{H}$ $(z=0)$ nicht parallelen Geraden durch $\boldsymbol{e}$ schneiden sie in genau einem Punkt. Die zu ihr parallelen Geraden durch $\boldsymbol{e}$ bilden offenbar eine einparametrische Schar, während die anderen von zwei Parametern, zum Beispiel den Koordinaten ihres Schnittpunktes mit der x,y-Ebene $\boldsymbol{H}$, abhängen. Alle Geraden durch $\boldsymbol{e}$, die in einer Ebene $\boldsymbol{B}$ durch $\boldsymbol{e}$ liegen, deren Vektoren also demselben zweidimensionalen Unterraum $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ angehören, schneiden $\boldsymbol{H}$ in einer Geraden, der Schnittgeraden $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{H}$; nur der Vektorraum $\boldsymbol{U}$ von $\boldsymbol{H}$ selbst, der ja an $\boldsymbol{e}$ angetragen die zu ihr parallele Ebene $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{U}$ bestimmt, bildet eine Ausnahme. Es liegt daher nahe, die affine Ebene $\boldsymbol{H}$ durch eine 'unendlich ferne' Gerade zu erweitern, deren Punkte den zu $\boldsymbol{H}$ parallelen Geraden durch $\boldsymbol{e}$ entsprechen; es bezeichne $\hat{\boldsymbol{H}}$ diese Erweiterung. Die unendlich ferne Gerade erscheint dann als Schnitt der ebenfalls erweiterten Ebene $\hat{\boldsymbol{B}}_0$ mit $\hat{\boldsymbol{H}}$. Oft führt man auf diese Weise die *reelle projektive Ebene* ein: sie entsteht aus der affinen Ebene durch Adjunktion einer unendlich fernen Geraden, deren Punkte den *nicht orientierten* Richtungen der Ebene entsprechen, das sind die Äquivalenzklassen paralleler Geraden der affinen Ebene. Man stellt sich vor, dass sich alle zueinander parallelen Geraden einer solchen Klasse in einem eindeutig bestimmten Punkt der unendlich fernen Geraden schneiden. Da nun eine Bijektion

$$p : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}) \mapsto p(\boldsymbol{x}) \in \hat{\boldsymbol{H}}$$

zwischen den Elementen von $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{V})$ und den Punkten der erweiterten Ebene $\hat{\boldsymbol{H}}$ besteht, haben wir ein anschauliches Bild von $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{V})$ gewonnen [2]. Man beachte, dass im projektiven Sinne die unendlich ferne Gerade unseres Bildes mit den anderen Geraden der Ebene gleichwertig ist. □

Die im vorstehenden Beispiel beschriebene Bijektion p induziert eine analoge Bijektion der zweidimensionalen Unterräume $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ des Vektorraums $\boldsymbol{V}$ auf die Menge der Geraden $\boldsymbol{h} \subset \hat{\boldsymbol{H}}$ der projektiven Ebene $\hat{\boldsymbol{H}}$:

$$\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V} \mapsto \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{W} \mapsto \boldsymbol{h} = \boldsymbol{B} \cap \hat{\boldsymbol{H}}.$$

Dabei entspricht dem Unterraum $\boldsymbol{U}$ von $\boldsymbol{H}$ die zu $\boldsymbol{H}$ parallele Ebene durch $\boldsymbol{e}$ und die unendlich ferne Gerade von $\hat{\boldsymbol{H}}$. Diese Betrachtungen lassen sich leicht ins n-Dimensionale verallgemeinern; sie legen es nahe, dem *Verband der Unterräume des Vektorraums* $\boldsymbol{V}$

[2] Die topologische Gestalt der reellen projektiven Ebene wird in den Beispielen 2.5.1, 2.5.4 des nächsten Kapitels beschrieben.

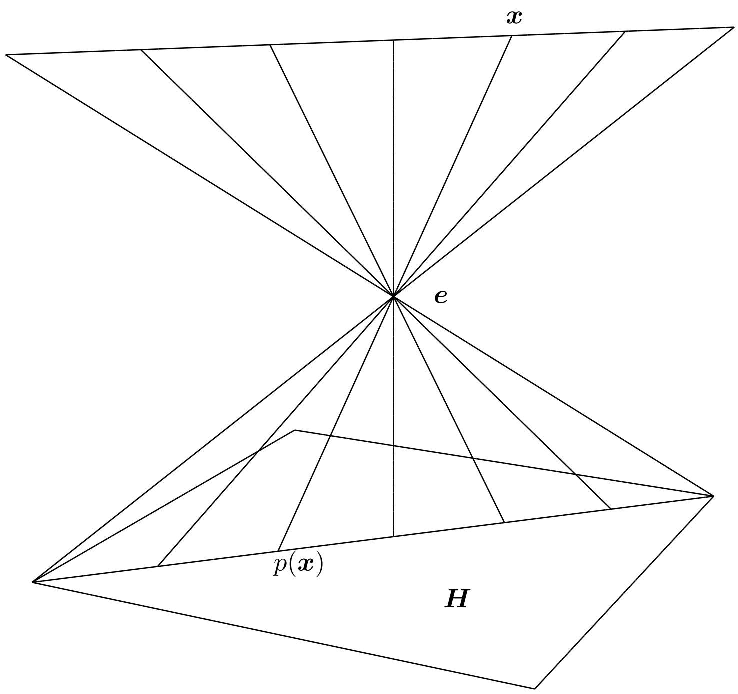

Abbildung 1.1: Strahlenbündel und projektive Ebene.

(vgl. § I.4.2) die folgende, über die affine hinausgehende projektive geometrische Deutung zu geben, die auf eine Umbezeichnung der durch den Unterraumverband gegebenen Strukturen hinausläuft:

Definition 1. Es sei $\boldsymbol{V}$ ein rechter Vektorraum über dem Schiefkörper K. Mit $\mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$ bezeichnen wir den Verband der Unterräume von $\boldsymbol{V}$, den wir die *projektive Geometrie von* $\boldsymbol{V}$ nennen: seine Elemente heißen *projektive Unterräume*. Die *projektive Dimension* Dim eines Elements $\boldsymbol{W} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$ ist die um eins verringerte Dimension des Vektorraums $\boldsymbol{W}$:

$$\operatorname{Dim} \boldsymbol{W} := \dim \boldsymbol{W} - 1.$$

Da alle rechten (bzw. linken) Vektorräume $\boldsymbol{V}$ derselben endlichen Dimension $n+1$ über demselben Schiefkörper K isomorph sind, verwenden wir oft die Schreibweise

$$\mathfrak{P}_K^n := \mathfrak{P}(\boldsymbol{V}^{n+1})$$

und sprechen von der *n-dimensionalen projektiven Geometrie über K*. Die nulldimensionalen Elemente von $\mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$ sind die *Punkte* des *projektiven Raumes*

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}) := \{\boldsymbol{a} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V}) | \operatorname{Dim} \boldsymbol{a} = 0\}.$$

Für den n-dimensionalen projektiven Raum benutzen wir oft die Bezeichnung

$$\boldsymbol{P}_K^n := \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}^{n+1}) \qquad (n < \infty).$$

Ist der Schiefkörper K aus dem Kontext bekannt, so wird der Index K meist fortgelassen. Allgemein spricht man von einer *projektiven k-Ebene* $\boldsymbol{W}$, wenn $\operatorname{Dim}\boldsymbol{W} = k$ gilt; die Menge der k-Ebenen einer n-dimensionalen projektiven Geometrie wird mit $\boldsymbol{P}_{n,k}$ bezeichnet und *Graßmann-Mannigfaltigkeit* genannt.[3] Ist $k = 1$, so spricht man von *Geraden*, ist $k = 2$ von *Ebenen* und im Falle $k = n - 1$ von *Hyperebenen*; den Zusatz 'projektiv' lassen wir fort, wenn keine Irrtümer zu befürchten sind. Man sagt, daß die Elemente $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$ *inzidieren*, Bezeichnung

$$\boldsymbol{U} \,\iota\, \boldsymbol{W}, \text{ Verneinung: } \boldsymbol{U} \,\bar{\iota}\, \boldsymbol{H},$$

wenn $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{W}$ oder $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{U}$ gelten. Die *Inklusion*[4] $\subset$ der Unterräume von $\boldsymbol{V}$ übertragen wir unter Beibehaltung der Bezeichnungen auf $\mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$. Die Ordnung $\subset$ hat als größtes Element den Vektorraum $\boldsymbol{V}$ selbst und als kleinstes den trivialen Unterraum $\boldsymbol{o} := \{\mathfrak{o}\} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$, den wir den *Unpunkt* des projektiven Raumes nennen. Unter dem *Schnitt* von zwei projektiven Unterräumen $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$ verstehen wir ihren Durchschnitt:

$$\boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{W} := \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}.$$

Ihre *Verbindung* ist der kleinste Unterraum, der beide enthält, also die lineare Hülle ihrer Vereinigung (vgl. § I.4.2):

$$\boldsymbol{U} \vee \boldsymbol{W} := \mathfrak{L}(\boldsymbol{U} \cup \boldsymbol{W}) = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}.$$

□

Es ist klar, wie man die Begriffe *Schnitt* und *Verbindung* auf beliebige Familien von Unterräumen $\{\boldsymbol{H}_\iota\}_{\iota\in I}$ ausdehnt:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{\iota\in I} \boldsymbol{H}_\iota &:= \bigcap_{\iota\in I} \boldsymbol{H}_\iota, \\ \bigvee_{\iota\in I} \boldsymbol{H}_\iota &:= \sum_{\iota\in I} \boldsymbol{H}_\iota. \end{aligned}$$

Dabei übertragen sich die aus der linearen Algebra bekannten Regeln (vgl. § I.4.2); die projektive Geometrie ist ein „vollständiger Verband" bezüglich der Inklusion $\subset$.

Dem Unpunkt $\boldsymbol{o}$ kommt nur eine formale und kaum eine geometrische Bedeutung zu. Man nennt zwei projektive Unterräume *windschief*, wenn ihr Durchschnitt der Unpunkt ist. Nach Definition 1 gilt $\operatorname{Dim}\boldsymbol{o} = -1$. Mit dieser Festlegung ergibt sich aus dem Dimensionssatz der Vektoralgebra (Satz I.4.6.3) unmittelbar das analoge Resultat für projektive Unterräume:

Satz 1. *Es seien $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$. Dann gilt die Dimensionsformel*

$$\operatorname{Dim}(\boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{W}) + \operatorname{Dim}(\boldsymbol{U} \vee \boldsymbol{W}) = \operatorname{Dim}\boldsymbol{U} + \operatorname{Dim}\boldsymbol{W}.$$

□

[3] Entsprechend zur Dimensionsfestlegung bezeichnet man die Graßmann-Mannigfaltigkeiten in der Vektoralgebra mit $G_{n+1,k+1} (= \boldsymbol{P}_{n,k})$.

[4] Wir unterscheiden nicht zwischen $\subset$ und $\subseteq$; $A \subset B$ bedeutet also dasselbe wie $A \subseteq B$, die Gleichheit ist zugelassen.

Übung 1. Mit Hilfe der Dimensionsformel (Satz 1) diskutiere man alle Lagemöglichkeiten für projektive Unterräume $\boldsymbol{F}^k, \boldsymbol{H}^m \subset \boldsymbol{P}^n$ für $0 \leq k \leq m < n \leq 4$. Für jeden der erhaltenen Fälle gebe man ein Beispiel an. Die beiden Unterräume sind genau dann windschief, wenn ihre Vereinigung nicht in einem $(k+m)$-dimensionalen Unterraum liegt. Man vergleiche die erhaltenen Ergebnisse mit entsprechenden Resultaten im affinen Raum (s. § I.4.6).

Das folgende Beispiel zeigt deutlich den Vorteil der historisch jüngeren, begrifflichen Auffassung der projektiven Geometrie: Die Eigenschaften der Zentralprojektion sind aus dieser Sicht durch einen kurzen Verweis auf die Dimensionsformel festgestellt. Vom affinen Standpunkt aus, also bei Betrachtung der affinen Ebene als erweiterte projektive, sind einige Fallunterscheidungen nötig. Wir führen diese ebenfalls durch, weil sie eine anschauliche Brücke zwischen affiner und projektiver Geometrie ergeben.

Beispiel 2. **Zentralprojektion.** Wir betrachten zuerst den dreidimensionalen projektiven Raum $\boldsymbol{P}^3$. Es seien $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei verschiedene projektive Ebenen in $\boldsymbol{P}^3$ und $\boldsymbol{e}$ ein Punkt, der mit keiner dieser Ebenen inzidiert. Unter der *Zentralprojektion* von $\boldsymbol{B}$ auf $\boldsymbol{H}$ mit dem *Projektionszentrum* $\boldsymbol{e}$ verstehen wir die Abbildung:

$$q : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \longmapsto \hat{\boldsymbol{x}} = q(\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{e}) \wedge \boldsymbol{H} \in \boldsymbol{H}.$$

Eine allgemeinere Definition der in der projektiven Geometrie sehr wichtigen Zentralprojektionen folgt in Abschnitt 1.3. Interpretiert man die Definition projektiv, so erkennt man leicht, daß $q : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{H}$ eine Bijektion ist, die Geraden wieder in Geraden überführt: das kann man zum Beispiel aus der Dimensionsformel schließen. Vom affinen Standpunkt aus ist die Situation komplizierter. Zunächst sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: Die Ebenen $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{H}$ sind parallel. Wir betrachten die Abbildung 1.2. Die obere Ebene $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{g} \vee \boldsymbol{h}$ sei die Urbildebene, die untere die Bildebene $\boldsymbol{H} = \hat{\boldsymbol{g}} \vee \hat{\boldsymbol{h}}$. Für die Bilder der eingezeichneten Geraden $\boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$ und Punkte $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}$ von $\boldsymbol{B}$ gilt:

$$q(\boldsymbol{g}) = \hat{\boldsymbol{g}},\ q(\boldsymbol{h}) = \hat{\boldsymbol{h}},\ q(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{a}) \vee q(\boldsymbol{x}) = \hat{\boldsymbol{a}} \vee \hat{\boldsymbol{x}}.$$

In diesem Fall ist q eine affine Abbildung der affinen (nicht erweiterten) Ebenen; sie führt parallele Geraden wieder in parallele Geraden über. Die projektiv erweiterten Ebenen $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ schneiden sich in ihrer gemeinsamen unendlich fernen Geraden $\boldsymbol{h}_\infty = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{H}$, die aus Fixpunkten der Zentralprojektion q besteht.

2. Fall: Die Urbildebene $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d} \vee \boldsymbol{a}$ und die Bildebene $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d} \vee \hat{\boldsymbol{a}}$ sind nicht parallel; sie schneiden sich in einer Geraden $\boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d} = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{H}$, die aus Fixpunkten von q besteht, vgl. Abb. 1.3. Es sei $\boldsymbol{e} \vee \boldsymbol{u} \vee \boldsymbol{v}$ die zu $\boldsymbol{H}$ parallele Ebene durch das Projektionszentrum $\boldsymbol{e}$, sie schneidet $\boldsymbol{B}$ in der Geraden $\boldsymbol{u} \vee \boldsymbol{v}$. Für $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{u} \vee \boldsymbol{v}$ ist die Gerade $\boldsymbol{w} \vee \boldsymbol{e}$ zu $\boldsymbol{H}$ parallel; sie schneidet also die unendlich ferne Gerade $\boldsymbol{h}_\infty \subset \boldsymbol{H}$ der Bildebene im Sinne der im vorigen Beispiel beschriebenen Erweiterung, und es gilt

$$q(\boldsymbol{u} \vee \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{h}_\infty.$$

Alle mit $\boldsymbol{w}$ inzidierenden Geraden der Urbildebene $\boldsymbol{B}$, zum Beispiel die Geraden $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c}$, gehen in zueinander parallele Geraden über:

$$q(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{d}) = \hat{\boldsymbol{a}} \vee \boldsymbol{d},\ q(\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c}) = \hat{\boldsymbol{b}} \vee \boldsymbol{c}.$$

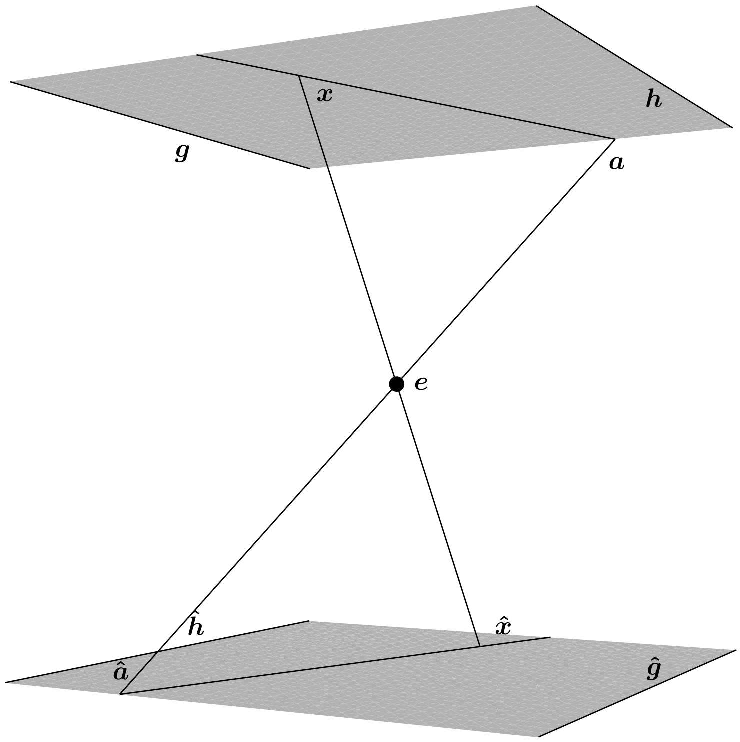

Abbildung 1.2: Zentralprojektion paralleler Ebenen.

Dem Bündel der Geraden durch $\boldsymbol{w}$ entspricht also die Schar paralleler Geraden in der durch ihre Bilder gegebenen, gemeinsamen nichtorientierten Richtung der Bildebene $\boldsymbol{H}$. Andererseits schneiden sich die Bilder paralleler Geraden aus $\boldsymbol{B}$:

$$q(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{c}) \wedge q(\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{d}) = (\hat{\boldsymbol{a}} \vee \boldsymbol{c}) \wedge (\hat{\boldsymbol{b}} \vee \boldsymbol{d}) = \hat{\boldsymbol{t}}.$$

Bezeichnet $\boldsymbol{b}_\infty$ die unendlich ferne Gerade der Urbildebene $\boldsymbol{B}$ und ist $\boldsymbol{t}$ der durch die parallelen Geraden $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{d}$ bestimmte Schnittpunkt auf ihr, so gilt $q(\boldsymbol{t}) = \hat{\boldsymbol{t}}$. Es folgt, daß die Schnittgerade $\boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{s}$ der Bildebene $\boldsymbol{H}$ mit der zur Urbildebene $\boldsymbol{B}$ parallelen Ebene durch $\boldsymbol{e}$ Bild der unendlich fernen Gerade von $\boldsymbol{B}$ ist: $q(\boldsymbol{b}_\infty) = \boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{s}$.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, daß q keine affine Abbildung sein kann, weil sie die Parallelität nicht invariant läßt. Die hier geschilderte Situation ist in der Fotografie als das Auftreten stürzender Linien bei Aufnahmen von hohen Gebäuden mit geneigter Kamera bekannt. Die Zentralprojektion ist die von der Geometrie her ideale fotografische Abbildung durch eine Lochkamera; leider wird nur die Lichtstärke immer kleiner, je genauer die Abbildung realisiert wird. Die Zentralprojektionen und ihre Verallgemeinerungen sind ein natürliche Ausgangspunkt für die projektive Geometrie, weil sie Geraden wieder in Geraden überführen und die Inzidenz invariant lassen. $\square$

Übung 2. Man führe ein an die Konfiguration der Abb. 1.3 angepasstes kartesisches Koordinatensystem ein und beweise die in dem vorigen Beispiel ausgesprochenen Behauptungen rechnerisch im Rahmen der affinen Geometrie.

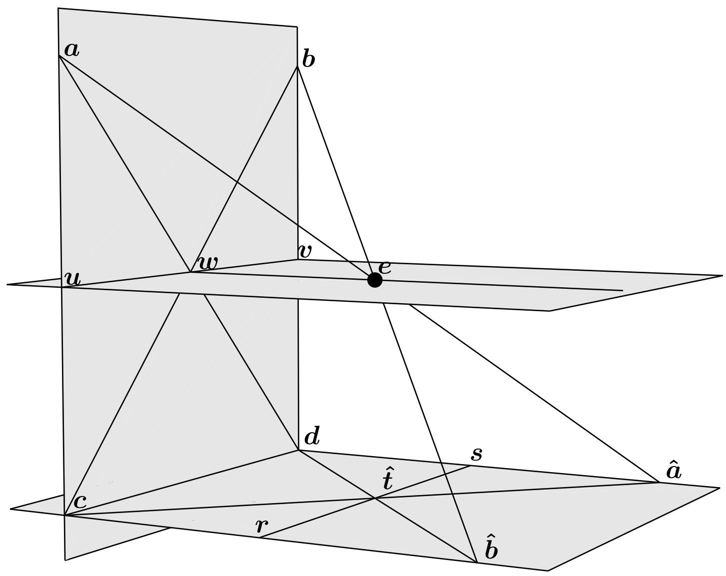

Abbildung 1.3: Zentralprojektion nicht paralleler Ebenen.

Aus formalen Gründen ist es oft zweckmäßig, den Unpunkt zum projektiven Raum zu adjungieren. Wir definieren daher die disjunkte Vereinigung

$$\boldsymbol{P}^n_o := \boldsymbol{P}^n \cup \{\boldsymbol{o}\}. \tag{1}$$

Eine erste Anwendung ist die Definition der *kanonischen Abbildung*,

$$\pi : \mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}^{n+1} \mapsto \boldsymbol{x} := [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{P}^n_o, \tag{2}$$

wobei $[\mathfrak{x}]$ die lineare Hülle $[\mathfrak{x}] = \mathfrak{L}(\{\mathfrak{x}\})$ im Vektorraum $\boldsymbol{V}$ bezeichnet. Die Abbildung π erlaubt es, die Elemente $\boldsymbol{H} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$ mit den Punktmengen $\pi(\boldsymbol{H}) \subset \boldsymbol{P}^n_o$ zu identifizieren; dabei bleibt die Ordnung erhalten. Wenn nicht ausdrücklich anders gesagt, werden wir stets annehmen, daß der Unpunkt $\boldsymbol{o}$ zu allen projektiven Unterräumen von $\boldsymbol{P}^n_o$ gehört. Da der Schnitt von projektiven Unterräumen wieder ein projektiver Unterraum ist, wird durch

$$M \in \mathcal{P}(\boldsymbol{P}^n_o) \longmapsto \vee(M) := \bigwedge_{M \subset \boldsymbol{H} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})} \boldsymbol{H} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V}) \tag{3}$$

die *projektive Hülle* der Teilmenge $M \subset \boldsymbol{P}^n_o$ definiert, wobei wegen der beschriebenen Identifizierung

$$\vee(M) = \pi(\mathfrak{L}(\pi^{-1}(M))) = \bigcap_{M \subset \boldsymbol{H} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})} \boldsymbol{H} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{P}^n_o)$$

gilt; $\vee(M)$ wird auch *der von M aufgespannte projektive Unterraum* genannt.

Übung 3. Man zeige, daß durch (3) ein *Hüllenoperator* definiert wird, d.h., es gelten:
a) $M \subset \vee(M)$;
b) Aus $M \subset L$ folgt $\vee(M) \subset \vee(L)$;
c) $\vee(\vee(M)) = \vee(M)$.
Weiter beweise man:
d) $\vee(\emptyset) = \boldsymbol{o} \in \vee(M)$ für alle $M \subset \boldsymbol{P}_o^n$,
e) Es gilt $\vee(M) = M$ dann und nur dann, wenn M ein projektiver Unterraum ist.

Übung 4. Man zeige: Eine Teilmenge $M \subset \boldsymbol{P}_o^n$ ist ein projektiver Unterraum genau dann, wenn $\boldsymbol{o} \in M$ gilt und mit $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, auch stets die Verbindungsgerade $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$ in M liegt.

Übung 5. Es sei $\boldsymbol{H}^{n-1} \subset \boldsymbol{P}_o^n$ eine projektive Hyperebene. Man beweise

$$\vee(\boldsymbol{P}_o^n \setminus \boldsymbol{H}^{n-1}) = \boldsymbol{P}_o^n.$$

Wir übertragen nun den Begriff der linearen Unabhängigkeit in die projektive Geometrie.

Definition 2. Es sei $(\boldsymbol{x}_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie (oder Menge) von Punkten $\boldsymbol{x}_\iota \in \boldsymbol{P}_o^n$. $(\boldsymbol{x}_\iota)_{\iota \in I}$ heißt *in allgemeiner Lage*, wenn für jede Teilfolge (oder Teilmenge) aus $k+1$ Punkten, $0 \leq k \leq n$, stets gilt

$$\operatorname{Dim} \boldsymbol{x}_{\iota_0} \vee \boldsymbol{x}_{\iota_1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_{\iota_k} = k.$$

Eine Folge (oder Menge) $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_r)$ von Punkten heißt *projektiv unabhängig*, wenn

$$\operatorname{Dim} \boldsymbol{x}_0 \vee \boldsymbol{x}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_r = r$$

gilt. □

Übung 6. Es seien $\boldsymbol{x}_i = [\mathfrak{x}_i] \in \boldsymbol{P}_o^n$. Man beweise: a) Die Folge $(\boldsymbol{x}_0, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$, $k \leq n$, ist in allgemeiner Lage genau dann, wenn $(\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_k)$ linear unabhängig ist. - b) Eine beliebige Folge $(\boldsymbol{x}_i)_{i \in I}$ ist in allgemeiner Lage genau dann, wenn jede Teilfolge aus höchstens $n+1$ Punkten projektiv unabhängig ist. - c) Jede Teilfolge einer Folge in allgemeiner Lage ist selbst in allgemeiner Lage. (Die Aussagen a), b), c) gelten entsprechend für Mengen.)

Folgerung 2. *Im n-dimensionalen projektiven Raum gibt es $n+1$ projektiv unabhängige Punkte; jede Folge oder Menge aus $r > n+1$ Punkten ist projektiv abhängig. Es gibt mindestens eine Menge M aus $n+2$ Punkten in allgemeiner Lage in $\boldsymbol{P}_o^n$.*

B e w e i s. Die einer Basis $(\mathfrak{a}_i)_{i=0,\ldots,n}$ von $\boldsymbol{V}^{n+1}$ entsprechenden Punkte $\boldsymbol{a}_i = [\mathfrak{a}_i]$ sind projektiv unabhängig. Zur Menge $\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ dieser *Basispunkte* fügen wir noch den *Einheitspunkt* $\boldsymbol{e} = [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 + \ldots + \mathfrak{a}_n]$ hinzu; diese $n+2$ Punkte sind stets in allgemeiner Lage. □

Beispiel 3. **Projektive Geraden.** Wir betrachten die projektive Gerade $\boldsymbol{P}^1$ über dem Schiefkörper K. Es sei $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1)$ eine Basis des zugehörigen Vektorraums $\boldsymbol{V}^2$. Die $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1)$ entsprechende *projektive Skala* wird folgendermaßen definiert[5]:

$$\xi : \boldsymbol{x} = [\mathfrak{a}_0 x^0 + \mathfrak{a}_1 x^1] \in \boldsymbol{P}^1 \mapsto \xi(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} x^1 (x^0)^{-1} \in K & \text{falls } x^0 \neq 0, \\ \infty & \text{falls } x^0 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

[5] Wie in der Tensorrechnung üblich, schreiben wir die den Koordinaten eines Vektors entsprechenden Indizes, hier 0, 1, oben; das sind also keine Potenzen!

Offenbar ist diese Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten; $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}\lambda$, $\lambda \neq 0$, ergeben denselben Wert. Setzen wir $\hat{K} = K \cup \{\infty\}$, so wird $\xi : \boldsymbol{P}^1 \to \hat{K}$ eine Bijektion, die eine enge und natürliche Beziehung zwischen den Eigenschaften von K und der projektiven Geometrie herstellt. Der Punkt $\boldsymbol{a}_0 = [\mathfrak{a}_0]$ heißt der *Nullpunkt*, $\boldsymbol{a}_1 = [\mathfrak{a}_1]$ der *unendlich ferne Punkt* und $\boldsymbol{e} = [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1]$ der *Einheitspunkt* der projektiven Skala; offensichtlich gelten

$$\xi(\boldsymbol{a}_0) = 0,\ \xi(\boldsymbol{a}_1) = \infty,\ \xi(\boldsymbol{e}) = 1.$$

Ist $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ oder $\mathbf{H}$, so ist in K eine Metrik und somit eine Topologie definiert. Wir betrachten dann auf $\hat{K}$ die durch die *Alexandroffsche Kompaktifizierung* gegebene Topologie, vgl. W. Rinow [70], § 28: Die Topologie in K bleibt erhalten und die Umgebungen von ∞ sind die Komplemente in $\hat{K}$ von kompakten Mengen in K. Hieraus ergibt sich ein vom affinen oder euklidischen völlig abweichendes Bild: Die reelle projektive Gerade $\boldsymbol{P}^1_{\mathbf{R}}$ ist topologisch ein Kreis S^1, die komplexe $\boldsymbol{P}^1_{\mathbf{C}}$ ist die *Riemannsche Zahlenkugel* S^2 und die *quaternionische projektive Gerade* $\boldsymbol{P}^1_{\mathbf{H}}$ ist zu einer vierdimensionalen Sphäre S^4 homöomorph. Wir werden später sehen, daß die definierte Topologie nicht von der Wahl der projektiven Skala, d.h. der Basis $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1)$ abhängt, vgl. Übung 2.4. □

Ein erstes Beispiel für die in der projektiven Geometrie bestehende *Dualität*, die wir in Abschnitt 1.6 noch ausführlich behandeln werden, ist der folgende Satz:

Satz 3. *Es sei $\mathfrak{P}^n$ eine projektive Geometrie über K. Dann gelten:*

a) Zu je zwei Punkten $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, gibt es genau eine Gerade $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{P}_{n,1}$, mit der sie beide inzidieren, nämlich die Verbindungsgerade $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$.

b) Zu je zwei Hyperebenen $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{P}_{n,n-1}$, $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{Y}$, gibt es genau eine $n-2$-Ebene $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{P}_{n,n-2}$, mit der sie beide inzidieren, nämlich die Schnitt-$(n-2)$-Ebene $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y}$.

Beweis. a) Aus $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ folgt $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$. Wegen $\operatorname{Dim} \boldsymbol{o} = -1$ ergibt sich aus der Dimensionsformel $\operatorname{Dim} \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} = 1$. Ist $\boldsymbol{h}_1$ irgendeine Gerade, die mit $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ inzidiert, so ist auch $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} \subset \boldsymbol{h}_1$, und aus $\operatorname{Dim} \boldsymbol{h} = \operatorname{Dim} \boldsymbol{h}_1 = 1$ folgt $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_1$.
b) Aus $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{Y}$ folgt $\boldsymbol{X} \vee \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^n$. Wegen $\operatorname{Dim} \boldsymbol{P}^n = n$ ergibt sich aus der Dimensionsformel $\operatorname{Dim} \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y} = n-2$. Ist $\boldsymbol{H}_1$ irgendeine $n-2$-Ebene, die mit $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{Y}$ inzidiert, so ist auch $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y} \supset \boldsymbol{H}_1$, und aus $\operatorname{Dim} \boldsymbol{H} = \operatorname{Dim} \boldsymbol{H}_1 = n-2$ folgt $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1$. □

1.1.2 Ebene projektive Geometrie

Beispiel 4. **Ebene Inzidenzgeometrie.** Für $n = 2$ erhalten wir aus Satz 3 und Folgerung 2 die folgenden Aussagen:

P.1. *Je zwei verschiedene Punkte inzidieren mit genau einer Geraden.*

P.2. *Je zwei verschiedene Geraden inzidieren mit genau einem Punkt.*

P.3. *Es gibt vier Punkte $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, von denen nicht irgendwelche drei auf derselben Geraden liegen.*

Diese drei Aussagen können als Axiome einer synthetischen projektiven *ebenen Inzidenzgeometrie* Π dienen: eine solche besitzt zwei Grundmengen: Punkte $x \in P$, Geraden $X \in G$ und eine Relation, die Inzidenz ι, die zwischen Punkten und Geraden bestehen kann: $x\,\iota\,X$, oder auch nicht: $x\,\bar{\iota}\,Y$, deren Eigenschaften durch die Axiome P.1 – 3 beschrieben werden. Diese Axiome reichen allerdings noch nicht aus, um die Existenz eines Schiefkörpers K zu sichern, dessen ebene projektive Geometrie zu der axiomatischen isomorph wäre. Durch die Annahme weiterer Axiome kann man die Existenz eines derartigen Skalarbereichs erreichen. Hier ergeben sich interessante Wechselbeziehungen zwischen allgemeineren Skalarbereichen und synthetisch-geometrischen Eigenschaften der projektiven Ebenen, vgl. G. Pickert [65]. Über neuere Entwicklungen auf diesem Gebiet berichtet der Übersichtsartikel [55] von L. Kramer, in dem besonders der Fall nicht kommutativer Skalarbereiche betont wird. Eine sehr anschauliche Darstellung der reellen ebenen projektiven Geometrie auf der Grundlage eines synthetischen Axiomensystems stammt von H. S. M. Coxeter [29]. Das sehr facettenreiche Lehrbuch [11] von A. Beutelspacher und U. Rosenbaum behandelt sowohl die synthetischen als auch die analytischen Grundlagen der projektiven Geometrie. Die Bücher [79] von O. Veblen und J. W. Young enthalten eine synthetische Darstellung der höherdimensionalen projektiven Geometrie. Jedoch schränken die für die Beschreibung der Inzidenz notwendigen Axiome des dreidimensionalen Raums den Skalarbereich wesentlich mehr ein als das in der ebenen Inzidenzgeometrie der Fall ist. □

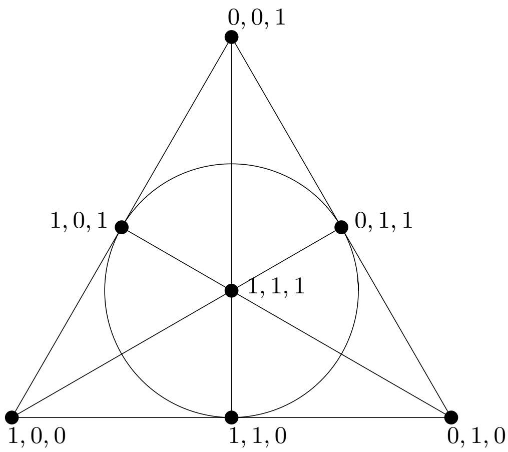

Abbildung 1.4: Die projektive Ebene über $\mathbf{Z}_2$.

Übung 7. Man zeige: In jeder ebenen projektiven Inzidenzgeometrie Π, in der die Axiome P.1 – 3 erfüllt sind, gibt es vier Geraden, von denen nicht irgendwelche drei durch einen Punkt gehen. Hinweis: Man zeige zuerst, dass auf den Geraden $A \in G$, welche Punkte einer Konfiguration nach Axiom P.3 verbinden, wenigstens drei verschiedene Punkte liegen.

Übung 8. Wir betrachten eine projektive Geometrie $\mathfrak{P}^n_K$ über einem Körper K. Man zeige: a) Gibt es eine Gerade $\boldsymbol{h} \in \mathfrak{P}^n_K$, auf der genau $p+1$ Punkte liegen, p eine Primzahl, so ist $K = \mathbf{Z}_p$, der Restklassenkörper mod p. - b) Die projektive Geometrie $\mathfrak{P}^2_{\mathbf{Z}_2}$ enthält genau sieben Punkte und sieben Geraden, wobei die Inzidenzbeziehung durch Abb. 1.4 dargestellt wird, in welcher der Kreis und die sechs Strecken die sieben Geraden symbolisieren. Diese Geometrie ist auch als *Fano-Ebene* bekannt. - c) In $\mathfrak{P}^n_{\mathbf{Z}_2}$ gibt es genau $2^{n+1} - 1$ Punkte.

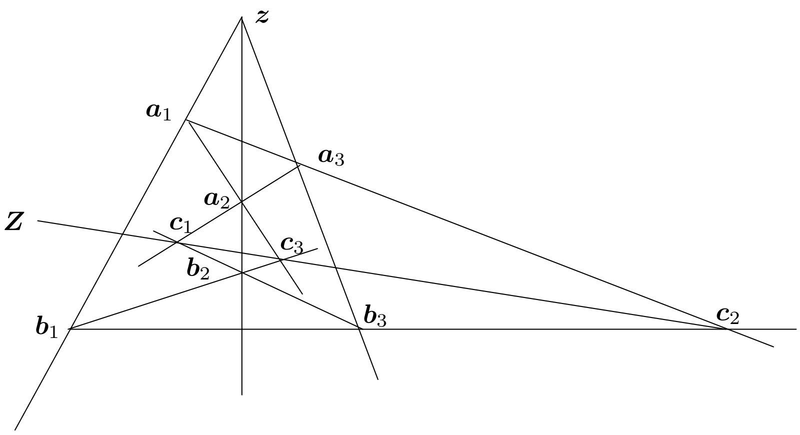

Abbildung 1.5: Satz von Desargues

Definition 3. Eine Punktmenge $M \in \boldsymbol{P}_o^n$ heißt *kollinear*, wenn es eine Gerade $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{P}_{n,1}$ gibt mit $M \subset \boldsymbol{h}$. Eine Menge $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{P}^n$ heißt *konzentrisch*, wenn es einen Punkt $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{P}^n$ gibt mit $\boldsymbol{z} \iota \boldsymbol{A}$ für alle $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{M}$. $\square$

Der in der nächsten Übung formulierte Satz von *Desargues* ist besonders für die ebene projektive Geometrie interessant, weil er nicht aus den Axiomen P.1 – 3 der ebenen Inzidenzgeometrie folgt; Inzidenzebenen, in denen er gilt, heißen *desarguessche Ebenen*. Man kann zeigen, dass die Desargues-Eigenschaft mit der Assoziativität des Skalarbereiches äquivalent ist, vgl. G. Pickert [65]. In der Inzidenzgeometrie des Raumes folgt der Satz von Desargues schon aus den übrigen Inzidenzaxiomen, vgl. L. Heffter [37], Abschnitt A.5. Daher gibt es keine projektiven Räume einer Dimension $n > 2$ mit nicht assoziativen Skalarbereichen. Die projektive Ebene über den *Oktaven* ist das vielleicht wichtigste Beispiel einer nicht desarguesschen Ebene, vgl. H. Freudenthal [33] oder H. Salzmann et al. [71]. In den von uns betrachteten Geometrien über Schiefkörpern gilt der Satz für alle Dimensionen $n \geq 2$.

Übung 9 (Satz von Desargues). Wir betrachten eine projektive Geometrie $\mathfrak{P}_K^n$ über einem Schiefkörper K, $n \geq 2$. Es seien sechs verschiedene Punkte $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_i \in \boldsymbol{P}^n$, $i = 1, 2, 3$, gegeben derart, dass die Verbindungsgeraden $\boldsymbol{h}_i := \boldsymbol{a}_i \vee \boldsymbol{b}_i$, $i = 1, 2, 3$, konzentrisch sind. Man beweise: Es existieren die Schnittpunkte „entsprechender Seiten“:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_1 &= (\boldsymbol{a}_2 \vee \boldsymbol{a}_3) \wedge (\boldsymbol{b}_2 \vee \boldsymbol{b}_3), \\ \boldsymbol{c}_2 &= (\boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{a}_3) \wedge (\boldsymbol{b}_1 \vee \boldsymbol{b}_3), \\ \boldsymbol{c}_3 &= (\boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{a}_2) \wedge (\boldsymbol{b}_1 \vee \boldsymbol{b}_2), \end{aligned}$$

und diese sind kollinear, vgl. Abb. 1.5.

Für den Beweis des Satzes von *Pappos*, der ebenfalls nicht aus den Inzidenzaxiomen P.1 – 3 folgt, ist die Kommutativität des Skalarbereichs wesentlich (vgl. Übung 2.10):

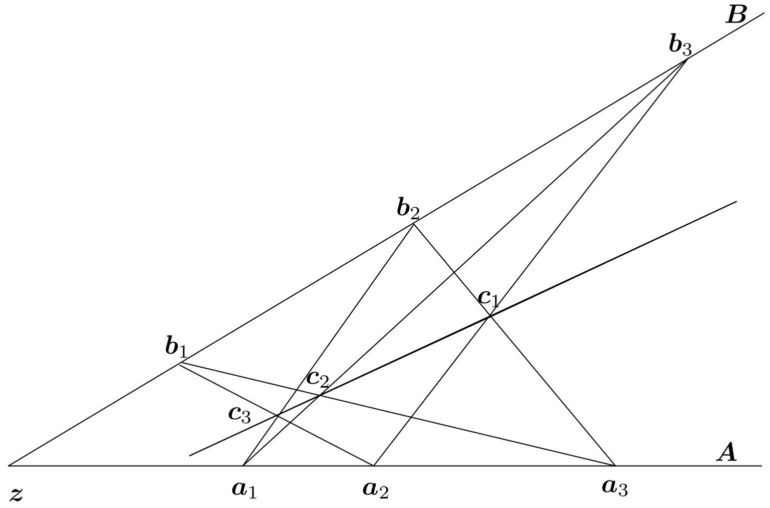

Abbildung 1.6: Satz von Pappos

Übung 10 (Satz von Pappos). Es sei $\boldsymbol{P}_K^2$ eine projektive Ebene über einem Körper K. Mit $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ bezeichnen wir zwei Geraden mit dem Schnittpunkt $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$. Auf jeder Geraden $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ seien je drei verschiedene und von $\boldsymbol{z}$ verschiedene Punkte $\boldsymbol{a}_i \in \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}_i \in \boldsymbol{B}$, $i = 1, 2, 3$, gegeben, vgl. Abb. 1.6. Man beweise, dass dann die Punkte

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c}_1 &= (\boldsymbol{a}_2 \vee \boldsymbol{b}_3) \wedge (\boldsymbol{a}_3 \vee \boldsymbol{b}_2),\\
\boldsymbol{c}_2 &= (\boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{b}_3) \wedge (\boldsymbol{a}_3 \vee \boldsymbol{b}_1),\\
\boldsymbol{c}_3 &= (\boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{b}_2) \wedge (\boldsymbol{a}_2 \vee \boldsymbol{b}_1)
\end{aligned}$$

kollinear sind.

Die *endlichen Geometrien*, die hier in einigen Beispielen vorkommen, werden in den Monographien [9], [10] von A. Beutelspacher systematisch dargestellt. Zu neueren Entwicklungen siehe auch L. M. Batten, A. Beutelspacher [5], K. Metsch [58], und J. W. P. Hirschfeld [43], welch Letzteres ein umfangreiches Literaturverzeichnis enthält. Sie haben zahlreiche Anwendungen zum Beispiel in der Kombinatorik.

1.2 Homogene Koordinaten

Es sei K ein beliebiger Schiefkörper und $K\boldsymbol{P}_o^n$ (bzw. $K\boldsymbol{P}^n$) der zum rechten Vektorraum K^{n+1} der $(n+1)$-Tupel gehörende projektive Punktraum: $K\boldsymbol{P}^n := \boldsymbol{P}(K^{n+1})$. Die Elemente von $K\boldsymbol{P}_o^n$ nennen wir *homogene* $(n+1)$*-Tupel*; sie sind die Orbits der multiplikativen Gruppe K^* von K bei der rechten Wirkung

$$((x^i), \lambda) \in K^{n+1} \times K^* \longmapsto (x^i \lambda) \in K^{n+1}, \tag{1}$$

wobei im Fall $K\boldsymbol{P}^n$ das Nulltupel ausgeschlossen ist. Ähnlich wie der Vektorraum K^m der m-Tupel aus K als Koordinatenraum für m-dimensionale Vektorräume über K dient, soll jetzt der Raum $K\boldsymbol{P}_o^n$ als Koordinatenraum der n-dimensionalen projektivben Räume über K benutzt werden. Die Verwendung der homogenen $(n+1)$-Tupel, also eines überflüssigen Freiheitsgrades, der sich im Auftreten des willkürlichen Faktors λ ausdrückt, gestattet es, mit einem einzigen Koordinatensystem für den ganzen projektiven Raum auszukommen; die Koordinatentransformationen lassen sich analog zur Transformation der Vektorkoordinaten mit Mitteln der Matrizenrechnung beschreiben.

1.2.1 Definition. Simplices.

Wir betrachten nun einen beliebigen $(n+1)$-dimensionalen rechten Vektorraum $\boldsymbol{V}$ über K und den zugehörigen projektiven Raum $\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V})$. Es sei $(\mathfrak{a}_i)$ eine Basis von $\boldsymbol{V}$ und $(\mathfrak{c}_i)$ die Standardbasis von K^{n+1}, $i = 0, \dots, n$. Durch lineare Ausdehnung von $\varphi(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{c}_i$, $i = 0, \dots, n$, wird ein linearer Isomorphismus der Vektorräume definiert, der Vektorkoordinaten in $\boldsymbol{V}$ bestimmt. Bezeichnet π jeweils die kanonische Abbildung, so folgt aus der Linearität von φ unmittelbar, dass

$$\tilde{\varphi}(\pi(\mathfrak{x})) = \pi(\varphi(\mathfrak{x})) \qquad (\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}) \tag{2}$$

die Abbildung $\tilde{\varphi} : \boldsymbol{P}_o^n \to K\boldsymbol{P}_o^n$ unabhängig von der Wahl von $\mathfrak{x} \in \pi^{-1}(\boldsymbol{x})$ definiert; sie heißt *das durch* $(\mathfrak{a}_i)$ *bestimmte homogene Koordinatensystem* des projektiven Raums $\boldsymbol{P}^n$; gilt $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}) = (x^i)K^*$, so heißen die x^i die *homogenen Koordinaten* von $\boldsymbol{x}$ bezüglich $\tilde{\varphi}$; sie sind nur bis auf einen gemeinsamen Faktor $\lambda \in K^*$ eindeutig bestimmt. Die Punkte $\boldsymbol{a}_i := \pi(\mathfrak{a}_i)$ nennt man die *Grundpunkte* und $\boldsymbol{e} := \pi(\sum_{i=0}^n \mathfrak{a}_i)$ den *Einheitspunkt* des homogenen Koordinatensystems. Der j-te Grundpunkt hat die homogenen Koordinaten $(\delta_j^i)K^*$, wobei δ_j^i das *Kroneckersymbol* bezeichnet:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j, \\ 1 & \text{für } i = j, \ i,j = 0, \dots, n, \end{cases}$$

und der Einheitspunkt hat lauter gleiche Koordinaten $(1, \dots, 1)K^*$. Offenbar ist die Folge $(\boldsymbol{a}_0, \dots, \boldsymbol{a}_n; \boldsymbol{e})$ aus Grundpunkten und Einheitspunkt eines homogenen Koordinatensystems in allgemeiner Lage, vgl. Übung 1.6. Daher spannen je $k+1$ Grundpunkte eines Koordinatensystems eine *Koordinaten-k-Ebene* auf:

$$\boldsymbol{H}_{i_0 \dots i_k} = \boldsymbol{a}_{i_0} \vee \dots \vee \boldsymbol{a}_{i_k}.$$

Allgemein nennen wir zwei projektive Unterräume $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ *zueinander komplementär*, wenn $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{o}$ und $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^n$ gelten. Zu jeder Koordinaten-k-Ebene $\boldsymbol{H}_{i_0 \dots i_k}$ gibt es genau eine komplementäre Koordinatenebene, nämlich $\boldsymbol{H}_{j_1 \dots j_l}$, wobei $\{j_1, \dots, j_l\}$ das Komplement von $\{i_0, \dots, i_k\}$ in der Menge $\{0, \dots, n\}$ ist; ihre Dimension ist $n-k-1$.

Übung 1. Es seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{P}^n$ zueinander komplementäre Unterräume. Man zeige: a) Zu jedem Punkt $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{P}^n \setminus (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$ gibt es genau eine Gerade $\boldsymbol{H}$ mit $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{o}$ und $\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{o}$. b) Durch

$$p : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}_o^n \longmapsto (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{A}$$

wird eine surjektive Abbildung $p : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{A}$ definiert; es gilt $p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ genau dann, wenn $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ ist. - c) Die Abbildung p erfüllt $p^2 = p$.

Das folgende Beispiel veranschaulicht die Situation:

Beispiel 1. Simplices. Eine projektiv unabhängige Folge aus $k+1$ Punkten $(\boldsymbol{b}_0, \dots, \boldsymbol{b}_k)$ heißt *k-dimensionales Simplex*, kurz auch *k-Simplex*, die Punkte selbst sind die *Ecken* und die Teilfolgen die *Seiten* des Simplex. Oft werden wir auch den von der Seite aufgespannten projektiven Unterraum als Seite des Simplex bezeichnen. Eindimensionale Seiten werden auch *Kanten* genannt. Zu jeder Ecke $\boldsymbol{b}_j$ eines k-Simplex gehört als *gegenüberliegende Seite* $\boldsymbol{B}_j$ die $(k-1)$-Seite, die $\boldsymbol{b}_j$ nicht enthält. Die Grundpunkte eines homogenen Koordinatensystems des $\boldsymbol{P}^n$ bilden das *Koordinatensimplex*. Bezeichnet $\boldsymbol{B}_j$ die $\boldsymbol{a}_j$ gegenüberliegende Seite, so werden die Punkte der von $\boldsymbol{B}_j$ aufgespannten Hyperebene durch die Gleichung $x^j = 0$ charakterisiert. Die *j-te Projektion* p_j eines Punktes $\boldsymbol{x}$ auf die Seite $\boldsymbol{B}_j$ (vom Punkt $\boldsymbol{a}_j$ aus) wird definiert durch

$$p_j : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n \longmapsto \boldsymbol{x}_j := \boldsymbol{B}_j \wedge (\boldsymbol{a}_j \vee \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{B}_j; \tag{3}$$

dabei gilt $p_j(\boldsymbol{a}_j) = \boldsymbol{o}$. Als Einheitspunkt auf der Seite $\boldsymbol{B}_j$ bezeichnet man die Projektion $\boldsymbol{e}_j := p_j(\boldsymbol{e})$. Die Abb. 1.7 veranschaulicht die Verhältnisse in der Ebene. Betrachtet man nun die Seite $\boldsymbol{B}_0$ als unendlich ferne Gerade, vgl. Beispiel 1.1, so ist ihr Komplement, die affine Ebene $\boldsymbol{A}^2 := \boldsymbol{P}^2 \setminus \boldsymbol{B}_0$, durch $x^0 \neq 0$ charakterisiert, und man kann dort die homogenen Koordinaten so normieren, dass $x^0 = 1$ gilt. Die Koordinaten x^1, x^2 des so normierten Tripels werden dann die kartesischen Koordinaten des Punktes $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}^2$. Sie können als Skalenwerte der Projektionen von $\boldsymbol{x}$ auf die Achsen der wie in Beispiel 1.3 gewählten Skalen bestimmt werden. Der Punkt $\boldsymbol{a}_0$ wird der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems. Man beachte, dass die Projektion von $\boldsymbol{a}_j$ aus auf die Achse $\boldsymbol{B}_j$, $j = 1, 2$, im affinen Bild als Parallelprojektion erscheint; das Viereck $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}_2)$ wird das Einheitsparallelogramm. Entsprechendes gilt auch im n-dimensionalen Fall. □

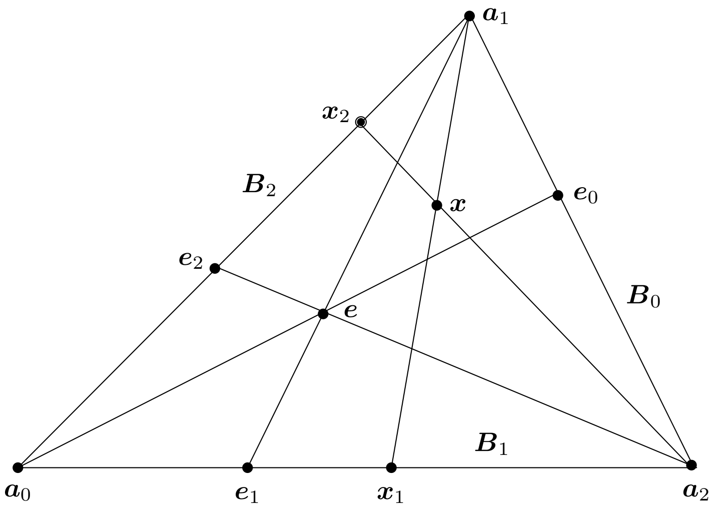

Abbildung 1.7: Koordinatendreieck in $\boldsymbol{P}^2$

Folgender Satz rechtfertigt die Definition der homogenen Koordinaten:

Satz 1. *Die durch* (2) *eindeutig definierte Abbildung* $\tilde{\varphi} : \boldsymbol{P}^n_o \to K\boldsymbol{P}^n_o$ *ist eine Bijektion.*

Ist $(\hat{\mathfrak{a}}_i)$ *irgendeine Basis von* $\boldsymbol{V}$*, welche das homogene Koordinatensystem* $\tilde{\psi}$ *bestimmt, so gilt im Falle* $n \geq 1$ *die Gleichheit* $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$ *dann und nur dann, wenn ein Element* μ *des Zentrums* $Z(K^*)$ *des Schiefkörpers* K *mit* $\hat{\mathfrak{a}}_i = \mathfrak{a}_i\mu$, $i = 0, \ldots, n$, *existiert.*

Beweis. Die Bijektivität von $\tilde{\varphi}$ folgt sofort aus der von φ. Es sei nun $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$. Dann folgt für die Grundpunkte $\tilde{\varphi}^{-1}([\mathfrak{c}_i]) = \tilde{\psi}^{-1}([\mathfrak{c}_i]) = \boldsymbol{a}_i$, also $\hat{\mathfrak{a}}_i = \mathfrak{a}_i\lambda_i$ für gewisse $\lambda_i \in K^*$. Analog haben wir für den Einheitspunkt

$$\boldsymbol{e} = [\mathfrak{a}_0 + \ldots + \mathfrak{a}_n] = [\hat{\mathfrak{a}}_0 + \ldots + \hat{\mathfrak{a}}_n],$$

also

$$\sum_{i=0}^{n} \hat{\mathfrak{a}}_i = \sum_{i=0}^{n} \mathfrak{a}_i\lambda_i = (\sum_{i=0}^{n} \mathfrak{a}_i)\mu.$$

Hieraus folgt $\lambda_i = \mu$ für $i = 0, \ldots, n$. Es bleibt $\mu \in Z(K^*)$ zu zeigen[1]. Für alle $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{P}^n$ gilt: Aus $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_i x^i = \hat{\mathfrak{a}}_i \hat{x}^i = (\mathfrak{a}_i\mu)\hat{x}^i$ folgt

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}) = (x^i)K^* = \tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) = (\hat{x}^i)K^* \text{und } (x^i) = (\mu\hat{x}^i).$$

Daher muß $(\mu\hat{x}^i)K^* = (\hat{x}^i)K^*$ für alle $(\hat{x}^i) \in K^{n+1}$ gelten. Also muß es eine Abbildung $\tau : K^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\} \to K^*$ geben mit der Eigenschaft

$$(\mu x^i) = (x^i)\tau(x^i). \tag{4}$$

Sind $(a^i), (b^i)$ linear unabhängig, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\mu(a^i + b^i)) &= (a^i + b^i)\tau(a^i + b^i) = (a^i)\tau(a^i + b^i) + (b^i)\tau(a^i + b^i), \\ &= (\mu a^i) + (\mu b^i) = (a^i)\tau(a^i) + (b^i)\tau(b^i); \end{aligned}$$

somit erhalten wir für alle $(a^i) \notin [\mathfrak{c}_0]$ wegen $n \geq 1$ die Gleichheit $\tau(a^i) = \tau(\mathfrak{c}_0)$. Wegen $n \geq 1$ gilt für $(a^i) \in [\mathfrak{c}_0]$, also $(a^i) = \mathfrak{c}_0 s$, $s \neq 0$, aus demselben Grund $\tau(\mathfrak{c}_0 s) = \tau(\mathfrak{c}_1) = \tau(\mathfrak{c}_0)$. Daher gilt $\tau(x^i) = \tau \in K^*$ ist konstant, und aus (4) folgt für $(x^i) = \mathfrak{c}_0 t$, $t \in K^*$, sofort: 1.) $\mu = \tau$ – man setze $t = 1$, und 2.) $\mu t = t\mu$ für alle $t \in K^*$. Das heißt aber gerade $\mu \in Z(K^*)$. Die Umkehrung ist trivial. □

Bemerkung: Im Falle eines eindimensionalen Vektorraums ($n = 0$) sind Abbildungen der Gestalt

$$\tau(x^0) = (x^0)^{-1}\mu x^0$$

im allgemeinen nicht konstante Lösungen von (4).

Satz 2. *Die Folge* $(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n; \boldsymbol{e})$ *aus Grundpunkten und Einheitspunkt eines homogenen Koordinatensystems ist in allgemeiner Lage. Umgekehrt gibt es zu jeder Folge* $(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n; \boldsymbol{e})$ *aus* $n+2$ *Punkten in allgemeiner Lage ein homogenes Koordinatensystem* $\tilde{\varphi}$ *derart, dass* $\boldsymbol{a}_i$ *i-ter Grundpunkt und* $\boldsymbol{e}$ *Einheitspunkt des Koordinatensystems ist. Zwei Koordinatensysteme* $(x^i)K^*$, $(\hat{x}^i)K^*$ *mit derselben Folge* $(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n; \boldsymbol{e})$ *von Grundpunkten und Einheitspunkt unterscheiden sich durch eine Links-Dehnung:* $(x^i)K^* = (\mu\hat{x}^i)K^*$*; für* $\mu \in Z(K^*)$ *oder im Falle eines Körpers stimmen sie also überein.*

[1] Der Einfachheit halber verwenden wir von nun an die *Summenkonvention der Tensorrechnung*: Über gleichzeitig oben und unten in einem Ausdruck vorkommende Indizes ist über den gesamten Definitionsbereich (hier also von 0 bis n) zu summieren. Die Aufhebung der Summenkonvention in einer Formel wird durch $\not\Sigma$ bezeichnet.

B e w e i s. Aus der Definition von Grund- und Einheitspunkten eines homogenen Koordinatensystems folgt unmittelbar, dass je $n+1$ diese Punkte repräsentierende Vektoren linear unabhängig sind. Nach Übung 1.1.6 sind diese Punkte daher in allgemeiner Lage. Sei umgekehrt $(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n; \boldsymbol{e})$ eine Punktfolge in allgemeiner Lage. Dann sind irgendwelche die $\boldsymbol{a}_i$ repräsentierende Vektoren $\mathfrak{a}_i$ linear unabhängig. Wir wählen eine repräsentierende Folge $(\mathfrak{a}_i, i = 0, \ldots, n)$, $\boldsymbol{a}_i = [\mathfrak{a}_i]$, die somit eine Basis von $\boldsymbol{V}$ ist. Es sei $\mathfrak{e}$ ein Vektor mit $\boldsymbol{e} = [\mathfrak{e}]$ und der Basisdarstellung

$$\mathfrak{e} = \sum_{i=0}^{n} \mathfrak{a}_i \eta_i.$$

Weil die Folge $(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n; \boldsymbol{e})$ in allgemeiner Lage ist, muß $\eta_i \neq 0$ für alle i gelten. Daher ist mit $\mathfrak{b}_i := \mathfrak{a}_i \eta_i$ auch $(\mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_n; \mathfrak{e})$ eine die gegebene Punktfolge repräsentierende Vektorfolge. Aus der Definition der $\mathfrak{b}_i$ folgt, dass sie eine Basis sind, und dass $\boldsymbol{e}$ der Einheitspunkt des entsprechenden homogenen Koordinatensystems ist. Eine beliebige Basis mit den Grundpunkten $\boldsymbol{a}_i$ hat notwendig die Form $(\hat{\mathfrak{b}}_i)$ mit $\hat{\mathfrak{b}}_i = \mathfrak{b}_i \lambda_i$; soll $\boldsymbol{e}$ auch der Einheitspunkt zu dieser Basis sein, so muß $\boldsymbol{e} = [\sum \mathfrak{b}_i] = [\sum \hat{\mathfrak{b}}_i] = [\sum \mathfrak{b}_i \lambda_i]$ gelten. Also ist $\lambda_i = \mu \in K^*$ für $i = 0, \ldots, n$. Für die entsprechenden Koordinaten folgt hieraus $\mu \hat{x}^i = x^i$. Die letzte Behauptung ergibt sich aus Satz 1. □

Die in Satz 2 festgestellte enge Beziehung zwischen den Folgen von $n+2$ Punkten in allgemeiner Lage und den homogenen Koordinatensystemen legen es nahe, eine derartige Folge $(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n; \boldsymbol{e})$ ein *projektives Repère* zu nennen. Zu jedem homogenen Koordinatensystem gehört also ein eindeutig bestimmtes projektives Repère. Offenbar gilt

Folgerung 3. *Ist K ein Körper, so gibt es zu jedem projektiven Repère genau ein zugehöriges homogenes Koordinatensystem (und umgekehrt).* □

Für einen Schiefkörper ist diese Beziehung im allgemeinen nicht bijektiv; das zeigt schon das Beispiel der projektiven Geraden. Offenbar bestimmen die Basen $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1)$, $(\mathfrak{a}_0\mu, \mathfrak{a}_1\mu)$ dasselbe projektive Repère, während die entsprechenden homogenen Koordinaten durch einen *inneren Automorphismus* verknüpft sind: Aus $\mathfrak{x} = \hat{\mathfrak{a}}_i \hat{x}^i = \mathfrak{a}_i \mu \hat{x}^i = \mathfrak{a}_i x^i$ folgt

$$(x^i)K^* = (\mu \hat{x}^i)K^* = (\sigma_\mu(\hat{x}^i))K^*,$$

wobei $\sigma_\mu : t \in K \mapsto \mu t \mu^{-1} \in K$ den zu $\mu \in K^*$ gehörenden inneren Automorphismus von K bezeichnet. Für spätere Anwendungen heben wir noch hervor:

Folgerung 4. *Es sei $\boldsymbol{P}^1$ eine projektive Gerade. Dann gehört zu jeder projektiven Skala von $\boldsymbol{P}^1$ ein eindeutig bestimmtes projektives Repère $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{e})$,* vgl. Beispiel 1.3. *Die Menge $\{\xi(\boldsymbol{x})\}$ der Skalenwerte von $\boldsymbol{x}$, wobei ξ alle projektiven Skalen mit demselben projektiven Repère $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{e})$ durchläuft, ist eine Konjugiertheitsklasse in K.* □

Zum Beweis beachte man, dass die projektive Skala nach ihrer Definition (1.1.4) das Verhältnis der beiden homogenen Koordinaten ist.

1.2.2 Koordinatentransformationen. Projektiv-lineare Gruppe.

Wir wollen uns nun den Transformationen der homogenen Koordinaten zuwenden.

Es bezeichne $\boldsymbol{GL}(n+1, K)$ die lineare Gruppe der Ordnung $n+1$ über dem Schiefkörper K, vgl. § II.7.4. Bekanntlich wirkt diese Gruppe als Matrizengruppe von links über dem rechten Vektorraum K^{n+1}:

$$((a_i^j), (x^i)) \in \boldsymbol{GL}(n+1, K) \times K^{n+1} \longmapsto (a_i^j)(x^i) \in K^{n+1},\ i, j = 0, \ldots, n.$$

Sind die homogenen Koordinatensysteme $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ durch die Basen $(\mathfrak{a}_i)$ bzw. $(\hat{\mathfrak{a}}_j)$ bestimmt, so gilt für die entsprechenden Koordinaten (x^i) bzw. $(\hat{x}^j)$ eines Punktes $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n$ die Bedingung

$$\boldsymbol{x} = [\mathfrak{a}_i x^i] = [\hat{\mathfrak{a}}_j \hat{x}^j] = [\hat{\mathfrak{a}}_j a_i^j x^i],$$

wobei (a_i^j) die Matrix der Transformation der Vektorkoordinaten bezeichnet. Daher ist

$$\tilde{\psi}(\boldsymbol{x}) = (\hat{x}^j)K^* = (a_i^j)(x^i)K^* = (a_i^j)\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}). \tag{5}$$

Wir haben dieselbe Situation wie bei der Transformation der Vektorkoordinaten: Die Gruppe $\boldsymbol{GL}(n+1, K)$ wirkt von links über der Menge $\tilde{\Phi}$ der homogenen Koordinatensysteme, vgl. § I.5.7. Es gilt

Lemma 5. *Die beschriebene Wirkung von $\boldsymbol{GL}(n+1, K)$ über $\tilde{\Phi}$ ist transitiv. Eine Matrix $(a_i^j) \in \boldsymbol{GL}(n+1, K)$ bewirkt genau dann die identische Abbildung von $\tilde{\Phi}$, wenn*

$$(a_i^j) = (\delta_i^j)\mu,\ \mu \in Z(K^*), \tag{6}$$

gilt; hierbei bezeichnet $Z(K^*)$ das Zentrum von K^*.

Beweis. Die Transitivität ergibt sich sofort aus der Transitivität der Wirkung von $\boldsymbol{GL}(n+1, K)$ über der Menge aller Basen. Nach Satz 1 gilt $(a_i^j)\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}$ genau dann, wenn ein $\mu \in Z(K^*)$ existiert mit der Eigenschaft (6). Offenbar gilt das für alle $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}$, wenn es für irgendeins gilt.□

Definition 1. Die Faktorgruppe

$$\boldsymbol{PGL}(n+1, K) := \boldsymbol{GL}(n+1, K)/Z(n+1),$$

wobei K einen Schiefkörper und $Z(n+1)$ die Untergruppe

$$Z(n+1) := \{(\delta_i^j)\mu | \mu \in Z(K^*), i, j = 0, \ldots, n\} \tag{7}$$

bezeichnen, heißt die *projektiv-lineare Gruppe der Ordnung* $n+1$ über K. Man beachte hierzu die folgende Übung.

Übung 2. Nach Lemma 5 ist $Z(n+1)$ der Nichteffektivitätskern (vgl. Definition I.1.4.2) der betrachteten Wirkung und daher ein Normalteiler. Die über die Repräsentanten definierte Wirkung von $\boldsymbol{PGL}(n+1)$ über $\tilde{\Phi}$ ist einfach transitiv, vgl. § I.1.4. Man beweise, dass $Z(n+1)$ das Zentrum der Gruppe $\boldsymbol{GL}(n+1, K)$ ist (vgl. Beispiel I.1.4.7).

1.2.3 Inhomogene projektive Koordinaten

Wir wollen nun die zu einem homogenen Koordinatensystem

$$\tilde{\varphi}(x) = (x^i(\boldsymbol{x}))K^*$$

gehörenden inhomogenen Koordinaten und deren Transformationen betrachten. Unter der i-ten *Koordinatenhyperebene* $\boldsymbol{B}_i$ verstehen wir die zum Grundpunkt $\boldsymbol{a}_i$ komplementäre Koordinatenhyperebene. Es sei $U_i = \boldsymbol{P}^n \setminus \boldsymbol{B}_i$ ihr Komplement in $\boldsymbol{P}^n$, vgl. Beispiel 1:

$$U_i = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n |\, x^i(\boldsymbol{x}) \neq 0\}.$$

Offenbar ist auf $\boldsymbol{U}_i$ die i-te *Karte* φ_i korrekt definiert:

$$\boldsymbol{x} \in U_i \mapsto \varphi_i(\boldsymbol{x}) := (x^j(\boldsymbol{x})(x^i(\boldsymbol{x}))^{-1} | j \neq i, j = 0, \ldots, n) \in K^n. \tag{8}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\xi_i^j(\boldsymbol{x}) := x^j(\boldsymbol{x})(x^i(\boldsymbol{x}))^{-1} \text{ für } \boldsymbol{x} \in U_i$$

und beweisen

Lemma 6. *a) Zu jedem homogenen Koordinatensystem $\tilde{\varphi}$ des projektiven Raumes $\boldsymbol{P}^n$ gehören $n+1$ durch (8) definierte Karten $\varphi_i : U_i \to K^n$, die bijektive Abbildungen sind.*
b) Es gilt $\bigcup_{i=0}^n U_i = \boldsymbol{P}^n$.
c) Wie oben bezeichne $\tilde{\psi}$ das zu der Basis $(\hat{\boldsymbol{a}}_i)$ gehörende homogene Koordinatensystem und (a_i^j) die Matrix der Koordinatentransformation. Mit $\psi_i = (\hat{\xi}_i^j)$ bezeichnen wir die zu $\tilde{\psi}$ gehörenden Karten $\psi_i : V_i \to K^n$. Dann sind die auf den Durchschnitten der Koordinatenumgebungen $U_a \cap V_b$ definierten Koordinatentransformationen

$$\psi_b \circ \varphi_a^{-1} : \varphi_a(U_a \cap V_b) \longrightarrow \psi_b(U_a \cap V_b)$$

gebrochen linear; es gilt

$$\hat{\xi}_b^k(\boldsymbol{x}) = a_j^k \xi_a^j(\boldsymbol{x})(a_i^b \xi_a^i(\boldsymbol{x}))^{-1}. \tag{9}$$

B e w e i s. Man beachte, dass in dieser Formel nach der Summenkonvention im Zähler über j und im Nenner über i zu summieren ist, und dass $\xi_i^i = 1$, $\not\Sigma$, gilt. Ist $(y^1, \ldots, y^n) \in K^n$ beliebig, so ist der Punkt $\boldsymbol{x}$ mit den homogenen Koordinaten

$$x^0(\boldsymbol{x}) = y^1,\, x^1(\boldsymbol{x}) = y^2,\, \ldots, x^{i-1}(\boldsymbol{x}) = y^i,$$
$$x^i(\boldsymbol{x}) = 1,\, x^{i+1}(\boldsymbol{x}) = y^{i+1},\, \ldots,\, x^n(\boldsymbol{x}) = y^n$$

der einzige Punkt in U_i, der auf $(y^1, \ldots, y^n)$ abgebildet wird; somit gilt a). Da für jeden Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n$ wenigstens eine homogene Koordinate nicht null ist, gilt b). Die letzte Behauptung c) folgt unmittelbar aus dem Transformationsgesetz (5) und der Definition der inhomogenen Koordinaten. □

Beispiel 2. **Projektive Gerade.** Im Fall $n = 1$ gibt es zwei inhomogene Koordinaten, die im wesentlichen mit den entsprechenden projektiven Skalen übereinstimmen. Zum Beispiel ist mit $\xi := \xi_0^1$ der Wert $\xi(\boldsymbol{a}_1)$ noch nicht definiert. Setzt man, was nahe liegt,

$\xi(\boldsymbol{a}_1) := \infty$, so erhält man die in Beispiel 1.3 definierte projektive Skala. Die Formel (9) beschreibt in diesem Fall die durch einen Wechsel der Basen in $\boldsymbol{V}^2$ bedingte Transformation $\theta_A : \hat{K} \to \hat{K}$ der projektiven Skalen auf $\boldsymbol{P}^1$:

$$\theta_A : \xi \mapsto \hat{\xi} := (a\xi + b)(c\xi + d)^{-1} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \boldsymbol{GL}(2, K). \tag{10}$$

Hierbei ist zu setzen:

$$\theta_A(-c^{-1}d) = \infty, \ \theta_A(\infty) = \begin{cases} ac^{-1}, & \text{falls } c \neq 0, \\ \infty, & \text{falls } c = 0. \end{cases} \tag{11}$$

□

Übung 3. Mit den Bezeichnungen von Lemma 6 seien $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ homogene Koordinatensysteme auf $\boldsymbol{P}^n$, welche die zusätzliche Bedingung $U_0 = V_0$ erfüllen. Man zeige, dass die Koordinatentransformation $\psi_0 \circ \varphi_0^{-1}$ eine affine Transformation von K^n ist, vgl. I, (5.7.36).

Übung 4. Man beweise, dass die durch (10), (11) definierte Abbildung von $\hat{K}$ in sich eine Bijektion ist und $(\theta_A)^{-1} = \theta_{A^{-1}}$ gilt. (Man beachte, dass im allgemeinen K ein Schiefkörper ist und Determinanten daher nicht verwendbar sind.) Es bezeichne $\mathcal{S}(\hat{K})$ die Gruppe aller bijektiven Abbildungen von $\hat{K}$. Man beweise, dass die Abbildung

$$F : \ A \in \boldsymbol{GL}(2, K) \mapsto \theta_A \in \mathcal{S}(\hat{K})$$

ein Homomorphismus ist, dessen Bild zu $\boldsymbol{PGL}(2, K)$ isomorph ist. Für $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ zeige man, dass jedes θ_A ein Homöomorphismus in der im Beispiel 1.3 beschriebenen Topologie von $\hat{K}$ ist.

Übung 5. Man sagt, dass in einer projektiven Ebene $\boldsymbol{P}^2$ die *Pappos-Eigenschaft* erfüllt ist, wenn in ihr der Satz von Pappos gilt, vgl. Übung 1.10; die Punkte $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$ einer Konfiguration der Abbildung 1.6 müssen also stets kollinear sein. Man zeige, dass in $\boldsymbol{P}^2$ genau dann die Pappos-Eigenschaft erfüllt ist, wenn der zugrundeliegende Schiefkörper kommutativ, also ein Körper ist. – Hinweis. Man wähle homogene Koordinaten so, dass $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_3; \boldsymbol{c}_2)$ Grundpunkte bzw. Einheitspunkt des Koordinatensystems sind, und drücke die Bedingung in diesen Koordinaten aus.

1.2.4 Die projektiv-lineare Gruppe über einem Körper

Beispiel 3. Es sei K ein Körper. Dann gilt $Z(K^*) = K^* \cong Z(n+1)$. Wir betrachten den aus Definition 1 resultierenden kanonischen Homomorphismus

$$p : (a^i_j) \in \boldsymbol{GL}(n+1, K) \longmapsto (a^i_j)K^* \in \boldsymbol{PGL}(n+1, K).$$

Die Nebenklassen der Faktorgruppe $\boldsymbol{PGL}(n+1, K) = \boldsymbol{GL}(n+1, K)/Z(n+1)$ sind dann gerade die sich nur durch einen Faktor $\mu \in K^*$ unterscheidenden Matrizen aus $\boldsymbol{GL}(n+1, K)$. Wählen wir nun in dem projektiven Raum $\boldsymbol{P}^n$ über K ein „festes" projektives Repère R und betrachten weiter ein variables „bewegliches" projektives Repère $\hat{R}$; es seien (x^i) die zu R und $(\hat{x^i})$ die zu $\hat{R}$ gehörenden homogenen Koordinaten, die durch die Basen $(\mathfrak{a}_i)$ bzw. $(\hat{\mathfrak{a}}_i)$ von $\boldsymbol{V}$ bestimmt sein mögen. Weil die Basen durch die homogenen Koordinaten nach Satz 1 ebenfalls nur bis auf einen gemeinsamen Faktor $\mu \in K^*$

eindeutig bestimmt sind, entsprechen die Nebenklassen von $\boldsymbol{GL}(n+1,K)$ nach $Z(n+1)$, also die Elemente von $\boldsymbol{PGL}(n+1,K)$, bijektiv den projektiven Repères. Die Menge dieser Repères ist also eine geometrische Realisierung der Gruppe $\boldsymbol{PGL}(n+1,K)$, ebenso wie die Menge der linearen Repères, der *n-Beine* $(\hat{\mathfrak{a}}_i)$, eine geometrische Realisierung der Gruppe $\boldsymbol{GL}(n+1,K)$ darstellt.

Wir stellen uns nun die Frage, ob man in den Nebenklassen von $\boldsymbol{GL}(n+1,K)$ nach $Z(n+1)$ in natürlicher Weise besondere Vertreter auszeichnen kann. Dazu betrachten wir die Determinante als Funktion von μ. Bekanntlich gilt $\det(A\mu) = \det(A)\mu^{n+1}$; die naheliegende Bedingung an einen ausgezeichneten Vertreter

$$\det(A\mu) = 1 \text{ für } A = (a_i^j) \in \boldsymbol{GL}(n+1,K) \text{ und } \mu \in K^* \tag{12}$$

läuft also auf die Frage nach der Lösbarkeit von

$$\mu^{n+1} = (\det(A))^{-1}$$

hinaus, und diese hängt außer von n wesentlich von den algebraischen Eigenschaften des Körpers K ab.

Es sei nun $K = \mathbf{R}$. Ist n gerade, so hat die Gleichung (12) bei gegebenem A genau eine reelle Lösung μ; es gibt also in jeder Nebenklasse genau einen Vertreter mit der Determinante eins, und wir erhalten den Isomorphismus

$$\boldsymbol{PGL}(n+1,\mathbf{R}) \cong \boldsymbol{SL}(n+1,\mathbf{R}) \ (n \text{ gerade}); \tag{13}$$

die projektiv-lineare Gruppe ist also in diesem Fall zur *speziellen linearen Gruppe*

$$\boldsymbol{SL}(n+1,\mathbf{R}) := \{A \in \boldsymbol{GL}(n+1,\mathbf{R}) \mid \det(A) = 1\} \tag{14}$$

isomorph. Anders im Falle ungerader Dimension: In diesem Fall ist das Vorzeichen $\operatorname{sign}(\det(A))$ auf jeder Nebenklasse konstant, und wir können eine *Orientierung* definieren: Zwei projektive Repères bzw. die ihnen entsprechenden homogenen Koordinatensysteme heißen *gleich orientiert*, wenn die sie ineinander überführende Koordinatentransformation A eine positive Determinante hat, also $\operatorname{sign}(\det(A)) = 1$ gilt. Offenbar gibt es zwei Klassen gleich orientierter homogener Koordinatensysteme (vgl. die folgende Übung); man nennt einen reellen projektiven Raum ungerader Dimension *orientiert*, wenn eine dieser Klassen ausgezeichnet ist. Diese im Rahmen der linearen Algebra eingeführte Orientierung entspricht ganz dem topologischen Orientierungsbegriff. Man kann zeigen, dass die reellen projektiven Räume, als differenzierbare Mannigfaltigkeiten betrachtet, genau dann orientierbar sind, wenn sie ungerade Dimension haben. □

Übung 6. a) Man zeige, dass die im vorigen Beispiel definierte Relation „gleich orientiert" eine Äquivalenzrelation ist, und dass es für ungerades n genau zwei Äquivalenzklassen gibt. – b) Mit der Definition

$$|\boldsymbol{SL}|(N,\mathbf{R}) := \{A \in \boldsymbol{GL}(N,\mathbf{R}) \mid \quad |\det(A)| = 1\} \tag{15}$$

beweise man die Isomorphie

$$\boldsymbol{PGL}(n+1,\mathbf{R}) \cong |\boldsymbol{SL}|(n+1,\mathbf{R})/\{\pm E\} \qquad (n \text{ ungerade}), \tag{16}$$

wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet.

1.3 Kollineationen

Kollineationen sind die Isomorphismen der projektiven Geometrie; sie werden mitunter so definiert, vgl. Übung 5. Wir beginnen jedoch mit einer viel schwächeren Definition: die kollinearen Abbildungen bilden projektive Punkträume so aufeinander ab, dass sie mit der Operation der Verbindung von Punkten vertauschbar sind. Sind sie bijektiv, so werden sie Kollineationen genannt, das sind bijektive Abbildungen, die Geraden wieder in Geraden überführen. Aus dieser Eigenschaft folgt, dass Kollineationen auch projektive k-Ebenen wieder auf projektive k-Ebenen abbilden. Da die projektiven k-Ebenen über die kanonische Abbildung π in den Verband der Teilmengen der projektiven Punkträume $\boldsymbol{P}_o^n$ eingebettet sind, erzeugt jede Kollineation einen Isomorphismus der projektive Geometrien genannten Verbände, und umgekehrt. Wesentliches Ergebnis ist der Hauptsatz der projektiven Geometrie, durch den die Kollineationen für die Dimensionen $n \geq 2$ algebraisch beschrieben werden. Aus ihm folgt, dass die geometrische Isomorphie die algebraische impliziert: Aus der Existenz einer Kollineation $f : \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}) \mapsto \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{W})$, wobei $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ endlich dimensionale Vektorräume einer Dimension größer als zwei sind, folgt schon, dass die Skalarbereiche der Vektorräume isomorph und ihre Dimensionen gleich sind. Man beachte, dass die Isomorphie der Skalarbereiche der zu Grunde liegenden Vektorräume nicht eine Voraussetzung, sondern ein Resultat des Hauptsatzes ist. Aus ihm ergibt sich im dritten Teilabschnitt eine vollständige Beschreibung der Gruppen der Autokollineationen der projektiven Punkträume $\boldsymbol{P}_o^n$ und damit auch der Automorphismengruppe der projektiven Geometrien $\mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$, $2 < \dim \boldsymbol{V} < \infty$.

1.3.1 Kollineare Abbildungen.

In diesem Abschnitt betrachten wir Abbildungen $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$, welche die geometrische Operation der Verbindung erhalten, also $f(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) = f(\boldsymbol{A}) \vee f(\boldsymbol{B})$ für alle projektiven Unterräume $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{P}_o^n$ erfüllen. Dabei genügt es, diese Eigenschaft für die Verbindung von Punkten zu fordern (vgl. Folgerung 5). Wir definieren:

Definition 1. Es seien $\boldsymbol{P}_o^n, \boldsymbol{Q}_o^m$ projektive Räume über den (eventuell verschiedenen) Schiefkörpern K_1 bzw. K_2. Eine Abbildung $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$ heißt *kollinear*, wenn sie folgende zwei Bedingungen erfüllt:

$$f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}, \tag{1}$$

$$f(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) \vee f(\boldsymbol{y}) \text{ für alle } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}_o^n. \tag{2}$$

Eine bijektive kollineare Abbildung wird *Kollineation* genannt. □

Eine bijektive Abbildung $f : \boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{Q}^m$, welche Geraden wieder in Geraden überführt, kann stets durch die Setzung $f(\boldsymbol{o}) := \boldsymbol{o}$ als Kollineation betrachtet werden. Umgekehrt führt natürlich jede Kollineation wegen (2) Geraden wieder in Geraden über. Ist die Dimension des Bildes $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}_o^n) < 2$, so ist die Definition offenbar nicht sehr inhaltsreich; zum Beispiel ist jede bijektive Abbildung zwischen projektiven Geraden, welche (1) erfüllt, eine Kollineation. Aus diesem Grund wird der eindimensionale Fall im nächsen Abschnitt gesondert betrachtet.

Die kollinearen Abbildungen mit $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}_o^n) \geq 2$ lassen sich als Verknüpfung einer Kollineation mit einer (verallgemeinerten) Zentralprojektion darstellen, die wir im folgenden Beispiel einführen.

Beispiel 1. Allgemeine Zentralprojektionen. Es sei $\boldsymbol{Q}_o^m \subset \boldsymbol{P}_o^n$, $0 \leq m < n$, ein projektiver Unterraum und $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{P}_o^n$ ein dazu komplementärer Unterraum. Unter der *Zentralprojektion* p von $\boldsymbol{P}_o^n$ auf $\boldsymbol{Q}_o^m$ mit dem *Zentrum* $\boldsymbol{B}$ verstehen wir die Abbildung

$$p(\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{Q}_o^m, \qquad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}_o^n. \tag{3}$$

Aus dem Dimensionssatz 1.1 folgen im Fall $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{B}$ sofort

$$\operatorname{Dim}(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{B}) = \operatorname{Dim} \boldsymbol{x} + \operatorname{Dim} \boldsymbol{B} + 1 = \operatorname{Dim} \boldsymbol{B} + 1 = n - m$$

und $\operatorname{Dim}((\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{Q}_o^m) = 0$, so dass durch (3) wirklich ein Punkt von $\boldsymbol{Q}_o^m$ eindeutig definiert ist. Offenbar gilt

$$p^{-1}(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{B}. \tag{4}$$

Es seien $\boldsymbol{W} := \pi^{-1}(\boldsymbol{Q}_o^m)$ und $\boldsymbol{U} := \pi^{-1}(\boldsymbol{B})$ die entsprechenden Vektorunterräume. Weil $\boldsymbol{Q}_o^m$ und $\boldsymbol{B}$ zueinander komplementär sind, gelten

$$\boldsymbol{V}^{n+1} = \boldsymbol{W} \oplus \boldsymbol{U},\ \dim \boldsymbol{W} = m + 1,\ \dim \boldsymbol{U} = n - m. \tag{5}$$

Bezeichnet $pr : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ die durch die Zerlegung (5) bestimmte Projektion der Vektoren, so gilt für alle $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}$

$$p([\mathfrak{x}]) = [pr(\mathfrak{x})], \tag{6}$$

wie man unmittelbar nachprüft. Hieraus, oder auch unmittelbar aus der Definition (3), beweist man leicht, dass p eine kollineare Abbildung ist, die $p \circ p = p$ erfüllt. Ist das Zentrum $\boldsymbol{B}$ ein Punkt, so ergibt sich die in Beispiel 1.2 betrachtete Zentralprojektion. Ist $\boldsymbol{Q}_o^m$ eine Koordinaten-m-Ebene, etwa $\boldsymbol{Q}_o^m = \boldsymbol{a}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_m$, und $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_{m+1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_n$ die dazu komplementäre Koordinaten-$(n - m - 1)$-Ebene, so ist die in (6) auftretende Projektion pr gerade die entsprechende Vektorkoordinatenprojektion:

$$pr : \mathfrak{x} = \mathfrak{a}_i x^i \in \boldsymbol{V}^{n+1} \mapsto pr(\mathfrak{x}) = \mathfrak{a}_\alpha x^\alpha \in \boldsymbol{W}^{m+1};$$

hierbei bezeichnet $\boldsymbol{W}^{m+1}$ den von den $m + 1$ Basisvektoren $\mathfrak{a}_\alpha$, $\alpha = 0, \ldots, m$, aufgespannten Vektorraum, es gilt $i = 0, \ldots, n$, und die Summenkonvention ist anzuwenden. Die Einschränkungen der Koordinatenfunktionen $(x^\alpha(x))$, $\alpha = 0, \ldots, m$, auf die Koordinaten-m-Ebene $\boldsymbol{Q}^m$ sind dann ein homogenes Koordinatensystem für diesen projektiven Unterraum, dessen Grundpunkte die $\boldsymbol{a}_\alpha$ sind und dessen Einheitspunkt $\boldsymbol{e}_Q$ die Projektion des Einheitspunktes $\boldsymbol{e}$ des betrachteten Koordinatensystems in $\boldsymbol{P}_o^n$ ist:

$$\boldsymbol{e}_Q = p(\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e} \vee \boldsymbol{a}_{m+1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_n) \wedge (\boldsymbol{a}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_m) = [\mathfrak{a}_0 + \ldots + \mathfrak{a}_m]. \tag{7}$$

□

Definition 2. Es seien wieder die Voraussetzungen von Definition 1 gegeben. Wir bezeichnen mit $\boldsymbol{V}$ bzw. $\boldsymbol{W}$ die zu den projektiven Räumen $\boldsymbol{P}_o^n$ bzw. $\boldsymbol{Q}_o^m$ gehörenden Vektorräume. Ferner seien $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ und $\sigma : K_1^* \to K_2^*$ Abbildungen, für die $a(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$ und

$$a(\mathfrak{x}\alpha) = a(\mathfrak{x})\sigma(\alpha) \qquad (\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V},\ \alpha \in K_1^*) \tag{8}$$

gelten. Dann wird durch

$$\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{P}_o^n \longmapsto f(\boldsymbol{x}) := [a(\mathfrak{x})] \in \boldsymbol{Q}_o^m \tag{9}$$

eine Abbildung $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$ korrekt definiert; sie heißt die durch a *erzeugte* (oder *induzierte*) *Abbildung*. Wenn für eine von der Nullabbildung verschiedene Abbildung a eine Abbildung σ mit der Eigenschaft (8) existiert, so ist sie offenbar eindeutig bestimmt. □

Beispiel 2. Semilinear induzierte Abbildungen. Die in Definition 2 betrachtete Abbildung $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ heißt *semilinear*, wenn $\sigma : K_1 \to K_2$ ein Isomorphismus der Schiefkörper ist und

$$a(\mathfrak{x}\alpha + \mathfrak{y}\beta) = a(\mathfrak{x})\sigma(\alpha) + a(\mathfrak{y})\sigma(\beta) \qquad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V},\ \alpha, \beta \in K_1)$$

gilt. Semilineare Abbildungen mit dem Isomorphismus σ werden oft der Kürze halber σ-lineare Abbildungen genannt. Offensichtlich erfüllen die semilinearen Abbildungen die Bedingung (8); die entsprechenden Abbildungen f der projektiven Räume heißen *semilinear induziert*. Die linearen Abbildungen sind natürlich semilinear; für sie gilt $K_1 = K_2 = K$ und $\sigma = \mathrm{id}_K$. Ein anderer wichtiger Spezialfall sind die *konjugiert-linearen* Abbildungen; für sie ist $K = \mathbf{C}$ und σ die *Konjugation* $\sigma(\alpha) = \bar{\alpha}$ in $\mathbf{C}$. Ist $K_1 = K_2 = K$ ein Schiefkörper und $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}$ ein rechter Vektorraum über K, so ist für jedes $\mu \in K^*$ die *Dehnung*

$$d_\mu := \mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} \mapsto \mathfrak{x}\mu \in \boldsymbol{V}$$

semilinear mit dem *inneren Automorphismus* $\sigma = \sigma_{\mu^{-1}}$; die inneren Automorphismen σ_ν eines Schiefkörpers K sind für jedes $\nu \neq 0$ bekanntlich definiert durch

$$\sigma_\nu : \alpha \in K \mapsto \sigma_\nu(\alpha) := \nu\alpha\nu^{-1} \in K, \tag{10}$$

wobei σ_ν für alle nicht zum Zentrum gehörenden $\nu \in K^* \setminus Z(K)$ vom identischen Automorphismus verschieden ist. Die allgemeinen Eigenschaften der semilinearen Abbildungen gleichen denen der linearen und lassen sich durch Zurückführung auf diese beweisen. Es sei $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ σ-linear. Im Vektorraum $\boldsymbol{W}$ ersetzen wir den Schiefkörper K_2 mit Hilfe von σ durch den Schiefkörper K_1; dabei entsteht ein neuer Vektorarum $\tilde{\boldsymbol{W}}$, der als abelsche Gruppe mit $\boldsymbol{W}$ übereinstimmt: $[\tilde{\boldsymbol{W}}, +] = [\boldsymbol{W}, +]$, und für den die Multiplikation mit Elementen $\alpha \in K_1$ durch

$$\mathfrak{x}\alpha := \mathfrak{x}\sigma(\alpha) \qquad (\mathfrak{x} \in \boldsymbol{W}, \alpha \in K_1)$$

definiert ist. Ein derartiges Verfahren nennt man *Ersetzung der Skalare*; es ist allgemeiner in Beispiel II.7.1.4 definiert. Man erkennt unmittelbar, dass die Unterräume von $\tilde{\boldsymbol{W}}$ mit denen von $\boldsymbol{W}$ übereinstimmen, und dass die Dimension der Unterräume sich bei dieser Ersetzung der Skalare nicht ändert. Weiter folgt aus

$$a(\mathfrak{x}\alpha) = a(\mathfrak{x})\sigma(\alpha) = a(\mathfrak{x})\alpha \qquad (\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}, \alpha \in K_1),$$

dass a, betrachtet als Abbildung von $\boldsymbol{V}$ in $\tilde{\boldsymbol{W}}$, nunmehr linear ist. Daher sind Bilder und Urbilder von Unterräumen bei a wieder Unterräume; speziell sind der Kern von a, $\operatorname{Ker} a := a^{-1}(\mathfrak{o}) \subset \boldsymbol{V}$, und das Bild von a, $\operatorname{Im} a := a(\boldsymbol{V}) \subset \boldsymbol{W}$ wohldefinierte Unterräume. Wie für lineare Abbildungen definieren wir den *Rang von* a durch $\operatorname{rg} a := \dim_{K_2} \operatorname{Im} a$. Ebenso wie bei den linearen Abbildungen gilt dann für endlich dimensionale Vektorräume $\boldsymbol{V}$:

$$\dim_{K_1} \operatorname{Ker} a + \operatorname{rg} a = \dim_{K_1} \boldsymbol{V} = n + 1 < \infty. \tag{11}$$

□

Wir wollen nun beweisen, dass die durch eine semilineare Abbildung a nach (9) definierte Abbildung f der zugehörigen projektiven Räume kollinear ist; speziell gilt das nach (6) dann auch für die Zentralprojektionen p.

Satz 1. *Es sei $a : \boldsymbol{V}^{n+1} \to \boldsymbol{W}^{m+1}$ σ-linear. Dann ist die durch* (9) *definierte Abbildung $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$ kollinear, und es gilt*

$$\operatorname{Dim} f^{-1}(\boldsymbol{o}) + \operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}_o^n) = n - 1. \tag{12}$$

B e w e i s. Weil a semilinear ist, gilt $a(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$, und hieraus folgt (1). Es seien nun $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]$, $\boldsymbol{y} = [\mathfrak{y}] \in \boldsymbol{P}_o^n$. Dann ist $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} = \pi([\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}])$ durch die lineare Hülle bestimmt, und es folgt (2):

$$f(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) = \pi(a([\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}])) = \pi([\{a(\mathfrak{x}), a(\mathfrak{y})\}]) = f(\boldsymbol{x}) \vee f(\boldsymbol{y}),$$

wobei sich $a([\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}]) = [\{a(\mathfrak{x}), a(\mathfrak{y})\}]$ aus der Semilinearität von a ergibt. Somit ist f kollinear. Die Dimensionsformel (12) erhält man unmittelbar aus (11). □

Als einfache Folgerung aus Definition 1 ergibt sich

Satz 2. *Mit f ist auch f^{-1} eine Kollineation. Sind f, g kollinear, so ist auch die Verknüpfung $f \circ g$ kollinear. Die Klasse der projektiven Räume über beliebigen Schiefkörpern bildet mit den kollinearen Abbildungen als Morphismen eine Kategorie.* □

Beispiel 3. Die auf $\boldsymbol{P}^n$ *konstanten Abbildungen* $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o$, $f(\boldsymbol{o}) := \boldsymbol{o}$ und $f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{y}_0 = \text{const}$ für $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$, sind stets kollinear. Gilt $\boldsymbol{y}_0 \neq \boldsymbol{o}$, so ist $\operatorname{Dim} f^{-1}(\boldsymbol{o}) = -1$. In diesem Fall ist (12) genau dann erfüllt, wenn $n = 0$ ist, und nur dann kann f durch eine semilineare Abbildung induziert werden (Satz 1). Gilt $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{o}$, so wird f natürlich durch die Nullabbildung induziert. Ist ferner $f : \boldsymbol{P}_o^1 \to \boldsymbol{Q}_o^1$ eine beliebige Bijektion projektiver Geraden mit $f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$, so ist f eine Kollineation, die im allgemeinen ebenfalls nicht durch eine semilineare Abbildung erzeugt werden kann. □

Übung 1. Man finde ein Beispiel für eine Kollineation $f : \boldsymbol{P}_o^1 \to \boldsymbol{Q}_o^1$ für projektive Geraden über nicht isomorphen Körpern.

Wir wollen nun einige Eigenschaften der kollinearen Abbildungen herleiten. Aus Definition 1 und Übung 1.4 folgt leicht

Lemma 3. *Ist $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$ kollinear, und sind $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P}_o^n$, $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{Q}_o^m$ projektive Unterräume, so sind auch $f(\boldsymbol{A})$ und $f^{-1}(\boldsymbol{B})$ projektive Unterräume. Speziell sind also $f^{-1}(\boldsymbol{o})$ und $f(\boldsymbol{P}_o^n)$ projektive Unterräume.* □

Lemma 4. *Es sei $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$ kollinear. Dann gilt für alle $k \in \mathbf{N}_0$, $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{P}_o^n$*

$$f(\boldsymbol{x}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x}_0) \vee \ldots \vee f(\boldsymbol{x}_k). \tag{13}$$

B e w e i s. Wir führen einen Induktionsbeweis. Für $k = 0, 1$ ist die Behauptung trivial bzw. nach Voraussetzung erfüllt. Es sei (13) schon für k bewiesen. Gilt $\boldsymbol{x}_{k+1} \in \boldsymbol{H}^r :=$

$\boldsymbol{x}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_k$, so ist (13) offenbar auch für $\{\boldsymbol{x}_0, \ldots, \boldsymbol{x}_{k+1}\}$ erfüllt. Es sei nun $\boldsymbol{x}_{k+1} \notin \boldsymbol{H}^r$, also $\boldsymbol{M}^{r+1} := \boldsymbol{x}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{H}^r \vee \boldsymbol{x}_{k+1}$, und $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{M}^{r+1}$. Es ist

$$f(\boldsymbol{z}) \in f(\boldsymbol{x}_0) \vee \ldots \vee f(\boldsymbol{x}_{k+1}) = f(\boldsymbol{H}^r) \vee f(\boldsymbol{x}_{k+1})$$

zu zeigen. Wir können $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x}_{k+1}$ und $\boldsymbol{z} \notin \boldsymbol{H}^r$ annehmen, weil sonst die Behauptung nach Induktionsvoraussetzung gilt. Da $\boldsymbol{H}^r \subset \boldsymbol{M}^{r+1}$ eine Hyperebene ist, schneidet die Gerade $\boldsymbol{x}_{k+1} \vee \boldsymbol{z}$ sie in genau einem Punkt $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}_{k+1} \vee \boldsymbol{z}) \wedge \boldsymbol{H}^r$; und weil f kollinear ist, gilt wegen $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{x}_{k+1}$:

$$f(\boldsymbol{z}) \in f(\boldsymbol{y} \vee \boldsymbol{x}_{k+1}) = f(\boldsymbol{y}) \vee f(\boldsymbol{x}_{k+1}) \subset f(\boldsymbol{H}^r) \vee f(\boldsymbol{x}_{k+1}),$$

also

$$f(\boldsymbol{x}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_{k+1}) \subset f(\boldsymbol{x}_0) \vee \ldots \vee f(\boldsymbol{x}_{k+1}).$$

Andererseits ist $\boldsymbol{M}^{r+1}$ ein projektiver Unterraum von $\boldsymbol{P}^n_o$, und nach Lemma 3 ist daher $f(\boldsymbol{M}^{r+1}) \subset \boldsymbol{Q}^m_o$ ein projektiver Unterraum. Wegen $f(\boldsymbol{x}_i) \in f(\boldsymbol{M}^{r+1})$, $i = 0, \ldots, k+1$, ergibt sich aus der Definition der Verbindung als kleinster umfassender Unterraum die Behauptung. □

Folgerung 5. *Es sei $f : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{Q}^m_o$ kollinear. Dann ist für projektive Unterräume $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{P}^n_o$ die Einschränkung $f|\boldsymbol{A} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{Q}^m_o$ ebenfalls kollinear, und es gilt* $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{A}) \leq \operatorname{Dim} \boldsymbol{A}$. *Außerdem ist stets*

$$f(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) = f(\boldsymbol{A}) \vee f(\boldsymbol{B}). \tag{14}$$

Beweis. Beide Behauptungen ergeben sich aus (13), wenn man $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ durch projektiv unabhängige Punkte erzeugt. □

Der folgende Satz charakterisiert die injektiven kollinearen Abbildungen:

Satz 6. *Es sei $f : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{Q}^m_o$ kollinear. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
a) *f ist injektiv;*
b) $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}^n_o) = n$;
c) *für jeden projektiven Unterraum $\boldsymbol{A}$ gilt* $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{A}) = \operatorname{Dim} \boldsymbol{A}$.

Beweis. Aus a) folgt b): Angenommen, es sei $\boldsymbol{B} := f(\boldsymbol{P}^n_o) \neq \boldsymbol{o}$ und $\operatorname{Dim} \boldsymbol{B} = k < n$. Dann können wir $\boldsymbol{B}$ durch $k+1$ Punkte in allgemeiner Lage aufspannen: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{b}_k$. Es seien $\boldsymbol{a}_i \in f^{-1}(\boldsymbol{b}_i) \neq \boldsymbol{o}$, $i = 0, \ldots, k$. Dann ist mit $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{a}_o \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_k$ nach (13) $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B} = f(\boldsymbol{P}^n_o)$ und $\operatorname{Dim} \boldsymbol{A} < n$. Daher finden wir ein $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n_o \setminus \boldsymbol{A}$, für das $f(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{B}$ gelten muss; somit kann f nicht injektiv sein. Ist $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{o}$, so muss wegen $n \geq 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n$ der Wert $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ sein, und f ist ebenfalls nicht injektiv.

Aus b) folgt a): Es sei f nicht injektiv. Dann gibt es $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}^n_o$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, mit $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$. Falls etwa $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ ist, gilt auch $f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o}$ und $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}$. Wir setzen dann $\boldsymbol{a}_0 := \boldsymbol{y}$ und ergänzen $\boldsymbol{a}_0$ zu einer projektiv unabhängigen Folge $(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ in $\boldsymbol{P}^n_o$. Aus $f(\boldsymbol{a}_0) = \boldsymbol{o}$ folgt nach Lemma 4

$$f(\boldsymbol{P}^n_o) = f(\boldsymbol{a}_1) \vee \ldots \vee f(\boldsymbol{a}_n), \text{ also } \operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}^n_o) < n. \tag{15}$$

Sind $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ beide ungleich $\boldsymbol{o}$, so ergänzen wir $\boldsymbol{a}_0 := \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{a}_1 := \boldsymbol{y}$ zu einer projektiv unabhängigen Folge $(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ in $\boldsymbol{P}^n_o$. Wegen $f\boldsymbol{a}_0) = f(\boldsymbol{a}_1)$ folgt dann wieder (15).

Weil mit f auch $f|\boldsymbol{A}$ für jeden Unterraum $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P}_o$ injektiv ist, folgt c) unmittelbar aus der Äquivalenz von a) und b). Da b) ein Spezialfall von c) ist, ist c) zu b) äquivalent. □

Bemerkung. Offenbar gilt für jede injektive kollineare Abbildung $f^{-1}(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$. Wie das Beispiel 3 einer konstanten Abbildung f mit $\boldsymbol{y}_0 \neq \boldsymbol{o}$ und $n > 0$ zeigt, folgt aus dieser Eigenschaft nicht die Injektivität von f. Es gilt jedoch

Satz 7. *Es sei* $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$ *kollinear und* $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}_o^n) \geq 1$. *Die Abbildung* f *ist injektiv genau dann, wenn* $f^{-1}(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ *gilt.*

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit f als surjektiv annehmen. Es seien $\boldsymbol{b}_j$, $j = 0, \ldots, m$, Punkte, die $\boldsymbol{Q}_o^m$ aufspannen: $\boldsymbol{Q}_o^m = \boldsymbol{b}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{b}_m$. Wir wählen Punkte $\boldsymbol{a}_j \in f^{-1}(\boldsymbol{b}_j)$, $\boldsymbol{a}_j \neq \boldsymbol{o}$, und bilden $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{a}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_m$. Aus (13) folgt $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{Q}_o^m$, und nach Folgerung 5 ist $\operatorname{Dim} \boldsymbol{A} = m$. Nach Satz 6 ist $g := f|\boldsymbol{A}$ bijektiv. Wir führen den Beweis indirekt. Angenommen, es sei $f^{-1}(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ und f sei nicht injektiv. Dann gäbe es ein $\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{P}_o^n \setminus \boldsymbol{A}$, für das ein $\boldsymbol{c}_0 \in \boldsymbol{A}$ mit $f(\boldsymbol{c}_0) = f(\boldsymbol{c})$ existierte. Wegen $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{o}$ und $f^{-1}(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ ist $f(\boldsymbol{c}) \neq \boldsymbol{o}$ und $\boldsymbol{c}_0 \neq \boldsymbol{o}$. Wir betrachten den projektiven Unterraum $\boldsymbol{H}^{m+1} := \boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{A}$ und definieren die Abbildung

$$q := g^{-1} \circ f|\boldsymbol{H}^{m+1} : \boldsymbol{H}^{m+1} \to \boldsymbol{A},$$

die nach Satz 2 kollinear ist und wegen $q|\boldsymbol{A} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}$ die Beziehung $q^2 = q$ erfüllt. Zu jedem $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}^{m+1}$ gibt es genau ein $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{A}$, nämlich $\boldsymbol{x}_0 = q(\boldsymbol{x})$, für das $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$ gilt; denn nach Definition ist $q(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{A}$, $f(q(\boldsymbol{x})) = g \circ g^{-1} \circ f(\boldsymbol{x})$ und $g = f|\boldsymbol{A}$ ist injektiv. Es sei $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H} \setminus \boldsymbol{A}$. Dann ist $q(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0) = q(\boldsymbol{x}) \vee q(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$, also $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0 \subset q^{-1}(\boldsymbol{x}_0)$. Wir zeigen, dass $q^{-1}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0$ gilt. Wäre nämlich $\boldsymbol{x}_1 \notin \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0$ und $q(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{x}_0$, so müsste wegen $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ und $q^{-1}(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$ auch $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{o}$ und $\operatorname{Dim} \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0 \vee \boldsymbol{x}_1 = 2$ sein. Aus der Dimensionsformel ergäbe sich

$$\operatorname{Dim}(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0 \vee \boldsymbol{x}_1) \wedge \boldsymbol{A} = 2 + m - (m+1) = 1,$$

was wegen $q|\boldsymbol{A} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}$ der Beziehung

$$\boldsymbol{x}_0 = q((\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0 \vee \boldsymbol{x}_1) \wedge \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0 \vee \boldsymbol{x}_1) \wedge \boldsymbol{A}$$

widerspräche. Weil nach Voraussetzung des Satzes $m + 1 \geq 2$ gilt, finden wir ein

$$\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}^{m+1} \setminus (\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0));$$

es genügt, ein projektives Repère $(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_{m+1}; e)$ von $\boldsymbol{H}^{m+1}$ so zu wählen, dass $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_{m+1}$ und $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_m$ gelten; dann erfüllt $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{e}$ die Bedingung. Es sei $\boldsymbol{z}_0 := q(\boldsymbol{z})$. Dann gilt, wie oben gezeigt, $q^{-1}(\boldsymbol{z}_0) = \boldsymbol{z} \vee \boldsymbol{z}_0$, also auch $\boldsymbol{z}_0 \neq \boldsymbol{x}_0$. Ferner ist

$$(\boldsymbol{z} \vee \boldsymbol{z}_0) \wedge (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{o};$$

denn für $\boldsymbol{y} \iota (\boldsymbol{z} \vee \boldsymbol{z}_0) \wedge (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0)$ muss $q(\boldsymbol{y}) \iota \boldsymbol{x}_0$ und $q(\boldsymbol{y}) \iota \boldsymbol{z}_0$ gelten, was wegen $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{z}_0$ nur für $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$ möglich ist. Daher sind die Geraden $\boldsymbol{z} \vee \boldsymbol{z}_0$, $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0$ windschief, und somit ist $\boldsymbol{L} := (\boldsymbol{z} \vee \boldsymbol{z}_0) \vee (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{x}_0)$ ein dreidimensionaler Unterraum von $\boldsymbol{H}^{m+1}$. Wegen $\boldsymbol{H}^{m+1} = \boldsymbol{L} \vee \boldsymbol{A}$ folgt $\operatorname{Dim} \boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{A} = 2$. Das führt aber wegen $q|\boldsymbol{A} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}$ zu dem Widerspruch

$$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{L} \subset q(\boldsymbol{L}) = q(\boldsymbol{x}) \vee q(\boldsymbol{x}_0) \vee q(\boldsymbol{z}) \vee q(\boldsymbol{z}_0) = \boldsymbol{x}_0 \vee \boldsymbol{z}_0.$$

Die Umkehrung ist trivial. □

Nun ergibt sich leicht

Folgerung 8. *Es sei* $f : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{Q}^m_o$ *kollinear mit* $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}^n_o) \geq 1$. *Dann ist* f *als Komposition* $f = g \circ p$ *einer Zentralprojektion* p *und einer injektiven kollinearen Abbildung* g *darstellbar: Ist* $\boldsymbol{B} = f^{-1}(\boldsymbol{o})$ *und* $\boldsymbol{A}$ *ein zu* $\boldsymbol{B}$ *komplementärer Unterraum in* $\boldsymbol{P}^n_o$, p *die Zentralprojektion* $p : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{A}$ *mit dem Zentrum* $\boldsymbol{B}$, *so ist* $g := f|\boldsymbol{A}$ *injektiv, und es gilt* $f = g \circ p$.

Beweis. Es ist $g \circ p(\boldsymbol{x}) = f((\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{A}) \iota f(\boldsymbol{x}) \vee f(\boldsymbol{B}) = f(\boldsymbol{x})$. Da $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{o}$ gilt, kann $g \circ p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ nur für $p(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$, d.h. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$, eintreten, und somit ist $g \circ p(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$. Weiter ist $p(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{A}$, also $f(\boldsymbol{P}^n_o) = f(\boldsymbol{A})$. Daher gilt $\operatorname{Dim} g(\boldsymbol{A}) \geq 1$, und wegen $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{o}$ ist $g^{-1}(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$. Nach Satz 7 ist g injektiv. □

Weil wegen Satz 6 $\operatorname{Dim} \boldsymbol{A} = \operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}^n_o)$ gilt, erhalten wir unmittelbar die folgende, (12) entsprechende Eigenschaft:

Folgerung 9. *Es sei* $f : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{Q}^m_o$ *kollinear mit* $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}^n_o) \geq 1$. *Dann gilt für jeden projektiven Unterraum* $\boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{P}^n_o$

$$\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{H}) = \operatorname{Dim} \boldsymbol{H} - \operatorname{Dim} \boldsymbol{H} \wedge f^{-1}(\boldsymbol{o}) - 1. \tag{16}$$

Für eine Kollineation f *gilt stets* $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{H}) = \operatorname{Dim} \boldsymbol{H}$.

Beweis. Nach Folgerung 8 ist $f = g \circ p$. Somit ist $f(\boldsymbol{H}) = g \circ p(\boldsymbol{H})$, und weil g injektiv ist, gilt nach Satz 6, c), $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{H}) = \operatorname{Dim} p(\boldsymbol{H})$. Nun ist aber $p(\boldsymbol{H}) = (\boldsymbol{H} \vee \boldsymbol{B}) \wedge \boldsymbol{A}$. Durch zweimalige Anwendung der Dimensionsformel folgt aus der Komplementarität von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B} = f^{-1}(\boldsymbol{o})$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Dim} p(\boldsymbol{H}) &= \operatorname{Dim} \boldsymbol{H} + \operatorname{Dim} \boldsymbol{B} - \operatorname{Dim} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{B} + \operatorname{Dim} \boldsymbol{A} - n, \\ &= \operatorname{Dim} \boldsymbol{H} - \operatorname{Dim} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{B} - 1. \end{aligned}$$

Für eine Kollineation ist nach Definition $f^{-1}(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$, also $\operatorname{Dim} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{B} = -1$; der Fall $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}^n_o) < 1$ ist für Kollineationen trivial (und für kollineare Abbildungen im allgemeinen falsch, vgl. Beispiel 2). □

1.3.2 Der Hauptsatz der projektiven Geometrie

Wir wollen nun den folgenden *Hauptsatz der projektiven Geometrie* beweisen, aus dem sich auch die zu Anfang dieses Abschnitts angekündigte Charakterisierung der kollinearen Abbildungen ergibt (vgl. E. Artin [3], J. Dieudonné [31]):

Satz 10. *Es seien* $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ $(n+1)$*-dimensionale Vektorräume,* $n \geq 2$, *über den Schiefkörpern* K_1 *bzw.* K_2 *mit den zugehörigen projektiven Räumen* $\boldsymbol{P}^n_o$ *und* $\boldsymbol{Q}^n_o$. *Ferner sei*

$$f : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n_o \longmapsto \boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{Q}^n_o$$

eine Kollineation. Dann gibt es einen Isomorphismus der Schiefkörper $\sigma : K_1 \to K_2$ *und eine* σ*-lineare Bijektion* $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$, *die* f *erzeugt, für die also* $f([\mathfrak{x}]) = [a(\mathfrak{x})]$ *für alle*

$\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}$ *gilt. Ist* $a_1 : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ *eine* σ_1*-lineare Bijektion, die ebenfalls* f *erzeugt, so gibt es ein* $\mu \in K_1^*$ *mit*

$$a_1(\mathfrak{x}) = a(\mathfrak{x}\mu), \qquad \mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}, \tag{17}$$

$$\sigma_1(\xi) = \sigma(\mu^{-1}\xi\mu), \qquad \xi \in K_1. \tag{18}$$

B e w e i s. Aus Satz 6, c), folgt, dass die Bilder der Punkte eines projektiven Repères $(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n : \boldsymbol{e})$ von $\boldsymbol{P}_o^n$,

$$\boldsymbol{a}_i' = f(\boldsymbol{a}_i),\ \boldsymbol{e}' = f(\boldsymbol{e}),\ i = 0, \ldots, n, \tag{19}$$

ein projektives Repère von $\boldsymbol{Q}_o^n$ bilden, da je $n+1$ von ihnen projektiv unabhängig sind. Es seien $(\mathfrak{a}_i)$ bzw. $(\mathfrak{a}_i')$ Basen von $\boldsymbol{V}$ bzw. $\boldsymbol{W}$, welche die projektiven Repères $(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n : \boldsymbol{e})$ bzw. $(\boldsymbol{a}_0', \ldots, \boldsymbol{a}_n' : \boldsymbol{e}')$ bestimmen; nach Satz 2.2 sind sie bis auf jeweils einen gemeinsamen Faktor aus K_1^* bzw. K_2^* eindeutig definiert. Wir werden zeigen, dass es einen Isomorphismus $\sigma : K_1 \to K_2$ gibt derart, dass f in den zu diesen Basen gehörenden homogenen Koordinaten durch (man beachte die Summenkonvention!)

$$f([\mathfrak{a}_i x^i]) = [\mathfrak{a}_i'\sigma(x^i)] \tag{20}$$

dargestellt wird; die gesuchte σ-lineare Abbildung ist daher

$$a : \mathfrak{a}_i x^i \in \boldsymbol{V} \mapsto \mathfrak{a}_i'\sigma(x^i) \in \boldsymbol{W}.$$

Zum Beweis betrachten wir eine Koordinatenachse $\boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_j$, $0 \neq j$. Wegen (19) erhalten wir eine Bijektion $\sigma_j : K_1 \to K_2$, die definiert wird durch

$$f([\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_j\xi]) = [\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{a}_j'\sigma_j(\xi)],\ \xi \in K_1, \tag{21}$$

(vgl. Beispiel 1.3). Wir zeigen: *Die Abbildung* σ_j *ist unabhängig von* j. Betrachten wir etwa σ_1, σ_2. Aus (19) folgt $\sigma_j(0) = 0$. Aus derselben Formel folgt, dass f generell die Koordinaten-k-Ebenen entsprechend ineinander überführt. Da f kollinear ist, ist es mit der Operation der Verbindung $\vee$ vertauschbar, und weil f bijektiv ist, ist es auch mit der Operation $\wedge$ des Schnitts vertauschbar, die ja mit dem Durchschnitt übereinstimmt. Aus (7) folgt daher, dass f auch die Einheitspunkte der Koordinaten-k-Ebenen entsprechend ineinander überführt. Angewandt auf die betrachteten Koordinatenachsen ergibt sich $\sigma_j(1) = 1$. Es seien nun $\boldsymbol{x}_j(\xi) := [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_j\xi]$, $j = 1, 2$, die Punkte mit dem Parameterwert $\xi \neq 0$ auf den Koordinatenachsen. Man erkennt leicht, dass alle Verbindungsgeraden $\boldsymbol{x}_1(\xi) \vee \boldsymbol{x}_2(\xi)$ die Koordinatenachse $\boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{a}_2$ in ein und demselben Punkt $\boldsymbol{c}$ schneiden: Bei festem ξ gilt für diesen Schnittpunkt ja

$$\boldsymbol{c} = [(\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1\xi)\alpha + (\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_2\xi)\beta] = [\mathfrak{a}_1\gamma + \mathfrak{a}_2\delta],$$

woraus sich $\alpha = -\beta$ und $\gamma = \xi\alpha = -\xi\beta = -\delta$ ergeben. Daher ist $\boldsymbol{c} = [\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1]$ unabhängig von ξ.

B e m e r k u n g. Die Existenz und Eindeutigkeit des Schnittpunktes $\boldsymbol{c}$ ist klar, weil die Konfiguration in der Koordinatenebene $\boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{a}_2$ liegt (vgl. Beispiel 1.4). Interpretiert man diese Ebene affin mit $\boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{a}_2$ als unendlich ferner Geraden, so besagt unser Ergebnis, dass die Verbindungsgeraden von Punkten auf den Achsen mit gleichen Ordinaten alle parallel sind, was unmittelbar aus dem Strahlensatz folgt.

Wir betrachten nun das Bild dieser Konfiguration unter der Kollineation f. Weil diese Geraden in Geraden überführt und mit Schnitt und Verbindung vertauschbar ist, erhalten wir für das Bild des Schnittpunktes $\boldsymbol{c}' = f(\boldsymbol{c})$ unter Berücksichtigung von (21):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}' &= (\boldsymbol{x}_1'(\xi) \vee \boldsymbol{x}_2'(\xi)) \wedge (\boldsymbol{a}_1' \vee \boldsymbol{a}_2') \\ &= [(\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{a}_1'\sigma_1(\xi))\tilde{\alpha} + (\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{a}_2'\sigma_2(\xi))\tilde{\beta}] = [\mathfrak{a}_1'\tilde{\gamma} + \mathfrak{a}_2'\tilde{\delta}]. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt

$$\tilde{\alpha} = -\tilde{\beta},\ \tilde{\gamma} = \sigma_1(\xi)\alpha,\ \tilde{\delta} = \sigma_2(\xi)\tilde{\beta} = -\sigma_2(\xi)\tilde{\alpha},$$

und es folgt

$$\boldsymbol{c}' = [\mathfrak{a}_2'\sigma_2(\xi) - \mathfrak{a}_1'\sigma_1(\xi)].$$

Da $\boldsymbol{c}'$ nicht von ξ abhängt, können wir $\xi = 1$ setzen und erhalten nach der schon bewiesenen Gleichung $\sigma_j(1) = 1$ schließlich $\boldsymbol{c}' = [\mathfrak{a}_2' - \mathfrak{a}_1']$. Hieraus und aus der letzten Formelzeile folgt die Behauptung $\sigma_1(\xi) = \sigma_2(\xi)$ für alle $\xi \in K_1$.

Wir beweisen nun (20). Es sei zuerst $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{H}_0$, wobei $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{a}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_n$ die zu $\boldsymbol{a}_0$ komplementäre Koordinatenhyperebene bezeichnet. Weil $f(\boldsymbol{H}_0)$ die zu $\boldsymbol{a}_0'$ komplementäre Koordinatenhyperebene $\boldsymbol{H}_0'$ ist, gilt auch $\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) \notin \boldsymbol{H}_o'$, und daher sind die nullten Koordinaten x^0, $x'^{\,0}$ von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x}'$ von null verschieden. Wir normieren diese zu $x^0 = 1$, $x'^{\,0} = 1$ und erhalten so die normierten Darstellungen

$$\boldsymbol{x} = [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 x^1 + \ldots \mathfrak{a}_n x^n],\ \boldsymbol{x}' = [\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{a}_1' x'^1 + \ldots \mathfrak{a}_n' x'^n].$$

Es seien p_1, p_1' jeweils die Projektionen auf die Koordinatenachse $\boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_1$ bzw. $\boldsymbol{a}_0' \vee \boldsymbol{a}_1'$; bezeichnen also $\boldsymbol{H}_{01}$, $\boldsymbol{H}_{01}'$ die zu diesen Achsen komplementären Koordinatenebenen, so gelten

$$\begin{aligned} p_1(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{H}_{01}) \wedge (\boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_1) &= [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 x^1] \\ p_1'(\boldsymbol{x}') = (\boldsymbol{x}' \vee \boldsymbol{H}_{01}') \wedge (\boldsymbol{a}_0' \vee \boldsymbol{a}_1') &= [\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{a}_1' x'^1]. \end{aligned}$$

Die rechten Gleichungen dieser Formeln ergeben sich unmittelbar aus Beispiel 1, (6). Weil nun die Koordinatenebenen durch f entsprechend ineinander übergehen, ergibt sich aus der Vertauschbarkeit der Kollineation f mit $\vee$ und $\wedge$ und der Definition (21) von σ:

$$f(p_1(\boldsymbol{x})) = [\mathfrak{a}_0' + a_1'\sigma(x^1)] = p_1'(f(\boldsymbol{x})) = [\mathfrak{a}_0' + a_1' x'^1)],$$

also $x'^1 = \sigma(x^1)$; da entsprechendes für alle Koordinatenachsen gilt, erhalten wir

$$f([\mathfrak{a}_0 + \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_j x^j]) = [\mathfrak{a}_0' + \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_j'\sigma(x^j)],\ x^j \in K_1, \tag{22}$$

und das ist die Behauptung (20) im Fall $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{H}_0$. Ist $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}_0$, so ist auch $\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{H}_0'$, und es ist $x^0 = x'^{\,0} = 0$. In diesem Fall liegt $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]$ mit $\mathfrak{x} = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_j x^j$ auf der Geraden $\boldsymbol{a}_0 \vee [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{x}]$. Nach (19) und (21) liegt also $f(\boldsymbol{x})$ auf der Geraden $\boldsymbol{a}_0' \vee [\mathfrak{a}_0' + \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_j'\sigma(x^j)]$. Es gilt daher

$$\boldsymbol{x}' = [\mathfrak{a}_0'\mu + (\mathfrak{a}_0' + \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_j'\sigma(x^j))\nu] = [\sum_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_j' y^j)].$$

Hieraus folgen $\mu = -\nu$ und, weil es auf einen gemeinsamen Faktor nicht ankommt, $y^j = \sigma(x^j)$, und das ist wieder die behauptete Gleichung (20).

Jetzt zeigt man leicht, dass σ ein Isomorphismus ist: Der Punkt $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1(\xi+\eta)+\mathfrak{a}_2]$ liegt auf der Geraden $[\mathfrak{a}_0+\mathfrak{a}_1\xi]\vee[\mathfrak{a}_1\eta+\mathfrak{a}_2]$. Folglich liegt der Bildpunkt $\boldsymbol{x}' = [\mathfrak{a}'_0+\mathfrak{a}'_1\sigma(\xi+\eta)+\mathfrak{a}'_2]$ auf der Bildgeraden $[\mathfrak{a}'_0+\mathfrak{a}'_1\sigma(\xi)]\vee[\mathfrak{a}'_1\sigma(\eta)+\mathfrak{a}'_2]$; hieraus folgt $\sigma(\xi+\eta) = \sigma(\xi)+\sigma(\eta)$. Analog liegt der Punkt $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1\xi\eta + \mathfrak{a}_2\eta]$ auf der Geraden $\boldsymbol{a}_0 \vee [\mathfrak{a}_1\xi + \mathfrak{a}_2]$, also der Bildpunkt $\boldsymbol{x}' = [\mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{a}'_1\sigma(\xi\eta) + \mathfrak{a}'_2\sigma(\eta)]$ auf der Bildgeraden $\boldsymbol{a}'_0 \vee [\mathfrak{a}'_1\sigma(\xi) + \mathfrak{a}'_2]$. Der Koeffizientenvergleich in

$$\mathfrak{a}'_0 + \mathfrak{a}'_1\sigma(\xi\eta) + \mathfrak{a}'_2\sigma(\eta) = \mathfrak{a}'_0\nu + (\mathfrak{a}'_1\sigma(\xi) + \mathfrak{a}'_2)\mu$$

ergibt $\nu = 1$, $\mu = \sigma(\eta)$, $\sigma(\xi\eta) = \sigma(\xi)\sigma(\eta)$. Damit ist die Existenzaussage des Satzes bewiesen.

Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachten wir die Abbildung $b := a^{-1} \circ a_1 : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$. Sie ist eine semilineare Bijektion mit dem Isomorphismus $\tau := \sigma^{-1} \circ \sigma_1$ von K_1. Da sie die Identität auf $\boldsymbol{P}^n_o$ erzeugt, muss es eine Funktion

$$\lambda : \mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\} \mapsto \lambda(\mathfrak{x}) \in K_1^* \text{ mit } b(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}\lambda(\mathfrak{x})$$

geben. Speziell gilt $b(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{a}_i\alpha_i$, $\alpha_i \in K_1^*$. Wegen

$$b(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j) = (\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j)\lambda(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j) = b(\mathfrak{a}_i) + b(\mathfrak{a}_j) = \mathfrak{a}_i\alpha_i + \mathfrak{a}_j\alpha_j$$

folgt $\alpha_i = \alpha_j =: \mu$ und somit $b(\mathfrak{a}_j) = \mathfrak{a}_j\mu$ für ein gewisses $\mu \in K_1^*$ und alle j. Da $\mathfrak{a}_1$ ein beliebiger, zu $\mathfrak{a}_0$ linear unabhängiger Vektor sein kann und $\dim \boldsymbol{V} \geq 3$ gilt, erhalten wir $\lambda(\mathfrak{x}) = \mu$ für alle $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\}$. Somit ist $b(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}\mu$, also $a_1(\mathfrak{x}) = a(\mathfrak{x}\mu)$ für ein gewisses $\mu \in K_1^*$. Weiter ergibt sich $b(\mathfrak{x}\xi) = \mathfrak{x}\mu\tau(\xi) = \mathfrak{x}\xi\mu$, also $\tau(\xi) = \mu^{-1}\xi\mu$ und $\sigma_1(\xi) = \sigma(\mu^{-1}\xi\mu)$. □

Für kollineare Abbildungen ergibt sich aus dem Hauptsatz

Folgerung 11. *Jede kollineare Abbildung $f : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{Q}^m_o$ mit $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}^n_o) \geq 2$ wird durch eine semilineare Abbildung der zugehörigen Vektorräume $b : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ erzeugt.*

Beweis. Mit den Bezeichnungen von Folgerung 8 kann f in der Gestalt $f = g \circ p$ dargestellt werden; hierbei ist p als Zentralprojektion nach (6) linear erzeugt. Wegen $g(\boldsymbol{A}) = f(\boldsymbol{P}^n_o)$ ist $g : \boldsymbol{A} \to f(\boldsymbol{P}^n_o)$ eine Kollineation, die die Voraussetzungen von Satz 10 erfüllt; sie wird daher durch eine semilineare Abbildung a erzeugt. Folglich wird $f = g \circ p$ durch die semilineare Abbildung $b = a \circ pr$ induziert. □

1.3.3 Die Gruppe der Autokollineationen

Ein wichtiges und überraschendes Teilergebnis des Hauptsatzes ist die Isomorphie der Schiefkörper zweier projektiver Räume, die durch eine Kollineation aufeinander abgebildet werden können. Wegen dieser *Invarianz der Skalarbereiche* wollen wir bei der Betrachtung von kollinearen Abbildungen stets $K_1 = K_2$ voraussetzen, also die Kategorie der projektiven Geometrien (bzw. Räume) über einem gegebenen Schiefkörper K zugrunde legen. Da, wie schon bemerkt, der Begriff der Kollineationen für $n < 2$ wenig inhaltsreich ist, setzen wir für die Beschreibung der Automorphismengruppe eines projektiven Raums bis zum Ende dieses Abschnitts $n \geq 2$ voraus; die projektiven Geraden, für die das Doppelverhältnis eine entscheidende Rolle spielt, werden im nächsten Abschnitt behandelt. Wir definieren daher

Definition 3. Für $n \geq 2$ sei $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^n$ die Gruppe aller Kollineationen $f : \boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{P}^n$ von $\boldsymbol{P}^n$ auf sich. Die Elemente $f \in \mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^n$ heißen die *Autokollineationen* des $\boldsymbol{P}^n$. Hier und im folgenden lassen wir den Index o oft fort, wenn keine Irrtümer zu befürchten sind; wenn nötig, denken wir uns eine Abbildung $f : \boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{Q}^m$ stets durch $f(\boldsymbol{o}) := \boldsymbol{o}$ zu $f : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{Q}^m_o$ fortgesetzt. □

Der Hauptsatz gibt uns die Möglichkeit, $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^n$ algebraisch zu beschreiben, da jede Autokollineation durch eine semilineare Bijektion erzeugt wird. Wir zeigen zuerst

Lemma 12. *Die Gruppe derjenigen* $f \in \mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^n$*, die ein gegebenes projektives Repère* $(\boldsymbol{a}_i; \boldsymbol{e})$*,* $i = 0 \ldots, n$*, des* $\boldsymbol{P}^n$ *elementweise festlassen, ist zur* Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}\,K$ *des Schiefkörpers* K *des* $\boldsymbol{P}^n$ *isomorph.*

B e w e i s. Ist $\sigma \in \mathrm{Aut}\,K$ und $(\mathfrak{a}_i)$ eine das Repère $(\boldsymbol{a}_i; \boldsymbol{e})$ bestimmende Basis des zu $\boldsymbol{P}^n$ gehörenden Vektorraums $\boldsymbol{V}$, so definiert $\varphi : \sigma \mapsto f_\sigma$ mit

$$f_\sigma([\mathfrak{a}_i x^i]) := [\mathfrak{a}_i \sigma(x^i)] \tag{23}$$

einen Homomorphismus von $\mathrm{Aut}\,K$ in $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^n$, für den jedes f_σ zur stationären Untergruppe von $(\boldsymbol{a}_i; \boldsymbol{e})$ gehört, d.h. die Bedingungen

$$f(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{a}_i,\ f(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e},\ i = 0, \ldots, n, \tag{24}$$

erfüllt, weil $\sigma(0) = 0$ und $\sigma(1) = 1$ gelten. Aus der Definition (23) folgt sofort $f_{\tau\circ\sigma} = f_\tau \circ f_\sigma$. Ist weiter $f_\sigma = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^n}$, so gilt speziell

$$f_\sigma([\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1\xi]) = [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1\sigma(\xi)] = [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1\xi],$$

und hieraus folgt unmittelbar $\sigma(\xi) = \xi$ für alle $\xi \in K$. Daher ist φ injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass jede Autokollineation f, die (24) erfüllt, von der Gestalt (23) ist. Aus (24) folgt zunächst für jede f induzierende semilineare Abbildung a mit dem zugehörigen Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}\,K$:

$$a(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{a}_i\mu_i,\ a(\sum \mathfrak{a}_j) = \sum \mathfrak{a}_j\mu_j = (\sum \mathfrak{a}_j)\mu,$$

also $\mu_i = \mu \neq 0$ für $i = 0, \ldots, n$. Somit gelten

$$a(\mathfrak{a}_i x^i) = \mathfrak{a}_i \mu\sigma(x^i), \tag{25}$$

$$f([\mathfrak{a}_i x^i]) = [\mathfrak{a}_i\mu\sigma(x^i)] = [\mathfrak{a}_i\mu\sigma(x^i)\mu^{-1}]. \tag{26}$$

Setzen wir also $\tau := \sigma_\mu \circ \sigma$, σ_μ der zu $\mu \in K^*$ gehörende innere Automorphismus, so folgt $f = f_\tau$. □

Lemma 12 gibt uns eine geometrische Interpretation der Automorphismengruppe des Schiefkörpers K als stationäre Gruppe eines projektiven Repères des projektiven Raums $\boldsymbol{P}^n$ über K in der Gruppe $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^n$. Um die Gruppe $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^n$ algebraisch zu beschreiben, stellen wir zunächst die *semilineare Gruppe* $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}^{n+1})$, das ist die Gruppe der semilinearen Bijektionen des Vektorraumes $\boldsymbol{V}^{n+1}$, algebraisch dar. Es sei $(\mathfrak{a}_i)$ eine fest gewählte Basis von $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^{n+1}$ und $a \in \boldsymbol{G}$. Dann gilt

$$a(\mathfrak{a}_i x^i) = a(\mathfrak{a}_i)\sigma(x^i) = \mathfrak{a}_j \alpha^j_i \sigma(x^i). \tag{27}$$

Offenbar läßt sich jede semilineare Abbildung a von $\boldsymbol{V}$ in sich in dieser Gestalt darstellen, und jede von der Nullabildung verschiedene derartige Abbildung bestimmt den zugehörigen Automorphismus $\sigma \in \operatorname{Aut} K$ eindeutig; die Nullabbildung ist natürlich linear. Für $a \in \boldsymbol{G}$ ist a invertierbar, und die inverse Abbildung a^{-1} ist semilinear mit dem Automorphismus σ^{-1}. Zur Bestimmung der Matrix der inversen Abbildung setzen wir $a^{-1}(\mathfrak{a}_j) = \mathfrak{a}_k \gamma_j^k$. Es folgt

$$\mathfrak{a}_i = a^{-1}(a(\mathfrak{a}_i)) = a^{-1}(\mathfrak{a}_j \alpha_i^j) = \mathfrak{a}_k \gamma_j^k \sigma^{-1}(\alpha_i^j),$$

also durch Koeffizientenvergleich und Anwendung von σ:

$$\delta_i^k = \gamma_j^k \sigma^{-1}(\alpha_i^j) = \sigma(\gamma_j^k)\alpha_i^j.$$

Folglich ist die Matrix (α_i^j) invertierbar, und wir erhalten eine wegen (27) wohldefinierte Abbildung

$$\Phi : a \in \boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}^{n+1}) \longmapsto \Phi(a) := ((\alpha_i^j),\, \sigma) \in \boldsymbol{GL}(n+1, K) \times \operatorname{Aut} K.$$

Dabei gilt

$$\Phi(a^{-1}) = ((\sigma^{-1}(\alpha_i^j))^{-1}, \sigma^{-1}). \tag{28}$$

Mit $\Phi(b) = ((\beta_l^k),\, \tau)$ ergibt sich nach einer leichten Rechnung

$$\Phi(b \circ a) = ((\beta_l^k)(\tau(\alpha_i^l)), \tau \circ \sigma). \tag{29}$$

Definiert man in

$$\boldsymbol{G}_{n+1}(K) := \boldsymbol{GL}(n+1, K) \times \operatorname{Aut} K$$

eine Multiplikation durch

$$((\beta_l^k), \tau) \cdot ((\alpha_i^l), \sigma) := ((\beta_l^k)(\tau(\alpha_i^l)), \tau \circ \sigma), \tag{30}$$

so entsteht eine Gruppe, die *semilineare Gruppe* $\boldsymbol{G}_{n+1}(K)$ *der Ordnung* $n+1$ *über* K, als halbdirektes Produkt des Normalteilers $\boldsymbol{GL}(n+1) \times \{\mathrm{id}_K\}$ mit der Untergruppe $\{(\delta_j^i)\} \times \operatorname{Aut} K$, vgl. Übung I.3.2.3, und es folgt, dass Φ ein Isomorphismus ist:

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}^{n+1}) \cong \boldsymbol{G}_{n+1}(K),\ n \in \mathbf{N_0}. \tag{31}$$

In Beispiel 2 bezeichneten wir mit d_μ die Dehnungen $d_\mu(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}\mu$, $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}$, $\mu \in K^*$; d_μ ist semilinear mit dem Automorphismus $\sigma_{\mu^{-1}}$. Die Menge aller Dehnungen

$$\boldsymbol{D} := \{d_\mu | \mu \in K^*\} \subset \boldsymbol{G}(\boldsymbol{V})$$

ist, wie aus dem nächsten Satz folgt, ein Normalteiler in $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V})$, der vermöge

$$\mu \in K^* \mapsto d_{\mu^{-1}} \in \boldsymbol{D}, \qquad K^* \cong \boldsymbol{D},$$

zu K^* isomorph ist. Wir denken uns im folgenden K^* über

$$\mu \in K^* \mapsto \Phi(d_{\mu^{-1}}) = ((\delta_i^j \mu^{-1}),\, \sigma_\mu) \in \boldsymbol{G}_{n+1}(K) \tag{32}$$

kanonisch in die semilineare Gruppe eingebettet und schreiben entsprechend $K^* \subset \boldsymbol{G}_{n+1}(K)$.

Satz 13. *Die Abbildung* $F : a \in \boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}^{n+1}) \mapsto f_a \in \operatorname{Aut} \boldsymbol{P}^n$, $n \geq 2$, *definiert durch* $f_a([\mathfrak{x}]) := [a(\mathfrak{x})]$, *ist ein surjektiver Homomorphismus mit dem Kern*

$$\operatorname{Ker} F = \boldsymbol{D}, \tag{33}$$

so dass gilt

$$\operatorname{Aut} \boldsymbol{P}^n \cong \boldsymbol{G}_{n+1}(K)/K^*, \quad n \geq 2. \tag{34}$$

B e w e i s. dass F ein surjektiver Homomorphismus ist, folgt unmittelbar aus dem Hauptsatz und aus der leicht nachzurechnenden Formel $f_{b \circ a} = f_b \circ f_a$. Somit erhalten wir (34) wegen (31) und (32) aus (33). Zur Berechnung des Kerns $\operatorname{Ker} F$ wählen wir eine Basis von $\boldsymbol{V}^{n+1}$ und betrachten die durch $f_a = \Phi^{-1}((\alpha_i^j), \sigma)$ bestimmte Abbildung aus $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}^{n+1})$, für die $f_a = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^n}$ gelte. Weil f_a speziell (24) erfüllt, erhalten wir wie beim Beweis von Lemma 12 die Beziehung (26), wobei wir nur μ durch μ^{-1} ersetzen:

$$(\alpha_i^j) = (\delta_i^j \mu^{-1}), \qquad f_a = f_\tau \text{ mit } \tau = \sigma_{\mu^{-1}} \circ \sigma,$$

vgl. (23). Da nach Lemma 12 die Abbildung $\sigma \mapsto f_\sigma$ injektiv ist, muss $\tau = \mathrm{id}_K$, also $\sigma = \sigma_\mu$, gelten. Andererseits liegt jedes $d_\mu \in \boldsymbol{D}$ offenbar in $\operatorname{Ker} F$. □

Wir stellen uns nun die Frage, ob die von uns projektive Repères genannten Folgen $(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n; \boldsymbol{e})$ wirklich *Repères im Sinne der gruppentheoretischen Auffassung der Geometrie* sind. Nach E. CARTAN [25] ist das per definitionem genau dann der Fall, wenn die der Geometrie zugrunde liegende Gruppe einfach transitiv über der Menge der Repères wirkt. Wir werden zeigen, dass das für die Gruppe der Autokollineationen im allgemeinen nicht gilt; in dem wichtigen Fall des Körpers $K = \mathbf{R}$ der reellen Zahlen trifft es jedoch zu.

Satz 14. *Es seien* $\boldsymbol{P}^n$, $\boldsymbol{Q}^n$ *n-dimensionale projektive Räume,* $n \geq 1$, *über dem Schiefkörper* K *und* $\sigma \in \operatorname{Aut} K$ *ein Automorphismus von* K. *Dann existiert zu jedem Paar projektiver Repères* $(\boldsymbol{a}_j; \boldsymbol{e})$, $(\boldsymbol{a}'_j; \boldsymbol{e}')$ *von* $\boldsymbol{P}^n$ *bzw.* $\boldsymbol{Q}^n$ *eine von einer* σ*-linearen Abbildung erzeugte Kollineation* $f : \boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{Q}^n$ *derart, dass*

$$f(\boldsymbol{a}_j) = \boldsymbol{a}'_j, \quad f(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{e}' \tag{35}$$

gelten. Ist K *kommutativ, so ist* f *durch* (35) *und* σ *eindeutig bestimmt. Umgekehrt, ist eine derartige Abbildung für ein gegebenes Paar* $(\boldsymbol{a}_j; \boldsymbol{e})$, $(\boldsymbol{a}'_j; \boldsymbol{e}')$ *und ein* $\sigma \in \operatorname{Aut} K$ *eindeutig bestimmt, so ist* K *ein Körper.*

B e w e i s. Nach Satz 2.2 finden wir Basen $(\mathfrak{a}_j)$ von $\boldsymbol{V}^{n+1}$, $(\mathfrak{a}'_j)$ von $\boldsymbol{W}^{n+1}$ derart, dass $(\boldsymbol{a}_j; \boldsymbol{e})$ bzw. $(\boldsymbol{a}'_j; \boldsymbol{e}')$ die zugehörigen projektiven Repères sind. Betrachten wir (20) als Definition von f, so folgt aus $\sigma(0) = 0$ und $\sigma(1) = 1$ sofort (35). Sind nun g, h Kollineationen, die $(\boldsymbol{a}_j; \boldsymbol{e})$ in $(\boldsymbol{a}'_j; \boldsymbol{e}')$ überführen und durch σ-lineare Abbildungen erzeugt werden, so ist $f = h^{-1} \circ g$ eine Autokollineation von $\boldsymbol{P}^n$, die (24) erfüllt und durch eine lineare Abbildung erzeugt werden kann. Die Behauptung des Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden

Lemma 15. *Der Skalarbereich von* $\boldsymbol{P}^n$, $n \in \mathbf{N}$, *ist genau dann ein Körper, wenn es nur eine einzige, von einer linearen Abbildung* $a \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1})$ *erzeugte Kollineation* f *gibt, die* (24) *erfüllt, nämlich* $f = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^n}$.

B e w e i s. Wie beim Beweis von Lemma 12 ergibt sich aus (24) die Bedingung

$$a(\mathfrak{a}_j) = \mathfrak{a}_j \mu, \qquad \mu \in K^*, \tag{36}$$

für die gesuchte lineare Abbildung a. Ist K ein Körper, so erzeugt jede dieser Abbildungen die identische Kollineation $f = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^n}$, die somit durch (24) und die Linearitätsforderung eindeutig bestimmt ist. Wenn K nicht kommutativ ist, so existieren $\mu, \alpha \in K^*$ mit $\mu\alpha\mu^{-1} \neq \alpha$. Weil $n \geq 1$ ist, hat der zugehörige Vektorraum mindestens die Dimension zwei. Wir betrachten den Vektor $\mathfrak{x} := \mathfrak{a}_0\alpha + \mathfrak{a}_1$ und die durch (36) bestimmte lineare Abbildung a, die f erzeugen möge. Dann ist

$$f([\mathfrak{x}]) = [a(\mathfrak{x})] = [\mathfrak{a}_0\mu\alpha + \mathfrak{a}_1\mu] = [\mathfrak{a}_0\mu\alpha\mu^{-1} + \mathfrak{a}_1] \neq [\mathfrak{a}_0\alpha + \mathfrak{a}_1] = [\mathfrak{x}],$$

weil die Vektoren $\mathfrak{a}_0\alpha + \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_0\mu\alpha\mu^{-1} + \mathfrak{a}_1$ offenbar linear unabhängig sind. Damit ist f eine von der Identität verschiedene, linear erzeugt Autokollineation, die (24) erfüllt. □

Folgerung 16. *Es sei $K = \mathbf{R}$ der Körper der reellen (oder der rationalen) Zahlen. Ist $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$ eine kollineare Abbildung mit $\mathrm{Dim}\, f(\boldsymbol{P}_o^n) \geq 2$, so wird f durch eine lineare Abbildung der zugehörigen Vektorräume erzeugt. Die Gruppe $\mathrm{Aut}\, \boldsymbol{P}^n$, $n \geq 2$, wirkt einfach transitiv auf der Menge der projektiven Repères.*

B e w e i s. Wie man leicht zeigt, vgl. Übung I.2.1.3, ist die identische Abbildung der einzige Automorphismus des Körpers der rationalen und der reellen Zahlen. Daher gibt es in diesen Fällen nach Satz 14 nur eine einzige Kollineation, die (35) erfüllt.

Hinweis. Um die Behauptung über die Automorphismen σ von $\mathbf{R}$ zu zeigen, beweise man zuerst, dass für jeden derartigen Automorphismus die Einschränkung $\sigma|\mathbf{Q}$ auf den Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen die Identität $\mathrm{id}_{\mathbf{Q}}$ ist. Danach erhält man aus $\sigma(\xi^2) = (\sigma(\xi))^2$ die Monotonie und daraus die Stetigkeit von σ, woraus $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ folgt. □

Übung 2. Es sei $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften: a) $f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$; b) $f(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \subset f(\boldsymbol{x}) \vee f(\boldsymbol{y})$ für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}^n$; c) $f(\boldsymbol{P}_o^n)$ ist ein projektiver Unterraum der Dimension n. Man beweise: f ist eine injektive kollineare Abbildung.

Übung 3. Es seien $\boldsymbol{P}_o^n$, $\boldsymbol{Q}_o^m$ projektive Räume über dem Körper K, $(\boldsymbol{a}_j; \boldsymbol{e})$ ein projektives Repère von $\boldsymbol{P}_o^n$ und $(\boldsymbol{b}_j; \boldsymbol{b})$, $j = 0, \ldots, n$, eine Folge von Punkten in $\boldsymbol{Q}^m$. Man zeige anhand von Beispielen, dass keine kollineare Abbildung $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$ zu existieren braucht, für die $f(\boldsymbol{a}_j) = \boldsymbol{b}_j$, $j = 0, \ldots, n$, und $f(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{b}$ gelten, und dass durch diese Bedingungen und die Festsetzung $\sigma = \mathrm{id}_K$ für den zu f gehörenden Automorphismus von K auch f im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist. (Man vergleiche dagegen den Satz I.5.3.4 für affine Abbildungen!)

Übung 4. Es seien $\boldsymbol{P}_o^n$, $\boldsymbol{Q}_o^m$, $K, (\boldsymbol{a}_j; \boldsymbol{e})$ wie in Übung 3 und $(\boldsymbol{b}_0, \ldots, \boldsymbol{b}_r; \boldsymbol{b})$, $n \geq r \geq 2$, eine projektiv abhängige Folge von Punkten aus $\boldsymbol{Q}^m$, von der jede Teilfolge aus $r+1$ Punkten projektiv unabhängig ist. Man beweise: Zu jedem Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}\, K$ gibt es genau eine kollineare Abbildung $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$ mit den Eigenschaften: a) $f(\boldsymbol{a}_\rho) = \boldsymbol{b}_\rho$, $\rho = 0, \ldots, r$; b) $f(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{b}$; c) $f(\boldsymbol{a}_{r+1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{o}$; d) f wird durch eine σ-lineare Abbildung der zugehörigen Vektorräume $c : \boldsymbol{V}^{n+1} \to \boldsymbol{W}^{m+1}$ erzeugt.

Übung 5. Es seien $\boldsymbol{V}^{n+1}$, $\boldsymbol{W}$ rechte Vektorräume über den Schiefkörpern K_1 bzw. K_2, $n \geq 2$ und $\mathfrak{P}^n = \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}(\boldsymbol{W})$ die zugehörigen projektiven Geometrien (vgl. Definition 1.1). Eine Abbildung $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}$ heißt *monoton*, wenn aus $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathfrak{P}$, $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, stets die Relation

$F(\boldsymbol{A}) \subset F(\boldsymbol{B})$ folgt. Man beweise: Ist F bijektiv, und sind F und F^{-1} monoton, so ist $f := F|\boldsymbol{P}_o^n$ eine Kollineation. Umgekehrt erzeugt jede Kollineation f einen Isomorphismus der Verbände $F : [\mathfrak{P}^n, \subset] \to [\mathfrak{Q}, \subset]$. (In R. Baer [4], § III.1, werden die projektiven Abbildungen als derartige Isomorphismen der Verbände definiert.)

Übung 6. Man beschreibe in Analogie zu Folgerung 8 alle kollinearen Abbildungen $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$ mit $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}_o^n) = 0$.

Übung 7. Es sei $f \in \operatorname{Aut} \boldsymbol{P}^n$, $n \geq 2$, und F der durch f nach Übung 5 bestimmte Automorphismus des Verbandes $[\mathfrak{P}^n, \subset]$. Man zeige: Gilt für ein k mit $0 \leq k < n$ die Gleichung $F|\boldsymbol{P}_{n,k} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}_{n,k}}$, so ist $f = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^n}$.

Übung 8. *Grobklassifikation der kollinearen Abbildungen.* Es seien $\boldsymbol{P}_o^n, \boldsymbol{Q}_o^m$, $n, m \geq 2$, projektive Räume über dem Schiefkörper K. Wir definieren:

$$\mathcal{F} := \{f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m | f \text{ kollinear}, \ \operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}_o^n) \geq 2\},$$
$$\boldsymbol{G} := \operatorname{Aut} \boldsymbol{Q}^m \times \operatorname{Aut} \boldsymbol{P}^n.$$

Vermöge $((g,h), f) \in \boldsymbol{G} \times \mathcal{F} \mapsto g \circ f \circ h^{-1} \in \mathcal{F}$ wirkt $\boldsymbol{G}$ über $\mathcal{F}$; es bezeichne $\sim$ die entsprechende Äquivalenzrelation. Man beweise: Es gilt $f_1 \sim f_2$ genau dann, wenn $\operatorname{Dim} f_1(\boldsymbol{P}_o^n) = \operatorname{Dim} f_2(\boldsymbol{P}_o^n)$ ist.

Übung 9. Man beweise, dass die Gruppe $\operatorname{Aut} \boldsymbol{P}^n$, $n \geq 2$, transitiv auf den *Graßmann-Mannigfaltigkeiten* $\boldsymbol{P}_{n,k}$ der k-Ebenen des n-dimensionalen projektiven Raumes wirkt. (Dazu betrachte man die durch die kanonische Abbildung (1.2) definierte Realisierung der k-Ebenen als Teilmengen des Punktraumes und die durch die Wirkung von $\operatorname{Aut} \boldsymbol{P}^n$ über $\boldsymbol{P}^n$ auf ihnen definierte Wirkung.) Man bestimme die Isotropiegruppe einer k-Ebene. (Bekanntlich versteht man unter der *Isotropiegruppe* oder *stationären Untergruppe* eines Elements x des transformierten Raums die Menge aller derjenigen Elemente g der transformierenden Gruppe G, die x fest lassen, für die also $gx = x$ gilt, vgl. I, § 1.4.)

1.4 Doppelverhältnis und projektive Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns zuerst mit der Geometrie auf der projektiven Geraden über einem Schiefkörper K beschäftigen. Die grundlegende Invariante dieser Geometrie ist das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten, das mit Hilfe einer projektiven Skala auf der Geraden definiert wird und sich als von der Wahl dieser Skala unabhängig erweist. Dieses Doppelverhältnis ist im allgemeinen bei beliebigen Kollineationen nicht invariant; es wird durch den zu der Kollineation gehörenden Automorphismus von K transformiert. Die Forderung nach der Invarianz des Doppelverhältnisses führt uns auf die projektiven Abbildungen, die etwas spezieller als die kollinearen sind. Sie bilden ebenfalls eine Kategorie, deren Objekte die projektiven Geometrien (oder Räume) über dem Schiefkörper K sind, und die im allgemeinen Fall kleiner als die Kategorie der kollinearen Abbildungen ist. Für den Körper $K = \mathbf{R}$ der reellen Zahlen sind alle kollinearen Abbildungen f mit $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{P}_o^n) \geq 2$ projektiv.

1.4.1 Die Gruppe $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^1$.

Bereits in Beispiel 3.3 haben wir bemerkt, dass beliebige Bijektionen zwischen Geraden kollinear sind. Der Hauptsatz der projektiven Geometrie gilt nicht für $n = 1$, und die Gruppe $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^1$ ist noch nicht definiert. Um die projektive Geometrie auf einer Geraden durch eine Gruppe zu charakterisieren, gehen wir folgendermaßen vor: Wir betrachten die Graßmann-Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{P}_{n,1}$ der Geraden einer n-dimensionalen projektiven Geometrie, $n > 1$. Die Gruppe der Autokollineationen des $\boldsymbol{P}^n$ wirkt transitiv über $\boldsymbol{P}_{n,1}$ (Übung 3.9); es bezeichne H die Isotropiegruppe der Geraden $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{P}^n$. Die Elemente $h \in H$ lassen die Gerade $\boldsymbol{B}$ als ganzes fest, sie transformieren also die Punkte von $\boldsymbol{B}$ ineinander; damit ist eine Wirkung von H über $\boldsymbol{B}$ definiert, die es gestattet, eine inhaltsreiche projektive Geometrie auf der Geraden zu entwickeln. Um diese Wirkung zu beschreiben, wählen wir ein projektives Repère $(\boldsymbol{a}_i; \boldsymbol{e})$ von $\boldsymbol{P}^n$ so, dass $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_1$ eine Koordinatenachse ist. Eine semilineare Abbildung a, welche eine Kollineation $h \in H \subset \mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^n$ erzeugt, muss dann in einer dieses Repère bestimmenden Basis $(\mathfrak{a}_i)$, $i = 0, \ldots, n$, die Bedingungen

$$a(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{a}_0 b_0^0 + \mathfrak{a}_1 b_0^1, \qquad a(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{a}_0 b_1^0 + \mathfrak{a}_1 b_1^1 \tag{1}$$

erfüllen, wobei, weil h eine Kollineation ist, die 2×2-Matrix (b_β^α) den Rang zwei haben muss. Umgekehrt bestimmt jede semilineare Abbildung des zu $\boldsymbol{P}^n$ gehörenden Vektorraums $\boldsymbol{V}^{n+1}$ mit der Eigenschaft (1) eine zu H gehörende Kollineation. Weil die übrigen Koeffizienten b_i^j, $i > 1$ oder $j > 1$, die Wirkung von h auf $\boldsymbol{B}$ nicht beeinflussen, erhalten wir für die projektiven Geraden dieselbe Ausgangssituation wie für die höherdimensionalen projektiven Räume: Die Formeln (3.27) bis (3.33) sind auch im Fall $n = 1$ korrekt; sie beschreiben die Wirkung der Einschränkungen $h|\boldsymbol{B}$ auf die Gerade $\boldsymbol{B}$, wobei natürlich sehr viele verschiedene Elemente $h \in H$ dieselbe Einschränkung ergeben. Wir erhalten einen Homomorphismus F von $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}^2)$ in die Gruppe aller Bijektionen von $\boldsymbol{P}^1 = \boldsymbol{B}$, der wie in Satz 3.13 definiert wird. Setzt man

$$\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^1 := \{f_a | a \in \boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}^2)\} = F(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}^2)), \tag{2}$$

so bleiben die Formeln (3.33), (3.34) auch für $n = 1$ gültig. Wir nennen $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^1$ die *Automorphismengruppe der projektiven Geraden.* Man macht sich leicht klar, dass formal der Fall $n = 0$ eingeschlossen ist; hier gilt $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}^1) = \boldsymbol{D}$ und $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^0$ enthält nur das Einselement. *Der Leser überprüft leicht, dass* Satz 3.14, Lemma 3.15 *und* Folgerung 3.16 *einschließlich der Beweise auch im Fall $n = 1$ gültig bleiben, wobei natürlich das Wort* „Kollineation“ *durch* „Automorphismus von $\boldsymbol{P}^1$“ *zu ersetzen ist.*

1.4.2 Doppelverhältnis

Wir betrachten nun die projektive Gerade $\boldsymbol{P}^1$ unter der Wirkung der Gruppe $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^1$ und fragen nach den Invarianten dieser Transformationsgruppe. Nach Satz 3.14, angewandt auf den Fall $\boldsymbol{Q}^1 = \boldsymbol{P}^1$, wirkt $\mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^1$ transitiv auf den Tripeln $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ aus paarweise verschiedenen Punkten der Geraden, die wir ja stets als Punkte eines projektiven Repères betrachten können. Eine Invariante kann also erst für Quadrupel $w = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ von Punkten der Geraden $\boldsymbol{P}^1$ erwartet werden. Der Ausgangspunkt für die Bestimmung einer derartigen Invarianten ist die projektive Skala auf der Geraden, s. Beispiel 1.3. Seien etwa die Punkte $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ des Quadrupels w paarweise verschieden. Dann finden wir nach Satz

2.2 eine bis auf einen gemeinsamen Faktor $\mu \in K^*$ eindeutig bestimmte Basis $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1)$ des zu $\boldsymbol{P}^1$ gehörenden Vektorraums $\boldsymbol{V}^2$, die

$$[\mathfrak{a}_0] = \boldsymbol{c},\ [\mathfrak{a}_1] = \boldsymbol{d},\ [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1] = \boldsymbol{b} \tag{3}$$

erfüllt. Es bezeichne ξ den zu $\boldsymbol{a}$ gehörenden Wert der projektiven Skala, die durch diese Basis bestimmt ist. Ist der Skalarbereich K nicht kommutativ, so spielt allerdings der durch die Willkür bei der Wahl der Basis auftretende Faktor $\mu \in K^*$ eine Rolle; nach Folgerung 2.4 hängen die verschiedenen Skalenwerte, die man bei Variation der (3) genügenden Basis erhält, durch innere Automorphismen von K zusammen. Also ist dem Quadrupel w nicht der Skalenwert selbst, sondern nur seine Konjugiertheitsklasse unabhängig von der Wahl der Basis zugeordnet. Wir bezeichnen diese *Konjugiertheitsklasse* mit

$$< \xi > := \{\mu\xi\mu^{-1} | \mu \in K^*\},\ \text{falls } \xi \in K,\ < \infty > := \{\infty\}. \tag{4}$$

Die letzte Festsetzung dient nur dazu, den Fall $\xi = \infty$, der ja für $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d}$ auftritt, mit einzuordnen. Ist K ein Körper, so können wir uns diese Überlegungen sparen, da jede Konjugiertheitsklasse nur aus dem Element selbst besteht. Allgemein verabreden wir, $< \xi >= \xi$ zu setzen, wenn $< \xi >$ einelementig ist. Speziell gelten für jeden Schiefkörper

$$< 0 >= 0,\ < 1 >= 1,\ < \infty >= \infty. \tag{5}$$

Wir fassen nun unsere Überlegungen in der folgenden Definition zusammen, die sich wieder auf den n-dimensionalen Raum bezieht, da wir die Geraden ja meist als eingebettete Objekte zu betrachten haben.

Definition 1. Es sei $\boldsymbol{P}^n$ ein projektiver Raum über dem Schiefkörper K. Ein Quadrupel $w = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ von Punkten des $\boldsymbol{P}^n$ heißt ein *Wurf*, wenn die Punkte $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ kollinear und wenigstens drei von ihnen paarweise verschieden sind. Ein Wurf heißt *speziell*, wenn $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ paarweise voneinander verschieden sind. Ist w ein spezieller Wurf, so ist sein *Doppelverhältnis*, kurz DV, definiert durch

$$\mathrm{DV}(w) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) := < \xi >,$$

wobei $\xi = \xi(\boldsymbol{a})$ der $\boldsymbol{a}$ entsprechende Skalenwert in einer (3) genügenden Basis des Vektorraums der Geraden $\boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d}$ ist. □

Nach den obigen Überlegungen *ist* $\mathrm{DV}(w)$ *unabhängig von der Wahl der* (3) *genügenden Basis.* Speziell gelten wegen (3) und (5)

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = 1,\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = 0,\ (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = \infty. \tag{6}$$

Das DV hängt jedoch von der Reihenfolge der Punkte des Wurfes ab. Um die Unsymmetrie in Definition 1 aufzuheben und das DV für einen beliebigen Wurf zu definieren, nehmen wir an, dass alle vier Punkte paarweise verschieden sind und untersuchen, wie sich das DV bei einer Permutation der Punkte des Wurfes ändert. Der Fall, dass zwei Punkte des Wurfes gleich sind, wird anschließend betrachtet; man beachte, dass nach (6) dieser Fall genau dann eintritt, wenn das DV einen der Werte (5) annimmt, was sofort aus den Eigenschaften der projektiven Skala folgt. Da sich jede Permutation der Symmetriegruppe S_4 als Produkt von Transpositionen (1 2), (2 3), (3, 4) darstellen lässt (vgl. Übung I.1.2.7), genügt es, die Wirkung dieser Transpositionen zu betrachten. Wir zeigen:

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})^{-1}. \tag{7}$$

In dieser und entsprechenden algebraischen Formeln sind die algebraischen Operationen auf alle Elemente der Konjugiertheitsklasse anzuwenden; es genügt offenbar, den Beweis für einen Vertreter $\xi \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ zu führen. Nach Definition 1 gelten dann wegen (3), wobei sich die zweite Formelzeile auf die Berechnung von $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ bezieht:

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathfrak{a} & = & \mathfrak{c} + \mathfrak{d}\xi, & \qquad & \mathfrak{b} & = & \mathfrak{c} + \mathfrak{d}, \\ \hat{\mathfrak{a}} & = & \hat{\mathfrak{c}} + \hat{\mathfrak{d}}, & & \hat{\mathfrak{b}} & = & \hat{\mathfrak{c}} + \hat{\mathfrak{d}}\hat{\xi}, \end{array} \tag{8}$$

wobei die Vektoren jeweils die Punkte repräsentieren müssen:

$$\boldsymbol{a} = [\mathfrak{a}],\ \boldsymbol{b} = [\mathfrak{b}],\ \boldsymbol{c} = [\mathfrak{c}],\ \boldsymbol{d} = [\mathfrak{d}], \tag{9}$$

$$\hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\alpha,\ \hat{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}\beta,\ \hat{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}\gamma,\ \hat{\mathfrak{d}} = \mathfrak{d}\delta, \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K^*). \tag{10}$$

Mit (9) sind die Gleichungen (8) und (10) erfüllt, wenn wir

$$\hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a},\ \hat{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b},\ \hat{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c},\ \hat{\mathfrak{d}} = \mathfrak{d}\xi$$

setzen; $\hat{\xi}$ ist dabei aus

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{c} + (\mathfrak{d}\xi)\hat{\xi} = \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$$

zu bestimmen, was auf $\xi\hat{\xi} = 1$, also die Behauptung (7) bei Vertauschung von $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ führt; die Vertauschung von $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ erledigt man analog. Genau so elementar beweist man die Formel (s. Beweis von Satz 1 weiter unten)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}; \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) = 1 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}). \tag{11}$$

Bisher haben wir Würfe aus vier verschiedenen Punkten betrachtet, daher ist zum Beispiel $\xi \neq 0$, und $\hat{\xi} = \xi^{-1}$ ist sinnvoll. Ist nun $\xi = 0$, so ist $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$, und vertauschen wir $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, so folgt aus (6)

$$0 = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \mapsto (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}) = \infty.$$

Wenn wir formal $0^{-1} := \infty$ setzen, bleibt die Beziehung $\hat{\xi} = \xi^{-1}$ auch in diesem Fall gültig. Betrachtet man bei derselben Vertauschung den Fall $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d}$, so erkennt man analog, dass $\infty^{-1} := 0$ gesetzt wieder das richtige Ergebnis liefert. Ist schließlich $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d}$, und betrachtet man die Vertauschung von $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, so gilt nach (6)

$$\infty = (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \mapsto (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}; \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) = \infty.$$

Mit der Festlegung $1 - \infty := \infty$ bleibt (11) auch in diesem Fall richtig. Wir fassen zusammen:

Satz 1. *Es sei* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ *ein Wurf von vier verschiedenen Punkten des n-dimensionalen projektiven Raums* $\boldsymbol{P}^n$ *über dem Schiefkörper K. Dann gelten für das Doppelverhältnis die Formeln* (7) *und* (11). *Ferner ist*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}; \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}; \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}). \tag{12}$$

Mit Hilfe von (12) *lässt sich die Definition des* DV *auf beliebige Würfe eindeutig ausdehnen. Setzt man*

$$0^{-1} := \infty,\ \infty^{-1} := 0,\ 1 - \infty := \infty, \tag{13}$$

so gelten die Regeln (7), (11), (12) *für beliebige Würfe. Ist* $\xi \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ *ein beliebiges* DV, *so repäsentieren*

$$\xi,\ \xi^{-1},\ 1-\xi,\ 1-\xi^{-1},\ (1-\xi)^{-1},\ \xi(\xi-1)^{-1} \tag{14}$$

alle Doppelverhältnisse, die bei Permutationen der vier Punkte des Wurfes auftreten können.

Beweis. Wir beweisen zuerst Formel (11). Wegen der Vertauschung von $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ist die zweite Formelzeile von (8) jetzt

$$\hat{\mathfrak{a}} = \hat{\mathfrak{b}} + \hat{\mathfrak{d}}\hat{\xi}, \qquad \hat{\mathfrak{c}} = \hat{\mathfrak{b}} + \hat{\mathfrak{d}}$$

Setzt man in diese Gleichungen (10) ein, benutzt die erste Zeile von (8) und vergleicht die Koeffizienten der Basisdarstellungen bezüglich der Basis $(\mathfrak{c}, \mathfrak{d})$ des Vektorraums der Geraden, so folgen

$$\alpha = \beta = \gamma = -\delta, \qquad \hat{\xi} = 1 - \xi,$$

und das ist die Behauptung (11). Für einen speziellen Wurf mit nur drei paarweise verschiedenen Punkten prüft man in den einzelnen Fällen $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ leicht nach, dass ebenfalls (11) gilt, wenn man (13) berücksichtigt. Die erste Gleichung der Formel (12) ergibt sich aus (7) und (11), wobei die Zerlegung der Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3)(3\ 4)(1\ 2)(2\ 3)$$

anzuwenden ist. Die beiden anderen Gleichungen folgen unmittelbar aus (7) bei Anwendung auf beide Paare der DV der erhaltenen Gleichung. Sind in einem Wurf nur drei paarweise verschiedene Punkte vorhanden, so kann man durch eine der in (12) auftretenden Permutationen stets erreichen, dass die letzten drei Punkte paarweise verschieden sind; das damit definierte DV ist dann durch Ausdehnung der Gleichung (12) auf diesen Fall korrekt definiert, wobei (7), (11) und (12) für das DV eines beliebigen Wurfes gelten. Da nach (12) jeweils vier der DV der 24 aus einem durch Permutation entstehenden Würfe gleich sind, können bei diesen Permutationen höchstens sechs verschiedene Werte auftreten; diese ergeben sich durch ein- oder zweimaliges Anwenden von (7) und (11) als die in (14) angegebenen Ausdrücke. In Spezialfällen können natürlich von diesen noch einige zusammenfallen; so gibt es ja für $K = \mathbf{Z}_2$ überhaupt nur drei mögliche Werte $0, 1, \infty$. □

Übung 1. Es seien $\boldsymbol{P}^1$ eine projektive Gerade über dem Schiefkörper K, $\xi : \boldsymbol{P}^1 \to \hat{K}$ eine beliebige projektive Skala auf $\boldsymbol{P}^1$, $\boldsymbol{b}_j \in \boldsymbol{P}^1$, $j = 1, \ldots, 4$ vier verschiedene Punkte mit den Skalenwerten $\beta_j := \xi(\boldsymbol{b}_j) \neq \infty$. Man beweise folgende Formel für das DV:

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2; \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4) = < (\beta_1 - \beta_3)(\beta_1 - \beta_4)^{-1}[(\beta_2 - \beta_3)(\beta_2 - \beta_4)^{-1}]^{-1} > . \tag{15}$$

(Hinweis. Man wende die Transformationsformel (2.10) aus Beispiel 2.2 an.)

Übung 2. Es seien K ein Körper, $\boldsymbol{P}^1$ eine projektive Gerade über K und $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$ ein Wurf in $\boldsymbol{P}^1$. Mit (x_j, y_j) bezeichnen wir die homogenen Koordinaten des Punktes $\boldsymbol{b}_j$ bezüglich eines beliebigen projektiven Repères $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{e})$ von $\boldsymbol{P}^1$, $j = 1, \ldots, 4$ (s. Folgerung 2.3). Man beweise den folgenden Ausdruck für das DV in den Determinanten der homogenen Koordinaten:

$$(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2; \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{vmatrix}}. \tag{16}$$

Die Formeln (15) und (16) sind die klassischen Ausdrücke für das DV; auf sie geht die Bezeichnung „Doppelverhältnis“ zurück. Für das Verhalten des DV bei kollinearen Abbildungen gilt

Satz 2. *Es sei* $f : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{Q}^m_o$ *eine kollineare Abbildung, die durch eine* σ*-lineare Abbildung* $g : \boldsymbol{V}^{n+1} \to \boldsymbol{W}^{m+1}$ *mit* $\sigma \in \operatorname{Aut} K$ *erzeugt wird. Dann gilt für jeden Wurf* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ *in* $\boldsymbol{P}^n$*: Entweder ist*

$$\operatorname{Dim}(f(\boldsymbol{a}) \vee f(\boldsymbol{b}) \vee f(\boldsymbol{c}) \vee f(\boldsymbol{d})) < 1,$$

oder $(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}), f(\boldsymbol{c}), f(\boldsymbol{d}))$ *ist ein Wurf in* $\boldsymbol{Q}^m$ *mit dem* DV

$$(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}); f(\boldsymbol{c}), f(\boldsymbol{d})) = \sigma((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})). \tag{17}$$

Speziell ist das DV *bei jeder Kollineation, die durch eine semilineare Abbildung mit einem inneren Automorphismus* $\sigma = \sigma_\mu$ *induziert wird, invariant.*

B e w e i s. Es sei etwa $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{d}$ und $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d}$. Gilt $f(\boldsymbol{c}) = f(\boldsymbol{d})$, so ist $\operatorname{Dim} f(\boldsymbol{H}) < 1$, und es tritt der erste Fall ein. Falls $f(\boldsymbol{c}) \neq f(\boldsymbol{d})$ gilt, ist $\hat{\boldsymbol{H}} := f(\boldsymbol{H}) = f(\boldsymbol{c}) \vee f(\boldsymbol{d})$ eine Gerade, und nach Satz 3.6 ist $f|\boldsymbol{H}$ eine Kollineation. Daher ist $(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}), f(\boldsymbol{c}), f(\boldsymbol{d}))$ wieder ein Wurf. Es seien $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{V}$, $\hat{\boldsymbol{U}} \subset \boldsymbol{W}$ die zu $\boldsymbol{H}$ bzw. $\hat{\boldsymbol{H}}$ gehörenden zweidimensionalen Unterräume. Dann gilt $g(\boldsymbol{U}) = \hat{\boldsymbol{U}}$. Wegen (12) können wir annehmen, dass $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ paarweise verschieden sind, was dann auch für ihre Bilder gilt. Wählen wir die Basis $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1)$ von $\boldsymbol{U}$ wie in Definition 1 angegeben, so gelten mit den dort verwandten Bezeichnungen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1\xi \text{ und } g(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}_0) + g(\mathfrak{a}_1)\sigma(\xi),$$

weil g eine σ-lineare Bijektion ist. Da die Bilder der Basis dem Bild des Wurfes entsprechen, gehört $\sigma(\xi)$ zu dem DV dieses Bildes, und es gilt (17). Die letzte Behauptung ergibt sich daraus, dass jeder innere Automorphismus jede Konjugiertheitsklasse invariant lässt. □

1.4.3 Projektive Abbildungen.

Die Überlegungen, die uns auf die Definition 1 des DV führten, zeigen, dass es sich beim DV um einen Grundbegriff der projektiven Geometrie handelt, der mit dem eines Streckenverhältnisses paralleler Strecken in der affinen Geometrie und dem Abstand in der euklidischen Geometrie vergleichbar ist. In der Tat werden wir im nächsten Abschnitt über affine Geometrie und in dem Kapitel über metrische Geometrien feststellen, dass sich diese Begriffe auf das DV zurückführen lassen. Daher ist es sinnvoll, von einer projektiven Abbildung die Invarianz des DV selbst zu fordern, was die σ-linearen Abbildungen mit einem nicht inneren Automorphismus σ ausschließt:

Definition 2. Eine Abbildung $f: \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$ heißt *projektiv*, wenn sie kollinear ist und das DV invariant lässt, genauer: für jeden Wurf $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ in $\boldsymbol{P}^n$, für den $f(\boldsymbol{a}) \vee f(\boldsymbol{b}) \vee f(\boldsymbol{c}) \vee f(\boldsymbol{d})$ wieder eine Gerade ist, gilt

$$(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}); f(\boldsymbol{c}), f(\boldsymbol{d})) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}). \tag{18}$$

□

Folgerung 3. *Die Klasse der Räume über dem Schiefkörper K mit den projektiven Abbildungen als Morphismen ist eine Kategorie.* □

Satz 4. *Es seien K ein Körper und $\boldsymbol{P}^n$, $\boldsymbol{Q}^n$ n-dimensionale projektive Räume über K, $n > 0$. Eine Abbildung $f: \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^n$ ist genau dann eine projektive Bijektion, die durch einen linearen Isomorphismus der zugehörigen Vektorräume erzeugt wird, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:*
1. *$f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$.*
2. *f führt jeden Wurf wieder in einen Wurf über.*
3. *Es gilt* (18) *für jeden Wurf des $\boldsymbol{P}^n$, d.h. f lässt das* DV *invariant.*

B e w e i s. Aus 1 und 2 folgt sofort, dass f injektiv ist; dazu betrachte man einen Wurf $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ des $\boldsymbol{P}^n$; weil das Bild dieses Wurfes wieder ein Wurf ist, müssen die drei Bildpunkte paarweise verschieden sein. Für jeden Punkt $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{d}$, ergibt sich aus demselben Grund $f(\boldsymbol{b}) \in f(\boldsymbol{c}) \vee f(\boldsymbol{d})$. Also gilt $f(\boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d}) \subset f(\boldsymbol{c}) \vee f(\boldsymbol{d})$. Es sei nun $\xi \in \hat{K}$ beliebig und $\hat{\boldsymbol{a}}$ derjenige Punkt aus $f(\boldsymbol{c}) \vee f(\boldsymbol{d})$, für den

$$\xi = (\hat{\boldsymbol{a}}, f(\boldsymbol{b}); f(\boldsymbol{c}), f(\boldsymbol{d}))$$

gilt; weil K ein Körper ist, ist $\hat{\boldsymbol{a}}$ durch $\xi \in \hat{K}$ wegen der Bijektivität der projektiven Skala umkehrbar eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt für das $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d}$ mit $\xi = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$. Wegen der Eigenschaften 2 und 3 gilt daher $f(\boldsymbol{a}) = \hat{\boldsymbol{a}}$, und daher ist $f(\boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{c}) \vee f(\boldsymbol{d})$. Somit ist f kollinear und nach Satz 3.6 eine Kollineation. Für $n = 1$ bedeutet das eben Bewiesene

$$f([\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 \xi]) = [\hat{\mathfrak{a}}_0 + \hat{\mathfrak{a}}_1 \xi],$$

wobei die Basen $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1)$, $(\hat{\mathfrak{a}}_0, \hat{\mathfrak{a}}_1)$ der $\boldsymbol{P}^1$, $\boldsymbol{Q}^1$ entsprechenden Vektorräume wie in Definition 1 zur Bestimmung der DV gewählt sind. Damit ist klar, dass f durch diejenige lineare Abbildung erzeugt wird, die $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1)$ in $(\hat{\mathfrak{a}}_0, \hat{\mathfrak{a}}_1)$ überführt. Für $n \geq 2$ folgt aus dem Hauptsatz, dass f durch eine σ-lineare Bijektion der Vektorräume erzeugt wird. Weil für Körper die Werte des DV die Elemente aus $\hat{K}$ sind und keine echten inneren Isomorphismen existieren, muss nach Bedingung 3 wegen Satz 2, (17), $\sigma = \mathrm{id}_K$ gelten, also f ein linearer Isomorphismus sein. Umgekehrt ist klar, dass jede derart erzeugte Abbildung die Eigenschaften 1–3 besitzt. □

Aus Satz 4 und Satz 3.14 erhält man sofort

Folgerung 5. *Es seien K ein Körper und $\boldsymbol{P}^n$, $\boldsymbol{Q}^n$ projektive Räume über K. Dann gibt es zu jedem Paar projektiver Repères $(\boldsymbol{a}_j;\, \boldsymbol{e})$ von $\boldsymbol{P}^n$, $(\hat{\boldsymbol{a}}_j;\, \hat{\boldsymbol{e}})$ von $\boldsymbol{Q}^n$, $j = 1, \ldots, n$, genau eine projektive Bijektion $f : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{Q}^n_o$ mit $f(\boldsymbol{a}_j) = \hat{\boldsymbol{a}}_j$, $f(\boldsymbol{e}) = \hat{\boldsymbol{e}}$.* □

Übung 3. Es sei K ein Körper. Man zeige, dass die Zuordnung, welche jeder linearen Abbildung $a : \boldsymbol{V}^{n+1} \to \boldsymbol{W}^{m+1}$ die von ihr erzeugte projektive Abbildung zuordnet, ein kovarianter Funktor der Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume über K auf die Kategorie der projektiven Abbildungen endlich-dimensionaler projektiver Räume über K ist.

Übung 4. Es seien K ein Schiefkörper und $\boldsymbol{P}^n$, $\boldsymbol{Q}^m$ projektive Räume über K. Ferner seien $(\boldsymbol{b}_j)$, $(\hat{\boldsymbol{b}}_j)$, $j = 1, \ldots, 4$, Würfe in $\boldsymbol{P}^n$ bzw. $\boldsymbol{Q}^m$. Man zeige: Es gibt genau dann eine projektive Abbildung $f : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{Q}^m_o$ mit $f(\boldsymbol{b}_j) = \hat{\boldsymbol{b}}_j$, $j = 1, \ldots, 4$, wenn $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2; \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4) = (\hat{\boldsymbol{b}}_1, \hat{\boldsymbol{b}}_2; \hat{\boldsymbol{b}}_3, \hat{\boldsymbol{b}}_4)$ gilt.

Satz 6. *Es sei K ein Schiefkörper, der die folgende Eigenschaft besitzt:*
I. *Jeder Automorphismus $\sigma \in \operatorname{Aut} K$, der $\sigma(<\xi>) = <\xi>$ für alle Konjugiertheitsklassen $<\xi> \subset K$ erfüllt, ist ein innerer Automorphismus.*
Dann ist für jeden projektiven Raum $\boldsymbol{P}^n$, $n \geq 2$, über K die Gruppe G der projektiven Autokollineationen zur projektiv-linearen Gruppe $\boldsymbol{PGL}(n+1, K)$ (vgl. Definition 2.1) isomorph. Diese Aussage gilt stets, wenn K ein Körper oder der Schiefkörper $\mathbf{H}$ *der Quaternionen ist.*

Beweis. Nach dem Hauptsatz wird jede Autokollineation $f \in \operatorname{Aut} \boldsymbol{P}^n$ durch eine σ-lineare Bijektion a des zugehörigen Vektorraums $\boldsymbol{V}^{n+1}$ erzeugt. Weil f projektiv ist, lässt σ die Konjugiertheitsklassen von K invariant und ist nach Voraussetzung I ein innerer Automorphismus von K. Wählen wir irgendeine Basis $(\mathfrak{a}_i)$, $i = 0, \ldots, n$, von $\boldsymbol{V}^{n+1}$, so hat die f erzeugende Abbildung a bezüglich dieser Basis die Darstellung

$$a(\mathfrak{a}_i x^i) = \mathfrak{a}_j \alpha^j_i \mu x^i \mu^{-1},$$

wobei $\mu \in K^*$ den zugehörigen inneren Automorphismus $\sigma = \sigma_\mu$ bestimmt. Dann wird f aber auch von dem linearen Automorphismus von $\boldsymbol{V}^{n+1}$ mit der Matrix $(\alpha^j_i \mu)$ erzeugt:

$$f([\mathfrak{a}_i x^i]) = [\mathfrak{a}_j \alpha^j_i \mu x^i] \tag{19}$$

Man erhält also bereits alle projektiven Autokollineationen, wenn man den Homomorphismus F aus Satz 3.13 auf die Untergruppe $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1}) \times \{\mathrm{id}_K\} \subset \boldsymbol{G}_{n+1}(K)$ einschränkt; es bezeichne $\hat{F}$ diese Einschränkung. Dann gilt nach (3.33)

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \hat{F} &= (\operatorname{Ker} F) \cap (\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1}) \times \{\mathrm{id}_K\}) \\ &= \{(\mathrm{id}_{\boldsymbol{V}^{n+1}}\, \mu, \mathrm{id}_K) | \mu \in Z(K^*)\} \cong Z(K^*), \end{aligned} \tag{20}$$

wobei $Z(K^*)$ das Zentrum von K^* bezeichnet. Da $\hat{F}$ surjektiv ist, erhalten wir aus dem Homomorphiesatz für Gruppen (s. Satz I.3.1.6) die Behauptung, vgl. Definition 2.1:

$$G \cong \boldsymbol{GL}(n+1, K)/Z(n+1) = \boldsymbol{PGL}(n+1, K). \tag{21}$$

Für Körper ist die Eigenschaft I trivialerweise erfüllt. Der Schiefkörper $\mathbf{H}$ der *Quaternionen* erfüllt ebenfalls I, vgl. Beispiel II.8.8.5. □

Allerdings gibt es Schiefkörper, welche die Eigenschaft I nicht besitzen, vgl. G. Köthe [54], R. Baer [4], § III.4. Für diese Schiefkörper ist die folgende Definition geometrisch nicht zwingend; sie bietet jedoch eine einheitliche Grundlage für den weiteren Aufbau der projektiven Geometrie:

Definition 3. Es sei $\boldsymbol{P}^n$ der zu dem Vektorraum $\boldsymbol{V}^{n+1}$ über dem Schiefkörper K gehörende projektive Raum. Dann wollen wir unter einer *Projektivität* oder *projektiven Transformation* von $\boldsymbol{P}^n$ (bzw. von $\boldsymbol{P}^n$ auf einen projektiven Raum $\boldsymbol{Q}^n$ über K) stets eine Kollineation verstehen, die von einem linearen Isomorphismus erzeugt werden kann. Die Gruppe der Projektivitäten von $\boldsymbol{P}^n$ auf sich werde mit $\boldsymbol{PL}(\boldsymbol{P}^n)$ oder kurz mit $\boldsymbol{PL}_n$ bezeichnet; sie heißt die *projektive Gruppe* von $\boldsymbol{P}^n$. □

Mit dieser Definition gilt also jetzt allgemein die Beziehung

$$\boldsymbol{PL}_n \cong \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1})/Z(\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1})) \cong \boldsymbol{PGL}(n+1, K). \tag{22}$$

Satz 4 und Satz 6 sind als geometrische Charakterisierungen der projektiven Gruppe anzusehen. Im Sinne des *Erlanger Programms* [51] von F. Klein wollen wir die projektive Geometrie als Geometrie der Transformationsgruppe $[\boldsymbol{PL}_n, \boldsymbol{P}^n]$ betrachten. Da die Gruppe $\boldsymbol{PGL}(n+1, K)$ die Gruppe der Koordinatentransformationen des $\boldsymbol{P}^n$ über K ist (vgl. Definition 2.1), ergibt sich wieder die in § I.5.7 beschriebene Korrespondenz von geometrischen und Koordinatentransformationen: Die homogenen Koordinatensysteme des $\boldsymbol{P}^n$ bilden einen der Transformationsgruppe $[\boldsymbol{PL}_n, \boldsymbol{P}^n]$ angepaßten Atlas (vgl. Definition I.5.7.5 und Übung I.5.7.6). Im Falle eines Körpers ist die Gruppe $\boldsymbol{PL}(\boldsymbol{P}^n)$ mit der Gruppe der projektiven Bijektionen von $\boldsymbol{P}^n$ auf sich identisch. Für einen Schiefkörper mit der Eigenschaft I gilt das nach Satz 6 für $n \geq 2$; im Fall $n = 1$ ist die Gruppe der projektiven Bijektionen im allgemeinen größer.

Beispiel 1. Die Gruppe $\boldsymbol{PL}_1$ ist isomorph zur *Gruppe G_K der gebrochen linearen Transformationen* (2.10), vgl. Übung 2.4. Durch diese Feststellung erhält man einfache und in den Fällen $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ leicht zu handhabende *Modelle der projektiven Geraden $\boldsymbol{P}^1(K)$* als Transformationsgruppen $[G_K, \hat{K}]$. □

Beispiel 2. Nach Folgerung 3.16 ist jede Kollineation $f : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{Q}^n_o$, $n \geq 2$, über dem Körper $K = \mathbf{R}$ der reellen Zahlen eine Projektivität. In diesem Fall haben wir also die sehr befriedigende Situation, dass jede bijektive Abbildung, die Geraden wieder in Geraden überführt, bereits das DV und damit alle projektiven Eigenschaften invariant lässt. □

Übung 5. Man zeige, dass die einzigen stetigen Automorphismen des Körpers $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen die Identität und die *Konjugation* $\sigma : z \mapsto \bar{z}$ sind. Hinweis. Man zeige zuerst, dass für jeden stetigen Automorphismus τ von $\mathbf{C}$ die Gleichung $\tau(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ gelten muss, vgl. Übung I.2.3.3.

Beispiel 3. Ist $K = \mathbf{C}$ der Körper der komplexen Zahlen, so gibt es unendlich viele Automorphismen. Das folgt aus Satz V.6.1 der Algebra von N. Bourbaki [16]. Aus geometrischer Sicht ist es natürlich, sich auf die stetigen kollinearen Abbildungen $f : \boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{Q}^m$, $n \geq 2$ zu beschränken; die Stetigkeit bezieht sich dabei auf die mittels der inhomogenen Koordinaten eingeführte Topologie. Ist f stetig, so muss auch ihre

Einschränkung auf eine beliebige projektive Gerade stetig sein. Deutet man die in (17) auftretenden DV als projektive Skalen, so erhält man durch die beim Beweis von Satz 4 ausgeführten Überlegungen, dass $\hat{\xi}(f(\boldsymbol{x})) = \sigma(\xi(\boldsymbol{x}))$, oder $\sigma = \hat{\xi} \circ f \circ \xi^{-1}$ gelten muss. Daher ist σ stetig. Nach Übung 5 ist also σ entweder die Identität – dann ist die Kollineation f eine Projektivität – oder σ ist die Konjugation. In diesem Fall nennen wir die Kollineation f eine *Antiprojektivität*, vgl. auch W. Burau [20], § III.20. Die Antiprojektivitäten sind analog zu Satz 4 durch die Eigenschaft

$$(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}); f(\boldsymbol{c}), f(\boldsymbol{d})) = \overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})}$$

charakterisiert. Im Folgenden werden wir bei komplexen Skalarbereich $K = \mathbf{C}$ nur *stetige kollineare Abbildungen* betrachten. Das gilt entsprechend auch für die Automorphismengruppe Aut $\boldsymbol{P}^1$ der komplexen projektiven Geraden. Beschreibt man diese Gruppe durch Abbildungen in einer projektiven Skala $z = z(\boldsymbol{x}(\xi))$ (vgl. Beispiel 2.2), so folgt, dass die Projektivitäten durch gebrochen lineare Transformationen

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } ad - bc \neq 0$$

und die Antiprojektivitäten durch gebrochen konjugiert-lineare

$$f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \text{ mit } ad - bc \neq 0$$

dargestellt werden können. □

Beispiel 4. Der für uns wichtigste, nicht kommutative Schiefkörper ist der Schiefkörper $\mathbf{H}$ der *Quaternionen*[1] , vgl. § I.2.3. Da nach Beispiel II.8.8.5 oder Übung II.8.9.5 jeder Automorphismus von $\mathbf{H}$ ein innerer ist, folgt aus Satz 2, Satz 6 und dem Hauptsatz: *Jede Kollineation $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^n$, $n \geq 2$, zwischen quaternionischen projektiven Räumen lässt sich linear erzeugen; sie läßt das* DV *invariant.* Allgemeiner gilt das für jede kollineare Abbildung f mit Dim $f(\boldsymbol{P}_o^n) \geq 2$, vgl. Folgerung 3.11. □

Beispiel 5. Aus Übung II.7.4.7 ergibt sich unmittelbar die leicht zu beweisende Isomorphie der Zentren $Z(\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1})) \cong Z(K^*)$, bei der jedes $\mu \in Z(K^*)$ auf die entsprechende Dehnung $d_\mu \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1})$ abgebildet wird. Bezeichnet wie üblich $\boldsymbol{SL}(m, K)$ die *spezielle lineare Gruppe*, das ist die Gruppe der quadratischen Matrizen m-ter Ordnung über dem Körper K mit der Determinante eins, so folgt aus (22) und der Berechnung des Kerns des Homomorphismus

$$p : g \in \boldsymbol{GL}(n+1, \mathbf{R}) \longmapsto \frac{g}{(\det(g))^{\frac{1}{n+1}}} \in \boldsymbol{SL}(n+1, \mathbf{R}), \qquad n = 2k \in \mathbf{N}_0,$$

die Beziehung

$$\boldsymbol{PL}_n \cong \boldsymbol{SL}(n+1, \mathbf{R}), \qquad n = 2k \in \mathbf{N}_0.$$

[1] Eine elementare Einführung der Quaternionen (und der Oktaven) findet man in I. L. Kantor, A. S. Solodownikow [45] und in vielen Lehrbüchern der Algebra.

Es sei weiter I_m die Einheitsmatrix der Ordnung m. Ferner bezeichne $|\boldsymbol{SL}(m, \mathbf{R})|$ die Gruppe der quadratischen reellen Matrizen der Ordnung m, deren Determinante den Betrag eins hat. Dann erhalten wir für ungerades n analog

$$\boldsymbol{PL}_n \cong |\boldsymbol{SL}(n+1, \mathbf{R})|/\{\pm I_{n+1}\}, \qquad n = 2k+1 \in \mathbf{N}.$$

Für $K = \mathbf{C}$ erinnern wir an die Gruppe K_m der m-ten Einheitswurzeln, vgl. Satz I.2.3.7. Indem wir $g \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1})$ durch eine $(n+1)$-te Wurzel aus der Norm $N(g)$ dividieren und dann das Ergebnis mit K_{n+1} multiplizieren, erhalten wir

$$\boldsymbol{PL}_n \cong \boldsymbol{SL}(n+1, \mathbf{C})/K_{n+1} \qquad (K = \mathbf{C}).$$

Dabei ist K_{n+1} durch die Dehnungen d_ϵ, $\epsilon \in K_{n+1}$, in $\boldsymbol{SL}(n+1, \mathbf{C})$ eingebettet. □

1.4.4 Harmonische Lage.

Im allgemeinen sind die 6 DV, die nach (14) bei den Permutationen der Punkte eines Wurfes auftreten, alle verschieden. Das gilt, wie schon bemerkt, nicht in dem Fall (13), daß der Wurf zwei gleiche Punkte enthält. Ist das DV eines Wurfes $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = -1$, so nennt man den Wurf *harmonisch*; man spricht auch von der *harmonischen Lage* der Punktepaare $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$. In diesem Fall erhalten wir bei den Permutationen der Punkte des Wurfes nach (14) nur die Werte $-1, 2, 1/2$. Die folgende Übung beschreibt eine geometrische Konstruktion des *vierten, zu drei gegebenen Punkten harmonischen Punktes:*

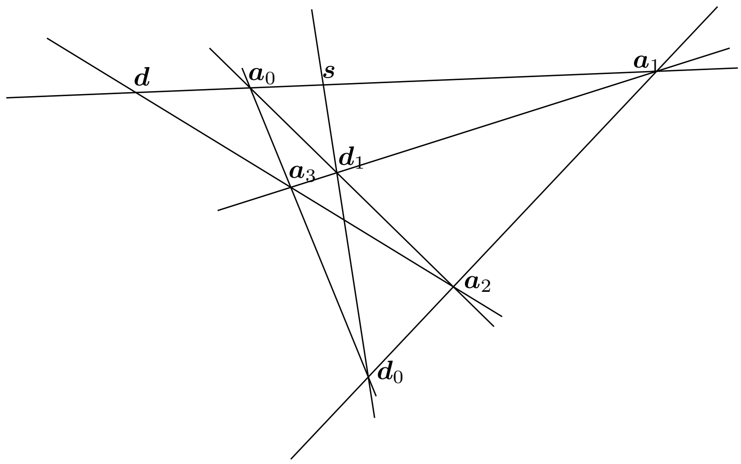

Abbildung 1.8: Harmonische Lage.

Übung 6. Es sei $\boldsymbol{P}^2$ eine projektive Ebene über dem Schiefkörper K. Unter einem *vollständigen Viereck* versteht man eine Konfiguration, bestehend aus vier Punkten, den *Ecken* $\boldsymbol{a}_i \in \boldsymbol{P}^2$, $i = 0, \ldots, 3$, von denen nicht drei kollinear sind, und ihren sechs Verbindungsgeraden, die man auch die *Seiten* des vollständigen Vierecks nennt, vgl. Abbildung 1.8. Die Seiten ordnen sich in drei Paare von *Gegenseiten*

$$\{\boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2 \vee \boldsymbol{a}_3\},\ \{\boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{a}_3\},\ \{\boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_3,\, \boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{a}_2\}, \tag{23}$$

die sich in den *Diagonalpunkten* des vollständigen Vierecks

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_0 &:= (\boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_3) \wedge (\boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{a}_2) \\ \boldsymbol{d}_1 &:= (\boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{a}_3) \wedge (\boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_2) \\ \boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_2 &:= (\boldsymbol{a}_2 \vee \boldsymbol{a}_3) \wedge (\boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_1) \end{aligned} \tag{24}$$

schneiden. Man zeige: a) $\boldsymbol{d}_0$, $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$ sind genau dann nicht kollinear, wenn $\operatorname{char} K \neq 2$ gilt. – b) Die Verbindungsgeraden $\boldsymbol{d}_i \vee \boldsymbol{d}_j$, $i \neq j$, der Diagonalpunkte gehen nicht durch die Ecken des Vierecks. (Hinweis. Man berechne die homogenen Koordinaten der $\boldsymbol{d}_i$ bezüglich einer Basis für das projektive Repère $(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2; \boldsymbol{e})$ mit $\boldsymbol{e} := \boldsymbol{a}_3$.) – c) Auf jeder Seite des vollständigen Vierecks liegt genau ein Diagonalpunkt, zum Beispiel $\boldsymbol{d} := \boldsymbol{d}_2 \in \boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_1$. Es bezeichne $\boldsymbol{s}$ den Schnittpunkt der Seite mit der Verbindungsgeraden der Diagonalpunkte, die nicht auf ihr liegen; zum Beispiel ist auf der Seite $\boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_1$ dieser Schnittpunkt

$$\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_1) \wedge (\boldsymbol{d}_0 \vee \boldsymbol{d}_1).$$

Man beweise, dass

$$(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{d}; \boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1) = -1 \tag{25}$$

gilt.

B e m e r k u n g. Die Forderung, dass in $\boldsymbol{P}^2$ ein vollständiges Viereck existiert, dessen Diagonalpunkte nicht kollinear sind, tritt in der synthetischen projektiven Geometrie als *Fano-Postulat* auf, vgl. R. BAER [4], Kap. II. Dieses Postulat impliziert, dass der synthetisch konstruierte Skalarbereich eine Charakteristik $\operatorname{char} K \neq 2$ hat. Im Falle $\operatorname{char} K = 2$ folgt wegen $1 = -1$ aus (25), dass $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{d}$ gilt; die harmonische Lage ist dann uninteressant.

Übung 7. Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$. Mit den Bezeichnungen von Übung 6 beweise man: Die Diagonalpunkte $(\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1)$ bilden mit den Schnittpunkten $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ der Geraden $\boldsymbol{d}_0 \vee \boldsymbol{d}_1$ mit den nicht durch $\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1$ gehenden Seiten des vollständigen Vierecks,

$$\boldsymbol{p} := (\boldsymbol{d}_0 \vee \boldsymbol{d}_1) \wedge (\boldsymbol{a}_0 \vee \boldsymbol{a}_1), \qquad \boldsymbol{q} := (\boldsymbol{d}_0 \vee \boldsymbol{d}_1) \wedge (\boldsymbol{a}_2 \vee \boldsymbol{a}_3)$$

einen harmonischen Wurf: $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}; \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1) = -1$.

Übung 8. Permutiert man die Punkte eines Wurfes, so treten nach Satz 1 höchstens sechs verschiedene DV auf. Man zeige, dass die Anzahl der Werte ξ des DV bei den Permutationen der Punkte eines Wurfes genau dann kleiner als sechs ist, wenn einer der folgenden Fälle eintritt:

$$a) \quad \xi = 1,\ 0,\ \infty; \tag{26}$$

$$b) \quad \xi = -1,\ 2,\ \frac{1}{2}; \tag{27}$$

$$c) \quad \xi \text{ ist eine Wurzel der Gleichung } x^2 - x + 1 = 0. \tag{28}$$

In den Fällen a) und b) werden die angegebenen Werte angenommen. Gilt $\operatorname{char} K = 2$, so fallen a) und b) zusammen. Ist $K = \mathbf{R}$, so sind nur die beiden Fälle a) und b) möglich. Für $K = \mathbf{C}$ spricht man im Fall c) von einem *äquianharmonischem Wurf*; in diesem Fall treten nur die beiden Werte

$$\xi = (1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})/2 \tag{29}$$

auf. Für die Quaternionen $K = \mathbf{H}$ zeige man mit Hilfe von Übung II.8.9.5, dass alle Lösungen von (28) konjugiert sind; es gibt deren unendlich viele. Der Wert $< \xi >$ des DV besteht also hier aus einer einzigen Konjugiertheitsklasse.

Übung 9. Wir identifizieren die komplexe projektive Gerade nach Beispiel 1.3 mit der Riemannschen Zahlenkugel: $\boldsymbol{P}^1(\mathbf{C}) = \hat{\mathbf{C}}$. Man beweise: Sind z_0, z_1, z_2 die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks in der komplexen Zahlenebene $\mathbf{C}$ und ist m sein Mittelpunkt, so sind (z_0, z_1, z_2, m) und (z_0, z_1, z_2, ∞) äquianharmonische Würfe.

1.4.5 Der Staudtsche Hauptsatz.

Für die projektive Geometrie über einem Körper K beweisen wir nun das folgende, auf K. G. Chr. v. Staudt (1798 – 1867) zurückgehende Ergebnis, das den Hauptsatz der projektiven Geometrie ergänzt und deswegen mitunter *Staudtscher Hauptsatz* genannt wird:

Satz 7. *Es sei $\boldsymbol{P}^1$ die projektive Gerade über einem Körper K mit der Charakteristik* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Eine surjektive Abbildung $f : \boldsymbol{P}^1 \to \boldsymbol{P}^1$ ist genau dann eine projektiver Automorphismus, wenn sie die harmonische Lage invariant lässt. Für die reelle projektive Gerade ist also f eine Projektivität.*

Beweis. Die Bedingung ist offenbar notwendig. Für den Beweis der Umkehrung wählen wir eine projektive Skala ξ auf $\boldsymbol{P}^1$ und identifizieren die Punkte $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^1$ mit den entsprechend bezeichneten Skalaren $x = \xi(\boldsymbol{x}) \in \hat{K}$. Weil man zwei verschiedene Punkte der Geraden nach Übung 6 stets zu einem harmonischen Wurf ergänzen kann, und weil wegen $\operatorname{char} K \neq 2$ die Punkte eines harmonischen Wurfes paarweise verschieden sind, ist die Abbildung f bijektiv, und $f(0), f(1), f(\infty)$ sind drei verschiedene Punkte. Es bezeichne a die nach Folgerung 5 eindeutig bestimmte Projektivität, welche

$$a(f(0)) = 0,\ a(f(1)) = 1,\ a(f(\infty)) = \infty$$

erfüllt. Dann ist $g := a \circ f$ eine Abbildung von $\boldsymbol{P}^1$ in sich, welche die harmonische Lage invariant lässt und die Fixpunkte $0 = g(0), 1 = g(1), \infty = g(\infty)$ hat. Wenn wir zeigen, dass $g|K$ ein Automorphismus des Körpers K ist, so sind wir fertig; denn dann ist $f = a^{-1} \circ g$ eine projektiver Automorphismus von $\boldsymbol{P}^1$, also im Fall $K = \mathbf{R}$ nach Übung I.2.1.3 (vgl. auch den Hinweis nach Folgerung 3.16) wegen $g = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ eine Projektivität.

Aus (16) folgt für alle $x, y \in K$, $x \neq y$:

$$(x, y;\ (x+y)/2, \infty) = (g(x), g(y);\ g((x+y)/2), \infty) = -1, \tag{30}$$

also

$$g((x+y)/2) = (g(x) + g(y))/2, \qquad x \neq y. \tag{31}$$

Setzt man hier $y = 0$, so erhält man wegen $g(0) = 0$

$$g(x/2) = g(x)/2, \qquad (x \in K), \tag{32}$$

und mit $x = 2y$ hieraus

$$g(2y) = 2g(y), \qquad (y \in K). \tag{33}$$

Aus (31) und (33) folgt

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \qquad (x, y \in K). \tag{34}$$

Ebenfalls aus (16) erhält man

$$(-z, z; 1, z^2) = (g(-z), g(z); 1, g(z^2)) = -1, \qquad (z \in K). \tag{35}$$

Da aus (34) unmittelbar $g(-x) = -g(x)$ folgt, erhalten wir aus (35)

$$g(z^2) = g(z)^2, \qquad (z \in K). \tag{36}$$

Setzt man in die letzte Gleichung $z = x + y$ ein und wendet (33) und (34) an, so resultiert

$$g(x \cdot y) = g(x) \cdot g(y), \qquad (x, y \in K). \tag{37}$$

Weil f und a bijektiv sind, gilt das auch für g; nach (34) und (37) ist also g ein Automorphismus des Körpers K. □

Für $K = \mathbf{R}$ lässt sich die Behauptung auch ohne Voraussetzung der Surjektivität von f beweisen. Das folgt daraus, dass jeder Endomorphismus von $\mathbf{R}$ stetig ist und die rationalen Zahlen dicht in $\mathbf{R}$ liegen.

B e m e r k u n g. Den hier dargestellten Beweis von Satz 7 findet man auch in E. SPERNER [72], Bd. II, oder W. KLINGENBERG [53]. Ein allgemeineres Resultat für Schiefkörper K mit $\operatorname{char} K \neq 2$ enthält E. ARTIN [3], Theorem 2.25, vgl. auch R. BAER [4], § III.4.

Übung 10. Es sei $\boldsymbol{P}^1$ eine projektive Gerade über dem Körper K, $\operatorname{char} K \neq 2$, und $f: \boldsymbol{P}^1 \to \boldsymbol{P}^1$ eine surjektive Abbildung, welche die harmonische Lage invariant und den Punkt $\infty \in \hat{K} \equiv \boldsymbol{P}^1$ fest lässt; dabei identifizieren wir $\hat{K}$ und $\boldsymbol{P}^1$ wie beim Beweis von Satz 7. Man zeige: Es gibt $\sigma \in \operatorname{Aut} K$, $\alpha \in K^*$ und $\beta \in K$ so, dass

$$f(x) = \alpha\sigma(x) + \beta \text{ für } x \in K \equiv \boldsymbol{P}^1 \setminus \{\infty\}$$

gilt.

Übung 11. Es sei $\operatorname{Int} K$ die Gruppe der inneren Automorphisman des Schiefkörpers K. Dann ist $\operatorname{Int} K$ ein Normalteiler in der Gruppe $\operatorname{Aut} K$ der Automorphismen von K. Man zeige, dass für jeden projektiven Raum $\boldsymbol{P}^n$, $n \geq 2$, über K die Gruppe $\boldsymbol{PL}_n$ ein Normalteiler in $\operatorname{Aut} \boldsymbol{P}^n$ ist, wobei folgende Isomorphie gilt:

$$\operatorname{Aut} \boldsymbol{P}^n / \boldsymbol{PL}_n \cong \operatorname{Aut} K / \operatorname{Int} K.$$

1.4.6 Projektive Äquivalenz kollinearer Abbildungen. Involutionen.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einigen Überlegungen zur *Klassifikation der kollinearen Abbildungen.* Sie stützen sich auf die

Definition 4. Es seien $\boldsymbol{P}^n_o, \boldsymbol{Q}^n_o$ projektive Räume über dem Schiefkörper K. Zwei Abbildungen $f_1 : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{P}^n_0$, $f_2 : \boldsymbol{Q}^n_o \to \boldsymbol{Q}^n_0$ heißen *projektiv äquivalent*, wenn eine Projektivität $g : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{Q}^n_o$ existiert derart, dass $f_2 = g \circ f_1 \circ g^{-1}$ gilt. □

Es ist klar, dass projektiv äquivalente kollineare Abbildungen die Bedingung

$$\operatorname{Dim} f_1(\boldsymbol{P}^n_o) = \operatorname{Dim} f_2(\boldsymbol{Q}^n_o)$$

erfüllen müssen; sind die f_j durch σ_j-lineare Abbildungen a_j erzeugt, so können sich die σ_j nur durch einen inneren Automorphismus von K unterscheiden, und für die a_j muss gelten: *Es gibt einen linearen Isomorphismus* $b : \boldsymbol{V}^{n+1} \to \boldsymbol{W}^{n+1}$ *und ein* $\mu \in K^*$ *derart, dass* $d_\mu \circ a_2 = b \circ a_1 \circ b^{-1}$ *gilt;* hier bezeichnet d_μ die Dehnung um den Faktor μ. Diese Bedingung ist offenbar auch hinreichend für die projektive Äquivalenz der durch die a_j erzeugten kollinearen Abbildungen f_j. Damit ist das Problem der Klassifikation kollinearer Abbildungen im wesentlichen auf die Frage nach der Ähnlichkeit linearer Endomorphismen zurückgeführt, die für algebraisch abgeschlossenen Körper K durch die Jordansche Normalform, vgl. § I.5.8 oder § II.7.8, beantwortet wird.

Übung 12. Es sei $f \in \boldsymbol{PL}_n$ eine Projektivität des projektiven Raumes $\boldsymbol{P}^n$ über dem Körper K. Mit $P_f := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n | f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}$ bezeichnen wir die Menge der *Fixpunkte* von f. Man beweise: P_f lässt sich als Vereinigung von $r \geq 0$ projektiven Unterräumen $\boldsymbol{A}_i \subset \boldsymbol{P}^n$ darstellen, wobei gelten

$$a) \quad \boldsymbol{A}_i \wedge \bigvee_{j \neq i} \boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{o},$$

$$b) \quad \sum_{i=1}^{r} (\operatorname{Dim} \boldsymbol{A}_i + 1) \leq n + 1.$$

Im Fall einer *projektiven Geraden* kann also eine Projektivität $f \neq \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^1}$ höchstens $r \leq 2$ Fixpunkte haben; man nennt f *elliptisch, parabolisch* bzw. *hyperbolisch* je nachdem, ob $r = 0, 1$ bzw. 2 ist.

Übung 13. Es sei $\boldsymbol{P}^1$ eine projektive Gerade über dem Körper K, $\operatorname{char} K \neq 2$. Man zeige: a) Gibt es zwei Punkte $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{P}^1$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, die bei der Projektivität f nach $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ und $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}$ ineinander übergehen, so ist f *involutiv*, d.h. es gilt $f^2 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^1}$. – b) Ist $f \in \boldsymbol{PL}_1$, $f \neq \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^1}$, involutiv, so hat f zwei verschiedene oder gar keinen Fixpunkt. Sind $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ zwei verschiedene Fixpunkte der *Involution* f, so gilt

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = -1 \qquad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \tag{38}$$

c) Es seien $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}' \in \boldsymbol{P}^1$ Punkte mit $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}' \neq \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}' \neq \boldsymbol{b}$. Man beweise: Es gibt genau eine involutive Projektivität mit $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}'$ und $f(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}'$.

Übung 14. Man zeige unter den Voraussetzungen von Übung 13: Jede Projektivität $f \in \boldsymbol{PL}_1$ lässt sich als Produkt von zwei Involutionen darstellen.

Wir behandeln nun die Aufgabe, die *involutiven Kollineationen* $f \in \operatorname{Aut} \boldsymbol{P}^n$, $f^2 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^n}$, zu beschreiben.

Übung 15. Es sei $\boldsymbol{P}^n, n \geq 2$, ein (rechter) projektiver Raum über dem Schiefkörper K. Man beweise: Ist $f \in \operatorname{Aut} \boldsymbol{P}^n$ involutiv und fixpunktfrei:

$$f^2 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^n}, \qquad f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x} \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n,$$

so ist n ungerade, und man kann f durch eine σ-lineare Abbildung a des zugehörigen Vektorraums $\boldsymbol{V}^{2k}$, $2k = n + 1$, beschreiben, welche die folgenden Eigenschaften hat:
a) Es gibt ein $\lambda \in K^*$ mit $a^2 = d_\lambda$; dabei gelten

$$\sigma(\lambda) = \lambda \text{ und } \sigma^2 = \sigma_\lambda^{-1}, \tag{39}$$

wobei $\sigma_\lambda(\xi) = \lambda\xi\lambda^{-1}$ den zu λ gehörenden inneren Automorphismus von K bezeichnet;
b) es gibt eine Basis $(\mathfrak{a}_\kappa,\, \mathfrak{a}_{k+\kappa})_{\kappa=1,\ldots,k}$ von $\boldsymbol{V}^{2k}$ so, dass a in dieser Basis folgende Darstellung hat:

$$a(\mathfrak{a}_\kappa) = \mathfrak{a}_{k+\kappa}, \quad a(\mathfrak{a}_{k+\kappa}) = \mathfrak{a}_\kappa\lambda; \tag{40}$$

c) es gibt kein $\mu \in K^*$ mit der Eigenschaft

$$\lambda = \mu\sigma(\mu). \tag{41}$$

Umgekehrt ist jede derart erzeugte Kollineation involutiv und fixpunktfrei. In den Fällen $K = \mathbf{R}$ und $K = \mathbf{C}$, σ die Identität oder die Konjugation von $\mathbf{C}$, klassifiziere man alle derartigen Kollineationen. (Hinweis. Man beachte, dass wegen $f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]$ stets $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ und $a(\mathfrak{x})$ linear unabhängig sind; wegen $f^2 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^n}$ ist der von ihnen aufgespannte Unterraum $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ bei a invariant.)

Als Ergebnis der in Übung 15 auszuführenden Klassifikationen erhalten wir:

Im Fall $K = \mathbf{R}$ *sind die fixpunktfreien Involutionen* $f \in \mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^n$ *projektiv äquivalent zu der Normalform* (40) *mit* $\lambda = -1$, $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$. In homogenen Koordinaten ist also f darstellbar in der Form

$$f([\sum_{\kappa=1}^{k}(\mathfrak{a}_\kappa x^\kappa + \mathfrak{a}_{k+\kappa}x^{k+\kappa}]) = [\sum_{\kappa=1}^{k}(-\mathfrak{a}_\kappa x^{k+\kappa} + \mathfrak{a}_{k+\kappa}x^\kappa], \tag{42}$$

das ist die „Drehung um $\pi/2$“ in jedem der zweidimensionalen Unterräume $\boldsymbol{W}_\kappa := \mathfrak{L}(\mathfrak{a}_\kappa,\, \mathfrak{a}_{k+\kappa})$, $n = 2k$.

Im Fall $K = \mathbf{C}$ *muss* σ *die Konjugation sein, und es ergibt sich entsprechend die projektive Äquivalenz zu der Normalform*

$$f([\sum_{\kappa=1}^{k}(\mathfrak{a}_\kappa x^\kappa + \mathfrak{a}_{k+\kappa}x^{k+\kappa}]) = [\sum_{\kappa=1}^{k}(-\mathfrak{a}_\kappa \bar{x}^{k+\kappa} + \mathfrak{a}_{k+\kappa}\bar{x}^\kappa], \tag{43}$$

dass für $K = \mathbf{C}$, $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$, *und für die Quaternionen* $K = \mathbf{H}$ *keine fixpunktfreien Involutionen existieren, folgt aus*

Übung 16. Man zeige: a) Ist K ein algebraisch abgeschlossener Körper, so hat jede Projektivität $f \in \boldsymbol{PL}_n$ wenigstens einen Fixpunkt. – b) Über dem Schiefkörper der Quaternionen $\mathbf{H}$ hat jede Kollineation $f \in \mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^n$, $n \geq 2$, wenigstens einen Fixpunkt.

Übung 17. Es seien K ein Schiefkörper, $\mathrm{char}\,K \neq 2$, $\boldsymbol{P}^n$ ein (rechter) projektiver Raum über K, $n \geq 2$, und $f \in \mathrm{Aut}\,\boldsymbol{P}^n$ eine involutive Kollineation, die wenigstens einen Fixpunkt besitzen möge. Man beweise: Dann hat f wenigstens $n+1$ Fixpunkte in allgemeiner Lage. Genauer zeige man: Es gibt eine Basis $(\mathfrak{a}_i)$, $i = 0, \ldots, n$, des zugehörigen Vektorraums $\boldsymbol{V}$ derart, dass eine f erzeugende σ-lineare Abbildung a bezüglich $(\mathfrak{a}_i)$ Diagonalgestalt hat, wobei

$$a(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{a}_i\beta_i,\ \beta_i\sigma(\beta_i) = 1,\ a^2 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{V}},\ \sigma^2 = \mathrm{id}_K \tag{44}$$

gelten. (Hinweis. Aus $a^2 = d_\lambda$ und $a(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}\mu$ folgt $\mu\sigma(\mu) = \lambda$. Man betrachte die ebenfalls f erzeugende Abbildung $a' := d_\mu^{-1} \circ a$ und zeige, dass der maximale, von Eigenvektoren von a' aufgespannte Unterraum von $\boldsymbol{V}$ gleich $\boldsymbol{V}$ sein muss.)

Ausgehend von (44) kann man unter speziellen Voraussetzungen über K und σ oft eine vollständige Klassifikation der Involutionen mit Fixpunkten vornehmen. Wir geben einige dieser Ergebnisse an, wobei wir die Beweise dem Leser überlassen.

Beispiel 6. Unter den Voraussetzungen von Übung 17 seien speziell K ein Körper und $\sigma = \mathrm{id}_K$. Dann folgt aus (44) bei geeigneter Numerierung der Basiselemente, dass zu jeder derartigen Involution $f \neq \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^n}$ eine Zahl $k \in \mathbf{N_0}$, $0 \leq k < n/2$, existiert derart, dass bei geeigneter Wahl der Basis

$$\begin{aligned} a(\mathfrak{a}_\alpha) &= -\mathfrak{a}_\alpha, \qquad && \alpha = 0, \dots, k, \\ a(\mathfrak{a}_\kappa) &= \mathfrak{a}_\kappa, && \kappa = k+1, \dots, n, \end{aligned} \tag{45}$$

gelten. Sind $\boldsymbol{a}_j := [\mathfrak{a}_j]$ die der Basis entsprechenden Punkte, so bleiben die k-Ebene $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{a}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_k$ und die komplementäre $(n-k-1)$-Ebene $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{a}_{k+1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_n$ punktweise fest; $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ ist die Menge der Fixpunkte von f. Man nennt f eine *Spiegelung* des $\boldsymbol{P}^n$ an den zueinander komplementären Unterräumen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$. Offenbar gibt es zu jedem derartigen Paar von Unterräumen genau eine Spiegelung, und zwei derartige Spiegelungen sind projektiv äquivalent genau dann, wenn die Dimensionen $k, n-k-1$ übereinstimmen. Legt man einen der Räume, etwa $\boldsymbol{B}$, in die uneigentliche („unendlich ferne") Hyperebene $\boldsymbol{H}$ eines affinen Raums $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}^n \setminus \boldsymbol{H}$, so erhält man eine *affine Spiegelung* an einer k-Ebene $\boldsymbol{A}$ in Richtung des komplementären Raums $\boldsymbol{B}$; man vergleiche hierzu den nächsten Abschnitt. □

Beispiel 7. Für den Fall $K = \mathbf{C}$ betrachten wir außer den bereits in Beispiel 6 abgehandelten Spiegelungen noch die *involutiven Antiprojektivitäten* J mit der Konjugation $\sigma = \tau : z \mapsto \bar{z}$ als Automorphismus, die einen Fixpunkt besitzen möge. Nach Übung 17 gilt dann (44), also $\beta_j \bar{\beta}_j = |\beta_j|^2 = 1$ und somit $\beta_j = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_j}$. Führt man die Basistransformation

$$\mathfrak{b}_j = \mathfrak{a}_j\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_j/2}, \qquad j = 0, \dots, n,$$

aus, so folgt $\mathfrak{b}_j = a(\mathfrak{b}_j)$; alle diese Involutionen sind projektiv äquivalent und haben bezüglich einer wie beschrieben angepaßten Basis $(\mathfrak{b}_j)$ die Normalform

$$J([\sum_{j=0}^{n} \mathfrak{b}_j x^j]) = [\sum_{j=0}^{n} \mathfrak{b}_j \bar{x}^j]. \tag{46}$$

Fixpunkte sind alle diejenigen Punkte, deren homogene Koordinaten (x^j) die Form $x^j = \xi^j z$ mit $\xi^j \in \mathbf{R}$ und $z \in \mathbf{C}^*$ haben; diese bilden offenbar einen reellen projektiven Raum $\boldsymbol{P}^n(\mathbf{R}) \subset \boldsymbol{P}^n(\mathbf{C})$, für den die Punkte $\boldsymbol{b}_j = [\mathfrak{b}_j]$, $j = 0, \dots, n$, $\boldsymbol{e} = [\sum_j \mathfrak{b}_j]$ ein projektives Repère sind; diese Punktfolge ist natürlich auch ein projektives Repère für den komplexen Raum $\boldsymbol{P}^n(\mathbf{C})$. Man nennt daher eine Involution J mit der Normalform (46) eine *reelle Struktur* von $\boldsymbol{P}^n(\mathbf{C})$, vgl. Definition II.8.9.5; die Menge $\boldsymbol{P}^n(\mathbf{R}) \subset \boldsymbol{P}^n(\mathbf{C})$ der Fixpunkte von J wird eine *Staudtsche Kette* genannt. Offenbar sind alle reellen Strukturen und damit auch alle Staudtschen Ketten gegebener Dimension projektiv äquivalent. □

Beispiel 8. Es sei nun $K = \mathbf{H}$ der Schiefkörper der Quaternionen. Bei der Klassifikation der Involutionen von $\boldsymbol{P}^n(\mathbf{H})$ könnten wir wieder von (44) ausgehen; wir ziehen es jedoch vor, die schon in Beispiel 4 erwähnte Tatsache zu benutzen, dass sich jede Kollineation durch eine lineare Abbildung erzeugen läßt. Nach den Übungen 16 und 17 hat die Involution f mindestens $n+1$ Fixpunkte in allgemeiner Lage; wir finden also eine Basis $(\mathfrak{a}_l)$ des zugehörigen Vektorraums $\boldsymbol{V}$ und eine f erzeugende lineare Abbildung a, die bezüglich dieser Basis Diagonalgestalt hat:

$$a(\mathfrak{a}_l) = \mathfrak{a}_l q_l, \qquad q_l \in \mathbf{H}. \tag{47}$$

Die Involutivität bedeutet nach (22), dass $a^2 = d_\lambda$ eine Dehnung mit $\lambda \in Z(\mathbf{H}) = \mathbf{R}$ sein muss; hieraus folgt

$$q_l^2 = \lambda \in \mathbf{R}^*, \qquad l = 0, \ldots, n. \tag{48}$$

Gehen wir zu der äquivalenten Darstellung von f durch

$$a' := d_\mu \circ a, \qquad \mu := |\lambda|^{-\frac{1}{2}} \tag{49}$$

über, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda = \pm 1$ annehmen. Aus der Produktbildung in $\mathbf{H}$, vgl. II.(8.9.4), folgt leicht, dass die Gleichung $q^2 = 1$ in $\mathbf{H}$ nur die Lösungen $q = \pm 1$ hat; damit erhalten wir auch in diesem Fall wieder die Spiegelungen (45) an einem Paar komplementärer Unterräume (Beispiel 6). Es sei nun $\lambda = -1$. Als Lösungsmenge von $q^2 = -1$ ergibt sich nach II.(8.9.4) die Einheitssphäre im Raum der imaginären Quaternionen $S^2 \subset \mathbf{R}^\perp \subset \mathbf{H}$; hier bezeichnet $\mathbf{R}^\perp$ den von den imaginären Erzeugenden i, j, k $\in \mathbf{H}$ aufgespannten reellen Unterraum von $\mathbf{H}$, über dem die zur speziellen orthogonalen Gruppe $\boldsymbol{SO}(3)$ isomorphe Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathbf{H}$ transitiv wirkt, vgl. Übung II.8.9.5. Somit finden wir zu jedem q_l aus (47) ein $p_l \in \mathbf{H}^*$ mit

$$p_l^{-1} q_l p_l = \mathrm{i}; \tag{50}$$

geht man zu der Basis $\mathfrak{b}_l := \mathfrak{a}_l p_l$, $l = 0, \ldots, n$, über, so folgt

$$a(\mathfrak{b}_l) = \mathfrak{a}_l q_l p_l = \mathfrak{b}_l \, \mathrm{i}\,. \tag{51}$$

Daher sind alle Involutionen von $\boldsymbol{P}^n(\mathbf{H})$, $n \geq 2$, entweder Spiegelungen oder Projektivitäten J, welche nach (51) die Normalform

$$J([\sum_l \mathfrak{b}_l x^l]) = [\sum_l \mathfrak{b}_l \, \mathrm{i} \, x^l] \tag{52}$$

haben. Wir bemerken, dass durch die Übungen 15 – 17 und die darauf folgenden Beispiele alle involutiven Kollineationen in den Fällen $K = \mathbf{R}, \mathbf{H}$ und alle stetigen involutiven Kollineationen im Fall $K = \mathbf{C}$ klassifiziert wurden. □

Übung 18. Man zeige an einem Beispiel, dass die Behauptung der Übung 17 ohne die Voraussetzung $\operatorname{char} K \neq 2$ nicht richtig ist.

Übung 19. Es seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ von $\boldsymbol{o}$ verschiedene, zueinander komplementäre projektive Unterräume von $\boldsymbol{P}^n$. Ferner seien $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1 \in \boldsymbol{P}^n \setminus (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{y}_1) \wedge \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_1$, $(\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{y}_1) \wedge \boldsymbol{B} = \boldsymbol{b}_1$. Man zeige: a) Es gibt genau eine Projektivität $f \in \boldsymbol{PL}_n$ mit den Eigenschaften $f|\boldsymbol{A} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}$, $f|\boldsymbol{B} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{B}}$ und $f(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1$. – b) Für $n \geq 2$ gebe man eine geometrische Konstruktion von $f(\boldsymbol{x})$ für jeden Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n \setminus (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$ an. (Hinweis. Man beachte Übung 2.1.) Für $n = 2$ werden derartige Abbildungen auch *Zentralkollineationen* genannt, vgl. J. Böhm u. a. [15], Bd. II. – c) Man zeige: f ist involutiv genau dann, wenn $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1)$ ein harmonischer Wurf ist.

1.5 Affine Geometrie vom projektiven Standpunkt

Im Abschnitt 1 haben wir von der affinen Geometrie ausgehend die projektive Ebene aus der affinen durch Hinzufügen einer „unendlich fernen“ Geraden erhalten. Diese Vorstellung motivierte die Definition der projektiven Geometrie $\mathfrak{P}^n$ als Verband der Unterräume eines $(n+1)$-dimensionalen Vektorraums $\boldsymbol{V}^{n+1}$. Auf diese Weise hatten wir es vermieden, die etwas umständliche Erweiterung der n-dimensionalen affinen Geometrie zur projektiven auszuführen. Wir wollen jetzt den umgekehrten Weg gehen und zeigen, dass die affine Geometrie durch Auszeichnung einer projektiven Hyperebene $\boldsymbol{H}$ des $\boldsymbol{P}^n$ aus der projektiven hervorgeht. Alle affinen Begriffe entstehen aus projektiven, indem man die letzteren zu der ausgezeichneten Hyperebene in Beziehung setzt. Der Einfachheit halber werden wir uns erlauben, die hier projektiv zu definierenden Begriffe durch dieselben Symbole zu bezeichnen, die für die entsprechenden Begriffe beim axiomatischen Aufbau der affinen Geometrie in den Kapiteln I.4, I.5 benutzt wurden; das wird nicht zu Verwechslungen führen. Es sei noch erwähnt, dass wir allgemeiner als dort vorgehen, weil der zugrunde liegende Skalarbereich jetzt ein Schiefkörper sein darf.

Definition 1. Es sei $\boldsymbol{P}^n$ der zu einem $(n+1)$-dimensionalen rechten Vektorraum $\boldsymbol{V}^{n+1}$ über dem Schiefkörper K gehörende projektive Raum und $\boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{P}^n$ eine fest gewählte Hyperebene des $\boldsymbol{P}^n$. Dann heißt ihr Komplement $\boldsymbol{A}^n := \boldsymbol{P}^n \setminus \boldsymbol{H}$ für $n \geq 1$ ein *n-dimensionaler affiner Raum* über K. Für $n = 0, -1$ setzen wir $\boldsymbol{A}^0 := \boldsymbol{P}^0$, $\boldsymbol{A}^{-1} := \emptyset$. Im Fall $n \geq 1$ heißt $\boldsymbol{H}$ die *absolute Hyperebene* des affinen Raums $\boldsymbol{A}^n$ oder auch sein *Absolut*; sie wird auch *unendlich ferne* oder *uneigentliche Hyperebene* genannt. □

Aus Satz 3.14 folgt leicht, dass die projektiv-lineare Gruppe transitiv auf der Menge der Hyperebenen wirkt: man ordne die Repères in geeigneter Weise den Hyperebenen zu und betrachte den Fall $\sigma = \mathrm{id}_K$. Daher ist es völlig gleichgültig, welche Hyperebene man auszeichnet; die Benennung „unendlich fern“ wird durch die in Abschnitt 1 beschriebene geometrische Deutung nahegelegt. Die fundamentale, zur affinen und nicht zur projektiven Geometrie gehörende Eigenschaft ist die Parallelität:

Definition 2. Mit den Bezeichnungen von Definition 1 sei $\boldsymbol{B}^k$ eine projektive k-Ebene, $k \geq 0$. Gilt $\boldsymbol{B}^k \subset \boldsymbol{H}$, so heißt $\boldsymbol{B}^k$ *uneigentlich*, und *eigentlich* sonst. Für jede eigentliche k-Ebene gilt $\boldsymbol{B}^k \cap \boldsymbol{A}^n \neq \emptyset$; $\boldsymbol{M}^k := \boldsymbol{B}^k \cap \boldsymbol{A}^n$ heißt *die $\boldsymbol{B}^k$ entsprechende affine k-Ebene.* Es seien $\boldsymbol{B}^k$, $\boldsymbol{C}^l$ eigentliche projektive Unterräume von $\boldsymbol{P}^n$, wobei für ihre Dimensionen $1 \leq l \leq k$ erfüllt sei; $\boldsymbol{D}^l := \boldsymbol{C}^l \cap \boldsymbol{A}^n$ bezeichne die zu $\boldsymbol{C}^l$ gehörende affine l-Ebene. $\boldsymbol{D}^l$ heißt *parallel* zu $\boldsymbol{M}^k$ (bzw. $\boldsymbol{C}^l$ *parallel* zu $\boldsymbol{B}^k$) wenn

$$\boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{C}^l \subset \boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{B}^k \tag{1}$$

gilt. Geht man umgekehrt von einer affinen k-Ebene $\boldsymbol{M}^k$ aus, so ist die sie definierende eigentliche projektive k-Ebene $\boldsymbol{B}^k$ eindeutig bestimmt; wir nennen sie die *projektive Abschließung* von $\boldsymbol{M}^k$ und bezeichnen sie mit $\bar{\boldsymbol{M}}^k$; das ist also derjenige projektive Unterraum, für den $\boldsymbol{M}^k = \bar{\boldsymbol{M}}^k \cap \boldsymbol{A}^n$ gilt. □

Aus der Dimensionsformel (Satz 1.1) ergibt sich

Folgerung 1. *Für jede eigentliche projektive Ebene $\boldsymbol{B}^k$ gilt*

$$\operatorname{Dim} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{B}^k = k-1. \tag{2}$$

Speziell ist eine eigentliche k-Ebenen $\boldsymbol{B}^k$, $k \geq 1$, zu einer eigentlichen Hyperebene $\boldsymbol{C}^{n-1}$ genau dann parallel, wenn $\boldsymbol{B}^k \subset \boldsymbol{C}^{n-1}$ gilt, oder wenn $\boldsymbol{B}^k \wedge \boldsymbol{C}^{n-1} \subset \boldsymbol{H}$ ist. □

Die Definition 2 entspricht der Vorstellung, dass zwei verschiedene Geraden in der Ebene (allgemeiner Hyperebenen des $\boldsymbol{P}^n$) genau dann parallel sind, wenn sie sich „im Unendlichen“ schneiden. Man kann zeigen (vgl. Übung 4 c), dass der zu einer affinen k-Ebene $\boldsymbol{M}^k = \boldsymbol{B}^k \cap \boldsymbol{A}^n$ gehörende k-dimensionale Vektorraum (s. Satz I.4.5.1) gerade der Vektorraum $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}^{n+1}$ ist; hier bezeichnen $\boldsymbol{U}$ bzw. $\boldsymbol{W}$ die Vektorunterräume, die $\boldsymbol{B}^k$ bzw. $\boldsymbol{H}$ bestimmen. Daher entspricht Definition 2 genau der Definition I.4.5.3 der Parallelität in der affinen Geometrie. Weil die Parallelität eine affin invariante Eigenschaft sein soll, dürfen wir als *affine Transformationen* nur diejenigen Projektivitäten zulassen, die $\boldsymbol{H}$ (und damit auch $\boldsymbol{A}^n$) in sich überführen: Unter der *affinen Gruppe* $\mathfrak{A}(n) = \mathfrak{A}(\boldsymbol{A}^n)$ verstehen wir somit die stationäre Untergruppe von $\boldsymbol{H}$:

$$\mathfrak{A}(n) := \{f \in \boldsymbol{PL}_n | f(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}\}. \tag{3}$$

Um die Koordinatendarstellung der affinen Transformationen in der üblichen Form (vgl. I.(5.7.46)) zu erhalten, müssen wir zuerst den Begriff des affinen Koordinatensystems vom projektiven her erfassen. Eine Basis $(\mathfrak{a}_i)$ des Vektorraums $\boldsymbol{V}^{n+1}$ oder ein projektives Repère $(\boldsymbol{a}_i; \boldsymbol{e})$ werde *affin angepasst* genannt, wenn

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{a}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_n \qquad (\boldsymbol{a}_i = [\mathfrak{a}_i]) \tag{4}$$

gilt, wenn also die Punkte $\boldsymbol{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$, uneigentlich sind. Den einzigen eigentlichen Grundpunkt $\boldsymbol{a}_0 = [\mathfrak{a}_0]$ nennt man den *Usprung* des *affinen Koordinatensystems.* Der affine Raum $\boldsymbol{A}^n$ ist gerade der durch $x^0 \neq 0$ bestimmte Definitionsbereich U_0 der nullten Karte φ_0 des inhomogenen Koordinatensystems, das zu dem durch die affin angepasste Basis bestimmten homogenen Koordinatensystem gehört (vgl. Lemma 2.6); daher werden wir unter den *affinen Koordinaten* eines Punktes $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}^n$ bezüglich der affin angepassten Basis $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_n$ gerade die durch (2.8) für $i = 0$ definierten inhomogenen Koordinaten verstehen: *Zu jedem $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}^n$ gibt es genau ein n-Tupel $(x^j) \in K^n$, $j = 1, \ldots, n$, so dass*

$$\varphi_0(\boldsymbol{x}) = (x^j) \in K^n, \tag{5}$$

$$\text{also} \qquad \boldsymbol{x} = [\mathfrak{a}_0 + \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_j x^j] \tag{6}$$

gelten. Speziell stimmen die Einheitspunkte $[\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_j]$ auf den Achsen $\boldsymbol{a}_0 + [\mathfrak{a}_j]$ mit denen der affinen Geometrie überein, vgl. Abb. 1.7 (für $n = 2$). Es sei nun $(\mathfrak{a}_i)$, $i = 0, \ldots, n$, ein fest gewähltes, affin angepasstes Repère von $\boldsymbol{P}^n$ und $f \in \boldsymbol{PL}_n$; f werde von der linearen Abbildung $b_f \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1})$ erzeugt. Offenbar gilt

$$f \in \mathfrak{A}(n) \longleftrightarrow b_f(\mathfrak{a}_j) \in \boldsymbol{\mathfrak{L}}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Bezeichnet also $\boldsymbol{LA}(n+1, K) \subset \boldsymbol{GL}(n+1, K)$ die Menge der Blockmatrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \beta_{00} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{b} & B \end{pmatrix}, \qquad \beta_{00} \in K^*,\ \mathfrak{b} \in K^n,\ B \in \boldsymbol{GL}(n, K), \tag{8}$$

so gilt (vgl. (4.22))

$$\mathfrak{A}(n) \cong \boldsymbol{LA}(n+1,K)/Z(n+1). \tag{9}$$

Hier bezeichnet $Z(n+1)$ das Zentrum von $\boldsymbol{GL}(n+1,K)$, das ist die Gruppe der Diagonalmatrizen $I_{n+1}\mu$, μ aus dem Zentrum $Z(K^*)$ der multiplikativen Gruppe von K. Ist K ein Körper, so normiert man die Matrizen durch Multiplikation mit β_{00}^{-1} auf die Gestalt

$$(\mathfrak{b},\, B) := \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{b} & B \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{b} \in K^n,\, B \in \boldsymbol{GL}(n,K). \tag{10}$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass die jetzige Definition sich mit der üblichen Definition I.5.1.2 der affinen Gruppe verträgt; da (10) die Koordinatenmatrix der affinen Transformation f ist, erhalten wir mit der Normierung $x^0 = 1$, $y^0 = 1$ für die Koordinaten des Bildpunktes $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^j & \beta_i^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x^j \end{pmatrix}, \tag{11}$$

also

$$y^j = \beta^j + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^j x^i, \qquad j = 1,\ldots,n, \tag{12}$$

und das ist bis auf die Bezeichnungen die Koordinatendarstellung I.(5.7.42) der affinen Abbildung f.

Übung 1. Es sei K ein Körper. Man beweise unter Beachtung der Definition (10) die Multiplikationsregel in $\mathfrak{A}(n,K)$:

$$(\mathfrak{b},B)\cdot(\mathfrak{c},C) = (\mathfrak{b}+B\mathfrak{c}, B\cdot C), \tag{13}$$

berechne den Ausdruck $(\mathfrak{x},X) = (\mathfrak{b},B)^{-1}$ und zeige, dass $\mathfrak{A}(n,K)$ halbdirektes Produkt des Normalteilers

$$\{(\mathfrak{b},I)|\mathfrak{b}\in K^n\} \cong [K^n,+], \qquad I = (\delta_i^j), \tag{14}$$

mit der Untergruppe

$$\{(\mathfrak{o},B)|B\in \boldsymbol{GL}(n,K)\} \cong \boldsymbol{GL}(n,K) \tag{15}$$

ist (vgl. § I.5.3).

Übung 2. Wir betrachten den affinen Raum $\boldsymbol{A}^n$ über dem Körper K. a) Es sei $\boldsymbol{g}^1$ eine eigentliche Gerade, $\boldsymbol{c}_\infty := \boldsymbol{g}^1 \wedge \boldsymbol{H}$ und t der affine Parameter auf der affinen Geraden $\boldsymbol{g}^1 \cap \boldsymbol{A}^n$ mit dem Nullpunkt $\boldsymbol{c}_0$ und dem Einheitspunkt $\boldsymbol{c}_1 \neq \boldsymbol{c}_0$. Man beweise: Es gilt

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_0 + \overrightarrow{\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c}_1}\, t \longleftrightarrow t = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}_1;\, \boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{c}_\infty).$$

Die affinen Skalen auf $\boldsymbol{g}^1$ sind also gerade diejenigen projektiven Skalen, die dem uneigentlichen Punkt $\boldsymbol{g}^1 \wedge \boldsymbol{H}$ den Wert ∞ zuordnen, und das DV t ist gleich dem Verhältnis der parallelen Vektoren $\overrightarrow{\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{x}}$ und $\overrightarrow{\boldsymbol{c}_0\boldsymbol{c}_1}$. – b) Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$. Man zeige: Für drei kollineare Punkte $\boldsymbol{c}_0, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{g}^1 \cap \boldsymbol{A}^n$ gilt: $\boldsymbol{x}$ halbiert die Strecke $(\boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{c}_1)$ (vgl. I.(4.3.30)) genau dann, wenn für das DV $(\boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{c}_1;\, \boldsymbol{c}_\infty,\boldsymbol{x}) = -1$ gilt.

Übung 3. Es sei wieder K ein Körper. Man zeige: a) Die Gruppe der Homothetien von $\boldsymbol{A}^n$, vgl. § I.4.3, ist isomorph zur Gruppe aller derjenigen Projektivitäten $f \in \boldsymbol{PL}_n$, für die $f|\boldsymbol{H} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$ gilt. – b) Jede Homothetie $g \neq \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}^n}$ hat höchstens einen Fixpunkt in $\boldsymbol{A}^n$. – c) Diejenigen Homothetien von $\boldsymbol{A}^n$, welche in $\boldsymbol{A}^n$ keinen Fixpunkt haben, bilden zusammen mit $\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}^n}$ die Gruppe der *Translationen*, welche zur Gruppe (14) isomorph ist.

Die Formeln (11), (12) zeigen, dass die Transformationsgruppen $[\mathfrak{A}(\boldsymbol{A}^n),\ \boldsymbol{A}^n]$ im Sinne von Folgerung I.5.1.3 und in der projektiven Auffassung dieselbe Koordinatendarstellung haben; die Wahl eine kartesischen bzw. eines affin angepassten Koordinatensystems gibt einen äquivarianten Isomorphismus auf die in der Matrizenalgebra über K definierte Transformationsgruppe $[\mathfrak{A}(n,K),\ K^n]$ mit der Wirkung (11). Damit wird im Sinne des F. KLEINschen *Erlanger Programms* (s. § I.6.5) durch beide Methoden bis auf Isomorphie dieselbe affine Geometrie bestimmt. Die Übung 3 gibt die projektive Beschreibung der Translationen, die einen n-dimensionalen Vektorraum über K bilden. Ist $f \neq \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}^n}$ eine Translation, so gehen alle Geraden $\boldsymbol{x} \vee f(\boldsymbol{x})$ durch denselben Punkt von $\boldsymbol{H}$, und es gilt

$$(\boldsymbol{x} \vee f(\boldsymbol{x})) \wedge \boldsymbol{H} = [\mathfrak{b}], \tag{16}$$

wenn $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \mathfrak{b}$ die affine Darstellung von f ist (vgl. I. (4.5.3)). Translationen um proportionale Vektoren $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}\lambda,\ \lambda \in K^*$, bestimmen nach (16) denselben uneigentlichen Punkt. Daher sind die Punkte der uneigentlichen Hyperebene als *Richtungen*, d.h. Äquivalenzklassen paralleler Geraden, der affinen Geometrie zu deuten. Nimmt man die Translationen als Vektoren, so kann man leicht die Axiome (I), (II), (III) der affinen Geometrie (§ I.4.3) verifizieren. Damit ist die projektive Einordnung der affinen Geometrie vollzogen.

Übung 4. Es sei $(\mathfrak{a}_i),\ i = 0, \dots, n$, ein affin angepasstes Repère; $\boldsymbol{W}^n := \boldsymbol{\mathfrak{L}}(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n) \subset \boldsymbol{V}^{n+1}$ definiert dann das Absolut des affinen Raumes $\boldsymbol{A}^n$. a) Man zeige, dass $[\boldsymbol{A}^n, \boldsymbol{W}^n, K]$ die Axiome (I), (II), (III) der Definition I.4.3.1 einer affinen Geometrie erfüllen, wenn die Wirkung von $\boldsymbol{W}^n$ über $\boldsymbol{A}^n$ folgendermaßen erklärt wird:

$$t_{\mathfrak{b}} : \boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{A}^n \longmapsto t_{\mathfrak{b}}(\boldsymbol{x}) := [\mathfrak{x} + \mathfrak{b}] \in \boldsymbol{A}^n, \qquad \mathfrak{b} \in \boldsymbol{W}^n.$$

b) Jedes $t_{\mathfrak{b}}$ mit $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ ist eine Translation im Sinne von Übung 3, d.h. $t_{\mathfrak{b}} = f|\boldsymbol{A}^n$ ist die Einschränkung einer Projektivität f von $\boldsymbol{P}^n$ mit $f|\boldsymbol{H} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}}$, die in $\boldsymbol{A}^n$ keine Fixpunkte hat. – c) Ist $\boldsymbol{M}^k = \boldsymbol{A}^n \cap \boldsymbol{B}^k$ eine affine k-Ebene, und bezeichnet $\boldsymbol{U}^{k+1} \subset \boldsymbol{V}^{n+1}$ den $\boldsymbol{B}^k$ bestimmenden Vektorunterraum, so ergibt sich die zu der affinen k-Ebene $\boldsymbol{M}^k$ gehörende Vektormenge (vgl. Satz I.4.5.1) zu

$$V(\boldsymbol{M}^k) = \{\mathfrak{b} \in \boldsymbol{W}^n | t_{\mathfrak{b}}(\boldsymbol{M}^k) = \boldsymbol{M}^k\} = \boldsymbol{W}^n \cap \boldsymbol{U}^{k+1}.$$

Übung 5. Man gebe ein Beispiel für zwei affin-windschiefe Ebenen $\boldsymbol{M}^2, \boldsymbol{B}^2 \subset \boldsymbol{A}^4 \subset \boldsymbol{P}^4$ des vierdimensionalen affinen Raumes über einem Körper K an, deren sie definierende projektive Ebenen sich schneiden. (Bemerkung: „affin-windschief" bedeutet, dass die affinen Ebenen disjunkt und nicht parallel sind, vgl. § I.4.6.)

Übung 6. Man zeige (mit den Bezeichnungen von Definition 2): Ist $\boldsymbol{D}^l$ parallel zu $\boldsymbol{M}^k$ und gilt $\boldsymbol{D}^l \cap \boldsymbol{M}^k \neq \emptyset$, so ist $\boldsymbol{D}^l \subset \boldsymbol{M}^k$.

Abschließend betrachten wir noch *affine Kollineationen*, das sind bijektive Abbildungen $f : \boldsymbol{A}^n \to \widehat{\boldsymbol{A}}^m$ affiner Räume über nicht als isomorph vorausgesetzten Schiefkörpern, welche Geraden wieder in Geraden überführen, also $f(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) \vee f(\boldsymbol{y})$ erfüllen. Dabei ist die Operation $\vee$ die auf die affinen Unterräume eingeschränkte projektive Operation, analog für $\wedge$:

$$\boldsymbol{D}^l \wedge \boldsymbol{M}^k := (\bar{\boldsymbol{D}}^l \wedge \bar{\boldsymbol{M}}^k) \cap \boldsymbol{A}^n,\ \boldsymbol{D}^l \vee \boldsymbol{M}^k := (\bar{\boldsymbol{D}}^l \vee \bar{\boldsymbol{M}}^k) \cap \boldsymbol{A}^n. \tag{17}$$

Wir beweisen, dass jede affine Kollineation Einschränkung einer eindeutig bestimmten Kollineation der zugehörigen projektiven Räume ist und können hieraus mit Hilfe des Hauptsatzes der projektiven Geometrie einige interessante Schlussfolgerungen ziehen.

Lemma 2. *Es sei* $f : \boldsymbol{A}^n \to \widehat{\boldsymbol{A}}^m$ *eine affine Kollineation affiner Räume* $\boldsymbol{A}^n \subset \boldsymbol{P}^n$, $\widehat{\boldsymbol{A}}^m \subset \widehat{\boldsymbol{P}}^m$ *über Schiefkörpern* K, $\hat{K}$, $\operatorname{char} K \neq 2$,$\operatorname{char} \hat{K} \neq 2$. *Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Kollineation* $\bar{f} : \boldsymbol{P}^n \to \widehat{\boldsymbol{P}}^m$ *mit* $f = \bar{f}|\boldsymbol{P}^n$.

Beweis. Für $n = 0, 1$ ist die Behauptung trivial. Es sei nun $n \geq 2$. Ist $\bar{f}$ eine f fortsetzende Kollineation, so muss offenbar für die uneigentlichen Hyperebenen $\bar{f}(\boldsymbol{H}) = \widehat{\boldsymbol{H}}$ gelten, und für jeden affinen Unterraum $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{A}^n$ muss

$$\bar{f}(\bar{\boldsymbol{D}} \wedge \boldsymbol{H}) = \overline{f(\boldsymbol{D})} \wedge \widehat{\boldsymbol{H}} \tag{18}$$

erfüllt sein. Daraus ergibt sich für jeden uneigentlichen Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}$ folgende Regel für die Konstruktion des Bildes $\bar{f}(\boldsymbol{x})$: Man wähle eine affine Gerade $\boldsymbol{h}$ in Richtung von $\boldsymbol{x}$, also mit $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{h}} \wedge \boldsymbol{H}$, und setze $\bar{f}(\boldsymbol{x}) := \overline{f(\boldsymbol{h})} \wedge \widehat{\boldsymbol{H}}$. Um diese Definition zu rechtfertigen muss man zeigen, dass das Bild $\bar{f}(\boldsymbol{x})$ nicht von der Wahl der affinen Geraden $\boldsymbol{h}$ mit dem uneigentlichen Punkt $\boldsymbol{x}$ abhängt, mit anderen Worten, dass das folgende Lemma gilt:

Lemma 3. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2 gehen bei einer affinen Kollineation* $f : \boldsymbol{A}^n \to \widehat{\boldsymbol{A}}^m$ *parallele Geraden wieder in parallele Geraden über.*

Beweis. Da sich die Abschließungen paralleler Geraden $\bar{\boldsymbol{h}}_1, \bar{\boldsymbol{h}}_2, \boldsymbol{h}_1 \neq \boldsymbol{h}_2$ in einem uneigentlichen Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}$ schneiden, spannen sie eine Ebene auf, sind also nicht windschief. Wir betrachten ein *Parallelogramm* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ mit $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{d} = \boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c} = \boldsymbol{h}_2$, dessen Seiten $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d}$ ebenfalls parallel sind. Die Diagonalen $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{d}$ schneiden sich dann in einem eigentlichen Punkt $\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{d}) \wedge (\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{A}^n$; dieser Schnittpunkt liegt natürlich in der von den Parallelen aufgespannten Ebene, welche die uneigentliche Hyperebene $\boldsymbol{H}$ in der durch die beiden anderen, den Paaren paralleler Seiten des Parallelogramms entsprechenden Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ aufgespannten Geraden schneidet. Da $\operatorname{char} K \neq 2$ gilt, sind die Diagonalpunkte nicht kollinear, vgl. Übung 4.6, und es folgt $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{A}^n$. Weil die affine Kollineation f bijektiv ist, schneiden sich die Bildgeraden in dem eigentlichen Punkt $f(\boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{d}) \wedge f(\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{c})$, und folglich liegen die Bildpunkte $f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}), f(\boldsymbol{c}), f(\boldsymbol{d})$, also auch die Bildgeraden $f(\boldsymbol{h}_1) = f(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}), f(\boldsymbol{h}_2) = f(\boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d})$ in einer Ebene. Da sie wegen der Bijektivität von f disjunkt sind, müssen sie parallel sein. □

Wir beenden nun den Beweis von Lemma 2. Weil nach Lemma 3 die Abbildung $\bar{f}$ eindeutig definiert ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass sie auch uneigentliche Geraden wieder in uneigentliche Geraden überführt. Es seien also $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{H}$ drei verschiedene kollineare Punkte. Wir betrachten eine projektive Ebene $\boldsymbol{M}^2$, die $\boldsymbol{H}$ in der Geraden $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$ schneidet. In dieser Ebene wählen wir drei Geraden $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3$ mit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{h}_2$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{h}_3$. Diese Geraden bestimmen ein eigentliches Dreieck in der Ebene $\boldsymbol{M}^2$. Die Bildpunkte $f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}), f(\boldsymbol{c})$ der Ecken $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ dieses Dreiecks bestimmen eine Ebene $\widehat{\boldsymbol{M}}^2$, und für die Bilder der uneigentlichen Punkte gilt

$$\bar{f}(\boldsymbol{x}) = \overline{f(\boldsymbol{h}_1)} \cap \widehat{\boldsymbol{H}}, \bar{f}(\boldsymbol{y}) = \overline{f(\boldsymbol{h}_2)} \cap \widehat{\boldsymbol{H}}, \bar{f}(\boldsymbol{z}) = \overline{f(\boldsymbol{h}_3)} \cap \widehat{\boldsymbol{H}}.$$

Diese Punkte liegen wegen $f(\boldsymbol{h}_i) \subset \widehat{\boldsymbol{M}}^2$, $i = 1, 2, 3$, in der Schnittgeraden $\widehat{\boldsymbol{M}}^2 \wedge \widehat{\boldsymbol{H}}$, sind also kollinear. Aus der Bijektivität von f folgt leicht die Bijektivität von $\bar{f}$, und somit ist $\bar{f}$ eine Kollineation. □

Aus dem Hauptsatz der projektiven Geometrie ergeben sich unmittelbar einige Folgerungen:

Folgerung 4. *Es sei $m \geq 2$. Unter den Voraussetzungen von Lemma 2 gilt $n = m$, und es gibt einen Isomorphismus $\sigma : K \to \hat{K}$ derart, dass die affine Kollineation f eine Basisdarstellung der Form*

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a} + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i x^i) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{b}_i \sigma(x^i) \tag{19}$$

besitzt. Ist K ein Körper und lässt f das affine Verhältnis paralleler Strecken invariant, so ist f eine affine Bijektion mit $K = \hat{K}$ und $\sigma = \mathrm{id}_K$.

B e w e i s. Nach Folgerung 3.9 und Lemma 2 ist $n = m$. Damit ist auch $n \geq 2$ und wir können den Hauptsatz der projektiven Geometrie anwenden. Bei affin angepassten Repères ergibt sich die Darstellung (18) aus der Basisdarstellung der σ-linearen, $\bar{f}$ erzeugenden Abbildung. Nach Übung 2 ist das Streckenverhältnis ein Spezialfall des Doppelverhältnis, und es folgt, dass $K = \hat{K}$ und $\sigma = \mathrm{id}_K$ gelten müssen. □

Folgerung 5. *Gilt $n \geq 2$ und ist K ein Körper mit* $\mathrm{char}\, K \neq 2$, *so ist die affine Gruppe $\mathfrak{A}(n)$ die Gruppe derjenigen affinen Kollineationen von $\boldsymbol{A}^n$ auf sich, die das Verhältnis paralleler Strecken invariant lassen.*□

Für eine spätere Anwendung heben wir den reellen Fall $K = \mathbf{R}$ besonders hervor. In diesem Fall gibt es nur den trivialen Isomorphismus $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$, und man erhält eine besonders einfache Beschreibung der affinen Gruppen:

Satz 6. *Die affine Gruppe $\mathfrak{A}(n)$ des reellen affinen Raumes $\boldsymbol{A}^n$, $n \geq 2$, besteht aus allen bijektiven Abbildungen von $\boldsymbol{A}^n$ auf sich, die Geraden wieder in Geraden überführen.*□

Übung 7. Mit Hilfe des Hauptsatzes der projektiven Geometrie beweise man: Die *Isometriegruppe*[1] des euklidischen Punktraumes $\boldsymbol{E}^n$, $n \geq 2$, ist die euklidische Gruppe.(Einen anderen Beweis dieser Aussage findet man in Übung I.6.2.13.)

1.6 Dualität

In der projektiven Geometrie gibt es eine grundlegende begriffliche Symmetrie, bei der die Begiffe Verbinden und Schneiden, Punkte und Hyperebenen, allgemeiner k-Ebenen und $(n-k-1)$-Ebenen, einander entsprechen. Diese als *Dualität* bezeichnete Symmetrie gestattet es, durch formales Ersetzen der Begriffe durch ihr Dual ohne neuen Beweis geometrisch neue Resultate zu erhalten. Wir beginnen mit dem einfachsten interessanten Fall:

[1]Hierunter versteht man die Menge der den Abstand erhaltenden bijektiven Abbildungen eines metrischen Raumes auf sich; sie bildet offenbar eine Gruppe bezüglich der Komposition, vgl. auch Abschnitt 2.5.6 weiter unten.

1.6.1 Dualität in der ebenen Inzidenzgeometrie

In der ebenen Inzidenzgeometrie (vgl. Beispiel 1.4) haben wir zwei Grundmengen: die Menge der Punkte und die Menge der Geraden, und eine Relation, die Inzidenz, die zwischen Punkten und Geraden bestehen kann. Führt man in dem Axiomensystem P.1–3 die *dualen Ersetzungen*

$$\begin{aligned}\text{Punkt} &\longmapsto \text{Gerade},\\ \text{Gerade} &\longmapsto \text{Punkt},\\ \text{Inzidenz} &\longmapsto \text{Inzidenz}\end{aligned}$$

aus, so gehen die Axiome P.1 und P.2 der ebenen Inzidenzgeometrie in die Axiome P.2 bzw. P.1 über:

$$\text{P.1} \longmapsto \text{P.2}, \qquad \text{P.2} \longmapsto \text{P.1},$$

während P.3 zu einer neuen Aussage P.3′ führt:

P.3′. *Es gibt vier Geraden, von denen nicht irgendwelche drei durch denselben Punkt gehen.*

Die Aussage P.3′ läßt sich jedoch aus den Axiomen P.1–3 beweisen, vgl. Übung 1.7. Nimmt man P.3′ als (überflüssiges) Axiom zu den Axiomen P.1–3 hinzu, so erhält man ein bei den dualen Ersetzungen in sich selbst übergehendes Axiomensystem der ebenen Inzidenzgeometrie. Diese begriffliche Symmetrie nennt man die *Dualität der projektiven Ebene*. Punkte und Geraden bilden ein *zueinander duales Paar*, und die Inzidenz ist ein zu sich selbst dualer Begriff[1]. Da alle Definitionen und Sätze der ebenen Inzidenzgeometrie sich allein auf die drei genannten Grundbegriffe und das beschriebene, zu sich selbst duale Axiomensystem stützen, wird durch die dualen Ersetzungen jedem abgeleitetem Begriff ein entsprechender dualer Begriff zugeordnet; ersetzt man in einem Satz (d.h. einer bewiesenen Aussage) jeden Begriff durch den zu ihm dualen, so erhält man wieder eine richtige Aussage, deren Beweis sich durch duale Ersetzungen aus dem Beweis des ersten Satzes ergeben würde und daher nicht ausgeführt zu werden braucht. In speziellen Fällen können natürlich der duale Begriff oder der duale Satz mit dem ursprünglichen übereinstimmen, vgl. Übung 1. Die formale Regel, dass mit jedem Satz der ebenen Inzidenzgeometrie auch der duale Satz gilt, nennt man das *Dualitätsprinzip der projektiven Ebene*; da nämlich in der algebraisch definierten ebenen projektiven Geometrie über einem Schiefkörper K die Axiome P.1–3 als Sätze ableitbar sind, können wir das ebene Dualitätsprinzip auch in diesem Fal anwenden. Im nächsten Abschnitt 1.6.2 werden wir den n-dimensionalen Fall behandeln, der das ebene Dualitätsprinzip als Spezialfall noch einmal begründet. Das Buch von L. Heffter [37] beginnt mit einem zu sich selbst dualem Axiomensystem der projektiven Geometrie des dreidimensionalen Raumes, aus dem sich das Dualitätsprinzip dieser Geometrie ergibt.

Übung 1. Man zeige, dass in der projektiven Ebene $\boldsymbol{P}^2$ über einem Schiefkörper K die Figur des Satzes von Desargues (Übung 1.7, Abb. 1.5) zu sich selbst dual ist. Daraus leite man den folgenden, zu sich selbst dualen Satz her: Es seien $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ zwei *Dreiecke*, d.h. Tripel nicht kollinearer Punkte, und

$$\begin{array}{lll}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{a}_2 \vee \boldsymbol{a}_3, & \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{a}_3 \vee \boldsymbol{a}_1, & \boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{a}_2\\ \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{b}_2 \vee \boldsymbol{b}_3, & \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{b}_3 \vee \boldsymbol{b}_1, & \boldsymbol{B}_3 = \boldsymbol{b}_1 \vee \boldsymbol{b}_2\end{array}$$

[1] *Inzidenz* ist ja durch *Enthalten oder Umfassen* definiert, vgl. Definition 1.1.1, und aus verbandstheoretischer Sicht bilden *Enthalten* und *Umfassen* ein duales Paar, s. auch Gleichung (2) weiter unten.

die dazugehörigen *Dreiseite*, d.h. Tripel nicht konzentrischer Geraden. Dann gilt: Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte $\boldsymbol{a}_1 \vee \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_2 \vee \boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{a}_3 \vee \boldsymbol{b}_3$ sind konzentrisch genau dann, wenn die Schnittpunkte entsprechender Geraden $\boldsymbol{A}_1 \wedge \boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{A}_2 \wedge \boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{A}_3 \wedge \boldsymbol{B}_3$ kollinear sind.

Übung 2. Man dualisiere den Satz von PAPPOS (Übung 1.8) und fertige eine entsprechende Skizze an.

Übung 3. Es sei $\boldsymbol{P}^2$ eine projektive Ebene über einem Schiefkörper K, $\operatorname{char} K \neq 2$. Man dualisiere den Begriff des vollständigen Vierecks (Übung 4.6) zu dem des *vollständigen Vierseits*. Der Geraden als Träger der Punktreihe entspricht dual der Punkt als Träger des *Geradenbüschels*, das sind alle durch ihn gehenden Geraden der Ebene. Nach Beispiel 1 erhält man die Begriffe des Doppelverhältnisses und der harmonischen Lage durch Dualisierung dieser für die Punktreihe definierten Begriffe. Durch Dualisierung von Übung 4.7 gebe man eine Konstruktion der vierten harmonischen zu drei konzentrischen Geraden an.

1.6.2 Projektive und algebraische Dualität

Beim Aufbau der projektiven Geometrie mit den Hilfsmitteln der linearen Algebra ergibt sich die geometrische Dualität aus der algebraischen Dualität zwischen Vektoren und Kovektoren. Wir betrachten in diesem Abschnitt nur endlich dimensionale Räume $\boldsymbol{V}$ über einem Schiefkörper K. Ebenso wie im kommutativen Fall wird das *Dual* $\boldsymbol{V}'$ als die Menge der linearen Abbildungen $\mathfrak{u} : \boldsymbol{V} \to K$ definiert; diese werden auch *Linearformen* oder *Kovektoren* genannt. Das Dual ist bei argumentweiser Definition der Rechenoperationen wieder

ein Vektorraum derselben Dimension über K; dabei ist zu beachten, dass das Dual eines rechten (bzw. linken) Vektorraums ein linker (bzw. rechter) Vektorraum ist (Satz II.7.3.7); die Linearität der Form bleibt ja im nichtkommutativen Fall nur erhalten, wenn man sie von der entgegengesetzten Seite mit einem Skalar multipliziert:

$$\mu\mathfrak{u}(\mathfrak{x}\alpha + \mathfrak{y}\beta) = \mu\mathfrak{u}(\mathfrak{x})\alpha + \mu\mathfrak{u}(\mathfrak{y})\beta, \qquad \mu, \alpha, \beta \in K,\ \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V},\ \mathfrak{u} \in \boldsymbol{V}'.$$

Das Dual des dualen Raums $(\boldsymbol{V}')'$ ist wie im kommutativen Fall wieder ein zum ursprünglichen Raum $\boldsymbol{V}$ kanonisch isomorpher Vektorraum, den man in der Regel über den kanonischen Isomorphismus mit diesem identifiziert: $(\boldsymbol{V}')' = \boldsymbol{V}$. Das Gesagte läßt sich am einfachsten mit Hilfe der symmetrischen Schreibweise des Skalarprodukts von Kovektor und Vektor beschreiben:

$$(\mathfrak{u}, \mathfrak{x}) \in \boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V} \mapsto (\mathfrak{u}|\mathfrak{x}) := \mathfrak{u}(\mathfrak{x}) \in K.$$

Den kanonischen Isomorphismus $\boldsymbol{V} \to (\boldsymbol{V}')'$ erhält man, wenn man in $(\mathfrak{u}|\mathfrak{x})$ den Vektor $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}$ festhält und $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{V}'$ als Variable betrachtet. Man macht sich leicht klar, dass zu jeder Basis $(\mathfrak{a}_i)$ von $\boldsymbol{V}$ durch die Projektionen auf die j-ten Komponenten

$$\mathfrak{a}^j(\mathfrak{a}_i\xi^i) := \xi^j, \qquad \text{also } (\mathfrak{a}^j|\mathfrak{a}_i) = \delta_i^j,$$

eindeutig eine Basis $(\mathfrak{a}^j)$ von $\boldsymbol{V}'$ definiert wird, welche die *zu* $(\mathfrak{a}_i)$ *duale Basis* genannt wird; hier haben wir die Summenkonvention angewandt; δ_i^j bezeichnet das Kroneckersymbol. [2] Sind

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_i\xi^i, \qquad \mathfrak{u} = \upsilon_i\mathfrak{a}^i$$

[2] In Kapitel II.7 erhält man diese Ergebnisse durch Spezialisierungen der Sätze über freie Moduln über nicht kommutativen Ringen. Eine elementarere Darstellung der Vektoralgebra über Schiefkörpern enthält Kapitel III des Buches H. REICHARDT [67].

die Basisdarstellungen eines Vektors und eines Kovektors in zueinander dualen Basen, so hat ihr Skalarprodukt die einfache Form

$$(\mathfrak{u}|\mathfrak{x}) = \upsilon_i \xi^i.$$

Es ist klar, dass die Sätze der projektiven Geometrie genauso wie für rechte auch für linke Vektorräume über dem Schiefkörper K gelten. Die projektive Geometrie wird ja durch den Verband der Unterräume bestimmt; nach Beispiel II.7.2.14 kann jeder linke Vektorraum über K als ein rechter Vektorraum über dem entgegengesetzten Schiefkörper K_0 aufgefaßt werden, wobei der Verband der Unterräume sich nicht ändert. In diesem Sinne ist die projektive Geometrie $\mathfrak{P}(\boldsymbol{V}')$ zu verstehen; die projektiven Geometrien derselben Dimension über entgegengesetzten Schiefkörpern sind also isomorph. Die projektive Dualität wird mit Hilfe der Annullatorbeziehung begrifflich beschrieben und, im Unterschied zur synthetischen projektiven Inzidenzgeometrie, rechnerisch zugänglich. Der *Annullator* wird bekanntlich (vgl. Definition I.5.6.1) folgendermaßen als eine Abbildung $\perp : \mathfrak{P}(\boldsymbol{V}) \to \mathfrak{P}(\boldsymbol{V}')$ definiert:

$$\boldsymbol{A} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V}) \mapsto \boldsymbol{A}^{\perp} := \{\mathfrak{u} \in \boldsymbol{V}' \,|\, (\mathfrak{u}|\mathfrak{x}) = 0 \text{ für alle } \mathfrak{x} \in \boldsymbol{A}\} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V}'). \tag{1}$$

Hier werden die Unterräume $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$, $\boldsymbol{A}^{\perp} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V}')$ als Vektormengen angesehen; betrachtet man sie als projektive Unterräume, so bleibt die Annullatorbeziehung wegen der Homogenität des Skalarprodukts in beiden Argumenten sinnvoll; die Definition

$$\boldsymbol{u} = [\mathfrak{u}] \in \boldsymbol{A}^{\perp} :\longleftrightarrow (\mathfrak{u}|\mathfrak{x}) = 0 \text{ für alle } \boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{A}$$

ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $\mathfrak{u}, \mathfrak{x}$ von $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}$. Aus dem in der linearen Algebra Bewiesenem, vgl. § I.5.6 und Satz II.7.3.7, Übung II.7.3.7 im nichtkommutativen Fall, ergibt sich unmittelbar

Satz 1. *Es seien $\mathfrak{P}^n = \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$, $\mathfrak{P}'^n = \mathfrak{P}(\boldsymbol{V}')$ die zu dem $(n+1)$-dimensionalen Vektorraum $\boldsymbol{V}$ über dem Schiefkörper K und seinem Dual $\boldsymbol{V}'$ gehörenden projektiven Geometrien. Dann ist die Annullatorbeziehung $\perp : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{P}'^n$ eine die Inklusion $\subset$ umkehrende und daher die Inzidenz erhaltende Bijektion der Verbände. Im einzelnen gelten:*

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \longleftrightarrow \boldsymbol{B}^{\perp} \subset \boldsymbol{A}^{\perp} \tag{2}$$

$$(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B})^{\perp} = \boldsymbol{A}^{\perp} \wedge \boldsymbol{B}^{\perp}, \qquad (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})^{\perp} = \boldsymbol{A}^{\perp} \vee \boldsymbol{B}^{\perp}, \tag{3}$$

$$(\boldsymbol{A}^{\perp})^{\perp} = \boldsymbol{A}, \tag{4}$$

$$\operatorname{Dim} \boldsymbol{A} = k \longleftrightarrow \operatorname{Dim} \boldsymbol{A}^{\perp} = n - k - 1, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{o}^{\perp} = \boldsymbol{P}'^{\,n}, \qquad \boldsymbol{P}^{n\,\perp} = \boldsymbol{o}'. \tag{6}$$

□

Die *projektive Dualität* läßt sich auf Grund von Satz 1 folgendermaßen beschreiben: Die Abbildung $\perp : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{P}'^n$ ordnet jedem Grundbegriff, genauer, sogar jedem Element der projektiven Geometrie $\mathfrak{P}^n$, den dualen Grundbegriff der dualen projektiven Geometrie $\mathfrak{P}'^n$ zu, wobei die Formeln (2) bis (6) gelten. Da sich jeder abgeleitete Begriff und jede Aussage durch endliche viele Schritte aus den Grundbegriffen aufbaut, ergibt sich aus jedem Begriff ein Paar zueinander dualer Begriffe, und zu jeder Aussage ein Paar zueinander dualer Aussagen, die entweder beide wahr oder beide falsch sind; hierzu beachte man (4). Weil alle n-dimensionalen Geometrien über demselben oder dem entgegengesetzten Schiefkörper isomorph sind, gilt also nach diesem *Dualitätsprinzip* zu jedem Satz ein dazu dualer Satz, der wegen (5) in der Regel einen anderen geometrischen Inhalt hat. Wie in der ebenen Inzidenzgeometrie kann es natürlich eintreten, dass der duale Satz mit dem ursprünglichen übereinstimmt. Man beachte, dass die Abbildung $\perp$ nach ihrer Definition stets von dem zugrunde liegendem Raum, also von dessen Dimension abhängt, was in der Formel (5) besonders deutlich wird. In den folgenden Beispielen wenden wir das Dualitätsprinzip an.

Beispiel 1. Es sei $\boldsymbol{u} = [\mathfrak{u}] \in \boldsymbol{P'}^n$ ein „Punkt" des dualen projektiven Raums. Da der Annullator nach (4), betrachtet als Abbildung $\perp : \mathfrak{P'}^n \to \mathfrak{P}^n$, die zu (1) inverse Abbildung ist, repräsentiert $\boldsymbol{u}$ die Hyperebene

$$\boldsymbol{u}^\perp = \{\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{P}^n | (\mathfrak{u}|\mathfrak{x}) = 0\}. \tag{7}$$

Weil die Abbildung $\perp$ eine kanonische Bijektion des dualen Punktraums $\boldsymbol{P'}^n$ auf die Graßmann-Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{P}_{n,n-1}$ der Hyperebenen des Ausgangsraums $\boldsymbol{P}^n$ liefert, ist es sinnvoll und üblich, die Elemente $\boldsymbol{u} = [\mathfrak{u}] \in \boldsymbol{P'}^n$ als Hyperebenen des $\boldsymbol{P}^n$ zu interpretieren und sie auch als solche zu bezeichnen. In (7) wird die Hyperebene $\boldsymbol{u}^\perp$ als Menge der Punkte charakterisiert, deren Repräsentanten der Gleichung $(\mathfrak{u}|\mathfrak{x}) = 0$ genügen; denken wir uns umgekehrt einen Punkt $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \neq \boldsymbol{o}$ von $\boldsymbol{P}^n$ festgehalten und bestimmen alle Hyperebenen $\boldsymbol{u} = [\mathfrak{u}]$, die dieser Gleichung genügen, so erhalten wir als duales Gebilde $\boldsymbol{x}^\perp$ die Menge aller Hyperebenen durch den Punkt $\boldsymbol{x}$. Allgemein korrespondiert die Graßmann-Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{P}_{n,k}$ der k-Ebenen des projektiven Raums $\boldsymbol{P}^n$ mit der Graßmann-Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{P}'_{n,n-k-1}$ der $(n-k-1)$-Ebenen von $\boldsymbol{P'}^n$. Da $\boldsymbol{P'}^n$ selbst ein projektiver Punktraum ist, erhalten wir durch Dualisierung der Begriffe und Sätze über projektive Gebilde aus Punkten die dualen Begriffe und Sätze über projektive Gebilde aus Hyperebenen. Ist zum Beispiel $n = 3$, so sind Punkte zu Ebenen und Geraden zu Geraden dual. Jede Gerade $\boldsymbol{B}$ bestimmt die Menge der mit ihr inzidenten Punkte; diese Menge haben wir mit Hilfe der kanonischen Abbildung π (vgl. (1.2)) mit der Geraden selbst identifiziert. Tut man das nicht, so ist das Objekt „Gerade" von dieser Menge zu unterscheiden, die mitunter deswegen *Punktreihe* genannt wird. Der dazu duale Begriff ist die Menge aller Ebenen, die mit der Geraden inzidieren, d.h. sie enthalten; die Gesamtheit all dieser Ebenen nennt man das *Ebenenbüschel* mit dem *Träger* $\boldsymbol{B}$. Sind $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$ zwei verschiedene Punkte der Geraden, so gilt

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}^\perp \wedge \boldsymbol{b}^\perp)^\perp,$$

die Gerade erscheint als Verbindung von zwei Punkten und dual als Schnitt von zwei Ebenen. Ebenso wie in der Punktreihe erhält man im Ebenenbüschel, das ja eine Gerade in $\boldsymbol{P'}^3$ ist, ein DV, und damit ist zum Beispiel die harmonische Lage von vier Ebenen eines Ebenenbüschels definiert. Für $n = 2$ entspricht der Menge aller Punkte auf einer Geraden dual die Menge aller Geraden durch einen Punkt, die man ein *Geradenbüschel* nennt, und auch in dieser Menge ist das DV definiert. Für beliebiges $n > 1$ entspricht einer Geraden des dualen Raums $\boldsymbol{P'}^n$ das Büschel aller Hyperebenen durch eine feste $(n-2)$-Ebene, die wieder der Träger des Hyperebenenbüschels heißt. Algebraisch entspricht der Auffassung einer k-Ebene als Verbindung von Punkten ihre Parameterdarstellung, und der Auffassung als Schnitt von Hyperebenen ihre Darstellung als Lösung eines homogenen Gleichungssystems. □

Übung 4. a) Man dualisiere die Begriffe kollinear, Wurf, DV eines Wurfes auf Hyperebenen. – b) Man zeige: Ist $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ ein Wurf von Punkten des $\boldsymbol{P}^n$, so ist $(\boldsymbol{a}^\perp, \boldsymbol{b}^\perp, \boldsymbol{c}^\perp, \boldsymbol{d}^\perp)$ ein Wurf von Hyperebenen des Raums $\boldsymbol{P}'^n$, und die DV dieser Würfe stimmen überein. – c) Man formuliere und beweise ein Analogon von Übung 4.4 für Würfe von Hyperebenen.

Beispiel 2. In (1.2) haben wir eine kanonische Abbildung $\pi : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{P}_o^n$ definiert, die auf Unterräume angewandt eine Realisierung der projektiven Unterräume $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{P}^n$ unter Erhaltung der Inklusion $\subset$ als Punktmengen gestattete; dabei gilt mit Verwendung der Inzidenzrelation ι

$$\pi(\boldsymbol{B}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n | \boldsymbol{x} \ \iota \ \boldsymbol{B}\}. \tag{8}$$

Die analoge kanonische Abbildung $\pi : \boldsymbol{V}' \to \boldsymbol{P}'^n$ gestattet es, jeden projektiven Unterraum $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{P}'^n$ als Menge von Punkten in $\boldsymbol{P}'^n$, also wegen der Dualität als Menge von Hyperebenen des $\boldsymbol{P}^n$ aufzufassen. Dem Unpunkt $\boldsymbol{o}' = \pi(\mathfrak{o}) \in \boldsymbol{P}'^n$ entspricht wegen (6) dabei der ganze Raum $\boldsymbol{P}^n$. Die Dualisierung von (8) führt uns auf die folgende geometrische Deutung der Annullatorbeziehung $\perp$:

$$\tau(\boldsymbol{B}) := \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{P}'^n | \boldsymbol{u} \ \iota \ \boldsymbol{B}\} = \boldsymbol{B}^\perp; \tag{9}$$

denn $\tau(\boldsymbol{B})$ ist ja nach Definition der Inzidenz die Menge aller Hyperebenen $\boldsymbol{u}$, die $\boldsymbol{B}$ enthalten, für die also $(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{B}) = 0$ gilt, und das ist $\boldsymbol{B}^\perp$; man nennt $\tau(\boldsymbol{B})$ das *Hyperebenenbüschel mit dem Träger* $\boldsymbol{B}$. (Hinzu kommt noch der dem Unpunkt $\boldsymbol{o}'$ entsprechende ganze Raum $\boldsymbol{P}^n$, der stets zu allen Räumen von Hyperebenen hinzuzufügen ist; wir werden in Zukunft darauf meist nicht eingehen.) Während bei π die Relation $\subset$ erhalten bleibt, wird sie nach (2) bei τ umgekehrt; daher werden wir τ besser nicht analog π zu einer Identifizierung benutzen, um Irrtümer zu vermeiden. □

Übung 5. Es sei $(\mathfrak{a}_i)_{i=0,\ldots,n}$ eine Basis von $\boldsymbol{V}^{n+1}$ und $(\mathfrak{a}^j)$ die dazu duale Basis von $\boldsymbol{V}'$. Die zu $\mathfrak{a}^j$ gehörende Hyperebene $\boldsymbol{H}_j$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}_j \longleftrightarrow \boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \text{ und } (\mathfrak{a}^j|\mathfrak{x}) = 0;$$

$\boldsymbol{H}_j$ ist die zum Punkt $\boldsymbol{a}_j = [\mathfrak{a}_j]$ gegenüberliegende Seite des zu der Basis gehörenden Koordinatensimplex. Dem Einheitspunkt $\boldsymbol{e} = [\mathfrak{a}_0 + \ldots + \mathfrak{a}_n]$ entspricht dual die *Einheitshyperebene*

$$\boldsymbol{E} := [\mathfrak{a}^0 + \ldots + \mathfrak{a}^n] = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}_o^n | \boldsymbol{x} = [\mathfrak{a}_j x^j] \text{ und } \sum_{j=0}^n x^j = 0\}.$$

Man zeige: Wählt man als uneigentliche Hyperebene des affinen Raums $\boldsymbol{A}^n$ die Einheitshyperebene $\boldsymbol{E} \subset \boldsymbol{P}^n$ eines projektiven Repères, so gilt

$$\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{A}^n \longleftrightarrow \sum_{j=0}^n x^j \neq 0,$$

und die Normierung

$$\nu^i := x^i (\sum_{j=0}^n x^j)^{-1} \qquad (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}^n)$$

definiert die *baryzentrischen Koordinaten* von $\boldsymbol{x}$ bezüglich des n-Simplex $([\mathfrak{a}_0], \ldots, [\mathfrak{a}_n])$, vgl. Übung I.4.5.5.

1.6.3 Projektive Bündelgeometrien

Es sei $\mathfrak{P}^n$ eine n-dimensionale, etwa rechte projektive Geometrie über dem Schiefkörper K und $\boldsymbol{A}^k \in \mathfrak{P}^n$ eine beliebige, fest gewählte k-Ebene. Unter dem *Bündel* der projektiven Unterräume mit dem *Träger* $\boldsymbol{A}^k$ verstehen wir die Menge aller $\boldsymbol{A}^k$ enthaltenden Unterräume:

$$\mathfrak{P}^n/\boldsymbol{A}^k := \{\boldsymbol{B} \in \mathfrak{P}^n | \boldsymbol{A}^k \subset \boldsymbol{B}\}. \tag{10}$$

Wir beweisen nun

Satz 2. *Unter den Vorausetzungen der Definition* (10) *seien* $\boldsymbol{V}^{n+1} \supset \boldsymbol{W}^{k+1}$ *die* $\boldsymbol{P}^n$, $\boldsymbol{A}^k$ *bestimmenden Vektorräume über dem Schiefkörper K;* $\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}$ *bezeichne den Faktorraum. Dann definiert*

$$p : \boldsymbol{B} \in \mathfrak{P}^n/\boldsymbol{A}^k \longmapsto p(\boldsymbol{B}) := \boldsymbol{B} + \boldsymbol{W} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}) \tag{11}$$

eine kanonische Bijektion, die ein Isomorphismus der Verbände ist. Daher ist in $\mathfrak{P}^n/\boldsymbol{A}^k$ *eine projektive Geometrie der Dimension* $n-k-1$ *definiert. Der zum projektiven Punktraum* $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W})$ *duale Raum ihrer Hyperebenen ist zu* $\boldsymbol{A}^{\perp}$ *kanonisch isomorph.*

B e w e i s. Der Einfachheit halber möge $\boldsymbol{B}$ sowohl den Vektorunterraum als auch den projektiven Unterraum bezeichnen, also je nach Kontext als Vektormenge oder Punktmenge zu deuten sein. Die Abbildung p, betrachtet als Abbildung der Vektorunterräume, wird offenbar durch die kanonische Projektion

$$p : \mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} \mapsto \mathfrak{x} + \boldsymbol{W} \in \boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}$$

erzeugt und ist daher surjektiv. Da ihr Kern $\boldsymbol{W}$ ist, und die Urbilder der Unterräume $p^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{W} = \boldsymbol{B}$ für alle $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{P}^n/\boldsymbol{A}^k$ erfüllen – für diese gilt ja $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{B}$ – ist die Abbildung (11) auch injektiv. Sie erhält offenbar die Relation $\subset$ und erfüllt

$$p(\boldsymbol{B}_1) \vee p(\boldsymbol{B}_2) = p(\boldsymbol{B}_1 \vee \boldsymbol{B}_2);$$

folglich ist sie eine Kollineation, wobei die *relative Dimension* im Bündel zu beachten ist:

$$\mathrm{Dim}\,\mathrm{rel}(\boldsymbol{B}) := \mathrm{Dim}\,\boldsymbol{B} - k - 1. \tag{12}$$

Weiter ist $\boldsymbol{A}^{k\perp}$ das Büschel der Hyperebenen in $\boldsymbol{P}^n$, die $\boldsymbol{A}^k$ enthalten. Ist $\boldsymbol{u} = [\mathfrak{u}]$ eine derartige Hyperebene, so gilt $\mathfrak{u}|\boldsymbol{W} = 0$, und umgekehrt. Daher ist $\hat{\mathfrak{u}}(\mathfrak{x}+\boldsymbol{W}) := \mathfrak{u}(\mathfrak{x})$ eine wohldefinierte Linearform auf $\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W}$. Die Abbildung $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{W}^{\perp} \mapsto \hat{\mathfrak{u}} \in (\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W})'$ ist linear und hat den Kern $\mathfrak{o}$; sie ist daher injektiv und folglich wegen der Gleichheit der Dimensionen $\dim \boldsymbol{W}^{\perp} = \dim \boldsymbol{V}/\boldsymbol{W} = n-k$ ein kanonisch definierter linearer Isomorphismus

$$\boldsymbol{W}^{\perp} \cong (\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W})', \qquad \boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V} \text{ Unterraum}, \ \dim V < \infty. \tag{13}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die zweite Behauptung. □

Beispiel 3. Die Veranschaulichung des auf den ersten Blick etwas formalen Satzes 2 führt uns auf die heuristische Betrachtung der projektiven Ebene in Beispiel 1.1 zurück. Dort haben wir mit Hilfe des Bündels aller Strahlen durch einen Punkt die projektive Ebene definiert, vgl. Abb. 1.1. Die relative Dimension der Geraden als Objekte des Bündels ist null; sie sind die „Punkte“ des Bündels. Schneiden wir das Bündel durch einen Punkt $\boldsymbol{A}$ mit einer nicht durch $\boldsymbol{A}$ gehenden Ebene $\boldsymbol{H}$, so ist die Zuordnung

$$h : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H} \longmapsto h(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{P}^n/\boldsymbol{A} \tag{14}$$

eine Projektivität; im Fall des Beispiels 1.1 ist $n = 3$. Im allgemeinen Fall eines Bündels in einem beliebigen $\boldsymbol{P}^n$ mit einem Träger $\boldsymbol{A}^k$ ist für $\boldsymbol{H}$ eine zu $\boldsymbol{A}^k$ komplementäre $(n-k-1)$-Ebene zu wählen; man nennt $\boldsymbol{H}$ einen *Schnitt* (vollständiges Repräsentantensystem) des Bündels $\boldsymbol{P}^n/\boldsymbol{A}$; in der Tat ist die Abbildung

$$s : \boldsymbol{X} \in \mathfrak{P}^n/\boldsymbol{A} \longmapsto s(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{H} \tag{15}$$

die Umkehrung der durch h bestimmten Abbildung der Verbände projektiver Unterräume. Die Abbildung (14) überträgt die $(n - k - 1)$-dimensionale projektive Geometrie von $\boldsymbol{H}$ auf das Bündel durch $\boldsymbol{A}$. Dass es sich dabei um eine Projektivität handelt folgt aus der Tatsache, dass h sich durch Übertragung eines homogenen Koordinatensystems von $\boldsymbol{H}$ auf das Bündel als Zuordnung durch gleiche Koordinaten darstellen läßt. Ist $f : \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{P}^n/\boldsymbol{A}$ eine analoge Projektivität einer weiteren, zu $\boldsymbol{A}$ komplementären $(n-k-1)$-Ebene $\boldsymbol{F}$ auf das Bündel mit dem Träger $\boldsymbol{A}$, so wird durch $f^{-1} \circ h : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{F}$ eine Projektivität definiert, welche die Konstruktion der Zentralprojektion aus Beispiel 1.2, Abb. 1.3 verallgemeinert. Wir nennen sie daher die *Zentralprojektion von* $\boldsymbol{H}$ *auf* $\boldsymbol{F}$ *mit dem Zentrum* $\boldsymbol{A}$. Bezeichnet q die in Beispiel 3.1 definierte Zentralprojektion von $\boldsymbol{P}^n$ mit dem Zentrum $\boldsymbol{A}$ auf den Unterraum $\boldsymbol{F}$, so gilt $f^{-1} \circ h = q|\boldsymbol{H}$. □

1.6.4 Duale Abbildungen.

Für lineare Abbildungen $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ ist die *zugehörige duale Abbildung* $a' : \boldsymbol{W}' \to \boldsymbol{V}'$ bekanntlich folgendermaßen definiert:

$$(a'(\mathfrak{w})|\mathfrak{x}) := (\mathfrak{w}|a(\mathfrak{x})), \qquad \mathfrak{x} \in \boldsymbol{V},\ \mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}',$$

vgl. Definition I.5.2, wo sie die zu a transponierte Abbildung genannt wurde. Für die Anwendungen in der projektiven Geometrie benötigt man eine naheliegende Verallgemeinerung dieses Begriffs. Bekanntlich (vgl. Definition II.7.2.7) nennt man eine Abbildung $\sigma : K \to L$ von Schiefkörpern einen *Anti-Isomorphismus*, wenn σ ein Isomorphismus der additiven Gruppen der Schiefkörper ist und $\sigma(\alpha\beta) = \sigma(\beta)\sigma(\alpha)$ erfüllt. Eine Abbildung $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ des rechten Vektorraums $\boldsymbol{V}$ über K in den linken Vektorraum $\boldsymbol{W}$ über L wird *σ-linear* genannt, wenn

$$a(\mathfrak{x}\alpha + \mathfrak{y}\beta) = \sigma(\alpha)a(\mathfrak{x}) + \sigma(\beta)a(\mathfrak{y}),\ \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}, \alpha, \beta \in K,$$

gilt, wobei $\sigma : K \to L$ ein Anti-Isomorphismus ist. Sie erfüllt

$$a(\mathfrak{x}\,\alpha\beta) = \sigma(\beta)\sigma(\alpha)a(\mathfrak{x}),\ \mathfrak{x}, \in \boldsymbol{V}, \alpha, \beta \in K.$$

(Analog für Abbildungen a von linken in rechte Vektorräume.)

Definition 1. Es seien $\boldsymbol{V}$ ein rechter Vektorraum über dem Schiefkörper K und $\boldsymbol{W}$ ein rechter (bzw. linker) Vektorraum über dem Schiefkörper L; $\sigma : K \to L$ sei ein

Isomorphismus (bzw. Anti-Isomorphismus) der Schiefkörper; schließlich sei $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ σ-linear. Dann heißt die durch

$$\begin{aligned} (a'(\mathfrak{w})|\mathfrak{x}) &:= \sigma^{-1}((\mathfrak{w}|a(\mathfrak{x}))), \quad \mathfrak{x} \in \boldsymbol{V},\, \mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}', && (16)\\ \text{bzw. } (a'(\mathfrak{w})|\mathfrak{x}) &:= \sigma^{-1}((a(\mathfrak{x})|\mathfrak{w})) && (17) \end{aligned}$$

definierte Abbildung $a' : \boldsymbol{W}' \to \boldsymbol{V}'$ die zu a *duale Abbildung.* □

In Gleichung (17) haben wir die Reihenfolge von Vektor $\mathfrak{y} \in \boldsymbol{W}$ und Kovektor $\mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}'$ in dem kanonischen Skalarprodukt $(\mathfrak{y}|\mathfrak{w})$ umgekehrt, weil nun $\boldsymbol{W}'$ ein rechter Vektorraum ist. Man beweist unmittelbar aus den Definitionen

Lemma 3. *Die Gleichungen* (16) *bzw.* (17) *definieren eine σ^{-1}-lineare Abbildung* $a' : \boldsymbol{W}' \to \boldsymbol{V}'$. □

Dieses Lemma legt die folgende Definition nahe:

Definition 2. Mit den Bezeichnungen von Definition 1 seien $\boldsymbol{P}_o^n$ und $\boldsymbol{Q}_o^m$ die zu den Vektorräumen $\boldsymbol{V}^{n+1}$ bzw. $\boldsymbol{W}^{m+1}$ über den Schiefkörpern K bzw. L gehörenden projektiven Räume. Weiter sei $f : \boldsymbol{P}_o^n \to \boldsymbol{Q}_o^m$ eine von einer σ-linearen Abbildung $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ erzeugte kollineare Abbildung. Dann heißt die durch die duale σ^{-1}-lineare Abbildung a' erzeugte kollineare Abbildung $f' : \boldsymbol{Q}'^m \to \boldsymbol{P}'^n$ *die zu der Abbildung f gehörende duale kollineare Abbildung.* □

Der folgende Satz enthält eine interessante Anwendung der dualen Abbildung: die unten bewiesene Formel (18), etwas anders in der Form

$$f^{-1}(\boldsymbol{H}) = f'(\boldsymbol{H}^{\perp})^{\perp}, \qquad \boldsymbol{H} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{W}^{m+1}),$$

geschrieben, zeigt die Möglichkeit, die Urbilder der kollinearen Abbildung f durch die Bilder von f' auszudrücken.

Satz 4. *Es mögen die Voraussetzuungen und Bezeichnungen von Definition 2 gelten. Dann ist die duale kollineare Abbildung f' unabhängig von der Wahl der f erzeugenden Abbildung a, und es gilt*

$$f^{-1}(\boldsymbol{H})^{\perp} = f'(\boldsymbol{H}^{\perp}), \qquad \boldsymbol{H} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{W}^{m+1}). \tag{18}$$

B e w e i s. Wir betrachten den Fall, dass $\boldsymbol{W}$ ein linker Verktorraum ist und (17) gilt. Es sei $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{W}'$ ein beliebiger Unterraum. Wir zeigen

$$a^{-1}(\boldsymbol{U}^{\perp}) = a'(\boldsymbol{U})^{\perp}. \tag{19}$$

In der Tat, es gilt $\mathfrak{x} \in a^{-1}(\boldsymbol{U}^{\perp})$ genau dann, wenn $a(\mathfrak{x}) \in \boldsymbol{U}^{\perp}$ ist, und das gilt genau dann, wenn für alle $\mathfrak{w} \in \boldsymbol{U}$ die Gleichung $(a(\mathfrak{x})|\mathfrak{w}) = 0$ zutrifft. Nach Definition 1 ist das gleichbedeutend mit $(a'(\mathfrak{w})|\mathfrak{x}) = \sigma^{-1}(a(\mathfrak{x})|\mathfrak{w}) = 0$ für alle $\mathfrak{w} \in \boldsymbol{U}$, also $\mathfrak{x} \in a'(\boldsymbol{U})^{\perp}$. Weil a die Abbildung f erzeugt, folgt für die projektiven Unterräume

$$f^{-1}(\boldsymbol{U}^{\perp}) = a'(\boldsymbol{U})^{\perp} = f'(\boldsymbol{U})^{\perp},$$

so dass f' nur von f und nicht von der Wahl der erzeugenden Abbildung a abhängt. Setzt man in der letzten Gleichung $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{H}^{\perp}$ und wendet $\perp$ an, so folgt die behauptete Gleichung (18). □

Durch Satz 4 ist die Definition der dualen kollinearen Abbildung f' gerechtfertigt. Offenbar gelten

$$(f')' = f, \tag{20}$$

$$(f \circ g)' = g' \circ f'. \tag{21}$$

Übung 6. Es sei f' die zu $f : \boldsymbol{P}^n_o \to \boldsymbol{Q}^m_o$ duale Abbildung. Man beweise: a) Es gelten

$$\boldsymbol{x} \ \iota \ f'(\boldsymbol{H}) \longleftrightarrow f(\boldsymbol{x}) \ \iota \ \boldsymbol{H} \qquad (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n, \ \boldsymbol{H} \in \boldsymbol{Q}'^m), \tag{22}$$

$$f'^{-1}(\boldsymbol{o}') = f(\boldsymbol{P}^n)^{\perp} = \tau(f(\boldsymbol{P}^n)). \tag{23}$$

b) f bestimmt eine Kollineation $\hat{f}$ des Bündels $\mathfrak{P}^n/f^{-1}(\boldsymbol{o})$ auf die projektive Geometrie des Bildes $f(\boldsymbol{P}^n)$:

$$\hat{f} : \ \boldsymbol{X} \in \mathfrak{P}^n/f^{-1}(\boldsymbol{o}) \longmapsto \hat{f}(\boldsymbol{X}) := f(\boldsymbol{X}) \in \mathfrak{P}(f(\boldsymbol{P}^n)), \tag{24}$$

und wegen der kanonischen σ^{-1}-Bijektion $a(\boldsymbol{V})' \cong \boldsymbol{W}'/a(\boldsymbol{V})^{\perp}$ gilt

$$(\hat{f})' = \widehat{(f')}. \tag{25}$$

Beispiel 4. Mit denselben Bezeichnungen wie in Definition 1 sei nun $a : \ \boldsymbol{V}^{n+1} \to \boldsymbol{W}^{n+1}$ bijektiv. Die zu a *kontragrediente Abbildung* wird definiert durch

$$a^* := (a^{-1})' : \ \boldsymbol{V}' \to \boldsymbol{W}'. \tag{26}$$

Offenbar gilt $a^* = (a')^{-1}$ (vgl. Übung II.7.2.12). Aus (18) folgt: Für alle $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$ ist

$$f^*(\boldsymbol{B}^{\perp}) = f(\boldsymbol{B})^{\perp}, \tag{27}$$

wobei f^* die von a^* induzierte Kollineation bezeichnet. Da man (27) auch in der Form

$$f^*(\boldsymbol{M}) = (f(\boldsymbol{M}^{\perp}))^{\perp}, \ (\boldsymbol{M} = \boldsymbol{B}^{\perp})$$

schreiben kann, ist klar, dass die kontragrediente Abbildung für die projektive Geometrie nichts wesentlich Neues liefert. Für alle $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$ ist

$$f(\boldsymbol{B}) = \{f(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\}$$

das Bild von $\boldsymbol{B}$ als Punktmenge und

$$f^*(\boldsymbol{B}^{\perp}) = \{f^*(\boldsymbol{H}^{n-1}) | \boldsymbol{H}^{n-1} \supset \boldsymbol{B}\}$$

dual dazu das Bild von $\boldsymbol{B}$ als Träger eines Hyperebenenbüschels. □

1.7 Korrelationen

In diesem Abschnitt wollen wir die Struktur der projektiven Geometrie $\mathfrak{P}^n$ als Verband in den Vordergrund stellen. Aus Übung 3.5 geht hervor, dass man die Kollineationen als Bijektionen $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^n$ zwischen projektiven Geometrien charakterisieren kann, die ebenso wie ihre Inversen F^{-1} monoton wachsend sind. Die dualistische Struktur der projektiven Geometrien legt es nahe, neben diesen auch monoton fallende Abbildungen zu betrachten.

1.7.1 Definition. Kanonische Korrelation

Definition 1. Es seien $F : \mathfrak{P}^n$, $\mathfrak{Q}^m$ (rechte oder linke) projektive Geometrien über den Schiefkörpern K bzw. L. Eine bijektive Abbildung $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ heißt eine *Korrelation*, wenn sie die folgende Bedingung erfüllt:

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \longleftrightarrow F(\boldsymbol{A}) \supset F(\boldsymbol{B}),\ \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathfrak{P}^n, \tag{1}$$

wenn also F und F^{-1} monoton fallend sind. □

Beispiel 1. Die Bildung des Anullators

$$\perp : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{P}'^n,\ \perp : \mathfrak{P}'^n \to \mathfrak{P}^n \tag{2}$$

ist eine Korrelation einer rechten auf eine linke (bzw. einer linken auf eine rechte) projektive Geometrie, die wir die *kanonische Korrelation* nennen wollen, da sie durch die Struktur der projektiven Geometrie eindeutig bestimmt ist. Aus diesen strukturellen Gründen lassen wir auch den naheliegenden Missbrauch der Bezeichnungen zu; die beiden in (2) betrachteten Abbildungen sind ja zueinander invers, wir müssten genau genommen $\perp_{\mathfrak{P}}$ von $\perp_{\mathfrak{P}'}$ unterscheiden und $\perp_{\mathfrak{P}'} = \perp_{\mathfrak{P}}^{-1}$ schreiben. □

Da die Korrelationen Anti-Isomorphismen der Verbandsstruktur sind, ergeben sich aus der Bedeutung von $\bigwedge$ als Infimum und $\bigvee$ als Supremum die Regeln

$$F(\bigwedge \boldsymbol{A}_\iota) = \bigvee F(\boldsymbol{A}_\iota),\ F(\bigvee \boldsymbol{A}_\iota) = \bigwedge F(\boldsymbol{A}_\iota),\ \boldsymbol{A}_\iota \in \mathfrak{P}^n. \tag{3}$$

Wir stellen uns nun die Frage, wann zwischen zwei projektiven Geometrien eine Korrelation existiert. Da für $n = 1$ die Ordnung $\subset$ wenig inhaltsreich ist — jede Bijektion $F : \mathfrak{P}^1 \to \mathfrak{Q}^1$ mit $F(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{Q}^1$ und $F(\boldsymbol{P}^1) = \boldsymbol{o}$ ist eine Korrelation — werden wir in der Regel $n \geq 2$ voraussetzen. Wir bemerken zunächst die sich unmittelbar aus der Definition ergebende

Folgerung 1. *Die Verknüpfung $F \circ G$ zweier Korrelationen ist eine Kollineation. Die Verknüpfung einer Korrelation und einer Kollineation ist eine Korrelation.*

Für die Existenzfrage betrachten wir zwei rechte projektive Geometrien; ist eine der Geometrien eine linke, so können wir nach Beispiel II.7.2.14 zum entgegengesetzten Schiefkörper und Vektorraum übergehen und damit alles auf den Fall rechter Geometrien zurückführen.

Satz 2. *Es seien $\mathfrak{P}^n$, $\mathfrak{Q}^m$ rechte projektive Geometrien über den Schiefkörpern K bzw. L, $n \geq 2$. Eine Korrelation $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ existiert genau dann, wenn $n = m$ ist und es einen Anti-Isomorphismus $\sigma : K \to L$ gibt. Sind diese Bedingungen erfüllt, so erhält man jede Korrelation $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^n$ in der Gestalt $F = \perp \circ G$, wobei $G : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}'^n$ eine von einer σ-linearen Bijektion erzeugte Kollineation ist, und σ die Anti-Isomorphismen von K auf L durchläuft.*

B e w e i s. Es sei $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ eine Korrelation. Nach Beispiel 1 und Folgerung 1 ist $G := \perp \circ F$ eine Kollineation der rechten projektiven Geometrie $\mathfrak{P}^n$ über K auf die linke projektive Geometrie $\mathfrak{Q}'^m$ über L. Es bezeichne $\hat{L}$ den zu L entgegengesetzten Schiefkörper, $\hat{\mathfrak{Q}}'$ die rechte projektive Geometrie, die durch Übergang zur entgegengesetzten Modulstruktur $\hat{\boldsymbol{W}}'$ über dem zu $\mathfrak{Q}'$ gehörendem Vektorraum $\boldsymbol{W}'$ entsteht. Da die Verbände $\hat{\mathfrak{Q}}'$ und $\mathfrak{Q}'$ übereinstimmen, ist $G : \mathfrak{P} \to \hat{\mathfrak{Q}}'$ eine Kollineation rechter projektiver Geometrien. Nach Satz 3.6 gilt daher $n = m$, und aus dem Hauptsatz 3.10 erhalten wir die Existenz eines Isomorphismus $\sigma : K \to \hat{L}$ und einer σ-linearen Abbildung $a : \boldsymbol{V} \to \hat{\boldsymbol{W}}'$, welche G nach $G([\mathfrak{x}]) = a[(\mathfrak{x})]$ erzeugt. Kehren wir nun zu den ursprünglichen Strukturen zurück, so wird $\sigma : K \to L$ wegen $\sigma(\alpha \cdot \beta) = \sigma(\alpha) \times \sigma(\beta) = \sigma(\beta) \cdot \sigma(\alpha)$ ein Anti-Isomorphismus, $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}'$ eine σ-lineare Bijektion und es gilt $F = \perp \circ G$. Die restlichen Behauptungen sind unmittelbar klar. □

Man beachte, dass die Abbildung F aus Satz 2 auch durch σ_1-lineare Abbildung a_1:

$$a_1(\mathfrak{x}) = a(\mathfrak{x}\mu),\ \sigma_1(\xi) = \sigma(\mu^{-1}\xi\mu),\ \mu \in K^*, \tag{4}$$

erzeugt wird und σ nur bis auf einen inneren Automorphismus von K eindeutig bestimmt ist.

Übung 1. Man formuliere und beweise ein Satz 1 entsprechendes Ergebnis für den Fall, dass $\mathfrak{P}^n$ eine rechte und $\mathfrak{Q}^m$ eine linke projektive Geometrie ist. Im Fall der kanonischen Korrelation $F = \perp$ wird $G = \perp \circ \perp = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}}$.

1.7.2 Korrelative Abbildungen

Analog zu den kollinearen können wir auch korrelative Abbildungen einführen:

Definition 2. Es seien $\mathfrak{P}^n = \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$, $\mathfrak{Q}^m = \mathfrak{Q}(\boldsymbol{W})$ projektive Geometrien über den Schiefkörpern K bzw. L. Eine Abbildung $F : \mathfrak{P} \to \mathfrak{Q}$ heißt *korrelativ*, wenn es eine σ-lineare Abbildung $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}'$ gibt derart, dass

$$F(\boldsymbol{A}) = a(\boldsymbol{A})^{\perp},\ \boldsymbol{A} \in \mathfrak{P}^n, \tag{5}$$

gilt; a heißt eine F *erzeugende* σ-lineare Abbildung. $\sigma : K \to L$ ist ein Isomorphismus oder ein Anti-Isomorphismus je nachdem, ob $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ entgegengesetzte oder gleichartige Vektorräume sind. In Übereinstimmung mit Definition 1 (vgl. Satz 2) nennen wir F eine *Korrelation*, wenn a eine σ-lineare Bijektion ist (auch im Falle $n = 1$). □

Der Kürze halber haben wir nur eine algebraische Definition der korrelativen Abbildungen angegeben; es ist klar, dass man analog zu den kollinearen Abbildungen (vgl. Abschnitt 1.3.1) auch eine geometrische Definition der korrelativen Abbildungen formulieren könnte. Einfacher ist es, sie durch Verknüpfung mit der kanonischen Korrelation auf die kollinearen Abbildungen zurückzuführen.Nach Satz 2 ist jede Korrelation auch eine korrelative Abbildung. Offenbar ist jede korrelative Abbildung monoton fallend:

$$\text{Aus } \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \text{ folgt } F(\boldsymbol{A}) \supset F(\boldsymbol{B}),\ \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathfrak{P}^n. \tag{6}$$

Übung 2. Es sei $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ die durch eine σ-lineare Abbildung $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}'$ erzeugte korrelative Abbildung. Man zeige: Ist $a_1 : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}'$ eine σ_1-lineare Abbildung, die ebenfalls F erzeugt, so gibt es ein $\mu \in K^*$ derart, dass (4) gilt.

Beispiel 2. Es sei $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^n$ eine Korrelation. Aus Satz 2 folgt mit $G := \perp \circ F$ für jede k-Ebene $\boldsymbol{H} \in \mathfrak{P}^n$:

$$\operatorname{Dim} F(\boldsymbol{H}^k) = \operatorname{Dim}(G(\boldsymbol{H}^k)^\perp) = n - k - 1.$$

Speziell ist das Bild einer Geraden $\boldsymbol{H}^1$ eine $(n-2)$-Ebene, und die Menge der mit $\boldsymbol{H}^1$ inzidenten Punkte geht in das Büschel der mit $F(\boldsymbol{H}^1)$ inzidenten Hyperebenen über. Nach Übung 6.4 bilden diese Hyperebenen die „Punkte“ einer Geraden über L, auf der folglich ein DV erklärt ist. Will man, dass die Korrelation *projektiv* ist, d. h. das DV invariant lässt, so muss $K = L$, $\sigma = \mathrm{id}_K$ und, falls $\mathfrak{P}^n$, $\mathfrak{Q}^n$ beides rechte projektive Geometrien sind, K ein Körper sein. □

Beispiel 3. Es sei $K = L = \mathbf{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Dann gibt es nur den Isomorphismus $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$, vgl. Übung I.2.1.3). Jede korrelative Abbildung $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ wird durch eine lineare Abbildung $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}'$ erzeugt.□

Beispiel 4. Im Fall der komplexen Zahlen $K = L = \mathbf{C}$ beschränken wir uns wie schon bei den Kollineationen auf die stetigen Automorphismen von $\mathbf{C}$, vgl. Beispiel 4.3. Demgemäß haben wir zwei Arten von korrelativen Abbildungen: Ist $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$, so sprechen wir von den *(eigentlich) korrelativen Abbildungen*, und ist σ die Konjugation, von den *antikorrelativen Abbildungen*. □

Beispiel 5. Es sei $K = L = \mathbf{H}$ der Schiefkörper der Quaternionen und $\mathfrak{P}^n$ eine rechte projektive Geometrie über $\mathbf{H}$. Ist $\mathfrak{Q}^m$ ebenfalls eine rechte projektive Geometrie über $\mathbf{H}$ und wird die korrelative Abbildung $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ durch eine σ-lineare Abbildung erzeugt, so können wir stets eine Umnormung (4) derart vornehmen, dass σ_1 die Konjugation $\tau : q \mapsto \bar{q}$ von $\mathbf{H}$ und die Abbildung a_1 *antilinear* wird, also

$$a_1(\mathfrak{x}\lambda) = \bar{\lambda} a_1(\mathfrak{x}),\ \lambda \in \mathbf{H},$$

erfüllt; man beachte Beispiel 4.4 und die Tatsache, dass $\tau \circ \sigma$ ein Isomorphismus von $\mathbf{H}$ ist. Analog folgt aus demselben Beispiel, dass F durch eine lineare Abbildung $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}'$ erzeugt werden kann, wenn $\mathfrak{Q}^m$ eine linke projektive Geometrie über $\mathbf{H}$ ist. □

Ist $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ korrelativ, so gilt $F(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{Q}^m$. Für einen Punkt $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{P}^n$ gilt

$$F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Q}^m \longleftrightarrow \mathfrak{x} \in \operatorname{Ker} a; \tag{7}$$

hier werde F durch a erzeugt. Weiter ist

$$\operatorname{Dim} F(\boldsymbol{x}) = m - 1 \longleftrightarrow \boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \text{ und } \mathfrak{x} \notin \operatorname{Ker} a. \tag{8}$$

Allgemein ist *der Kern von* F: $\operatorname{Ker} F := \operatorname{Ker} a$ ein projektiver Unterraum der Dimension

$$\operatorname{Dim} \operatorname{Ker} F = n - \operatorname{rg} a; \tag{9}$$

Ist $\operatorname{rg} a = 0$, also $\operatorname{Ker} F = \boldsymbol{P}^n$, so heißt F die *korrelative Nullabbildung*; für sie ist $F(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{Q}^m$ für alle $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{P}^n$. Für jeden projektiven Unterraum $\boldsymbol{H} \in \mathfrak{P}^n$ gilt bei der beliebigen korrelativen Abbildung F

$$\operatorname{Dim} F(\boldsymbol{H}) = m - \operatorname{Dim} \boldsymbol{H} + \operatorname{Dim}(\boldsymbol{H} \wedge \operatorname{Ker} F). \tag{10}$$

Man beachte, dass $F(\boldsymbol{H})$ hier als Träger des Hyperebenenbüschels

$$\tau(F(\boldsymbol{H})) = \{F(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}\}$$

erscheint; speziell ist F surjektiv genau dann, wenn $F(\boldsymbol{P}^n) = \boldsymbol{o}$ gilt.

Definition 3. Es sei $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ die durch eine σ-lineare Abbildung $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}'$ erzeugte korrelative Abbildung. Dann heißt die durch die duale σ^{-1}-lineare Abbildung $a' : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V}'$ erzeugte korrelative Abbildung *die zu F duale*; sie wird mit

$$F' : \boldsymbol{X} \in \mathfrak{Q}^m \mapsto F'(\boldsymbol{X}) := a'(\boldsymbol{X})^{\perp} \in \mathfrak{P}^n \tag{11}$$

bezeichnet. □

Satz 3. *Es sei $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ korrelativ. Dann hängt die duale Abbildung F' nicht von der Wahl der F erzeugenden σ-linearen Abbildung a ab. Es gelten*

$$F'(\boldsymbol{Q}^m) = \operatorname{Ker} F, \tag{12}$$

$$F \circ F'(\boldsymbol{Y}) \supset \boldsymbol{Y},\ F' \circ F(\boldsymbol{X}) \supset \boldsymbol{X},\ (\boldsymbol{Y} \in \mathfrak{Q}^m,\ \boldsymbol{X} \in \mathfrak{P}^n), \tag{13}$$

$$(F')' = F. \tag{14}$$

Ist F eine Korrelation, so gilt

$$F' = F^{-1}. \tag{15}$$

B e w e i s. Die erste Behauptung folgt aus Satz 6.4. Weiter gilt nach (11) mit $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Q}^m$ und (6.19) mit $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{W}$

$$F'(\boldsymbol{Q}^m) = a'(\boldsymbol{W})^{\perp} = \operatorname{Ker} a = \operatorname{Ker} F.$$

Die erste Beziehung (13) erhält man aus den Definitionen ebenfalls nach (6.19)

$$F(F'(\boldsymbol{Y})) = (a(a'(\boldsymbol{Y})^{\perp}))^{\perp} = (a(a^{-1}(\boldsymbol{Y}^{\perp})))^{\perp} \supset \boldsymbol{Y}$$

wegen $a(a^{-1}(\boldsymbol{Y}^{\perp})) \subset \boldsymbol{Y}^{\perp}$. Die zweite Beziehung (13) ergibt sich aus der ersten und aus der unmittelbar aus Definition 3 folgenden Gleichung (14). Ist F eine Korrelation, so gilt das auch für F', und aus Dimensionsgründen muss in (13) beide Male die Gleichheit eintreten, woraus (15) folgt. □

1.7.3 F-Korrespondenzen und σ-Biformen

Wir wollen nun die korrelativen Abbildungen in Termen der Punkte $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}_o^n$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Q}_o^m$ ausdrücken. Dazu definieren wir

Definition 4. Es sei $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ eine korrelative Abbildung. Man sagt, das Paar $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{P}_o^n \times \boldsymbol{Q}_o^m$ *korrespondiere in der Abbildung F,* oder *es liege in F-Korrespondenz,* wenn $\boldsymbol{y}\,\iota F(\boldsymbol{x})$ gilt. □

Folgerung 4. *Die F-Korrespondenzen haben folgende Eigenschaften:*
a) Die Menge $\{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Q}_o^m | \boldsymbol{y}\,\iota F(\boldsymbol{x})\}$ *ist die Hyperebene* $F(\boldsymbol{x}) \subset \boldsymbol{Q}_o^m$*, aufgefasst als Punktmenge, falls* $\boldsymbol{x} \notin \operatorname{Ker} F$*, und der ganze Raum* $\boldsymbol{Q}_o^m$*, falls* $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} F$*.*
b) Es gilt

$$\boldsymbol{y}\,\iota F(\boldsymbol{x}) \longleftrightarrow \boldsymbol{x}\,\iota F'(\boldsymbol{y}); \tag{16}$$

daher ist bei festem $\boldsymbol{y}$ *die Menge* $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}_o^n | \boldsymbol{y}\,\iota F(\boldsymbol{x})\}$ *die als Punktmenge aufgefasste Hyperebene* $F'(\boldsymbol{y}) \subset \boldsymbol{P}_o^n$*, falls* $\boldsymbol{y} \notin F(\boldsymbol{P}_o^n)$*, und ganz* $\boldsymbol{P}_o^n$ *sonst.* □

Von nun an setzen wir wieder voraus, dass $K = L$ ein beliebiger Schiefkörper und σ ein Anti-Automorphismus von K ist. Es seien $\mathfrak{P}^n = \mathfrak{P}(\boldsymbol{V}^{n+1})$, $\mathfrak{Q}^m = \mathfrak{P}(\boldsymbol{W}^{m+1})$ zu rechten Vektorräumen über K gehörende projektive Geometrien, und $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ eine durch eine σ-lineare Abbildung $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}'$ erzeugte korrelative Abbildung. Wir definieren

$$b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := (a(\mathfrak{x})|\mathfrak{y}),\ (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \in \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}. \tag{17}$$

Lemma 5. *Die durch* (17) *definierte Abbildung* $b : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W} \to K$ *hat folgende Eigenschaften:*
a) b ist linear in $\mathfrak{y}$*, d.h. es gilt*

$$b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\alpha + \mathfrak{z}\beta) = b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\alpha + b(\mathfrak{x}, \mathfrak{z})\beta,$$

b) b ist σ*-linear in* $\mathfrak{x}$*, d. h. es gilt*

$$b(\mathfrak{x}\alpha + \mathfrak{u}\beta, \mathfrak{y}) = \sigma(\alpha)b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \sigma(\beta)b(\mathfrak{u}, \mathfrak{y}). \tag{18}$$

□

Definition 5. Es seien $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ rechte Vektorräume über dem Schiefkörper K. Eine Abbildung $b : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W} \to K$ heißt eine *Biform* oder genauer *σ-Biform*, wenn sie die Eigenschaften a), b) aus Lemma 5 besitzt. □

Bilineare oder hermitesche Formen sind Beispiele von σ-Biformen. Oft sagt man statt σ-Biform auch *anderthalblineare Form.* Bestimmt die Abbildung $a_1 : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}'$ ebenfalls die korrelative Abbildung F, so gilt (4) (vgl. Übung 2), und wir erhalten aus a_1 die σ_1-Biform

$$b_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := (a_1(\mathfrak{x})|\mathfrak{y}) = \sigma(\mu)b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}). \tag{19}$$

Zwei Biformen b, b_1 die sich nur um einen Faktor $\nu \in K^*$ unterscheiden, sollen *proportional* genannt werden. Ist b eine σ-Biform und $b_1 = \nu b$ zu b proportional, so ist b_1 eine σ_1-Biform mit $\sigma_1(\alpha) = \nu\sigma(\alpha)\nu^{-1}$. Offenbar bestimmt jede Biform $b \neq 0$ den zugehörigen Anti-Automorphismus von K eindeutig. Die Biformen sind besonders geeignet, die korrelativen Abbildungen als Korrespondenzen zu beschreiben:

Satz 6. *Zu jeder korrelativen Abbildung $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ rechter projektiver Geometrien über demselben Schiefkörper K gehört eine bis auf Proportionalität eindeutig bestimmte Biform $b : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W} \to K$ derart, dass*

$$[\mathfrak{y}]\,\iota F([\mathfrak{x}]) \longleftrightarrow b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0,\ (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \in \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}. \tag{20}$$

Umgekehrt bestimmt jede Klasse zueinander proportionaler Biformen vermöge (20) *eindeutig eine korrelative Abbildung $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$.*

B e w e i s. Der erste Teil der Behauptung folgt aus Lemma 5 und der auf (19) führenden Überlegung. Ist umgekehrt eine Biform b gegeben, so definiert b nach

$$\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} \mapsto a(\mathfrak{x}) \in \boldsymbol{W}',\ a(\mathfrak{x})(\mathfrak{y}) := b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),\ \mathfrak{y} \in \boldsymbol{W}, \tag{21}$$

eine σ-lineare Abbildung a, welche F erzeugt, und proportionale Biformen definieren dieselbe korrelative Abbildung. □

Mit den bisherigen Bezeichnungen ergibt sich aus Folgerung 4 und (20) sofort

$$\boldsymbol{y}\,\iota F(\boldsymbol{x}) \longleftrightarrow b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0 \longleftrightarrow \boldsymbol{x}\,\iota F'(\boldsymbol{y}), \tag{22}$$

so dass wir gleichzeitig auch die duale korrelative Abbildung durch b beschreiben können. Wenden wir dagegen (17) auf die duale Abbildung a' an, so gehört wegen (6.16) zu F' die *transponierte Biform*

$$b'(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) := \sigma^{-1}(b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})),\ (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \in \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}. \tag{23}$$

In der Tat ist $(a'(\mathfrak{y})|\mathfrak{x}) = \sigma^{-1}((a(\mathfrak{x})|\mathfrak{y}))$. Offenbar
ist b' σ^{-1}-linear in $\mathfrak{y}$ und linear in $\mathfrak{x}$.

Wir wollen nun die Darstellung der korrelativen Abbildungen in homogenen Koordinaten angeben. Die zueinander dualen Basen

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{a}_i),\ (\mathfrak{a}^j),\ (\mathfrak{a}_i|\mathfrak{a}^j) = \delta_i^j, && i, j = 0, \dots, n, \\ &(\mathfrak{b}_\alpha),\ (\mathfrak{b}^\beta),\ (\mathfrak{b}_\alpha|\mathfrak{b}^\beta) = \delta_\alpha^\beta, && \alpha, \beta = 0, \dots, m, \end{aligned}$$

mögen die Koordinatensysteme in $\boldsymbol{P}^n$ bzw. $\boldsymbol{Q}^m$ bestimmen. Dabei seien die Koordinaten (x^i) eines Vektors $\mathfrak{x}$ als Spaltenvektor und die eines dualen Vektors als Zeilenvektor geschrieben; wir wenden wieder die Summenkonvention an. Die Matrix $(a_{i\,\alpha})$ der σ-linearen Abbildung $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}'$ wird bestimmt durch

$$a(\mathfrak{a}_i) = a_{i\,\alpha}\mathfrak{b}^\alpha,\ i = 0, \dots, n,\ \alpha = 0, \dots, m. \tag{24}$$

Hat $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}$ die Koordinaten (x^i) und $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{W}'$ die Koordinaten (u_α), so gilt

$$u_\alpha = \sigma(x^i)a_{i\,\alpha}; \tag{25}$$

(u_α) sind die homogenen Koordinaten der Hyperebene $F(\boldsymbol{x})$, die dem Punkt $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]$ mit den homogenen Koordinaten (x^i) entspricht; $(a_{i\alpha}) \in M_{n+1.m+1}(K)$ ist gleichzeitig die Matrix der σ-Biform b, die zu F gehört:

$$b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (a(\mathfrak{x})|\mathfrak{y}) = \sigma(x^i)a_{i\alpha}y^\alpha,\ a_{i\alpha} = b(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_\alpha); \tag{26}$$

hier sind (y^α) die Koordinaten von $\mathfrak{y}$. Für die zu F duale Abbildung F' berechnet man aus (24) und (6.16) unmittelbar

$$a'(\mathfrak{b}_\alpha) = a'_{\alpha i}\mathfrak{a}^i = \sigma^{-1}(a_{i\alpha})\mathfrak{a}^i, \tag{27}$$

so dass die Matrix $(a'_{\alpha i})$ von a' sich als Transponierte der mit σ^{-1} transformierten Matrix von a ergibt:

$$(a'_{\alpha i}) = (\sigma^{-1}(a_{i\alpha}))'. \tag{28}$$

Übung 3. Es sei $(a_{i\alpha})$ die Matrix der korrelativen Abbildung $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ nach (24). Man zeige

$$\operatorname{Dim}\operatorname{Ker} F = n - r,\ \operatorname{Dim}\operatorname{Ker} F' = m - r, \tag{29}$$

wobei r der Rang von $(a_{i\alpha})$ ist (vgl. Übung II.7.3.7). Hieraus folgt, dass r nicht von der Wahl der Koordinaten abhängt; Die Zahl r wird der *Rang* von F genannt.

Übung 4. Es bezeichne $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathfrak{P}^n, \mathfrak{Q}^m)$ die Menge aller korrelativen Abbildungen von $\mathfrak{P}^n$ in $\mathfrak{Q}^m$. Die Gruppe $\boldsymbol{G} := \boldsymbol{PL}(\boldsymbol{P}^n) \times \boldsymbol{PL}(\boldsymbol{Q}^m)$ der Paare von Projektivitäten wirke über $\mathfrak{B}$ nach

$$(g_1, g_2) \in \boldsymbol{G},\ F \in \mathfrak{B} \mapsto g_2 \circ F \circ g_1^{-1} \in \mathfrak{B}. \tag{30}$$

Man beweise, dass zwei korrelative Abbildungen F, $\tilde{F} \in \mathfrak{B}$ genau dann unter der Wirkung von $\boldsymbol{G}$ äquivalent sind, wenn sie denselben Rang haben und dieselbe Nebenklasse $\hat{\sigma}$ in der Gruppe $\operatorname{Aut}(K)/\operatorname{Int}(K)$ bestimmen, vgl. Übung 4.11 und (4).

Der folgende Satz bildet die Grundlage für die Definition der *Einschränkung* $F|\boldsymbol{A}$ einer autokorrelativen Abbildung $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{P}^n$ auf einen Unterraum $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P}^n$:

Satz 7. *Es sei $\mathfrak{P}^n = \mathfrak{P}(\boldsymbol{V}^{n+1})$, $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{P}^n$ mit $\boldsymbol{A} = \pi(\boldsymbol{W})$, $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ ein Unterraum des Vektorraums $\boldsymbol{V}$ und $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{P}^n$ eine autokorrelative Abbildung, welche durch eine σ-lineare Abbildung $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ erzeugt wird. Dann wird durch*

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \mapsto F|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) := F(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{A} \tag{31}$$

eine autokorrelative Abbildung $F|\boldsymbol{A}$ definiert, welche durch die σ-lineare Abbildung

$$\mathfrak{x} \in \boldsymbol{W} \mapsto a|\boldsymbol{W}(\mathfrak{x}) \in \boldsymbol{W}' \tag{32}$$

erzeugt wird; ist b eine F beschreibende σ-Biform, so beschreibt die eingeschränkte σ-Biform

$$b_{\boldsymbol{A}} := b|\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W} \tag{33}$$

die Einschränkung $F|\boldsymbol{A}$. □

Der Beweis folgt unmittelbar aus den angegebenen Definitionen. Man macht sich leicht anhand von Beispielen klar, dass $F|\boldsymbol{A}$ die korrelative Nullabbildung sein kann, auch wenn $\operatorname{Ker} F = \boldsymbol{o}$ gilt (vgl. hierzu auch den §10 weiter unten).

Ein zu sich selbst dualer Begriff ist der eines gemischten Wurfes:

Definition 6. Es seien $\mathfrak{P}^n$, $n \geq 2$, eine projektive Geometrie über dem Schiefkörper K, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathfrak{P}^n$ Punkte, $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D} \in \mathfrak{P}^n$ Hyperebenen, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{D}$. Wir setzen

$$\boldsymbol{c} := \boldsymbol{C} \wedge (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{d} := \boldsymbol{D} \wedge (\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b})$$

Das Quadrupel $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ heißt ein *gemischter Wurf*, wenn $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ ein Wurf ist. Unter dem *Doppelverhältnis des gemischten Wurfes* versteht man (vgl. L. Heffter [37], §18)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}) := (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}). \tag{34}$$

□

Übung 5. Unter den Voraussetzungen von Definition 6 zeige man: Ein Quadrupel $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ ist genau dann ein gemischter Wurf, wenn mit

$$\boldsymbol{A} := \boldsymbol{a} \vee (\boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D}),\ \boldsymbol{B} := \boldsymbol{b} \vee (\boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{D})$$

das Quadrupel $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ ein Hyperebenenwurf ist (vgl. Übungen 6.3, 6.4), und dann gilt für die DV

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}; \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}). \tag{35}$$

Übung 6. Es seien $\mathfrak{P}^n$, $\mathfrak{Q}^m$, $n \geq m \geq 2$, rechte projektive Geometrien über dem Schiefkörper K; ferner seien $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ bzw. $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{D}_1)$ gemischte Würfe in $\mathfrak{P}^n$ bzw. $\mathfrak{Q}^m$. Man zeige: Es gibt genau dann eine projektive Abbildung $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^m$ mit

$$F(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}_1,\ F(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}_1,\ F(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}_1,\ F(\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{D}_1,$$

wenn die DV der gemischten Würfe übereinstimmen:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_1; \boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{D}_1). \tag{36}$$

Übung 7. Mit denselben Bezeichnungen wie in Übung 6 und den zusätzlichen Voraussetzungen, dass $n = m$ und K ein Körper ist, zeige man: Es gibt genau dann eine projektive Korrelation $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{Q}^n$ mit

$$F(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{C}_1,\ F(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{D}_1,\ F(\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{a}_1,\ F(\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{b}_1,$$

wenn (36) gilt.

1.8 Symmetrische autokorrelative Abbildungen

In diesem Abschnitt betrachten wir autokorrelative Abbildungen $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{P}^n$. Eine solche Abbildung heißt *symmetrisch*, wenn sie mit ihrer dualen übereinstimmt, d.h.

$$F = F' \tag{1}$$

gilt. Diese Bezeichnung wird dadurch nahe gelegt, dass die zugehörige F-Korrespondenz eine symmetrische Relation über $\boldsymbol{P}_o^n$ ist; nach (7.16) ist nämlich F genau dann symmetrisch, wenn

$$\boldsymbol{x}\ \iota F(\boldsymbol{y}) \longleftrightarrow \boldsymbol{y}\ \iota F(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}_o^n \tag{2}$$

erfüllt ist. Es gibt zwei Typen symmetrischer autokorrelativer Abbildungen: die Nullsysteme und die polaren Abbildungen. Wir stellen uns die Aufgabe, eine projektive

Klassifikation dieser Abbildungen durchzuführen; sie wird für die Nullsysteme in diesem Paragraphen vollständig und für die polaren Abbildungen im nächsten Paragraphen für wichtige Spezialfälle gelöst. Die Nullsysteme bilden die Grundlage der symplektischen Geometrie; wir werden sie auch als lineare Geradenkomplexe geometrisch interpretieren.

Bemerkungen zur Terminologie. Die naheliegende Bezeichnung „symmetrisch" für die Eigenschaft (1) scheint bisher wenig (oder gar nicht ?) benutzt worden zu sein. Der Leser möge uns verzeihen, dass wir den vielen Bezeichnungen dieser Eigenschaft, die wir in der Literatur fanden, noch eine neue hinzufügten. Die von J. Dieudonné [31], § I.6, gewählte Bezeichnung „reflexiv" scheint uns nicht sehr glücklich, da die entsprechende F-Korrespondenz nur für die Nullsysteme reflexiv ist (man vergleiche Definition I.0.2.7, Eigenschaft 1, mit der unten angegebenen Definition 1). W. Burau [20] nennt die korrelativen Abbildungen mit (1) „involutorisch", obwohl nach Satz 7.3, (7.15), nur die symmetrischen Korrelationen die die Involutionen charakterisierende Eigenschaft $F \circ F = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}^n}$ besitzen; diese symmetrischen Korrelationen werden von R.Baer [4] „polare Abbildungen" genannt, was die Begriffsverwirrung möglicherweise vollständig macht. Andererseits sagt R. Baer anstelle von Korrelationen „duale Abbildungen", und anstelle von Autokorrelationen „autoduale Abbildungen", so dass wir auf die naheliegende Bezeichnung „autodual" für (1) lieber verzichtet haben.

1.8.1 Nullsysteme und polare Abbildungen

Definition 1. Es sei $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{P}^n$ eine symmetrische korrelative Abbildung. Die Punkte $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} F$ heißen *singuläre* und die anderen $\boldsymbol{x} \notin \operatorname{Ker} F$ *reguläre* Punkte von F; man nennt $\boldsymbol{x} \notin \operatorname{Ker} F$ einen *Pol* der Hyperebene $F(\boldsymbol{x})$, und $F(\boldsymbol{x})$ die *Polare* von $\boldsymbol{x}$ bei der korrelativen Abbildung F. Ein Element $\boldsymbol{X} \in \mathfrak{P}^n$ heißt *autopolar*, wenn $\boldsymbol{X} \ \iota\, F(\boldsymbol{X})$ gilt. Es bezeichne $Q_F \subset \boldsymbol{P}^n$ die Menge der autopolaren Punkte von F. Gilt $Q_F = \boldsymbol{P}^n$, so heißt F ein *Nullsystem*; andernfalls nennt man F eine *polare Abbildung*. F heißt *nicht ausgeartet*, wenn $\operatorname{Ker} F = \boldsymbol{o}$, also F eine Korrelation ist; die polaren Korrelationen werden *Polaritäten* genannt. □

Man beachte, dass nach Definition 7.2 jede autokorrelative Abbildung F durch eine semilineare $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ erzeugt wird. Offenbar ist die Polare eines regulären Punktes eindeutig bestimmt; für die Pole gilt das nur bei nicht ausgeartetem F: Ist $\boldsymbol{x} \notin \operatorname{Ker} F$, so ist jeder Punkt $\boldsymbol{y} \in (\boldsymbol{x} \vee \operatorname{Ker} F) \setminus \operatorname{Ker} F$ Pol von $F(\boldsymbol{x})$; denn es gilt $\boldsymbol{P}^n \neq F(\boldsymbol{y}) \supset F(\boldsymbol{x}) \wedge F(\operatorname{Ker} F) = F(\boldsymbol{x})$.

Folgerung 1. *Eine Autokorrelation $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{P}^n$ ist symmetrisch dann und nur dann, wenn sie involutiv ist:*

$$F^2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{P}^n}\,.$$

B e w e i s. Die Behauptung folgt sofort aus der Definition (1) und (7.15): $F = F' = F^{-1}$. □

Die *symmetrischen Korrelationen* F sind also Involutionen der projektiven Geometrie $\mathfrak{P}^n$: Es ist $\boldsymbol{A} = F(\boldsymbol{B})$ genau dann, wenn $\boldsymbol{B} = F(\boldsymbol{A})$ gilt; in diesem Fall werden $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ *zueinander polar unter* F genannt. Für die Dimensionen eines polaren Paares gilt (vgl. Beispiel 7.2)

$$\operatorname{Dim} \boldsymbol{A} = k \Longleftrightarrow \operatorname{Dim} F(\boldsymbol{A}) = n - k - 1. \tag{3}$$

Durch den folgenden Satz werden die symmetrischen korrelativen Abbildungen auf die symmetrischen Korrelationen zurückgeführt:

Satz 2. *Es sei F eine symmetrische korrelative Abbildung der projektiven Geometrie $\mathfrak{P}^n$. Dann ist*
$$\operatorname{Ker} F = F(\boldsymbol{P}^n), \tag{4}$$
und es gilt
$$\operatorname{Ker} F \subset F(\boldsymbol{A}) \text{ für alle } \boldsymbol{A} \in \mathfrak{P}^n. \tag{5}$$
F bestimmt die symmetrische Korrelation des Bündels der Unterräume durch $\operatorname{Ker} F$*:*
$$\hat{F} : \boldsymbol{X} \in \mathfrak{P}^n / \operatorname{Ker} F \longmapsto F(\boldsymbol{X}) \in \mathfrak{P}^n / \operatorname{Ker} F. \tag{6}$$

Beweis. Nach Satz 7.3, (7.12), gilt (4) wegen $F = F'$. Wegen $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P}^n$ und (7.6) ergibt sich (5) aus (4). Man erinnere sich nun an die Definition der projektiven Bündelgeometrien, Abschnitt 1.6.3. Wegen (5) ist $\hat{F}$ wohldefiniert. Es möge F von der σ-linearen Abbildung $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ mit $\operatorname{Ker} F = \operatorname{Ker} a =: \boldsymbol{W}$ erzeugt werden; dann wird $\hat{F}$ von der kanonisch zugeordneten, σ-linearen Bijektion $\hat{a} : \boldsymbol{V}/\boldsymbol{W} \to (\boldsymbol{V}/\boldsymbol{W})' \cong \boldsymbol{W}^{\perp}$ erzeugt, die durch
$$(\hat{a}(\mathfrak{x} + \boldsymbol{W})|\mathfrak{y} + \boldsymbol{W}) := (a(\mathfrak{x})|\mathfrak{y}) \tag{7}$$
definiert wird. Es bleibt zu zeigen, dass $\hat{F}$ symmetrisch ist, also $(\hat{F})' = \hat{F}$ gilt. Nach Definition der dualen Abbildung 6.1, (6.16), wird diese durch die duale semilineare Abbildung erzeugt, die σ^{-1}-linear ist:
$$((\hat{a})'(\mathfrak{x} + \boldsymbol{W})|\mathfrak{y} + \boldsymbol{W}) = \sigma^{-1}((\hat{a}(\mathfrak{y} + \boldsymbol{W})|\mathfrak{x} + \boldsymbol{W})) = \sigma^{-1}((a(\mathfrak{y})|\mathfrak{x})) = (a'(\mathfrak{x})|\mathfrak{y}).$$
Da F symmetrisch ist, erzeugt die duale semilineare Abbildung a' ebenfalls F. Nach der Eindeutigkeitsaussage des Hauptsatzes 3.10, (3.17), gibt es also ein $\mu \in K^*$ so, dass $a'(\mathfrak{x}) = a(\mathfrak{x}\mu)$ gilt. Setzt man das in die letzte Gleichung ein, so folgt
$$((\hat{a})'(\mathfrak{x} + \boldsymbol{W})|\mathfrak{y} + \boldsymbol{W}) = (a(\mathfrak{x}\mu)|\mathfrak{y}) = (\hat{a}(\mathfrak{x}\mu + \boldsymbol{W})|\mathfrak{y} + \boldsymbol{W}),$$
also $(\hat{a})'(\mathfrak{x} + \boldsymbol{W}) = \hat{a}((\mathfrak{x} + \boldsymbol{W})\mu)$, woraus die Symmetrie von $\hat{F}$ folgt. □

1.8.2 Äquivalenz autokorrelativer Abbildungen

Wir wenden uns nun der Frage zu, wann zwei autokorrelative Abbildungen als projektiv äquivalent zu betrachten sind:

Definition 2. Zwei autokorrelative Abbildungen F_α, $\alpha = 1, 2$, der projektiven Geometrien $\mathfrak{P}^n_\alpha$ heißen *projektiv äquivalent*, wenn es eine Projektivität $g : \mathfrak{P}^n_1 \to \mathfrak{P}^n_2$ gibt derart, dass
$$F_2 = g \circ F_1 \circ g^{-1} \tag{8}$$
gilt; wir schreiben dann $F_1 \sim F_2$. □

Wir können und wollen uns wieder auf den Fall $\mathfrak{P}^n_1 = \mathfrak{P}^n_2 = \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})$ beschränken. Es sei $a_1 : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ eine F_1 erzeugende σ_1-lineare Abbildung, während die lineare Transformation $c \in \mathbf{GL}(\boldsymbol{V})$ die Projektivität g erzeuge; mit $c^* := c'^{-1}$ bezeichnen wir die zu c kontragrediente Transformation. Wegen
$$(c^*\mathfrak{y}|c\mathfrak{x}) = (\mathfrak{y}|\mathfrak{x}) \tag{9}$$

folgt

$$c(\boldsymbol{X})^{\perp} = c^*(\boldsymbol{X}^{\perp}),\ c(\boldsymbol{Y}^{\perp}) = c^*(\boldsymbol{Y})^{\perp},\ \boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{V}'. \tag{10}$$

Wegen (8) und (10) erzeugt die ebenfalls σ_1-lineare Abbildung $c^* \circ a_1 \circ c^{-1}$ die Abbildung F_2; in der Tat, es gilt

$$c^* \circ a_1 \circ c^{-1}(\boldsymbol{X})^{\perp} = c^*(a_1(c^{-1}(\boldsymbol{X})))^{\perp} = c(a_1(c^{-1}(\boldsymbol{X}))^{\perp}) = g \circ F \circ g^{-1}(\boldsymbol{X}),$$

vgl. (7.5). Nach der Eindeutigkeitsaussage des Hauptsatzes 3.10 können wir feststellen: Ist a_2 irgendeine F_2 erzeugende σ_2-lineare Abbildung, so gilt $F_1 \sim F_2$ genau dann, wenn ein $c \in \mathbf{GL}(\boldsymbol{V})$ und ein $\mu \in K^*$ existieren derart, dass

$$a_2 = c^* \circ a_1 \circ c^{-1} \circ d_\mu \text{ und } \sigma_2 = \sigma_1 \circ \sigma_\mu^{-1} \tag{11}$$

gelten; hier bezeichnen d_μ die Dehnung mit dem Faktor μ in $\boldsymbol{V}$ und σ_μ den zu μ gehörenden inneren Automorphismus von K, vgl. Übung 7.2. Aus (11) und Satz 7.6 folgt sofort: Sind b_α Biformen, welche die korrelativen Abbildungen F_α, $\alpha = 1, 2$, erzeugen, so ist $F_1 \sim F_2$ dann und nur dann, wenn ein $\kappa \in K^*$ und ein $c \in \mathbf{GL}(\boldsymbol{V})$ existieren so, dass

$$b_2(c(\mathfrak{x}), c(\mathfrak{y})) = \kappa b_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),\ \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}, \tag{12}$$

gilt; die entsprechenden Korrespondenzen müssen also durch eine Projektivität ineinander übergeführt werden können. Wählen wir eine Basis $(\mathfrak{a}_i)$ in $\boldsymbol{V}$ und bezeichnen mit $(\gamma^i{}_j)$, (a_{ij}) bzw. (b_{ij}) die Matrizen von c, b_1 bzw. b_2 in dieser Basis, so ergibt sich aus (12) und (7.26) unmittelbar die entsprechende Bedingung für diese Matrizen (Summenkonvention!)

$$\begin{aligned} \kappa a_{ij} &= \sigma_2(\gamma^k{}_i) b_{kl} \gamma^l{}_j, \\ \kappa(a_{ij}) &= (\sigma_2(\gamma^k{}_i))'(b_{kl})(\gamma^l{}_j); \end{aligned} \tag{13}$$

das ist eine Verallgemeinerung des Transformationsgesetzes (I.5.9.45) der Matrix einer Bilinearform.

Diese Überlegungen gelten für eine beliebige korrelative Abbildung F des $\mathfrak{P}^n$ in sich; die symmetrischen korrelativen Abbildungen werden nach Satz 7.6, (7.23) durch die Bedingung

$$\kappa b(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \sigma^{-1}(b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})), \tag{14}$$

oder in Matrixform durch

$$\kappa(a_{ij}) = (\sigma^{-1}(a_{ij}))' \tag{15}$$

charakterisiert; Spezialfälle sind neben den symmetrischen Bilinearformen die hermiteschen Biformen bzw. Matrizen, vgl. (I.5.9.77). Die korrelative Abbildung F ist nicht ausgeartet, wenn es kein $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}$, $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, gibt derart, dass $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ für alle $\mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}$ gilt; Biformen mit dieser Eigenschaft heißen ebenfalls *nicht ausgeartet*. Aus den Übungen 7.3, 7.4 ergibt sich sofort als notwendige Bedingung für die projektive Äquivalenz:

Folgerung 3. *Projektiv äquivalente korrelative Abbildungen von $\mathfrak{P}^n$ in sich haben denselben Rang. Eine derartige Abbildung ist eine Korrelation genau dann, wenn sie nicht ausgeartet, d.h. ihr Rang gleich $n + 1$ ist.* □

Übung 1. Es seien $F_\alpha, \alpha = 1, 2$, symmetrische, autokorrelative Abbildungen der projektiven Geometrien $\mathfrak{P}^n_\alpha$. Man zeige: Es gilt $F_1 \sim F_2$ dann und nur dann, wenn die nach Satz 2 zugeordneten Korrelationen $\hat{F}_1, \hat{F}_2$ projektiv äquivalent sind. (Hinweis. Man betrachte zu $\operatorname{Ker} F_\alpha$ komplementäre Unterräume $\boldsymbol{A}_\alpha \in \mathfrak{P}^n_\alpha$; vermöge

$$\boldsymbol{B} \in \mathfrak{P}(\boldsymbol{A}_\alpha) \longmapsto \boldsymbol{B} \vee \operatorname{Ker} F_\alpha \in \mathfrak{P}^n_\alpha / \operatorname{Ker} F_\alpha$$

identifiziere man $\mathfrak{P}(\boldsymbol{A}_\alpha)$ mit $\mathfrak{P}^n_\alpha / \operatorname{Ker} F_\alpha$ und realisiere die $\hat{F}_\alpha$ als Korrelationen von $\mathfrak{P}(\boldsymbol{A}_\alpha)$.)

1.8.3 Klassifikation der Nullsysteme

Es sei nun F ein Nullsystem. Ist $b \neq 0$ eine F definierende σ-Biform, so muss für alle $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}$

$$b(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0 \tag{16}$$

gelten, woraus man durch Einsetzen von $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ statt $\mathfrak{x}$ sofort

$$b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + b(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = 0 \tag{17}$$

erhält. Weil $b \neq 0$ und in $\mathfrak{y}$ linear ist, finden wir ein Paar $(\mathfrak{x}_o, \mathfrak{y}_o) \in \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}$ mit

$$b(\mathfrak{x}_o, \mathfrak{y}_o) = 1. \tag{18}$$

Da b eine σ-Biform ist, folgt aus (17) und (18)

$$b(\mathfrak{x}_o\xi, \mathfrak{y}_o) = \sigma(\xi) = -b(\mathfrak{y}_o, \mathfrak{x}_o\xi) = \xi$$

für alle $\xi \in K$. Also muss $\sigma = \mathrm{id}_K$, K ein Körper und b eine alternierende Bilinearform über $\boldsymbol{V}$ sein, vgl. Satz 7.6 und Definition I.5.9.3. Es gilt nun (vgl. auch Übung I.5.9.13)

Lemma 4. *Eine alternierende Bilinearform über einem endlich dimensionalen Vektorraum $\boldsymbol{V}$ über dem Körper K hat stets geraden Rang $2r$. Es gibt eine Basis $(\mathfrak{a}_i)$ von $\boldsymbol{V}$, bezüglich der die Matrix (b_{ij}) von b quasidiagonale Gestalt mit r Blockmatrizen*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

längs der Hauptdiagonalen und sonst nur Nullen hat (vgl. (I.5.9.82)*):*

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & O & \dots & \dots & O \\ O & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & O & \dots & O \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \\ O & \dots & O & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & O \\ O & \dots & \dots & \dots & O \end{pmatrix}. \tag{19}$$

B e w e i s. Wegen (16) ist die Behauptung im Falle $\dim \boldsymbol{V} = 1$ trivial: Wegen $b = 0$ gilt $\operatorname{rg} b = 0$. Für $\dim \boldsymbol{V} = 2$ folgt die Behauptung aus (18): Im Fall $b = 0$ ist $r = 0$, und falls $b \neq 0$ setzen wir $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{x}_o$, $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{y}_o$. Es seien schon Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{2k} \in \boldsymbol{V}$ gefunden mit

$$\begin{aligned} b(\mathfrak{a}_{2j-1}, \mathfrak{a}_{2j}) = -b(\mathfrak{a}_{2j}, \mathfrak{a}_{2j-1}) = 1 \quad & \text{für} \quad j = 1, \ldots, k, \\ b(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_l) = 0 \quad & \text{für} \quad i, l = 1, \ldots, 2k, |i - l| \neq 1. \end{aligned}$$

Wir betrachten die lineare Hülle $\boldsymbol{W}^{2k} := \mathfrak{L}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{2k})$ und ihr orthogonales Komplement

$$\hat{\boldsymbol{W}} := \{\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} | b(\mathfrak{y}.\mathfrak{x}) = 0 \text{ für alle } \mathfrak{y} \in \boldsymbol{W}\}.$$

Da $b|\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$ nicht ausgeartet ist, gilt $\boldsymbol{W} \cap \hat{\boldsymbol{W}} = \{\mathfrak{o}\}$, und aus einer einfachen Rangbetrachtung folgt $\dim \hat{\boldsymbol{W}} = \dim \boldsymbol{V} - 2k$. Daher ist $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} \oplus \hat{\boldsymbol{W}}$. Ist $b|\hat{\boldsymbol{W}} \times \hat{\boldsymbol{W}} = 0$, so ergänzen wir $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{2k}$ durch eine beliebige Basis von $\hat{\boldsymbol{W}}$ zu einer Basis von $\boldsymbol{V}$ und erhalten die Normalform (19) mit k = r. Andernfalls finden wir Vektoren $\mathfrak{a}_{2k+1}, \mathfrak{a}_{2k+2} \in \hat{\boldsymbol{W}}$ mit $b(\mathfrak{a}_{2k+1}, \mathfrak{a}_{2k+2}) = 1$ und verfahren analog weiter. □

Aus Lemma 4 und dem davor Gesagtem erhält man unmittelbar die projektive Klassifikation aller Nullsysteme:

Satz 5. *Es sei $\mathfrak{P}^n$ eine n-dimensionale projektive Geometrie über dem Schiefkörper K, $n \geq 2$. Es existiert genau dann ein Nullsystem F des $\mathfrak{P}^n$ mit $\operatorname{rg} F > 0$, wenn K ein Körper ist. Die ein Nullsystem F bestimmenden Biformen sind bilinear, alternierend und vom geraden Rang. Zwei Nullsysteme sind genau dann projektiv äquivalent, wenn sie gleichen Skalarbereich K und denselben Rang haben. Nur für projektive Geometrien ungerader Dimension existieren nicht ausgeartete Nullsysteme.*

B e w e i s. Neben dem bereits Gesagtem genügt es zu bemerken, dass Nullsysteme gleichen Ranges auch gleiche Normalform (19) haben. Wählen wir zu F_1, F_2 solche Basen, dass sie in Normalform erscheinen, so definieren diese Basen einen linearen Isomorphismus, welcher die Basen ineinander überführt und daher die projektive Äquivalenz g in (8) vermittelt. Die Umkehrung ist nach Folgerung 3 klar. □

1.8.4 Lineare Geradenkomplexe

Eine geometrische Deutung der Nullsysteme erhält man durch den Übergang zur Graßmann-Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{P}_{n,1}$ der Geraden des $\mathfrak{P}^n$. Es sei F ein Nullsystem vom Rang $2r > 0$. Dann heißt die Geradenmenge

$$\mathfrak{K}_F := \{\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{P}_{n,1} | \, \boldsymbol{H} \ \iota \ F(\boldsymbol{H})\} \tag{20}$$

ein *linearer Geradenkomplex*, falls $n \geq 3$ ist. Für den Fall $n = 2$ beachte man Übung 2.

Übung 2. Ist F ein Nullsystem in der projektiven Ebene $\mathfrak{P}^2$ mit dem Rang $2r > 0$, so ist $r = 1$, $\operatorname{Ker} F = \boldsymbol{z}_o$ ein Punkt und $\mathfrak{K}_F = \tau(\operatorname{Ker} F)$ das Geradenbüschel durch $\boldsymbol{z}_o$.

Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{K}_F$ die Menge aller Verbindungsgeraden $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$ ist, für die $\boldsymbol{x}$ mit $F(\boldsymbol{y})$ inzidiert.

Lemma 6. *Ist F ein Nullsystem in $\mathfrak{P}^n$, so gilt*

$$\mathfrak{K}_F = \{\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} | \, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathfrak{P}^n, \, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \, \iota \, F(\boldsymbol{y})\}. \tag{21}$$

B e w e i s. Gilt $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} \in \mathfrak{K}_F$, so ist nach (20) $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} \, \iota \, F(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \subset F(\boldsymbol{x}) \wedge F(\boldsymbol{y})$; denn F ist monoton fallend. Also ist speziell $\boldsymbol{x} \, \iota \, F(\boldsymbol{y})$. Sei umgekehrt $\boldsymbol{x} \, \iota \, F(\boldsymbol{y})$. Da F ein Nullsystem ist, folgen $\boldsymbol{y} \, \iota \, F(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \, \iota \, F(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{y} \, \iota \, F(\boldsymbol{y})$. Es sei $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ eine lineare Abbildung, die F erzeugt; mit $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]$, $\boldsymbol{y} = [\mathfrak{y}]$ ist die lineare Hülle $\mathfrak{L}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \boldsymbol{H}$; also ist $F(\boldsymbol{H}) = (a(\mathfrak{L}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})))^{\perp} = \mathfrak{L}(a(\mathfrak{x}), a(\mathfrak{y}))^{\perp}$ charakterisiert durch

$$\boldsymbol{z} = [\mathfrak{z}] \in F(\boldsymbol{H}) \longleftrightarrow (a\mathfrak{x}|\mathfrak{z}) = 0 \text{ und } (a\mathfrak{y}|\mathfrak{z}) = 0.$$

Nach den oben angegebenen Inzidenzen gilt

$$(a\mathfrak{x}|\mathfrak{x}) = (a\mathfrak{y}|\mathfrak{x}) = (a\mathfrak{x}|\mathfrak{y}) = (a\mathfrak{y}|\mathfrak{y}) = 0.$$

Daher ist $\boldsymbol{x} \, \iota \, F(\boldsymbol{H})$, $\boldsymbol{y} \, \iota \, F(\boldsymbol{H})$, und weil $F(\boldsymbol{H})$ ein projektiver Unterraum ist, auch $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} \, \iota \, F(\boldsymbol{H})$, d.h. $\boldsymbol{H} \in \mathfrak{K}_F$.□

Wir beziehen nun die Geraden $\boldsymbol{H} \in \boldsymbol{P}_{n,1} = G_{n+1,2}$, vgl. Definition 1.1, auf ihre *Plückerschen Koordinaten*; sind in einem homogenen Koordinatensystem $(x^i), (y^i)$ die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ bzw. $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}^n$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, so sind nach (II.8.3.18) (für $r = 2$) die Determinanten

$$p^{ij} = \begin{vmatrix} x^i & y^i \\ x^j & y^j \end{vmatrix} \qquad \text{für } i < j \tag{22}$$

die Plückerschen Koordinaten der Geraden $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$. Betrachten wir allgemeiner den zu $\boldsymbol{V}^{n+1}$ gehörenden Raum der Bivektoren $\bigwedge^2 \boldsymbol{V}$, so gehört zu diesem der projektive Raum $\boldsymbol{P}^N(\bigwedge^2 \boldsymbol{V})$ der Dimension

$$N = \binom{n+1}{2} - 1.$$

Die Koordinaten der Bivektoren sind gleichzeitig homogene Koordinaten der ihnen entsprechenden Punkte in $\boldsymbol{P}^N(\bigwedge^2 \boldsymbol{V})$. Die Graßmannsche Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{P}_{n,1}$ wird als Teilmenge (vgl. Übung 3, (26) weiter unten)

$$\boldsymbol{P}_{n,1} \subset \boldsymbol{P}^N(\bigwedge^2 \boldsymbol{V}) \tag{23}$$

durch die *Plückerschen Relationen* (II.8.3.20), Satz II.8.3.4, charakterisiert; $\boldsymbol{P}_{n,1}$ ist also eine algebraische Untermannigfaltigkeit von $\boldsymbol{P}^N(\bigwedge^2 \boldsymbol{V})$, die durch ein System quadratischer Gleichungen in den homogenen Koordinaten bestimmt wird. Die Nullsysteme F des $\mathfrak{P}^n$ korrespondieren nach Satz 5 zu den alternierenden Bilinearformen $b \in \bigwedge^2 \boldsymbol{V}'$, die durch F bis auf einen Faktor $\kappa \in K^*$ eindeutig bestimmt sind; mit anderen Worten: Die Nullsysteme von $\mathfrak{P}^n$ werden bijektiv durch die Punkte des projektiven Raumes $\boldsymbol{P}(\bigwedge^2 \boldsymbol{V}')$ beschrieben. Es seien a_{ij} die homogenen Koordinaten von F (oder b); dann gilt

$$a_{ij} + a_{ji} = 0, \; i, j = 0, \dots, n, \tag{24}$$

und es folgt:

Lemma 7. *Es sei F ein Nullsystem, das der alternierenden 2-Form mit den Koordinaten a_{ij} entspricht. Dann besteht $\mathfrak{K}_F$ aus allen Geraden $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$, deren Plückersche Koordinaten* (22) *der linearen Gleichung*

$$\sum_{i<j} a_{ij} p^{ij} = 0 \tag{25}$$

genügen. $\square$

Zum Beweis beachte man auch Satz II.8.3.7. Für $b \neq 0$ ist nach (25) klar, dass ein linearer Geradenkomplex der Durchschnitt der nach (23) in $\boldsymbol{P}^N$ eingebetteten Graßmannschen Mannigfaltigkeit mit einer Hyperebene des $\boldsymbol{P}^N$ ist. Neben den linearen Geradenkomplexen betrachtet man allgemeiner Geradenmannigfaltigkeiten, zu deren Definition anstelle der einen linearen Gleichung (25) ein System algebraischer oder auch nur differenzierbarer Gleichungen dient. In der älteren Literatur nennt man die Geometrie des Geradenraumes (bei unterschiedlichen Transformationsgruppen) auch *Liniengeometrie*, spricht von Linienkoordinaten, Linien- oder Strahlkomplexen u.s.w.

Übung 3. Man zeige, dass jede Hyperebene $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P}^N(\bigwedge^2 \boldsymbol{V})$ die Graßmannsche Mannigfaltigkeit (23) bei der kanonischen Einbettung

$$\boldsymbol{H} = [\mathfrak{x}] \vee [\mathfrak{y}] \in \boldsymbol{P}_{n,1} \longmapsto [\mathfrak{x} \wedge \mathfrak{y}] \in \boldsymbol{P}^N(\bigwedge^2 \boldsymbol{V}) \tag{26}$$

in einer echten Teilmenge $\mathfrak{K} := \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}_{n,1} \neq \emptyset$ schneidet, und dass $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_F$ für ein geeignetes Nullsystem F des $\mathfrak{P}^n$ gilt.

Übung 4. Man zeige: Ist F eine symmetrische autokorrelative Abbildung von $\mathfrak{P}^n$, so ist für jeden Unterraum $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P}^n$ die Einschränkung $F|\boldsymbol{A}$ (vgl. Satz 7.7) eine symmetrische autokorrelative Abbildung von $\mathfrak{P}(\boldsymbol{A})$; speziell ist die Einschränkung eines Nullsystems wieder ein Nullsystem.

1.9 Polaritäten und Quadriken

In diesem Abschnitt betrachten wir polare Abbildungen $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{P}^n$ (Definition 8.1). Zuerst werden wir zeigen, dass ihre zugehörigen Korrespondenzen durch σ-hermitesche Biformen b beschrieben werden können, die Verallgemeinerungen der symmetrischen bilinearen und der hermiteschen Formen sind. Nach Definition 8.1 gilt für die Menge Q_F der autopolaren Punkte von F stets $Q_F \neq \boldsymbol{P}^n$; wir nennen Q_F die durch F bestimmte *Quadrik* in $\boldsymbol{P}^n$. Wenn K ein Körper und b bilinear ist, stimmt diese Definition mit der klassischen überein. Ziel dieses Abschnittes ist eine Klassifikation der polaren Abbildungen und der entsprechenden Quadriken für projektive Geometrien, deren Skalarbereich die reellen, die komplexen oder die quaternionischen Zahlen sind. Von dieser Klassifikation ausgehend werden wir im nächsten Kapitel die wichtigsten Cayley-Kleinschen Geometrien einführen.

1.9.1 σ-hermitesche Biformen

Bezeichnet b eine F bestimmende σ-Biform, welche in einem homogenmen Koordinatensystem mit der Basis $(\mathfrak{a}_i)$ von $\boldsymbol{V}^{n+1}$ die Matrix $(a_{ij}) \in \mathbf{M_{n+1}(K)}$ haben möge, so erhalten wir als Gleichung für die zugehörige Quadrik $Q_F \subset \boldsymbol{P}^n$ nach (7.22), (7.16) (Summenkonvention!):

$$\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in Q_F \longleftrightarrow b(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0 \longleftrightarrow \sigma(x^i)a_{ij}x^j = 0, \ (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}); \tag{1}$$

hier bezeichnen x^i die homogenen Koordinaten des Punktes $\boldsymbol{x}$ bezüglich der Basis $(\mathfrak{a}_i)$, $i = 0, \dots, n$. Wir definieren

Definition 1. Es seien $\boldsymbol{V}$ ein Vektorraum über dem Schiefkörper K und σ ein Anti-Automorphismus von K. Eine σ-Biform $b : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to K$ heißt *σ-hermitesch*, wenn sie

$$b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sigma(b(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})), \ \mathfrak{x}, \ \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}, \tag{2}$$

erfüllt. □

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{P}^n = \mathfrak{P}^n(\boldsymbol{V})$ eine projektive Geometrie über dem Schiefkörper K.*
a) Dann gibt es zu jeder polaren Abbildung $F : \mathfrak{P}^n \to \mathfrak{P}^n$ einen Anti-Automorphismus σ von K, eine F bestimmende σ-hermitesche Biform b über $\boldsymbol{V}$ und ein $\mathfrak{x}_o \in \boldsymbol{V}$ derart, dass

$$b(\mathfrak{x}_o, \mathfrak{x}_o) = 1 \tag{3}$$

gilt; umgekehrt beschreibt jede σ-hermitesche Biform dieser Art eine polare Abbildung F von $\mathfrak{P}^n$. – b) der zu einer σ-hermiteschen Biform $b \neq 0$ gehörende Anti-Automorphismus σ ist involutiv, d.h. es gilt

$$\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_K \, . \tag{4}$$

Wegen (2) gilt speziell

$$\sigma(b(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})) = b(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}), \ \mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}. \tag{5}$$

Beweis. Es sei b_o irgendeine F definierende Biform. Da F polar ist, gibt es ein $\boldsymbol{x}_o = [\mathfrak{x}_o] \in \boldsymbol{P}^n$ mit $\boldsymbol{x}_o \notin F(\boldsymbol{x}_o)$, also $\lambda := b_o(\mathfrak{x}_o, \mathfrak{x}_0) \neq 0$. Wir setzen $b := \lambda^{-1}b_0$; dann gilt (3). Nach Satz 7.6 definiert die Biform b ebenfalls F; es sei σ der zu b gehörende Anti-Automorphismus. Da F polar, also symmetrisch ist, gilt (8.14) für ein $\kappa \in K^*$. Setzen wir $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = \mathfrak{x}_o$ ein, so folgt wegen (3):

$$\kappa = \kappa b(\mathfrak{x}_o, \mathfrak{x}_o) = \sigma^{-1}(b(\mathfrak{x}_o, \mathfrak{x}_o)) = 1.$$

Damit folgt (2) unmittelbar aus (8.14). Umgekehrt ist (2) ein Spezialfall von (8.14). Daher ist die durch b bestimmte Korrelation symmetrisch und wegen (3) eine polare Abbildung (Definition 8.1). - b) Da $b \neq 0$ und in $\mathfrak{y}$ linear ist, können wir zu jedem $\xi \in K$ ein Paar $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \in \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}$ mit $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \xi$ finden. Aus (2) folgt nun (4):

$$\xi = \sigma(b(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})) = \sigma(\sigma(b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))) = \sigma \circ \sigma(\xi).$$

□

Übung 1. Es seien $F, b, \sigma, \mathfrak{x}_o$ wie in Satz 1. Ist b_1 eine σ_1-Biform, die ebenfalls F beschreibt, so gilt $b_1 = \kappa b$, wobei $\kappa \in K$ ein Skalar ist, für den es ein $\mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}$ mit $\kappa = b(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) \neq 0$ gibt; b_1 ist σ_1-hermitesch, wobei $\sigma_1 = \sigma_\kappa \circ \sigma$ gilt, $\sigma_\kappa(\xi) = \kappa\xi\kappa^{-1}$. Ist umgekehrt $\kappa = b(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) \neq 0$ für ein $\mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}$ erfüllt, so ist $b_1 = \kappa b$ eine σ_1-hermitesche Biform, die ebenfalls F definiert.

Beispiel 1. Es sei K ein Körper der Charakteristik 2 und $\boldsymbol{V} = K^n$. Dann ist

$$b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := x^1 y^2 + x^2 y^1$$

eine symmetrische Bilinearform vom Rang 2, für die $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0$ für alle $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}$ gilt; sie bestimmt also keine polare Abbildung in der zugehörigen projektiven Geometrie. Aus dem folgenden Lemma ergibt sich ähnlich wie beim Beweis von Satz 1, dass im Fall $\operatorname{char} K \neq 2$ jede σ-hermitesche Biform $b \neq 0$ eine polare Abbildung definiert. □

Lemma 2. *Es sei K ein Schiefkörper,* $\operatorname{char} K \neq 2$, *und $b \neq 0$ eine σ-hermitesche Biform über $\boldsymbol{V}$. Dann gibt es ein $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}$ mit $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \neq 0$.*

B e w e i s. Es sei $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0$ für alle $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}$. Da $b \neq 0$ gilt, finden wir $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}$ mit $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \neq 0$; wir können wegen der Linearität von b in $\mathfrak{y}$ $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 1$ annehmen. Dann gilt für jedes $\lambda \in K$:

$$0 = b(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}\lambda, \mathfrak{x} + \mathfrak{y}\lambda) = b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\lambda) + b(\mathfrak{y}\lambda, \mathfrak{x}) = \lambda + \sigma(\lambda).$$

Damit ist $\sigma(\lambda) = -\lambda$ für alle $\lambda \in K$, speziell also $\sigma(1) = 1 = -1$. Hieraus folgt jedoch $\operatorname{char} K = 2$. □

Definition 2. Es sei $b : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to K$ σ-hermitesch. Unter dem *Defektunterraum* von b versteht man den Unterraum

$$\boldsymbol{W}_b := \{\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} \mid b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0 \text{ für alle } \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}\}. \tag{6}$$

Der *Defekt* von b wird definiert durch

$$\operatorname{def}(b) := \dim_K \boldsymbol{W}_b. \tag{7}$$

Ist a die durch b definierte σ-lineare Abbildung von $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{V}'$, und gilt $\dim \boldsymbol{V} < \infty$, so ist der *Rang* von b durch die Gleichung

$$\operatorname{rg}(b) := \dim \boldsymbol{V} - \operatorname{def}(b) \tag{8}$$

definiert. Offenbar ist *der Defektunterraum von b gleich* $\boldsymbol{W}_b = \operatorname{Ker} a = \operatorname{Ker} F$, wenn F die von b definierte polare Abbildung bezeichnet, vgl. (7.9). Daher gilt $\operatorname{rg}(b) = \operatorname{rg}(a)$. □

1.9.2 Klassifikation der polaren Abbildungen

Den folgenden Satz kann man wie Satz I.5.9.5 beweisen:

Satz 3. *Es sei b eine σ-hermitesche Biform über dem n-dimensionalen Vektorraum $\boldsymbol{V}$ über dem Schiefkörper K der Charakteristik* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Dann gibt es eine Basis* $(\mathfrak{a}_i)$ *von $\boldsymbol{V}$, in der die Matrix von b Diagonalgestalt hat:*

$$b(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j) = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \beta_r & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & 0 \end{pmatrix}; \tag{9}$$

hierbei gilt

$$\beta_h = \sigma(\beta_h) \neq 0 \textit{ für } h = 1, \ldots, r = \operatorname{rg}(b). \tag{10}$$

□

Die Zahlen $\beta_h \in K$ in (9) sind natürlich durch b nicht eindeutig bestimmt. Ersetzen wir $\mathfrak{a}_h$ durch $\hat{\mathfrak{a}}_h = \mathfrak{a}_h \lambda_h$, $\lambda_h \in K^*$, so bleiben (9), (10) gültig und es folgt

$$\hat{\beta}_h := b(\hat{\mathfrak{a}}_h, \hat{\mathfrak{a}}_h) = \sigma(\lambda_h)\beta_h\lambda_h. \tag{11}$$

Die Transformation (11) kann man benutzen, um Normalformen für die polaren Abbildungen bzw. die σ-Biformen zu erhalten. Diese Normalformen hängen von den Eigenschaften des Schiefkörpers K und des Anti-Automorphismus σ ab. Zur Klassifikation hat man zunächst die involutiven Anti-Automorphismen σ von K zu klassifizieren, und dann für jedes σ entsprechende Normalformen der σ-hermiteschen Biformen b zu bestimmen. In den nächsten Teilabschnitten behandeln wir die Fälle $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ im einzelnen.

Übung 2. Es sei F eine polare Abbildung der projektiven Geometrie $\mathfrak{P}^n$, $n \geq 2$, $\operatorname{char} K \neq 2$. Man zeige: a) Es gibt $n+1$ Punkte $\boldsymbol{a}_i \in \boldsymbol{P}^n, i = 0, \ldots, n$, derart, dass $\boldsymbol{a}_i \in F(\boldsymbol{a}_j)$ für $i \neq j$ und $\boldsymbol{a}_i \notin F(\boldsymbol{a}_i)$ gelten, genau dann, wenn F eine Polarität ist. – b) Man formuliere das Dual der Aussage a). – c) Die Punkte $\boldsymbol{a}_i$ mit den in a) angegebenen Eigenschaften sind in allgemeiner Lage; wählt man ein projektives Repère $(\boldsymbol{a}_i; \boldsymbol{e})$ mit den $\boldsymbol{a}_i$ als Grundpunkten, so hat die Matrix von F Diagonalgestalt (9) mit $r = n$. Ein Simplex (a_i), $i = 0, \ldots, n$ mit den in a) angegebenen Eigenschaften heißt ein *Polarsimplex* der Polarität F.

Übung 3. Es sei mit den Voraussetzungen wie in Übung 2 F ein Polarität, und $\boldsymbol{a}_i \in \boldsymbol{P}^n$, $i = 0, \ldots, n$, eine Folge von Punkten in allgemeiner Lage. Man beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $(\boldsymbol{a}_i)$ ist ein Polarsimplex;

b) $F(\boldsymbol{a}_i) = \bigvee_{j \neq i} \boldsymbol{a}_j$;

c) $\boldsymbol{a}_i = \bigwedge_{j \neq i} F(\boldsymbol{a}_j)$.

1.9.3 Die reellen polaren Abbildungen

Der einzige Anti-Automorphismus des Körpers der reellen Zahlen ist bekanntlich die identische Abbildung $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$. Daher werden die polaren Abbildungen nach dem Trägheitssatz von Sylvester, Satz I.5.9.6, durch Rang und Index klassifiziert. Seine projektive Formulierung ist

Satz 4. *Es sei $K = \mathbf{R}$ der Körper der reellen Zahlen und $\mathfrak{P}^n$ eine n-dimensionale projektive Geometrie über $\mathbf{R}$, $n \geq 2$. Mit $F_{r,l}$ bezeichnen wir die polare Abbildung von $\mathfrak{P}^n$, deren Matrix in einer geeigneten Basis die Normalform* (9) *(vgl.* (I.5.9.49)*) hat mit*[1]

$$\beta_\lambda = -1 \text{ für } \lambda = 1, \ldots, l,\ \beta_\mu = 1 \text{ für } \mu = l+1, \ldots, r,\ 0 \leq l \leq [r/2]. \tag{12}$$

Sind x^i die homogenen Punktkoordinaten und y_i die dazu dualen homogenen Hyperebenenkoordinaten, so hat die polare Abbildung $\boldsymbol{y} = F_{r,l}(\boldsymbol{x})$ die folgende Normalform

$$\begin{aligned} y_j &= -x^j & \text{für} \quad & j = 0, \ldots, l-1; \\ y_k &= x^k & \text{für} \quad & k = l, \ldots, r-1,\ (0 < r \leq n+1); \\ y_h &= 0 & \text{für} \quad & h = r, \ldots, n. \end{aligned} \tag{13}$$

Jede polare Abbildung F von $\mathfrak{P}^n$ ist zu einer der $F_{r,l}$ projektiv äquivalent, und diese sind paarweise nicht projektiv äquivalent.

Beweis. Nach Übung I.2.1.3, vgl. auch Folgerung 3.16, muss $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ und die F bestimmende Biform b bilinear und wegen (2) symmetrisch sein. In (9) sind die $\beta_h \neq 0$ beliebig. Wählt man Transformationen (11) mit $\lambda_h := |\beta_h|^{-1/2}$ und nummeriert die Basiselemente geeignet um, so dass die ersten l Diagonalelemente gleich -1 und die nächsten $r-l$ gleich 1 sind, so erhält man den Trägheitssatz von Sylvester I.5.9.6; die Matrix von b hat die Normalgestalt (I.5.9.49) mit $0 \leq l \leq r$. Ist $l > [r/2]$, so ergibt sich die Gestalt (12) durch Multiplikation von b mit $\kappa = -1$ und geeignete Nummerierung der Basis. Damit ist gezeigt, dass jede polare Abbildung von $\mathfrak{P}^n$ zu einer der $F_{r,l}$ projektiv äquivalent ist. Nach (8.13) und Satz I.5.9.6 sind die $F_{r,l}$ paarweise nicht projektiv äquivalent. □

1.9.4 Die komplexen polaren Abbildungen

Ebenso wie bei den kollinearen Abbildungen (Beispiel 4.3) folgt aus der Stetigkeit der korrelativen Abbildungen, dass wir nur die stetigen Automorphismen des Körpers $\mathbf{C}$ der komplexen Zahlen zu betrachten haben, vgl. auch Beispiel 7.4. Wir haben also zwei Typen polarer Abbildungen zu klassifizieren: die zu $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ gehörenden und die zur Konjugation $\tau : z \mapsto \bar{z}$ gehörenden; für $K = \mathbf{C}$ wollen wir für eine *polare Abbildung* stets $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ annehmen und die mit $\sigma = \tau$ *antipolar* nennen. Analog zu Satz 4 beweist man ausgehend von (9) leicht

Satz 5. *Zwei polare Abbildungen mit $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ einer komplexen projektiven Geometrie $\mathfrak{P}^n$, $n \geq 2$, sind genau dann projektiv äquivalent, wenn sie denselben Rang r, $1 \leq r \leq n+1$, besitzen. Man erhält also durch die Abbildungen mit den Koordinatendarstellungen*

$$F_r : y_j = x^j \text{ für } j = 0, \ldots, r-1,\ y_k = 0 \text{ für } k = r, \ldots, n \tag{14}$$

eine Normalformenmenge für diese polaren Abbildungen. □

[1] Wie üblich wird für $\xi \in \mathbf{R}$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich ξ ist, mit $[\xi]$ bezeichnet.

Folgerung 6. *Alle Polaritäten mit* $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ *der komplexen projektiven Geometrie* $\mathfrak{P}^n$, $n \geq 2$, *sind projektiv äquivalent.* □

Ähnlich wie den Trägheitssatz beweist man den folgenden Satz über τ-hermitesche Biformen und die entsprechenden antipolaren Abbildungen (vgl. Satz I.9.13). Da der Beweis unverändert auch für quaternionische projektive Geometrien gilt, beziehen wir diesen Fall gleich mit ein:

Satz 7. *Es sei* τ *die Konjugation im Körper* $\mathbf{C}$ *der komplexen Zahlen oder im Schiefkörper* $\mathbf{H}$ *der Quaternionen. Mit* $F_{r,l}$ *bezeichnen wir die polare Abbildung der projektiven Geometrie* $\mathfrak{P}^n$, *welche in einem festen Koordinatensystem die Normalform*

$$\begin{aligned} y_j &= -\bar{x}^j \quad \textit{für} \quad j = 0, \ldots, l-1; \\ y_k &= \bar{x}^k \quad \textit{für} \quad k = l, \ldots, r-1, \ (0 < r \leq n+1); \\ y_h &= 0 \quad \textit{für} \quad h = r, \ldots, n. \end{aligned} \tag{15}$$

hat; für ihre Matrix (9) *gelte dabei* (12). *Jede durch eine* τ*-hermitesche Biform bestimmte polare Abbildung der projektiven Geometrie* $\mathfrak{P}^n$ *ist zu einer der Abbildungen* $F_{r,l}$ *projektiv äquivalent, und diese sind paarweise nicht projektiv äquivalent.*

Beweis. Nach Satz 3 können wir von der Normalform (9) der Matrix von F ausgehen. Wegen (10) gilt $\beta_h \in \mathbf{R}^*$. Wie beim Beweis von Satz 4 erhalten wir die Diagonalgestalt der Matrix von F mit der Eigenschaft (12). Das folgende Lemma charakterisiert die Zahl l in invarianter Weise:

Lemma 8. *Es seien* $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$, $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ *bzw. im Falle* $K = \mathbf{C}, \mathbf{H}$ *die Konjugation, und* b *eine* σ*-hermitesche Form, deren Matrix in einer geeigneten Basis* $(\mathfrak{a}_i)$ *die Diagonalgestalt* (9) *hat. Dann ist die Anzahl* l *der negativen unter den Diagonalelementen* β_i *gleich dem Maximum der Dimensionen derjenigen Unterräume* $\boldsymbol{W}^- \subset \boldsymbol{V}^n$, *für die die Einschränkung* $b|\boldsymbol{W}^- \times \boldsymbol{W}^-$ *negativ definit ist, d.h.* $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) < 0$ *für alle* $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{W}^-, \mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, *erfüllt.*

Beweis. Wegen (2) folgt auch im Falle $K = \mathbf{H}$ sofort $\beta_h \in \mathbf{R}$. Es sei $\beta_k < 0$ für $k = 1, \ldots, l$ und $\beta_h \geq 0$ sonst. Offenbar ist die Einschränkung von b auf den von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_l$ aufgespannten Unterraum $\boldsymbol{U}^l := \mathfrak{L}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_l)$ negativ definit. Wir betrachten den komplementären Unterraum $\boldsymbol{B} := \mathfrak{L}(\mathfrak{a}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n)$. Für jeden Unterraum $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ mit einer Dimension $\dim W > l$ gibt es nach der Dimensionsformel einen Vektor $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{W}$ mit $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$. Da nun für alle $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{B}$ offensichtlich $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) \geq 0$ gilt, kann b auf $\boldsymbol{W}$ nicht negativ definit sein. □

Aus Lemma 8 folgt, dass der *Index* l von b, der als die Anzahl der negativen Diagonalelemente in (9) definiert wird, nicht von der Wahl der Basis abhängt, in der b diese Diagonalgestalt hat. Das gleiche gilt für die Dimension $n - r$ des Defektunterraums von b, also auch für den Rang r. Damit verfügen wir über das Analogon des Trägheitssatzes I.5.9.6 auch für die τ-hermiteschen Biformen im Fall $K = \mathbf{C}, \mathbf{H}$ und können den Beweis ähnlich wie den Beweis von Satz 4 abschließen. □

Übung 4. Es seien $\boldsymbol{V}^{n+1}$ ein komplexer Vektorraum und τ die Konjugation in $\mathbf{C}$. Eine τ-Biform b heißt *schiefhermitesch*, wenn sie die Eigenschaft

$$b(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = -\overline{b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}, \ \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}, \tag{16}$$

besitzt. Man beweise: a) Jede schiefhermitesche τ-Biform bestimmt eine antipolare Abbildung von $\mathfrak{P}^n(\boldsymbol{V})$, die auch durch eine τ-hermitesche Biform beschrieben werden kann. – b) Man klassifiziere die schiefhermiteschen Biformen bezüglich der Wirkung (I.5.9.81) der linearen Gruppe von $\boldsymbol{V}^{n+1}$; dazu zeige man: $b(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ ist schiefhermitesch (bzw. hermitesch) genau dann, wenn $\mathrm{i}\, b(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ (mit $\mathrm{i}^2 = -1$) hermitesch (bzw. schiefhermitesch) ist.

1.9.5 Die quaternionischen polaren Abbildungen

Bekanntlich ist das Zentrum des Schiefkörpers $\mathbf{H}$ der Quaternionen der reelle Teilkörper $\mathbf{R}$. Wir bezeichnen mit $\mathbf{R}^\perp$ den von den imaginären Einheiten $\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k} \in \mathbf{H}$ aufgespannten reellen Unterraum von $\mathbf{H}$. Zuerst beweisen wir:

Lemma 9. *Die einzigen involutiven Anti-Automorphismen σ des Schiefkörpers $\mathbf{H}$ der Quaternionen sind die Konjugation $\tau : q \mapsto \bar{q}$ und die durch*

$$\tau_q(\lambda) := -q\bar{\lambda}q, \;\; q \in \mathbf{R}^\perp, |\mathbf{q}| = \mathbf{1} \tag{17}$$

definierten Anti-Automorphismen.

B e w e i s. Es sei σ ein beliebiger Anti-Automorphismus von $\mathbf{H}$. Dann ist $\tau \circ \sigma$ ein Automorphismus, der nach Beispiel II.8.8.5 ein innerer Automorphismus von $\mathbf{H}$ sein muss. Es gibt also ein $q \in \mathbf{H}^*$, $|\mathbf{q}| = \mathbf{1}$, derart, dass $\tau \circ \sigma = \sigma_q$ ist. Hieraus folgt $\sigma = \tau \circ \sigma_q$. Weil σ involutiv ist, erhalten wir für alle $\lambda \in \mathbf{H}$

$$q^{-1}\bar{q}\lambda = \lambda q^{-1}\bar{q}.$$

Daher muss $q^{-1}\bar{q}$ in $\mathbf{R}$, dem Zentrum von $\mathbf{H}$, liegen. Aus $|q| = 1$ folgt $|q^{-1}\bar{q}| = 1$, also $q^{-1}\bar{q} = \pm 1$, oder $\bar{q} = \pm q$. Ist $\bar{q} = q$, so ist $q = \pm 1 \in \mathbf{R}$ und $\sigma_q = \mathrm{id}_{\mathbf{H}}$, also $\sigma = \tau$. Aus $\bar{q} = -q$ folgt $q \in \mathbf{R}^\perp = \mathfrak{L}_{\mathbf{R}}(\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k})$, und $\sigma(\lambda) = -q\bar{\lambda}q$. Durch direkte Rechnung bestätigt man leicht, dass jeder dieser Anti-Automorphismen involutiv ist. □

Die zu τ-hermiteschen Biformen gehörenden polaren Abbildungen wurden bereits in Satz 7 klassifiziert. Für spätere Anwendungen schreiben wir noch die dem Trägheitssatz entsprechende Gestalt einer solchen durch Index l und Rang r charakterisierten Biform über einem n-dimensionalen Vektorraum $\boldsymbol{V}^n$ in einer Normalformenbasis $(\mathfrak{a}_i), i = 1,\dots n$, auf:

$$b(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = -\sum_{a=1}^{l} \bar{x}^a y^a + \sum_{c=l+1}^{r} \bar{x}^c y^c, \;\; 0 \le l \le r; \tag{18}$$

hierbei sind $x^i, y^i, i = 1,\dots,n$, die Vektorkoordinaten von $\mathfrak{x},\mathfrak{y}$ in der Normalformenbasis. Wir wenden uns nun den τ_q-hermiteschen Biformen zu und bemerken zuerst

Lemma 10. *Es sei τ_q durch* (17) *definiert. Dann gilt: Eine Biform $b : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathbf{H}$ ist τ_q-hermitesch genau dann, wenn $\hat{b} = qb$ schiefhermitesch im Sinne von* (16) *ist.* □

Den Beweis erhält man durch direktes Nachrechnen. Wegen $\tau_q = \tau_{\bar{q}} = \tau_{-q}$ folgt unmittelbar

Folgerung 11. *Ist b eine τ_q-hermitesche Biform über $\boldsymbol{V}$, so ist $\tilde{b} := \pm\mathrm{i}qb$ eine τ_{i}-hermitesche Biform über $\boldsymbol{V}$.* □

Wir betrachten zuerst die τ_{i}-hermiteschen Biformen und führen später den allgemeinen Fall darauf zurück. Durch eine einfache Rechnung zeigt man: *die Menge der Fixelement von* τ_{i} *ist der von* $1, \mathrm{j}, \mathrm{k}$ *aufgespannte reelle Unterraum von* $\mathbf{H}$*:*

$$\{\beta \in \mathbf{H} | \, \tau_{\mathrm{i}}(\beta) = \beta\} = \mathfrak{L}_{\mathbf{R}}(\mathbf{1}, \mathrm{j}, \mathrm{k}). \tag{19}$$

Es sei nun b eine τ_{i}-hermitesche Biform und $(\mathfrak{a}_j), j = 1, \ldots, n$, eine Basis, in der die Matrix von b die Gestalt (9) hat. Die Transformation (11) ist in diesem Fall

$$\hat{\beta} = -\,\mathrm{i}\,\bar{\lambda}\,\mathrm{i}\,\beta\lambda. \tag{20}$$

Wählen wir zuerst $\lambda = |\beta|^{-1/2}$, was wegen $\beta \neq 0$ möglich ist, so folgt $|\hat{\beta}| = 1$. Wir können also schon $|\beta| = 1$ voraussetzen und betrachten nur noch Transformationen mit $|\lambda|^2 = \lambda\bar{\lambda} = 1$, also $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$. Wegen (19) liegt das Element $\mathrm{i}\,\beta$ auf der Einheitssphäre von $\mathbf{R}^{\perp}$. Nach Übung II.8.9.5 können wir jedes Element der speziellen orthogonalen Gruppe $\mathbf{SO}(\mathbf{R}^{\perp})$ als einen inneren Automorphismus σ_{λ}, $|\lambda| = 1$, darstellen. Bekanntlich wirkt $\mathbf{SO}(\mathbf{R}^{\perp}) \approx \mathbf{SO}(\mathbf{3})$ transitiv auf der Einheitssphäre; wir finden also ein λ so, dass $\bar{\lambda}\,\mathrm{i}\,\beta\lambda = \mathrm{i}$, also $\hat{\beta} = 1$ gilt. Führen wir diese Transformationen für alle Diagonalelemente β_h in (9) aus, so ergibt sich aus Satz 3 und Folgerung 11

Satz 12. *Es sei* $\boldsymbol{V}$ *ein* n*-dimensionaler Vektorraum über dem Schiefkörper* $\mathbf{H}$ *der Quaternionen und* τ_q *der durch* (17) *definierte Anti-Automorphismus. Ist* b *eine* τ_q*-hermitesche Biform, so existiert eine Basis* $(\mathfrak{a}_{\nu}), \nu = 1, \ldots, n$*, von* $\mathbf{V}$ *derart, dass* b *die folgende Normalform hat:*

$$b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{a=1}^{r} \tau_q(x^a)\bar{q}\,\mathrm{i}\,y^a = -q\sum_{a=1}^{r} \bar{x}^a\,\mathrm{i}\,y^a. \tag{21}$$

Hierbei ist r *der Rang von* b*,* x^{ν} *und* y^{ν} *sind die Koordinaten von* $\mathfrak{x}$ *bzw.* $\mathfrak{y}$ *bezüglich der Basis* $(\mathfrak{a}_{\nu})$*.*

B e w e i s. Für $q = \mathrm{i}$ erhalten wir nach dem oben Bewiesenem eine Basis mit $\beta_h = \bar{q}\,\mathrm{i} = 1$ für $a = 1, \ldots, r$, also (21). Ist b eine τ_q-hermitesche Form, so ist nach Folgerung 11 $b = -q\,\mathrm{i}\,\tilde{b}$, wobei $\tilde{b}$ eine τ_{i}-hermitesche Form ist. Bringen wir diese auf Normalform, so erhalten wir wieder (21) bei beliebigem $q \in \mathbf{H}^*$. $\square$

Folgerung 13. *Mit den Bezeichnungen von Satz 12 gilt: Ist* $\hat{b}$ *eine schiefhermitesche Biform vom Rang* r *über* $\boldsymbol{V}$*, so gibt es eine Basis* $(\mathfrak{a}_{\nu})$ *von* $\boldsymbol{V}$*, in der* $\hat{b}$ *die Normalform*

$$\hat{b}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{a=1}^{r} \bar{x}^a\,\mathrm{i}\,y^a \tag{22}$$

besitzt. $\square$

Der Beweis folgt aus (21) und Lemma 10. Wir bemerken, dass (21) und (22) Normalformenmengen für die τ_q-hermiteschen bzw. schiefhermiteschen Biformen gegenüber der Wirkung (I.5.9.81) der quaternionischen linearen Gruppe sind; die Normalformen sind paarweise nicht äquivalent. Denn der Rang von b ist offensichtlich invariant, und die Eigenschaft, τ_q-hermitesch bzw. schiefhermitesch zu sein bleibt ebenfalls bei linearen Transformationen invariant. Aus unseren Ergebnissen erhalten wir unmittelbar die Klassifikation der polaren Abildungen:

Satz 14. *Es sei F eine polare Abbildung in der n-dimensionalen projektiven Geometrie $\mathfrak{P}^n$ über dem Schiefkörper* $\mathbf{H}$ *der Quaternionen, $n \geq 2$. Dann ist F projektiv äquivalent zu einer der Abbildungen $F_{r,l}$ nach Satz 7, oder F ist projektiv äquivalent zu einer der Abbildungen J_r mit der Normalform*

$$J_r: \ y_a = \bar{x}^a \,\mathrm{i} \ \textit{für } a = 0, \ldots, r-1, \ y_c = 0 \ \textit{für } c = r, \ldots, n; \ 0 < r \leq n. \tag{23}$$

In beiden Fällen ist r der Rang von F und der zugehörige Anti-Automorphismus die Konjugation τ in $\mathbf{H}$. *Alle diese Normalformen sind paarweise nicht projektiv äquivalent.*

B e w e i s. Nach Satz 7.6 können wir F durch eine σ-Biform (7.20) beschreiben. Aus Satz 1 folgt, dass σ ein involutiver Anti-Automorphismus von $\mathbf{H}$ ist. Nach Lemma 9 muss $\sigma = \tau$ die Konjugation oder $\sigma = \tau_q$ durch (17) definiert sein. Aus Folgerung 11 ergibt sich, dass die mit $q\,\mathrm{i}$ multiplizierte Biform, die dieselbe Korrespondenz beschreibt, τ_i-hermitesch ist, was wir also stets voraussetzen können. Aus Satz 12 erhalten wir die folgende Normalformenmange für die polaren Abbildungen mit $\sigma = \tau_\mathrm{i}$:

$$y_a = \tau_\mathrm{i}(x^a) = -\mathrm{i}\,\bar{x}^a\,\mathrm{i} \ \text{ für } a = 0, \ldots, r-1, \ y_c = 0 \text{ für } c = r, \ldots, n; \ 0 < r \leq n. \tag{24}$$

Der Übergang zu $\hat{b} = \mathrm{i}\,b$ nach Lemma 10 führt auf die schiefhermitesche Normalform (22) und damit auf (23). Alle die Normalformen (15) (mit (12)) und (23) (oder statt dessen (24)) sind paarweise nicht projektiv äquivalent: Nach Satz 7 und wegen der Invarianz des Ranges genügt es dafür zu zeigen, dass nie eine τ_i- und eine τ-hermitesche Biform $b \neq 0$ durch Multiplikation mit einem $h \in \mathbf{H}^*$ ineinander übergehen können. Angenommen, $b_1 = hb$ sei eine τ_i-Biform. Da b eine τ-Biform ist, ist b_1 eine Biform mit dem Anti-Automorphismus $\xi \mapsto h\bar{\xi}h^{-1}$. Soll dieser gleich τ_i sein, so muss bis auf einen unwesentlichen reellen Faktor $h = \mathrm{i}$ gelten. Dann folgt aber

$$b_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \mathrm{i}\,b(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \mathrm{i}\,\overline{b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} = \mathrm{i}\,\overline{\mathrm{i}\,b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}\,\mathrm{i},$$

also $b_1(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = -\tau_\mathrm{i}(b_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))$, und das ist τ_i-hermitesch nur dann, wenn $b = b_1 = 0$ gilt. □

1.9.6 Quadriken

Nach Gleichung (1) ergibt sich aus der projektiven Klassifikation der polaren Abbildungen die Klassifikation der Quadriken. Dabei wollen wir nicht ganz korrekt zwei Quadriken *projektiv äquivalent* nennen, wenn die sie definierenden polaren Abbildungen es sind. Man kommt zur affinen Klassifikation der Quadriken, indem man eine uneigentliche Hyperebene auszeichnet und die Lageeigenschaften der Quadrik in bezug auf diese Hyperebene untersucht. Umgekehrt kann man auch von der affinen Klassifikation ausgehen (vgl. Satz I.5.9.11 im Fall $K = \mathbf{R}$) und durch Übergang zu homogenen Koordinaten feststellen, welche der affinen Typen projektiv äquivalent sind.

Beispiel 2. Es sei $K = \mathbf{R}$. Wir bezeichnen mit $Q_{r,l}$ die zur Normalform $F_{r,l}$ gehörenden Quadrik. Dann ist die Gleichung der Quadrik $Q_{r,0}$

$$\sum_{i=0}^{r-1}(x^i)^2 = 0 \quad (0 < r \leq n+1). \tag{25}$$

Es gilt also $Q_{r,0} = \operatorname{Ker} F_{r,0}$. Man beachte, dass wir den Unpunkt $\boldsymbol{o}$ in dieser Gleichung vernachlässigen. Speziell ist $Q_{n+1,0} = \emptyset$ die leere Menge; man spricht in diesem Fall von einer *nullteiligen Quadrik*. Die Grundpunkte des betrachteten Koordinatensystems $\boldsymbol{a}_k = [\mathfrak{a}_k], k = r, \ldots, n$, spannen den Kern $\operatorname{Ker} F_{r,0} = \boldsymbol{a}_r \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_n$ auf, der also für $r \leq n$ stets in der Koordinatenhyperebene $x^0 = 0$ liegt. Da diese projektive $(n-r)$-Ebene jetzt durch die quadratische Gleichung (25) definiert wird, spricht man von einer *doppelt zählenden* projektiven $(n-r)$-Ebene. Diese Redeweise kann man auch folgendermaßen motivieren: Die vom Parameter $t \in \mathbf{R}$ abhängende Quadrik

$$(x^0)^2 - t^2(x^1)^2 = 0$$

„zerfällt" für $t \neq 0$ in die beiden Hyperebenen

$$x^0 - tx^1 = 0, \; x^0 + tx^1 = 0.$$

Lässt man t gegen Null streben, so gehen die beiden Hyperebenen in dieselbe doppelt zählende Hyperebene $(x^0)^2 = 0$ über. Wir kehren noch einmal zur Gleichung (25) zurück. Wählen wir wie in Abschnitt 5 die Hyperebene $x^0 = 0$ als uneigentliche Hyperebene eines affinen Raumes $\boldsymbol{A}^n \subset \boldsymbol{P}^n$ und betrachten als affine Quadrik wie üblich nur den Teil $AQ_{r,l} := \boldsymbol{A}^n \cap Q_{r,l}$, so genügen nach Einführung der inhomogenen Koordinaten für die affinen Punkte $x^0 = 1$ aus (25) der Gleichung für $AQ_{r,0}$:

$$\sum_{i=1}^{r-1}(x^i)^2 = -1,$$

die offenbar keine reelle Lösung besitzt, so dass *für alle* r die affine Quadrik $AQ_{r,0}$ die leere Menge ist: Der Kern $\operatorname{Ker} F_{r,0}$ liegt ganz in der uneigentlichen Hyperebene. Mit denselben Überlegungen macht man sich klar: Die Quadrik $Q_{n+1,1}$ hat die Gleichung

$$-(x^0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 = 0, \tag{26}$$

sie „schneidet" die Hyperebene $x^0 = 0$ in der nullteiligen Quadrik $Q_{n,0}$, und daher ist sie das *Hyperellipsoid* $AQ_{n+1,1} = Q_{n+1,1}$, dessen Gleichung in inhomogenen affinen Koordinaten die Normalform

$$\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2 = 1 \tag{27}$$

besitzt, vgl. Satz I.5.9.11. □

Übung 5. Man zeige für $K = \mathbf{R}$ und $n = 2$: Die projektiven Erweiterungen der affinen Quadriken Ellipse, Hyperbel und Parabel sind eindeutig bestimmt. Man diskutiere die Lage dieser Quadriken zu der uneigentlichen Geraden und zeige, dass ihre projektiven Erweiterungen projektiv äquivalente Quadriken sind. Allgemein untersuche man analoge Fragestellungen für die in Satz I.5.9.11 klassifizierten affinen Quadriken, speziell für $n = 3$.

Übung 6. Für $K = \mathbf{R}$ betrachten wir die nullteilige Quadrik $F = F_{n+1,0}$, vgl. (25). Nach Übung 2 bilden die Punkte $\boldsymbol{a}_i = [\mathfrak{a}_i]$ ein Polarsimplex von F; wir wählen $\boldsymbol{a}_0$ als Ursprung und $\boldsymbol{H} := F(\boldsymbol{a}_0) = \boldsymbol{a}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{a}_n$ als uneigentliche Hyperebene. Die mit $x^0 = 1$ genormten homogenen Koordinaten ergeben dann ein orthonormiertes euklidisches Koordinatensystem x^i, $i = 1, \ldots, n$, im affinen Raum $\boldsymbol{A}^n$ bezüglich der Einschränkung der zu F gehörenden symmetrischen Bilinearform auf $\boldsymbol{H}$:

$$b_{\boldsymbol{H}}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i =: \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle.$$

Nach Übung 5.4 können wir ja den Vektorraum $\boldsymbol{W}^n := \mathfrak{L}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ der uneigentlichen Hyperebene mit dem Vektorraum der affinen Geometrie $\boldsymbol{A}^n$ identifizieren. Man beweise: Die Polare $F(\boldsymbol{x})$ des Punktes $\boldsymbol{x} := [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{x}]$ ist für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ die Hyperebene mit der Hesseschen Normalform (vgl. (I.6.3.37)):

$$\boldsymbol{z} = [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{z}] \in F(\boldsymbol{x}) \longleftrightarrow \langle \mathfrak{z}, \frac{-\mathfrak{x}}{||\mathfrak{x}||} \rangle = \frac{1}{||\mathfrak{x}||} \rangle;$$

strebt $\mathfrak{x}$ gegen $\mathfrak{o}$, so geht $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{a}_0$ und $F(\boldsymbol{x})$ in die uneigentliche Hyperebene $F(\boldsymbol{a}_o) = \boldsymbol{H}$ über.

Beispiel 3. Im Fall $K = \mathbf{C}$ ist die zu F_{n+1} gehörende Quadrik Q_{n+1} (Gleichung (25) mit $r = n + 1$) natürlich nicht leer; zum Beispiel gehört der Punkt mit den Koordinaten $(1, \mathrm{i}, 0, \ldots, 0)$ zu Q_{n+1}. Bezeichnen wieder $\boldsymbol{a}_j = [\mathfrak{a}_j], j = 0, \ldots, n$, die Ecken eines zu F_{n+1} gehörenden Polarsimplexes, so gelten

$$\boldsymbol{c}_\rho := [\mathfrak{a}_{2\rho} + \mathfrak{a}_{2\rho+1}\, \mathrm{i}] \in Q_{n+1},\ \rho = 0, \ldots, k := [(n-1)/2], \tag{28}$$

$$\boldsymbol{M}^k := \boldsymbol{c}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{c}_k \subset Q_{n+1}. \tag{29}$$

Man beachte, dass die Einschränkung der zu F_{n+1} gehörenden Bilinearform auf $\boldsymbol{M}^k$ identisch gleich Null ist. □

Definition 3. Es sei b eine σ-hermitesche, schiefhermitesche oder alternierende Biform über dem Vektorraum $\boldsymbol{V}$ mit dem Schiefkörper K als Skalarbereich. Ein Unterraum $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ heißt *isotrop (bezüglich b)*, wenn ein $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{W}, \mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, existiert derart, dass für alle $\mathfrak{y} \in \boldsymbol{W}$ die Gleichung $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ gilt; $\boldsymbol{W}$ heißt *total isotrop*, wenn die Einschränkung $b|\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W} = 0$ ist. □

Folgerung 15. *Es sei* $\operatorname{char} K \neq 2$ *und b eine die polare Abbildung F der projektiven Geometrie* $\mathfrak{P}^n$ *bestimmende σ-Biform. Dann gilt: Ein projektiver Unterraum* $\boldsymbol{A}$ *ist in der zu F gehörenden Quadrik* Q_F *genau dann enthalten, wenn die Einschränkung* $b_{\boldsymbol{A}} = 0$ *ist, d.h. wenn der zu* $\boldsymbol{A}$ *gehörende Unterraum* $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ *total isotrop ist (*vgl. (7.33).

Beweis. Ist $\boldsymbol{A} \subset Q_F$, so gilt für alle $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{W}$ wegen $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]\ \iota\ F(\boldsymbol{x})$ die Gleichung $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0$; nach Lemma 2 ist also $b_{\boldsymbol{A}} = 0$. Die Umkehrung ist trivial. □

Folgerung 16. *Es sei* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Ist* $\boldsymbol{A}$ *ein in der Quadrik* Q_F *der polaren Abbildung F enthaltener Unterraum, so ist auch* $\boldsymbol{A} \vee \operatorname{Ker} F \subset Q_F$*; insbesondere ist* $\operatorname{Ker} F \subset Q_F$.

Beweis. Ist $\boldsymbol{W}$ der zu $\boldsymbol{A}$ gehörende Vektorraum, so ist $\boldsymbol{W}$ total isotrop. Weil der Defektunterraum (6) ebenfalls total isotrop ist und $b(\boldsymbol{W}_b, \boldsymbol{W}) = 0$ gilt, ist auch $\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}_b$ total isotrop. Da der Defektunterraum dem Kern von F entspricht, ergibt sich die Behauptung aus Folgerung 15. □

Beispiel 4. Es sei Q_F eine Quadrik mit $\operatorname{Ker} F \neq \boldsymbol{o}$. Dann heißt $\operatorname{Ker} F$ der *Scheitelraum* der Quadrik. Ist $\operatorname{char} K \neq 2$, so ist nach Folgerung (16) für jedes $\boldsymbol{x} \in Q_F$ auch $\boldsymbol{x} \vee \operatorname{Ker} F \subset Q_F$. Man nennt daher die zu ausgearteten polaren Abbildungen gehörenden Quadriken auch *projektive Kegel*, und die maximalen in Q_F enthaltenen projektiven Unterräume die *Erzeugenden* des Kegels. □

Übung 7. Es sei $\operatorname{char} K \neq 2$, Q_F ein durch die σ-Biform b definierter projektiver Kegel und $\boldsymbol{A}$ ein zu $\operatorname{Ker} F$ komplementärer Unterraum. a) Man beweise:

$$Q_F = \bigcup_{\boldsymbol{x} \in Q_F \cap \boldsymbol{A}} x \vee \operatorname{Ker} F,$$

$$(\boldsymbol{x} \vee \operatorname{Ker} F) \wedge (\boldsymbol{y} \vee \operatorname{Ker} F) = \operatorname{Ker} F \text{ für } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Q_F \cap \boldsymbol{A}, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}.$$

b) Die Einschränkung (vgl. Satz 7.7) $F|\boldsymbol{A}$ ist eine Polarität, die durch die Biform $b|\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$ beschrieben wird, wobei $\boldsymbol{W}$ den zu $\boldsymbol{A}$ gehörenden Vektorraum bezeichnet. – c) Sind $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$ zwei zu $\operatorname{Ker} F$ komplementäre Unterräume, so sind die Polaritäten $F|\boldsymbol{A}_1$, $F|\boldsymbol{A}_2$ projektiv äquivalent. Hierdurch erhält man nach der elementaren Definition der Kegelschnitte (Übung I.5.9.3) einen neuen Beweis des ersten Teils von Übung 5.– Hinweis. Man beachte hierzu (7.33) und Satz 8.2.

1.9.7 Polare Abbildungen projektiver Geraden

Zur Vorbereitung auf die Betrachtung der Tangenten und tangentiellen Unterräume einer Quadrik wollen wir uns mit den polaren Abbildungen F einer projektiven Geraden $\mathfrak{P}^1$ beschäftigen. Für den Rang r von F gibt es nach (8) nur die Möglichkeiten $r = 1, 2$. Der Fall $r = 1$ wird durch den folgenden einfachen Satz beschrieben:

Satz 17. *Es sei F eine polare Abbildung der projektiven Geraden $\mathfrak{P}^1$ über dem Schiefkörper K, $\operatorname{char} K \neq 2$. Dann ist der Rang r von F gleich 1 genau dann, wenn alle Punkte $\boldsymbol{x} \notin \operatorname{Ker} F$ dasselbe Bild $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$ haben; in diesem Fall gilt*

$$Q_F = \operatorname{Ker} F = \boldsymbol{a}.$$

B e w e i s. Es sei b die F definierende σ-hermitesche Form. Nun hat F den Rang 1 genau dann, wenn $\operatorname{Ker} F$ einpunktig ist; sei $\boldsymbol{a} = \operatorname{Ker} F$. Offenbar ist $\boldsymbol{a} \in Q_F$. Nach Satz 3 können wir annehmen, dass die Matrix von b Diagonalgestalt hat; die Gleichung von Q_F ist also

$$\sigma(x^0)\beta_0 x^0 = 0 \text{ mit } \beta_0 \neq 0.$$

Hieraus folgt $x^0 = 0$. Also ist $Q_F = \boldsymbol{a}_1 = [\mathfrak{a}_1]$ der erste Grundpunkt des betrachteten projektiven Repères. Daher ist Q_F einelementig, und es folgt $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1$. Die Koordinaten des Bildpunktes $F(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{a}$, ergeben sich aus dem Annullator des Kovektors mit den Komponenten

$$u_0 = \sigma(x^0)\beta_0, \ u_1 = 0$$

zu $y^0 = 0, y^1 = 1$; somit gilt $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}$. Die Umkehrung folgt unmittelbar aus der Definition des Ranges. □

Die im Fall $r = 2$ auftretenden Möglichkeiten hängen wieder vom Körper K und vom Typ der Quadrik ab. Nach Folgerung 8.3 ist F jetzt bijektiv und definiert somit eine Involution von $\boldsymbol{P}^1$.

Beispiel 5. Es sei K ein Schiefkörper mit $\operatorname{char} K \neq 2$. Nach Satz 3 kann eine Polarität von $\mathfrak{P}^1$ durch eine σ-Biform der Gestalt

$$b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sigma(x^0)\beta_0 y^0 + \sigma(x^1)\beta_1 y^1 = 0 \tag{30}$$

beschrieben werden. Wegen $b(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i) = \beta_i \neq 0$, $i = 0, 1$, liegen die Grundpunkte $\boldsymbol{a}_i = [\mathfrak{a}_i]$ nicht auf der Quadrik Q_F. Für jeden Punkt $\boldsymbol{x} \in Q_F$ können wir also als Koordinaten $(x^0, x^1) = (1, \xi)$ mit $\xi \in K^*$ ansetzen; wir schreiben $\xi = \xi(\boldsymbol{x})$. Damit gilt

$$\boldsymbol{x} \in Q_F \longleftrightarrow \sigma(\xi)\beta_1\xi = -\beta_0. \tag{31}$$

Ist K ein Körper und $\sigma = \mathrm{id}_K$, so ist (31) gleichbedeutend mit

$$\xi^2 = -\beta_0/\beta_1, \tag{32}$$

und es gibt nur die beiden Möglichkeiten, dass $Q_F = \emptyset$ oder zweipunktig ist. Das stimmt mit dem Ergebnis von Übung 4.13 b) überein; denn in diesem Fall ist F gleichzeitig eine Projektivität, die durch den linearen Isomorphismus

$$y^0 = -\beta_1 x^1,\ y^1 = \beta_0 x^0 \tag{33}$$

definiert wird. Aus (30) folgt sofort, dass (auch bei beliebigem Schiefkörper K) die Punkte der Quadrik Q_F gerade die Fixpunkte der Involution F sind. Für $K = \mathbf{R}$ gibt es nach Satz 4 beide Möglichkeiten: $Q_F = \emptyset$ für $F = F_{2,0}$ und Q_F zweielementig für $F = F_{2,1}$. Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, zum Beispiel für $K = \mathbf{C}$, und $\sigma = \mathrm{id}_K$ gilt, so tritt stets der zweite Fall ein. □

Beispiel 6. Wir betrachten nun die hermiteschen Normalformen F nach Satz 7 für $K = \mathbf{C}, \mathbf{H}$, $n = 1$, $r = 2$. Die Gleichung der Quadrik ist

$$\epsilon\bar{z}^0 z^0 + \bar{z}^1 z^1 = 0,\ \epsilon = \pm 1. \tag{34}$$

Im Fall $\epsilon = +1$ hat (34) keine Lösung $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^1$. Im Fall $\epsilon = -1$ muss jede Lösung von (34) $x^0 \neq 0, x^1 \neq 0$ erfüllen; wir können also für die Koordinaten des Lösungspunktes $(z^0, z^1) = (1, \xi)$; $\xi \in K^*$, ansetzen. Es folgt

$$\bar{\xi}\xi = |\xi|^2 = 1\ (\epsilon = -1), \tag{35}$$

also der Einheitskreis im Falle $K = \mathbf{C}$ und die Einheitshypersphäre S^3 im Fall $K = \mathbf{H}$. Es sei nun $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^1$ ein variabler Urbildpunkt mit den Koordinaten $(1, \xi)$, $\xi \in K^*$. Für die homogenen Koordinaten des Bildpunktes $\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x})$ folgt nach (30):

$$\epsilon y^0 + \bar{\xi} y^1 = 0.$$

Wegen $\xi \in K^*$ muss $y^0 \neq 0$ sein; wir können also wieder $(y^0, y^1) = (1, \eta)$ ansetzen und erhalten

$$\eta = -\epsilon\bar{\xi}^{-1} = -\epsilon\xi/|\xi|^2\ (\xi \in K^*), \tag{36}$$

und das ist im Fall $\epsilon = -1$ die *Inversion* am Einheitskreis $S^1 \subset \mathbf{C}$ bzw. an der Einheitshypersphäre $S^3 \subset \mathbf{H}$ (*Abbildung durch reziproke Radien*), welche im Fall $\epsilon = +1$ noch mit der Spiegelung am Zentrum 0 zu verknüpfen ist. Diese Involutionen vertauschen in jedem der Fälle die Punkte $0, \infty \in \hat{K}$. □

Beispiel 7. Es sei nun $K = \mathbf{H}$. Auf der quaternionisch-projektiven Geraden $\boldsymbol{P}^1$ betrachten wir die Involution J_2, vgl. (23). Die zugehörige Quadrik Q hat die Gleichung

$$\bar{x}^0 \,\mathrm{i}\, x^0 + \bar{x}^1 \,\mathrm{i}\, x^1 = 0. \tag{37}$$

Sie hat als Lösung alle Punkte $\boldsymbol{x}$ mit den Koordinaten $(1, \xi)$ mit

$$\xi = \mathrm{j} \cos \alpha + \mathrm{k} \sin \alpha, \ \alpha \in \mathbf{R}, \tag{38}$$

also den Einheitskreis in der j, k-Ebene von $\mathbf{H}$. Der Bildpunkt $\boldsymbol{y} = F(\boldsymbol{x})$ des Punktes $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^1$ mit den Koordinaten $(1, \xi)$, $\xi \in \mathbf{H}^*$, hat die Koordinaten $(1, \eta)$ mit

$$\eta = \mathrm{i}\, \xi\, \mathrm{i} / |\xi|^2. \tag{39}$$

Das ist in $\mathbf{H} = \mathbf{R}^4$ eine Spiegelung an der j, k-Ebene verknüpft mit der Involution an der Einheitshypersphäre $S^3 \subset \mathbf{H}$; die Punkte 0 und ∞ von $\hat{\mathbf{H}}$ werden durch F wieder vertauscht. □

1.9.8 Tangenten und tangentielle Unterräume

In diesem Abschnitt wollen wir die Lage von Geraden zu Quadriken beschreiben. Das führt uns auf den Begriff der Tangenten und allgemeiner der tangentiellen Unterräume einer Quadrik.

Beispiel 8. Es sei wieder $\operatorname{char} K \neq 2$; F bezeichne eine polare Abbildung und Q_F die zugehörige Quadrik in $\boldsymbol{P}^n$. Für $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in Q_F$ betrachten wir die Gerade $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$, wobei $\boldsymbol{y} = [\mathfrak{y}] \neq \boldsymbol{x}$ ein beliebiger Punkt des $\boldsymbol{P}^n$ sei. Jeden Punkt $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x}$, können wir in der Gestalt $\boldsymbol{z} = [\mathfrak{x}\xi + \mathfrak{y}]$ mit eindeutig bestimmten $\xi \in K$ darstellen. Wegen $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = 0$ gilt: *Es ist $\boldsymbol{z} \in Q_F \cap \boldsymbol{h}$ dann und nur dann, wenn $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$ gilt oder die folgende Gleichung erfüllt ist:*

$$\sigma(\xi) b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + b(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})\xi + b(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) = 0. \tag{40}$$

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

a) Es ist der Rang $rg(F|\boldsymbol{h}) = 0$. Das gilt genau dann, wenn $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = b(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) = 0$ ist; nach Folgerung 15 ist das gleichbedeutend mit $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} \subset Q_F$.

b) Es gilt $rg(F|\boldsymbol{h}) = 1$. Nach Satz 17 und Beispiel 4 ist dann $Q_{F|\boldsymbol{h}} = Q_F \cap \boldsymbol{h}$ einpunktig, also $Q_F \cap \boldsymbol{H} = \boldsymbol{x}$. Das tritt genau dann ein, wenn in (40) $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ und $b(\mathfrak{y}, \mathfrak{y}) \neq 0$ gelten. Ist $\boldsymbol{x}$ singulär, d.h. $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} F$, so ist $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ für alle $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}^n$, und es gilt $(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \cap Q_F = \boldsymbol{x}$ für alle $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}^n \setminus Q_F$. Ist $\boldsymbol{x}$ ein regulärer Punkt von Q_F, so definiert $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ die Polare $F(\boldsymbol{x})$ von $\boldsymbol{x}$, und für die Punkte $\boldsymbol{y} \ \iota\ F(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$, ist nun $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} \subset F(\boldsymbol{x})$. In diesem Fall und auch im Fall a) nennt man $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$ eine *Tangente* der Quadrik Q_F. Allgemeiner heißt ein projektiver Unterraum $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{P}^n$ *tangentiell* an die Quadrik Q_F im regulären Punkt $\boldsymbol{x} \in Q_F$, wenn $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \subset F(\boldsymbol{x})$ gilt. Ist $\boldsymbol{x} \in Q_F$ ein regulärer Punkt der Quadrik, so nennt man $T_{\boldsymbol{x}} Q_F := F(\boldsymbol{x})$ die *Tangentialhyperebene* der Quadrik Q_F im Punkt $\boldsymbol{x}$. Die Gesamtheit der tangentiellen Unterräume in $\boldsymbol{x}$ bildet also das Bündel $F(\boldsymbol{x})/\boldsymbol{x}$. Für singuläre Punkte $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} F$ werden keine tangentiellen Unterräume definiert.

c) Es gilt $rg(F|\boldsymbol{h}) = 2$. In diesem Fall nennt man $\boldsymbol{h}$ eine *Sekante von Q_F*. Das gilt nämlich genau dann, wenn in (40) $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \neq 0$ ist, und daher muss $\boldsymbol{x}$ ein regulärer Punkt von Q_F sein. Aus (40) folgt, dass in diesem Fall $Q_F \cap \boldsymbol{h}$ noch wenigstens einen weiteren Punkt $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x}$ enthält; da b σ-hermitesch ist, ergibt

$$\xi = -b(\mathfrak{y}, \mathfrak{x})^{-1} b(\mathfrak{y}, \mathfrak{y})/2 \tag{41}$$

eine Lösung von (40). (Weil $\operatorname{char} K \neq 2$ ist, ist $2 \neq 0$ und liegt im Zentrum $Z(K)$.) Wie die Beispiele 6, 7 zeigen, können noch weitere Lösungen existieren; ist jedoch K ein Körper und b bilinear, so bestimmt (41) den einzigen von $\boldsymbol{x}$ verschiedenen Punkt $\boldsymbol{y} \in Q_F \cap \boldsymbol{h}$, vgl. Beispiel 5. □

Der folgende Satz gibt eine geometrische Deutung der isotropen Unterräume:

Satz 18. *Es sei* $\operatorname{char} K \neq 2$ *und* F *eine polare Abbildung der projektiven Geometrie* $\mathfrak{P}^n$, *welche durch eine* σ*-hermitesche Biform* b *beschrieben wird;* $\boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{A} = \pi(\boldsymbol{W})$ *sei ein projektiver Unterraum mit dem zugehörigen Vektorraum* $\boldsymbol{W}$. *Dann ist* $\boldsymbol{W}$ *isotrop genau dann, wenn* $\operatorname{Ker}(F|\boldsymbol{A}) \neq \boldsymbol{o}$ *ist. Dabei gilt*

$$\operatorname{Ker}(F|\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A} \wedge \operatorname{Ker} F) \cup \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}), \tag{42}$$

wobei $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A})$ *die Menge derjenigen regulären Punkte der Quadrik* Q_F *bezeichnet, in denn* $\boldsymbol{A}$ *zu* Q_F *tangentiell ist.*

B e w e i s. Der Defektunterraum von $b|\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$ ist der zu $\operatorname{Ker}(F|\boldsymbol{A})$ gehörende Vektorraum, woraus sich sofort die erste Behauptung ergibt. Es gilt $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}(F|\boldsymbol{A})$ dann und nur dann, wenn

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \subset F(\boldsymbol{x}) \tag{43}$$

erfüllt ist, und dafür gibt es nur die beiden einander ausschließenden Möglichkeiten $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}^n$, d.h. $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \wedge \operatorname{Ker} F$, oder $\operatorname{Dim} F(\boldsymbol{x}) = n-1$, und dann gehört $\boldsymbol{x}$ zu $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A})$. □

Folgerung 19. *Ist unter den Voraussetzungen von Satz* 18 F *eine Polarität, so gilt:* $\boldsymbol{W} \neq \boldsymbol{o}$ *ist isotrop genau dann, wenn* $\boldsymbol{A} = \pi(\boldsymbol{W})$ *in wenigstens einem Punkt* $\boldsymbol{x}$ *zu* Q_F *tangentiell ist; die Menge* $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A})$ *der Berührungspunke ist ein projektiver Unterraum von* $\boldsymbol{A}$, *dessen Vektorraum der Defektunterraum von* $b|\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$ *ist.* □

Übung 8. Man zeige am Beispiel einer geeigneten Polarität, dass es tangentielle Unterräume $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P}^n$ geben kann, für die $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}) \neq Q_F \cap \boldsymbol{A}$ gilt; außer den Berührungspunkten können also noch weiter Punkte von Q_F zu $\boldsymbol{A}$ gehören.

1.9.9 Dualisierung: Koquadriken

Obwohl wir die Korrelationen und allgemeiner die korrelativen Abbildungen als monoton fallende Abbildungen projektiver Geometrien definierten, haben wir doch zum Beispiel bei der Definition der Quadriken den Punkten als Grundelementen den Vorzug gegeben. Der in diesem Sinne zu den korrelativen Abbildungen duale Begriff geht von den Hyperebenen als Grundelementen aus; jeder Hyperebene $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{P}'^n$wird also ein Punkt $\boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{U}) \in \boldsymbol{Q}^m$ oder der Unpunkt $\boldsymbol{o}$ zugeordnet, wobei F durch eine σ-lineare Abbildung $a : \boldsymbol{V}' \to \boldsymbol{W}$, σ ein Anti-Isomorphismus, vermittelt wird:

$$\boldsymbol{U} = [\mathfrak{u}] \in \boldsymbol{P}'^n_o \longmapsto \boldsymbol{x} = [a(\mathfrak{u})] \in \boldsymbol{Q}^m_o. \tag{44}$$

Das Büschel der mit $\boldsymbol{x}$ inzidierenden Hyperebenen wird durch $\tau(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\perp}$ bestimmt, und wir erhalten eine F-Korrespondenz der Hyperebenen $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{P}'^n$, $\boldsymbol{D} = [\mathfrak{d}] \in \boldsymbol{Q}'^m$ durch

$$\boldsymbol{D} \;\iota\; F(\boldsymbol{U}] \longleftrightarrow B(\mathfrak{d}, \mathfrak{u}) := (\mathfrak{d}|a(\mathfrak{u})) = 0; \tag{45}$$

die σ-Biform B ist jetzt linear in $\mathfrak{d} \in \boldsymbol{W}'$ und σ-linear in $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{V}'$. Es sei nun wieder $\operatorname{char} K \neq 2$, $\mathfrak{Q}^m = \mathfrak{P}^n$ und B σ-hermitesch über $\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}'$, vgl. (2). Dann definiert

$$B(\mathfrak{u}, \mathfrak{u}) = 0 \tag{46}$$

die Menge $Q'_F := \{\boldsymbol{U} = [\mathfrak{u}] \in \boldsymbol{P}'^n | \boldsymbol{U} \;\iota\; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\}$, die wir die zu F gehörende *Koquadrik* nennen wollen. Die traditionellen Bezeichnungen für Q_F bzw. Q'_F sind *Kurve* ($n = 2$), *Fläche* ($n = 3$) oder *Hyperfläche* (n beliebig) *zweiter Ordnung* bzw. *zweiter Klasse.* Dual zum Begriff der Tangentialhyperebene $F(\boldsymbol{x})$ im regulären Punkt $\boldsymbol{x} \in Q_F$ ist der Begriff des *Berührungspunkte* $F(\boldsymbol{U}) \neq \boldsymbol{o}$ in der regulären Hyperebene $\boldsymbol{U} \in Q'_F$. Ist F eine Polarität, so folgt für die Paare $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X})$ von Pol und Polare $\boldsymbol{X} = F(\boldsymbol{x})$ sofort

$$\boldsymbol{x} \;\iota\; F(\boldsymbol{x}) \longleftrightarrow \boldsymbol{X} \;\iota\; F(\boldsymbol{X}), \tag{47}$$

und daher gelten

$$Q'_F = F(Q_F), \quad Q_F = F(Q'_F): \tag{48}$$

Die Koquadrik Q'_F (bzw. Quadrik Q_F) ist die Menge der Tangentialhyperebenen (bzw. Berührungspunkte) der Quadrik Q_F (bzw. der Koquadrik Q'_F).

Übung 9. Es sei F eine Polarität und $(u_j) = (\sigma(x^i))(a_{ij})$ ihre Matrixdarstellung in homogenen Koordinaten. Man zeige, dass die Gleichung (46) für die zu F gehörende Koquadrik Q'_F in demselben Koordinatensystem durch

$$\sum_{i,j=0}^{n} u_i c^{ij} \sigma(u_j) = 0 \text{ mit } (c^{ij}) := (a_{ij})^{-1} \tag{49}$$

gegeben wird.

1.10 Einschränkungen und Erweiterungen der Skalare

Um die in den Beispielen 9.2, 9.3 besonders deutlich werdende Abhängigkeit der Quadriken vom zugrunde liegenden Skalarbereich näher zu untersuchen wird es nützlich sein, die Veränderungen der projektiven Geometrien bei Änderungen des Skalarbereichs zu betrachten. In diesem Abschnitt seien stets L ein Schiefkörper und $K \subset L$ ein Teilschiefkörper. Dann ist L auch ein rechter Vektorraum über K; wir setzen stets $r := \dim_K L < \infty$ voraus. In Verallgemeinerung von Definition II.8.5.4 heißt in diesem Fall L eine *endliche Erweiterung vom Grade* r von K. In den uns hauptsächlich interessierenden Fällen ist

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H} = 2, \; \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{H} = 4.$$

In L wählen wir eine feste Basis (a_ρ), $\rho = 1, \ldots, r$, derart, dass $a_1 = 1$ das Einselement von L ist. Es sei $\boldsymbol{V}$ ein Vektorraum über L. Durch *Einschränkung der Skalare* auf K, genauer: Ausführen der skalaren Multiplikation im Vektorraum $\boldsymbol{V}$ mit Elementen $\mu \in K$

$$(\mathfrak{x}, \mu) \in \boldsymbol{V} \times K \longmapsto \mathfrak{x}\mu \in \boldsymbol{V},$$

wird $\boldsymbol{V}$ zu einem durch $\boldsymbol{V}_{|K}$ bezeichnetem Vektorraum über K. Indem man die Skalare $\lambda \in L$ in der Basis (a_ρ) von L über K zerlegt, werden die skalaren Operationen von L über $\boldsymbol{V}$ in entsprechende von K über $\boldsymbol{V}_{|K}$ transformiert. Wendet man das auf die Vektorkoordinaten von $\boldsymbol{V}$ über L an, so folgt leicht (vgl. Übung I.4.4.8)

Lemma 1. *Es sei $\boldsymbol{V}$ ein rechter n-dimensionaler Vektorraum über L und $(\mathfrak{b}_l)$ eine Basis von $\boldsymbol{V}$. Dann ist $(\mathfrak{b}_l a_\rho)$, $l = 1, \ldots, n$, $\rho = 1, \ldots, r$, eine Basis des durch Einschränkung der Skalare entstehenden Vektorraums $\boldsymbol{V}_{|K}$ über K, und es gilt*

$$\dim_K \boldsymbol{V}_{|K} = \dim_L \boldsymbol{V} \cdot \dim_K L. \qquad \square \tag{1}$$

1.10.1 Hopfsche Faserungen

Den in (1) auftretenden Vektorräumen $\boldsymbol{V}^n$ über L, $\boldsymbol{V}^{nr}_{|K}$ und L über K entsprechen projektive Geometrien. Wir betrachten die projektiven Punkträume $\boldsymbol{P}^{n-1}(\boldsymbol{V})$, $\boldsymbol{P}^{nr-1}(\boldsymbol{V}_{|K})$, $\boldsymbol{P}^{r-1}(L_{|K})$ und die kanonischen Abbildungen (vgl. (1.2))

$$\pi : \boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\} \longrightarrow \boldsymbol{P}^{n-1}(\boldsymbol{V}),$$
$$\pi_K : \boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\} \longrightarrow \boldsymbol{P}^{nr-1}(\boldsymbol{V}_{|K}).$$

Die Einschränkung der Skalare führt im projektiven Bereich dazu, dass jeder Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^{n-1}(\boldsymbol{V})$ zu einem projektiven Unterraum $\theta^{-1}(\boldsymbol{x}) \subset \boldsymbol{P}^{nr-1}(\boldsymbol{V}_{|K})$ aufgeblasen wird, der zu $\boldsymbol{P}^{r-1}(L_{|K})$ isomorph ist. Genauer gilt

Satz 2. *Es sei $\boldsymbol{V}$ ein n-dimensionaler rechter Vektorraum über dem Schiefkörper L, $\boldsymbol{P}^{n-1}(\boldsymbol{V})$ der zugehörige projektive Raum und $\boldsymbol{P}^{nr-1}(\boldsymbol{V}_{|K})$ der zur Einschränkung $\boldsymbol{V}_{|K}$ auf den Teilschiefkörper $K \subset L$ gehörende projektive Raum, $r = \dim_K L < \infty$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte surjektive Abbildung*

$$\theta : \boldsymbol{P}^{nr-1}(\boldsymbol{V}_{|K}) \longrightarrow \boldsymbol{P}^{n-1}(\boldsymbol{V}) \tag{2}$$

derart, dass für die kanonischen Abbildungen die Gleichung

$$\pi = \theta \circ \pi_K \tag{3}$$

gilt. Das Urbild $\theta^{-1}(\boldsymbol{x})$ ist eine projektive $(r-1)$-Ebene in $\boldsymbol{P}^{nr-1}(\boldsymbol{V}_{|K})$. Ist $(\mathfrak{b}_l)$, $l = 1, \ldots, n$, eine Basis von $\boldsymbol{V}$ über L und U_1 der Definitionsbereich der inhomogenen projektiven Koordinaten (ξ_1^j), vgl. Lemma 2.6, so definiert

$$\boldsymbol{x} \in U_1 \longmapsto s(\boldsymbol{x}) := \mathfrak{b}_1 + \sum_{j=2}^{n} \mathfrak{b}_j \xi_1^j(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

einen Schnitt der kanonischen Abbildung π, d.h. es gilt $\pi \circ s = \mathrm{id}_{U_1}$, und die Abbildung

$$\Phi : \boldsymbol{y} = [\mathfrak{y}] \in \theta^{-1}(U_1) \longmapsto (\theta(\boldsymbol{y}), [\mathfrak{y}/s(\theta(\boldsymbol{y}))]_K) \in U_1 \times \boldsymbol{P}^{r-1}(L_{|K}) \tag{5}$$

ist eine Bijektion (analog für die anderen Bereiche U_j).

B e w e i s. Für jedes $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\}$ ist $\pi_K(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}K \subset \mathfrak{x}L = \pi(\mathfrak{x})$, und daher ist $\theta(\mathfrak{x}K) = \mathfrak{x}L$, θ ist surjektiv und eindeutig bestimmt. Offenbar gilt $\mathfrak{x}L = \mathfrak{y}L$ dann und nur dann, wenn ein $k \in L^*$ existiert derart, dass $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}k$ ist. Zerlegt man k in der Basis (a_ρ) von L, so erhält man für das volle Urbild von $\boldsymbol{x} = \mathfrak{x}L \in \boldsymbol{P}^{n-1}(\boldsymbol{V})$:

$$\theta^{-1}([\mathfrak{x}]_L) = [\mathfrak{x}]_K \vee [\mathfrak{x}a_2]_K \vee \ldots \vee [\mathfrak{x}a_r]_K. \tag{6}$$

Weil die Vektoren $(\mathfrak{x}a_\rho)$, $\rho = 1, \ldots, r$, über K für jedes $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ linear unabhängig sind, spannen die entsprechenden Punkte eine $(r-1)$-Ebene in $\boldsymbol{P}^{nr-1}(\boldsymbol{V}_{|K})$ auf. Um (5) einen Sinn zu geben, erinnere man sich an die Definition des Verhältnisses zweier Vektoren in I.4.3. Nach der Definition von θ ist $\boldsymbol{y} = [\mathfrak{y}]_K \in \theta^{-1}(\boldsymbol{x})$, wenn $\mathfrak{y} = s(\boldsymbol{x})k$ für ein $k \in L^*$ gilt, k ist dabei durch $\boldsymbol{y}$ bis auf einen rechten Faktor $\kappa \in K^*$ eindeutig bestimmt; somit ist

$$[\mathfrak{y}/s(\theta(\boldsymbol{y}))]_K = [k]_K \in \boldsymbol{P}^{r-1}(L_{|K})$$

durch $\boldsymbol{y}$ eindeutig definiert. Hieraus folgt leicht, dass Φ eine Bijektion ist. □

Die in Satz 2 beschriebene Situation ist ein projektives Analogon einer topologischen Faserung: $\boldsymbol{P}^{nr-1}(\boldsymbol{V}_{|K})$ ist als disjunkte Vereinigung der „Fasern“ (6) dargestellt, wobei $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]_L$ den Raum $\boldsymbol{P}^{n-1}(\boldsymbol{V})$ durchläuft. Dabei ist dieser so durch „Kartenbereiche“ U_j überdeckt, dass die Urbilder $\theta^{-1}(U_j)$ in der in (5) angegebenen Weise als direkte Produkte erscheinen, wobei Φ die Fasern $\theta^{-1}(\boldsymbol{x})$ auf die Fasern $p_1^{-1}(z)$, $z = (\theta(x), [k]_K)$ des rechts stehenden Produkts abbildet. Man beweist leicht, dass die zweite Projektion des direkten Produktes auf den Fasern

$$p_2 \circ \Phi|\theta^{-1}(\boldsymbol{x}) : \theta^{-1}(\boldsymbol{x}) \longrightarrow \boldsymbol{P}^{r-1}(L_{|K})$$

eine Projektivität ist. Führt man in den Räumen über $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ mit Hilfe der inhomogenen Koordinaten eine Topologie oder die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ein, so sind die in (3) - (5) auftretenden Abbildungen offen und stetig bzw. beliebig oft differenzierbar, θ ist dann auch eine Faserung im topologischen Sinn.

Beispiel 1. Die Faserungen θ stehen in enger Beziehung zu den von H. Hopf [44] im Jahre 1935 beschriebenen Faserungen von Sphären. Dazu definieren wir die Überlagerungsabbildung $\lambda : S^N \to \boldsymbol{P}^N_{\mathbf{R}}$; stellen wir uns die Sphäre S^N als Einheitssphäre in $\mathbf{R}^{\mathbf{N+1}}$ und den projektiven Raum $\boldsymbol{P}^N_{\mathbf{R}}$ als Menge der Geraden durch ihr Zentrum vor, so ist

$$\lambda : \mathfrak{y} \in S^N \longmapsto \lambda(\mathfrak{y}) := [\mathfrak{y}]_{\mathbf{R}} \in \boldsymbol{P}^N_{\mathbf{R}} \tag{7}$$

eine zweifache Überlagerung: jeder Punkt $\boldsymbol{y} = [\mathfrak{y}]_{\mathbf{R}} \in \boldsymbol{P}^N_{\mathbf{R}}$ hat ja genau zwei Urbilder $\pm\mathfrak{y} \in S^N$, und die projektiven Geraden haben als Urbilder die Großkreise in S^N. Somit ist für $K = \mathbf{R} \subset L = \mathbf{C}$ die Abbildung

$$\theta_o := \theta \circ \lambda : S^{2n-1} \longrightarrow \boldsymbol{P}^{n-1}_{\mathbf{C}} \tag{8}$$

eine Faserung der Sphäre S^{2n-1} durch Kreise S^1. Ist speziell $n = 2$, so ist $\boldsymbol{P}^1_{\mathbf{C}} \cong \hat{\mathbf{C}} \cong S^2$ homöomorph zur Riemannschen Sphäre (vgl. Beispiel 1.3), und es ergibt sich eine *Hopfsche Faserung* der Sphäre S^3 durch Kreise S^1 über der Sphäre S^2

$$\theta_o : S^3 \longrightarrow S^2, \qquad \theta_o^{-1}(\boldsymbol{x}) \cong S^1. \tag{9}$$

Analog erhalten wir aus der Einbettung $\mathbf{R} \subset \mathbf{H}$ die Abbildungen

$$\theta_o = \theta \circ \lambda, \text{ mit } \lambda : S^{4n-1} \to \boldsymbol{P}_{\mathbf{R}}^{4n-1},\ \theta : \boldsymbol{P}_{\mathbf{R}}^{4n-1} \to \boldsymbol{P}_{\mathbf{H}}^{n-1}, \tag{10}$$

wobei θ und θ_o Faserungen durch projektive Räume $\boldsymbol{P}_{\mathbf{R}}^3$ bzw. Sphären S^3 sind; denn nach Satz 2 ist

$$\theta^{-1}(\boldsymbol{x}) \cong \boldsymbol{P}_{\mathbf{R}}^3,\ \theta_o^{-1}(\boldsymbol{x}) = \lambda^{-1} \circ \theta^{-1}(\boldsymbol{x}) \cong S^3. \tag{11}$$

Wegen $\hat{\mathbf{H}} \cong S^4$ folgt speziell für $n = 2$ eine *Hopfsche Faserung* der Sphäre S^7 durch dreidimensionale Sphären S^3 über der Sphäre S^4

$$\theta_o :\ S^7 \longrightarrow S^4, \qquad \theta_o^{-1}(\boldsymbol{x}) \cong S^3. \tag{12}$$

Betrachtet man anstelle der Quaternionen die *Cayleyschen Zahlen*, die auch *Oktaven* genannt werden, so erhält man eine weitere *Hopfsche Faserung* (vgl. N. Steenrod [74], §II.20)

$$\theta_o :\ S^{15} \longrightarrow S^8, \qquad \theta_o^{-1}(\boldsymbol{x}) \cong S^7. \tag{13}$$

Schließlich gibt uns die Einbettung $\mathbf{C} \subset \mathbf{H}$ die Faserungen

$$\theta :\ \boldsymbol{P}_{\mathbf{C}}^{2n-1} \longrightarrow \boldsymbol{P}_{\mathbf{H}}^{n-1}. \tag{14}$$

Weil nach Übung II.8.9.9 $\mathbf{H}_{|\mathbf{C}} \cong \mathbf{C}^2$ ist, sind die Fasern hier

$$\theta^{-1}(\boldsymbol{x}) \cong \boldsymbol{P}_{\mathbf{C}}^1 \cong S^2. \tag{15}$$

□

Übung 1. Unter den Voraussetzungen von Satz 2 beweise man: Zu drei kollinearen Punkten $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \boldsymbol{P}^{n-1}(\boldsymbol{V})$ gibt es stets drei kollineare Punkte $\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in \boldsymbol{P}^{nr-1}(\boldsymbol{V}_{|K})$ mit $\theta(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{a}_i$. – b) Zu vier kollinearen Punkten $\boldsymbol{a}_i \in \boldsymbol{P}^{n-1}(\boldsymbol{V})$, $i = 0, \ldots, 3$, gibt es genau dann vier kollineare Punkte $\boldsymbol{b}_i \in \boldsymbol{P}^{nr-1}(\boldsymbol{V}_{|K})$ mit $\theta(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{a}_i$, wenn $K \cap \mathrm{DV}(\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) \neq \emptyset$ gilt.

Für die nächsten Abschnitte sind die folgenden Überlegungen von Interesse: Sind $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ Vektorräume über dem Schiefkörper L, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}), \boldsymbol{P}(\boldsymbol{W})$ die zugehörigen projektiven Punkträume, so erzeugt eine Abbildung $f : \boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\} \to \boldsymbol{W} \setminus \{\mathfrak{o}\}$ genau dann eine eindeutig bestimmte Abbildung $F : \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}) \to \boldsymbol{P}(\boldsymbol{W})$ mit $F(\pi(\mathfrak{x})) = \pi(f(\mathfrak{x}))$, wenn für alle $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\}$ und alle $\lambda \in L^*$ der Vektor $f(\mathfrak{x}\lambda)$ von $f(\mathfrak{x})$ linear abhängt. Dafür ist hinreichend, dass es eine Funktion $h : L^* \to L^*$ gibt mit $f(\mathfrak{x}\lambda) = f(\mathfrak{x})h(\lambda)$ für alle $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\}$ und alle $\lambda \in L^*$ (bzw. $f(\mathfrak{x}\lambda) = h(\lambda)f(\mathfrak{x})$, falls $\boldsymbol{V}$ ein rechter und $\boldsymbol{W}$ ein linker Vektorraum ist, u.s.w.).

Übung 2. Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 2 zeige man: Ist $h : L^* \to L^*$ eine Abbildung mit $h(K^*) \subset K^*$, und $f : \boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\} \to \boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\}$ eine Abbildung mit $f(\mathfrak{x}\lambda) = f(\mathfrak{x})h(\lambda)$, so sind die von f erzeugten Abbildungen $F : \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}_{|K}) \to \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}_{|K})$, $\hat{F} : \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}) \to \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V})$ wohldefiniert, und es gilt $\theta \circ F = \hat{F} \circ \theta$.

1.10.2 Komplexe Strukturen

Die reelle Einschränkung eines komplexen Vektorraums $\boldsymbol{V}$ nennt man auch seine *Reellifizierung*. Sie führt auf den Begriff einer komplexen Struktur eines reellen Vektorraums und auf die Darstellung der komplex-linearen Abbildungen als Unteralgebra der reellen Endomorphismenalgebra. Speziell erhalten wir eine Darstellung der komplex-linearen Gruppe $\boldsymbol{GL}(n, \mathbf{C})$ als Untergruppe der reellen linearen Gruppe $\boldsymbol{GL}(2n, \mathbf{R})$. Einige Konsequenzen für die projektiven Eigenschaften der Faserung

$$\theta : \boldsymbol{P}^{2n-1}(\boldsymbol{V}_{|\mathbf{R}}) \longrightarrow \boldsymbol{P}^{n-1}(\boldsymbol{V})$$

wollen wir im Folgenden beschreiben.

In $\boldsymbol{V}$ definiert die skalare Multiplikation mit $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ einen $\mathbf{C}$-linearen und erst recht $\mathbf{R}$-linearen Isomorphismus, die *komplexe Struktur*:

$$I(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} \cdot \mathrm{i}, \ I^2 = -\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{V}} \,. \tag{16}$$

Da I keine reellen Eigenwerte hat, erzeugt es eine gleich bezeichnete fixpunktfreie Involution $I \in \boldsymbol{PL}(\boldsymbol{P}^{2n-1}_{\mathbf{R}})$, die somit die Normalform (4.42) besitzen muss. In der Tat, ist $\mathfrak{a}_l$, $l = 1, \ldots, n$, eine Basis von $\boldsymbol{V}$, so ergibt die Zerlegung der komplexen Koordinaten in Real- und Imaginärteil

$$\mathfrak{x} = \sum_{l=1}^{n} \mathfrak{a}_l z^l = \sum_{l=1}^{n} \mathfrak{a}_l (x^l + \mathrm{i}\, x^{n+l}) = \sum_{\nu=1}^{2n} \mathfrak{a}_\nu x^\nu$$

mit

$$\mathfrak{a}_{n+l} := \mathfrak{a}_l\, \mathrm{i} = I(\mathfrak{a}_l), \text{ also } I(\mathfrak{a}_{n+l}) = -\mathfrak{a}_l, \tag{17}$$

eine Basis von $\boldsymbol{V}^{2n}_{\mathbf{R}}$, in der I diese Normalgestalt hat. Ist umgekehrt ein $2n$-dimensionaler reeller Vektorraum $\boldsymbol{W}^{2n}$ gegeben und $I \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{W}^{2n}, \mathbf{R})$ ein linearer Automorphismus von $\boldsymbol{W}$ mit $I^2 = -\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{W}}$, so definiert

$$(\mathfrak{x}, z) \in \boldsymbol{W} \times \mathbf{C} \longmapsto \mathfrak{x}\mathbf{z} := \mathfrak{x}\zeta + \mathbf{I}(\mathfrak{x})\eta \in \boldsymbol{W} \text{ für } \mathbf{z} = \zeta + \mathrm{i}\,\eta \tag{18}$$

die Struktur eine n-dimensionalen komplexen Vektorraums über $\boldsymbol{W}$, den wir mit $\boldsymbol{V}^n$ bezeichnen; für ihn gilt $\boldsymbol{W}^{2n} = \boldsymbol{V}_{|\mathbf{R}}$. Eine $\mathbf{R}$-lineare Abbildung I von $\boldsymbol{W}$ mit $I^2 = -\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{W}}$ heißt daher eine *komplexe Struktur* (vgl. Definition II.8.9.4) von $\boldsymbol{W}$; im Ergebnis von Übung 4.15 sind alle komplexen Strukturen zueinander ähnlich. Die komplex-linearen Abbildungen $a : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ sind natürlich auch reell linear. Stellen wir sie bezüglich einer Basis $(\mathfrak{a}_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, 2n$, von $\boldsymbol{V}_{|\mathbf{R}}$ der Gestalt (17) dar, so folgt mit nahe liegenden Bezeichnungen von Real- und Imaginärteil:

$$a(\mathfrak{z}) = (A + \mathrm{i}\, B)(\mathfrak{x} + \mathrm{i}\, \mathfrak{y}) = (A\mathfrak{x} - B\mathfrak{y}) + \mathrm{i}(A\mathfrak{y} + B\mathfrak{x}); \tag{19}$$

dabei sind $A, B \in \boldsymbol{M}_n(\mathbf{R})$ reelle quadratische Matrizen und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, vgl. Übung I.5.4.18.

Übung 3. Mit den eben eingeführten Bezeichnungen zeige man: a) Durch Einschränkung der Skalare von $\mathbf{C}$ auf $\mathbf{R}$ erhält man eine homomorphe Einbettung der reellen Endomorphismenalgebren

$$c : \ (\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{V}^n))_{|\mathbf{R}} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{W}^{2n}). \tag{20}$$

b) Eine lineare Abbildung $b \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{W}^{2n})$ liegt genau dann in $(\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{V}^n))_{|\mathbf{R}}$, wenn sie mit der komplexen Struktur I kommutiert, d.h. $I \circ b = b \circ I$ erfüllt, und das gilt genau dann, wenn ihre Matrix (β^λ_μ) bezüglich einer Basis (17) die folgende Blockstruktur besitzt (vgl. Übung I.5.4.18)

$$(\beta^\lambda_\mu) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \text{ mit } A, B \in \boldsymbol{M}_n(\mathbf{R}). \tag{21}$$

c) Die Determinante jeder Matrix der Gestalt (21) ist nicht negativ. (Man beachte, dass I in jeder Basis (17) die Matrix

$$I : \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } 1_n = (\delta^i_j) \in \boldsymbol{M}_n(\mathbf{R}) \tag{22}$$

besitzt. Ferner vergleiche man (21) mit (19).)

Übung 4. Es sei I eine komplexe Struktur über dem reellen Vektorraum $\boldsymbol{W}^{2n}$. Mit $p_I \in \boldsymbol{PL}(\boldsymbol{P}^{2n-1}_{\mathbf{R}})$ bezeichnen wir die von I erzeugte projektive Involution. Wieder sei $\boldsymbol{V}^n$ der durch I bestimmte komplexe Vektorraum und $\theta : \boldsymbol{P}^{2n-1}_{\mathbf{R}} \to \boldsymbol{P}^{n-1}_{\mathbf{C}}$ die sich aus Satz 2 ergebende Faserung. Es bezeichne $p_a : \boldsymbol{P}^{2n-1}_{\mathbf{R}} \to \boldsymbol{P}^{2n-1}_{\mathbf{R}}$ die von der linearen Abbildung $a \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{W}^{2n})$ erzeugte projektive Abbildung. Man zeige: Es existiert genau dann eine Abbildung $\hat{p}_a : \boldsymbol{P}^{n-1}_{\mathbf{C}} \to \boldsymbol{P}^{n-1}_{\mathbf{C}}$, die $\theta \circ p_a = \hat{p}_a \circ \theta$ erfüllt, wenn $p_a \circ I = I \circ p_a$ gilt; dabei ist $\hat{p}_a$ projektiv oder antiprojektiv.

1.10.3 Quaternionische Strukturen

Schränken wir in (20) den Homomorphismus c auf die lineare Gruppe $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n, \mathbf{C})$ ein, so erhalten wir in (21) nur invertierbare Matrizen, die uns eine *reelle Darstellung von* $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n, \mathbf{C})$ *als Untergruppe von* $\boldsymbol{GL}(2n, \mathbf{R})$ vermitteln. Wir wollen nun die Einschränkung der Skalare von $\mathbf{H}$ auf $\mathbf{C}$ in analoger Weise dazu anwenden, eine *komplexe Darstellung der quaternionisch-linearen Gruppe* $\boldsymbol{GL}(n, \mathbf{H})$ *in* $\boldsymbol{GL}(2n, \mathbf{C})$ zu erhalten.

Beispiel 2. Ist $\boldsymbol{U}^n$ ein rechter n-dimensionaler Vektorraum über den Quaternionen $\mathbf{H}$, so erhalten wir bei Einschränkung der Skalare auf $\mathbf{C}$ (vgl. § I.2.3 und Übung II.8.9.9) einen $2n$-dimensionalen Vektorraum $\boldsymbol{V}^{2n} = \boldsymbol{U}^n_{|\mathbf{C}}$ über $\mathbf{C}$ und die Faserung (14). Dabei wird die Darstellung der Quaternionen in der Form

$$q = z + \mathrm{j}\, w \in \mathbf{H}, \text{ mit } z, w \in \mathbf{C}$$

zum Beispiel auf die Koordinaten eines Vektors angewandt. Die Dilatation $d_{\mathrm{j}} : \mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{x}\,\mathrm{j}$ ist jedoch weder $\mathbf{H}$- noch $\mathbf{C}$-linear; sie definiert vielmehr wegen $z\,\mathrm{j} = \mathrm{j}\,\bar{z}$, $z \in \mathbf{C}$, eine konjugiert-lineare Abbildung $J(\mathfrak{x}) := \mathfrak{x}\,\mathrm{j}$ mit

$$J(\mathfrak{x}\lambda) = J(\mathfrak{x})\bar{\lambda} \quad (\lambda \in \mathbf{C}),\ J^2 = -\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{V}}\,. \tag{23}$$

J bestimmt daher eine fixpunktfreie involutive Kollineation von $\boldsymbol{P}^{2n-1}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{V})$, welche die Normalform (4.43) in einer geeigneten Basis von $\boldsymbol{V}^{2n}$ besitzt. Ausgehend von einer beliebigen Basis $(\mathfrak{a}_l)$, $l = 1, \ldots, n$, des quaternionischen Vektorraums $\boldsymbol{U}^n$ erhält man eine solche Basis durch

$$\mathfrak{a}_{n+l} := \mathfrak{a}_l\,\mathrm{j} = J(\mathfrak{a}_l), \text{ also } J(\mathfrak{a}_{n+l}) = -\mathfrak{a}_l. \tag{24}$$

Ist umgekehrt eine involutive konjugiert-lineare Abbildung J mit (23) auf dem komplexen Vektorraum $\boldsymbol{V}^{2n}$ gegeben, so definiert

$$(\mathfrak{x}, q) \in \boldsymbol{V} \times \mathbf{H} \longmapsto \mathfrak{x}q := \mathfrak{x}z + J(\mathfrak{x})w \in \boldsymbol{V} \text{ für } q = z + \mathrm{j}\, w \in \mathbf{H} \ \ (z,\, w \in \mathbf{C}) \tag{25}$$

die Struktur eines n-dimensionalen, rechten quaternionischen Vektorraums über $\boldsymbol{V}$, den wir wieder mit $\boldsymbol{U}^n$ bezeichnen; dabei gilt $\boldsymbol{U}^n_{|\mathbf{C}} = \boldsymbol{V}^{2n}$; man nennt daher J eine *quaternionische Struktur* auf $\boldsymbol{V}^{2n}$. Aus Übung 4.15 folgt leicht, dass die quaternionischen Strukturen alle zueinander ähnlich sind: Sind J_1, J_2 zwei quaternionische Strukturen, so gibt es ein $a \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{2n}, \mathbf{C})$ derart, dass $J_2 = a \circ J \circ a^{-1}$ gilt. Da jede $\mathbf{H}$-lineare Abbildung erst recht $\mathbf{C}$-linear ist, erhalten wir bezüglich einer Basis (24) bei Zerlegung der Koordinaten in die komplexen Komponenten (vgl. Übung II.8.9.9):

$$a(\mathfrak{z}) \hat{=} (A + \mathrm{j}\, B)(\mathfrak{x} + \mathrm{j}\, \mathfrak{y}) = (A\mathfrak{x} - \bar{B}\mathfrak{y}) + \mathrm{j}(B\mathfrak{x} + \bar{A}\mathfrak{y}); \tag{26}$$

dabei bezeichnet $\bar{A}$ die zu A konjugiert komplexe Matrix. □

Übung 5. Mit den Bezeichnungen von Beispiel 2 zeige man: Die kanonische Einbettung

$$\iota : \mathrm{End}_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{U}^n) \longrightarrow (\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{V}^{2n}))_{|\mathbf{R}} \tag{27}$$

ist ein Homomorphismus reeller Algebren. (Man beachte, dass nach Satz II.7.2.5 $\mathrm{End}_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{U}^n)$ nur eine $Z(\mathbf{H})$-Algebra ist.) Eine $\mathbf{C}$-lineare Abbildung $b \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{V}^{2n}))$ liegt genau dann in $\mathrm{End}_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{U}^n)$, wenn sie mit der quaternionischen Struktur J kommutiert, also

$$J \circ b = b \circ J \tag{28}$$

erfüllt, und das gilt genau dann, wenn ihre Matrix bezüglich einer Basis (24) die Blockstruktur

$$(\beta^\lambda_\mu) = \begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix} \text{ mit } A, B \in \boldsymbol{M}_n(\mathbf{C}). \tag{29}$$

besitzt.

Übung 6. Man zeige, dass jede komplexe Matrix der Gestalt (29) eine reelle Determinante hat. Ist (29) die Matrix einer $\mathbf{H}$-linearen Abbildung b, so hängt die *Norm* $N(b) := N_{\mathbf{C}}(b) := \det(\beta^\lambda_\mu)$ nicht von der Wahl der Basis $(\mathfrak{a}_l)$ ab. (Siehe auch Übung 8.)

Übung 7. Es sei $(\mathfrak{a}_l)$ eine Basis des quaternionischen Vektorraums $\boldsymbol{U}^n$. Zerlegt man die Vektorkoordinaten in die reellen Komponenten:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_l q^l = \mathfrak{a}_l x^l_0 + \mathfrak{a}_l\, \mathrm{i}\, x^l_1 + \mathfrak{a}_l\, \mathrm{j}\, x^l_2 + \mathfrak{a}_l\, \mathrm{k}\, x^l_3 \tag{30}$$

(Summenkonvention, $l = 1, \ldots, n$), so erhalten wir die Basis $(\mathfrak{a}_l,\, \mathfrak{a}_l\, \mathrm{i},\, \mathfrak{a}_l\, \mathrm{j},\, \mathfrak{a}_l\, \mathrm{k})$ des reellen Vektorraums $\boldsymbol{W}^{4n} = \boldsymbol{U}^n_{|\mathbf{R}}$. Wir fassen die Koordinaten von $\mathfrak{x}$ in die Blöcke $\mathfrak{x}_\alpha := (x^l_\alpha) \in \mathbf{R}^n$, $\alpha = 0, \ldots, 3$, zusammen. Jede $\mathbf{R}$-lineare Abbildung $a \in \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{W}^{4n})$ lässt sich dann mittels einer Blockmatrix darstellen:

$$(\mathfrak{y}_\alpha) = (A_{\alpha\beta})(\mathfrak{x}_\beta),\ \mathfrak{x}_\beta \in \mathbf{R}^n, A_{\alpha\beta} \in \boldsymbol{M}_n(\mathbf{R}).$$

Man zeige, dass a genau dann $\mathbf{H}$-linear ist, wenn die Blockmatrix von a die folgende spezielle Gestalt hat:

$$(A_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} A_0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Die Blöcke von (31) hängen dabei mit der quaternionischen Koordinatenmatrix von a durch

$$(q_{lm}) = A_0 + \mathrm{i}\, A_1 + \mathrm{j}\, A_2 + \mathrm{k}\, A_3 \in \boldsymbol{M}_n(\mathbf{H}) \tag{32}$$

zusammen. Im Wesentlichen dieselbe Blockmatrixstruktur erhält man, wenn man in (29) zu reellen Koordinaten übergeht.

Übung 8. Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein rechter n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbf{H}$ und $a \in \mathrm{End}_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{V}^n)$. Man zeige: a) Es gibt eine Basis $(\mathfrak{a}_s)$, $s = 1, \ldots, n$, von $\boldsymbol{V}^n$ derart, dass a bezüglich $(\mathfrak{a}_s)$ eine Jordansche Matrix (I.5.8.29) hat, wobei die Diagonalelemente $\lambda_\kappa = \xi_\kappa + \mathrm{i}\,\eta_\kappa$ komplexe Zahlen sind und $\eta_\kappa \geq 0$ gilt. – b) Zwei derartige Abbildungen a, b sind genau dann $\mathbf{H}$-ähnlich, d.h. es gibt ein $c \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n, \mathbf{H})$ mit $b = c \circ a \circ c^{-1}$, wenn sie bezüglich geeigneter Basen dieselbe Jordansche Matrix haben. – c) Es gilt (vgl. Übung 6)

$$N(a) \geq 0. \tag{33}$$

(Hinweis. Man betrachte a zuerst als $\mathbf{C}$-lineare Abbildung von $\boldsymbol{V}^n_{|\mathbf{C}}$. Wenn $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}^n_{|\mathbf{C}}$ ein komplexer Unterraum ist, in dem $a|\boldsymbol{W}$ durch ein Jordansches Kästchen beschrieben wird, so untersuche man $J(\boldsymbol{W})$.)

1.10.4 Projektive Erweiterungen

Die Einschränkung des Skalarbereichs von L auf $K \subset L$ des eine projektive Geometrie bestimmenden Vektorraums $\boldsymbol{V}$ verändert die Struktur der abelschen Gruppe $[\boldsymbol{V}, +]$ des Vektorraums nicht; die eingeschränkte skalare Multiplikation erzeugt nach Satz 2 eine neue projektive Geometrie mit dem Skalarbereich K und die surjektive Abbildung θ des Punktraums der K-Geometrie auf den Punktraum der L-Geometrie, vgl. (2). Oft ist man jedoch daran interessiert, einen projektiven K-Punktraum $\boldsymbol{P}^n_K$ in einen projektiven L-Punktraum $\boldsymbol{P}^n_L$ einzubetten, also eine injektive Abbildung $\iota : \boldsymbol{P}^n_K \to \boldsymbol{P}^n_L$ zu haben, die möglichst viel von der projektiven Struktur erhält. In diesem Fall kann man die größeren und oft einfacheren Möglichkeiten für die Lösung algebraischer Gleichungen über L zu Rückschlüssen auf die K-Geometrie nutzen. Besonders interessant und in der algebraischen Geometrie oft angewandt ist der Übergang vom Reellen zum Komplexen. Die hierbei eintretende Vereinfachung erkennt man zum Beispiel bei der Klassifikation der polaren Abbildungen, vgl. die Sätze 9.4 und 9.5. Oft geht man bei der Erweiterung des Skalarbereichs ganz direkt vor: Man beschreibt die interessierenden Objekte in homogenen oder inhomogenen Koordinaten bezüglich K und lässt danach zu, dass diese Koordinaten auch Werte in L annehmen. Um diesem direkten Verfahren eine begriffliche Grundlage zu geben, gehen wir wieder von der am Anfang dieser Sektion 10 beschriebenen Situation aus.

Definition 1. Es sei $K \subset L$ ein Teilschiefkörper. Jeder (zum Beispiel rechte) Vektorraum $\boldsymbol{V}$ über L ist nach Einschränkung der Skalare auch ein Vektorraum über K.

Ein K-Unterraum $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}_{|K}$ heißt eine *K-Struktur in $\boldsymbol{V}$*, wenn $\boldsymbol{W}$ ein minimaler K-Unterraum ist, der $\boldsymbol{W}$ erzeugt, für den also $\mathfrak{L}_L(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{V}$ ist. [1] Gilt das, so nennen wir $\boldsymbol{V}$ eine *L-Erweiterung* von $\boldsymbol{W}$. □

Lemma 3. *Sind $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ rechte L-Erweiterungen des K-Vektorraums $\boldsymbol{W}$, so gilt $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2$; wir setzen $\boldsymbol{V} := \boldsymbol{V}_1$. Jede K-Basis der K-Struktur $\boldsymbol{W}$ ist auch L-Basis der Erweiterung $\boldsymbol{V}$. Speziell gilt* $\dim_K \boldsymbol{W} = \dim_L \boldsymbol{V}$.

B e w e i s. Nach Definition ist jeder Vektorraum $\boldsymbol{V}_i$, $i = 1, 2$, die L-lineare Hülle von $\boldsymbol{W}$. Hieraus folgt $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2$. Sind $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$ K-linear unabhängige Vektoren von $\boldsymbol{W}$, so sind sie auch L-linear unabhängig in $\boldsymbol{V}$: wäre etwa $\mathfrak{a}_r$ L-linear abhängig von den übrigen:

$$\mathfrak{a}_r = \sum_{\rho=1}^{r-1} \mathfrak{a}_\rho \lambda_\rho, \ \ \lambda_\rho \in L,$$

so betrachten wir einen zu $\mathfrak{a}_r K$ komplementären Unterraum $\boldsymbol{W}_1 \subset \boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}_1 \oplus \mathfrak{a}_r K$. Offenbar wäre dann auch die L-lineare Hülle von $\boldsymbol{W}_1$ gleich $\boldsymbol{V}$, und $\boldsymbol{W}$ wäre nicht minimaler, den Raum $\boldsymbol{V}$ erzeugender L-Unterraum. □

Damit ist die oben beschriebene direkte Methode für endlich-dimensionale Vektorräume schon gerechtfertigt: Ist $(\mathfrak{a}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, eine K-Basis von $\boldsymbol{W}$, so besitzt jedes Element der L-Erweiterung $\boldsymbol{V}$ eine eindeutig bestimmte Basisdarstellung

$$\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \lambda_i, \ \ \lambda_i \in L.$$

Umgekehrt, ist $(\mathfrak{b}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, eine beliebige L-Basis von $\boldsymbol{V}$, so ist die K-lineare Hülle $\boldsymbol{W} := \mathfrak{L}_K((\mathfrak{b}_i),\ i = 1, \ldots, n)$ eine K-Struktur von $\boldsymbol{V}$. Durch Rückgang auf die Basen ergibt sich unmittelbar:

Folgerung 4. *Unter den Voraussetzungen von Definition 1 sei* $\dim \boldsymbol{V} = n < \infty$. *Dann existieren K-Strukturen $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$. Die L-lineare Gruppe $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}, L)$ wirkt transitiv auf der Menge aller K-Strukturen von $\boldsymbol{V}$; diese ist daher ein homogener Raum isomorph zu*

$$\boldsymbol{GL}(n, L)/\boldsymbol{GL}(n, K).$$

B e w e i s. Es genügt zu bemerken, dass die Isotropiegruppe einer K-Struktur $\boldsymbol{W}$ aus allen L-linearen Transformationen $h \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}, L)$ mit $h(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}$ besteht. Da die L-linearen Transformationen auch K-linear sind, folgt die Behauptung $h \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{W}, K)$. Fixiert man eine beliebige K-Basis von $\boldsymbol{W}$ als L-Basis von $\boldsymbol{V}$, so ist die Einbettung $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{W}, K) \subset \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}, L)$ durch die Gruppe derjenigen L-linearen Transformationen gegeben, deren Matrizen in $\boldsymbol{GL}(n, K)$ liegen.□

Folgerung 5. *Es sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(L)$ ein Automorphismus, der K erhält: $\sigma(K) = K$. Ist $a : \boldsymbol{W}_1 \to \boldsymbol{W}_2$ eine K-lineare bzw. K-σ-lineare Abbildung, so gibt es eine eindeutig bestimmte lineare bzw. L-σ-lineare Abbildung $\tilde{a} : \boldsymbol{V}_1 \to \boldsymbol{V}_2$ der L-Erweiterungen $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2$*

[1] Man beachte: Die oben betrachteten Involutionen ‚komplexe Struktur', ‚quaternionische Struktur' sind *nicht* Spezialfälle des Begriffs K-Struktur.

von $\boldsymbol{W}_1$ bzw. $\boldsymbol{W}_2$, die a fortsetzt: $\tilde{a}|\boldsymbol{W}_1 = a$. Betrachten wir die Kategorien der linearen Abbildungen, so ist die Zuordnung $a \mapsto \tilde{a}$ der Kategorie der rechten Vektorräume über K ein kovarianter Funktor in die Kategorie der rechten Vektorräume über L. Dabei gilt

$$\widetilde{(a+b)} = \tilde{a} + \tilde{b},\ \widetilde{\alpha a} = \alpha\tilde{a}\ \ (\alpha \in K).$$

B e w e i s. Im endlich-dimensionalen Fall betrachten wir K-Basen $(\mathfrak{a}_i)$, $(\mathfrak{b}_\alpha)$ von $\boldsymbol{W}_1$ bzw. $\boldsymbol{W}_2$ und lassen in der Basisdarstellung von a

$$a(\mathfrak{x}) = a(\mathfrak{a}_i\lambda^i) = \mathfrak{b}_\alpha a_i^\alpha \sigma(\lambda^i)$$

auch Elemente $\lambda^i \in L$ zu. Für unendlich-dimensionale Vektorräume verfährt man analog, wobei der Satz über die Existenz von Basen (vgl. Übung I.4.4.7) anzuwenden ist. □

Wir nennen $\tilde{a}$ die *lineare* (bzw. *σ-lineare*) *Fortsetzung* der Abbildung a. Analoge Betrachtungen gelten für linke Vektorräume. Ist die Parität der Vektorräume ungleich, so sind die Automorphisman durch Anti-Automorphismen zu ersetzen.

Beispiel 3. Wir betrachten die Inklusion $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ und die komplexe Ebene $\boldsymbol{V} = \mathbf{C}^2$. Dann ist $\boldsymbol{W} := (1,0)\mathbf{R} \oplus (0,1)\mathbf{R}$ eine $\mathbf{R}$-Struktur in $\boldsymbol{V}$. Der reelle Unterraum $\boldsymbol{U} := (1,0)\mathbf{R} \oplus (\mathrm{i},0)\mathbf{R}$ spannt nur die komplexe Gerade $(1,0)\mathbf{C}$ auf, ist also keine $\mathbf{R}$-Struktur in $\boldsymbol{V}$. Die $\mathbf{R}$-lineare Abbildung

$$a:\ (y^i) = (a^i_j)(x^j).\ (x^j) \in \mathbf{R}^2,\ (a^i_j) \in \boldsymbol{M}_2(\mathbf{R}),$$

besitzt die durch die Festsetzung $(x^j) \in \mathbf{C}^2$ bestimmte lineare Fortsetzung $\tilde{a} \in \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\boldsymbol{V})$, und die durch

$$\hat{a}:\ (x^i) \in \boldsymbol{V} \longmapsto (\bar{y}^i) := (a^i_j)(\bar{x}^j)$$

bestimmte konjugiert lineare Fortsetzung. □

Aus den Erweiterungen der Vektorräume und den Fortsetzungen σ-linearer Abbildungen ergeben sich unmittelbare Konsequenzen für die projektive Geometrie:

Folgerung 6. *Es sei K ein Teilschiefkörper des Schiefkörpers L. Zu jedem endlich-dimensionalen rechten projektiven Raum $\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{W}^{n+1}, K)$ gibt es eine eindeutig bestimmte* rechte projektive Erweiterung $\boldsymbol{P}^n_L = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}^{n+1}, L)$, *die zu der L-Erweiterung $\boldsymbol{V}$ des K-Vektorraums $\boldsymbol{W}$ gehört; der Punktraum $\boldsymbol{P}^n$ ist dabei durch*

$$\iota : \boldsymbol{x} = \mathfrak{x}K \in \boldsymbol{P}^n \longmapsto \iota(\boldsymbol{x}) := \mathfrak{x}L \in \boldsymbol{P}^n_L \tag{34}$$

in $\boldsymbol{P}^n_L$ kanonisch eingebettet. Für die L-Erweiterungen der projektiven Unterräume $\boldsymbol{B}^k := \boldsymbol{b}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{b}_k \subset \boldsymbol{P}^n$ gilt

$$\boldsymbol{B}^k_L = (\boldsymbol{b}_0 \vee \ldots \vee \boldsymbol{b}_k)_L = \iota(\boldsymbol{b}_0) \vee \ldots \vee \iota(\boldsymbol{b}_k). \tag{35}$$

Ist $\sigma \in \mathrm{Aut}\, L$ ein Automorphismus mit $\sigma(K) = K$, und f die durch eine σ-K-lineare Abbildung $a : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W}$ erzeugte kollineare Abbildung, so existiert eine eindeutig bestimmte, durch die σ-L-lineare Abbildung $\tilde{a} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ erzeugte kollineare Abbildung $\tilde{f} : \boldsymbol{P}^n_L \to \boldsymbol{P}^n_L$, welche f fortsetzt. Dabei gelten

$$\widetilde{\mathrm{id}}_{\boldsymbol{P}^n} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^n_L},\ \ \widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}.\ \square \tag{36}$$

Wir überlassen es dem Leser entsprechende Folgerungen für Abbildungen zwischen verschiedenen projektiven Räumen, für linke projektive Geometrien oder für projektive Geometrien verschiedener Parität zu formulieren. Folgerung 6 erlaubt es, die projektiven Geometrien über einem Schiefkörper K funktoriell zu projektiven Geometrien über jedem K enthaltenden Schiefkörper L zu erweitern. Wir betrachten weiter die K-Einschränkung $\boldsymbol{V}_{|K}$ von $\boldsymbol{V}$; die auf sie bezogenen Begriff werden durch einen Zusatz ‚K' gekennzeichnet. Die Unterräume von $\boldsymbol{V}_{|K}$ nennen wir *K-Unterräume von $\boldsymbol{V}$*; offenbar ist $\boldsymbol{V}$ selbst ein K-Unterraum von $\boldsymbol{V}$, für dessen Dimension (1) gilt. Die ihnen entsprechenden projektiven Unterräume werden ebenfalls *K-Unterräume* genannt; so ist das Bild der in (34) definierten Einbettung $\boldsymbol{P}^n_K := \iota(\boldsymbol{P}^n) \subset \boldsymbol{P}^n_L$ ein n-dimensionaler projektiver K-Unterraum, den wir eine *projektive K-Struktur* von $\boldsymbol{P}^n_L$ nennen. Speziell heißen die Punkte $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n_K$ *K-Punkte* in $\boldsymbol{P}^n_L$. Ein Repère $(\boldsymbol{a}_i; \boldsymbol{e})$ von $\boldsymbol{P}^n_K$ heißt ein *K-Repère* von $\boldsymbol{P}^n_L$.

Übung 9. Es sei $\boldsymbol{P}^n_K \subset \boldsymbol{P}^n_L$ eine projektive K-Struktur in $\boldsymbol{P}^n_L$. Mit den eben getroffenen Vereinbarungen beweise man für projektive K-Unterräume $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{P}^n_K$:

$$(\boldsymbol{A} \vee_K \boldsymbol{B})_K = (\boldsymbol{A}_L \vee_L \boldsymbol{B}_L) \cap \boldsymbol{P}^n_K, \tag{37}$$

$$(\boldsymbol{A} \wedge_K \boldsymbol{B})_K = (\boldsymbol{A}_L \wedge_L \boldsymbol{B}_L) \cap \boldsymbol{P}^n_K, \tag{38}$$

$$\boldsymbol{x} \iota_K \boldsymbol{A} \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n_K \text{ und } \boldsymbol{x} \iota_L \boldsymbol{A}_L. \tag{39}$$

Übung 10. Jede K-Basis $(\mathfrak{a}_i)$ von $\boldsymbol{V}^{n+1}$ bestimmt homogene Koordinaten in $\boldsymbol{P}^n_K$ und in $\boldsymbol{P}^n_L$. Man zeige: Ein Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n_L$ liegt in $\boldsymbol{P}^n_K$ genau dann, wenn für die Verhältnisse seiner homogenen Koordinaten bezüglich einer K-Basis $(\mathfrak{a}_i)$ gilt $x^i \cdot (x^j)^{-1} \in \hat{K}$, $i, j = 0, \ldots, n$. Daher ist

$$\boldsymbol{P}^n_K = \{\boldsymbol{x} = [\sum_{i=0}^{n} \mathfrak{a}_i x^i]_L | x^i \in K,\ (x^i) \neq \mathfrak{o}\} \tag{40}$$

Folgerung 7. *Unter den Voraussetzungen von Folgerung 6 gilt: Zu jeder Projektivität f von $\boldsymbol{P}^n_K$ gibt es eine Fortsetzung $\tilde{f}$ von $\boldsymbol{P}^n_L$, $\tilde{f}|\boldsymbol{P}^n_K = f$. Ist umgekehrt F eine Projektivität von $\boldsymbol{P}^n_L$, die*

$$F(\boldsymbol{P}^n_K) = \boldsymbol{P}^n_K \tag{41}$$

erfüllt, so ist $F|\boldsymbol{P}^n_K$ eine Kollineation. □

Beispiel 4. Dass (mit den Bezeichnungen von Folgerung 7) $F|\boldsymbol{P}^n_K$ keine Projektivität zu sein braucht, wenn (41) gilt, zeigt das folgende Beispiel: Es sei $K = \mathbf{C} \subset L = \mathbf{H}$ wie üblich eingebettet: $\mathbf{C} = \mathfrak{L}_{\mathbf{R}}(\{1, \mathrm{i}\})$. Dann ist die Abbildung a, $a((q^s)) := (\mathrm{j}\, q^s)$, $s = 0, \ldots, n$, eine lineare Abbildung des rechten Vektorraums $\mathbf{H}^{n+1}$; wegen

$$[a((z^s))] = [(\mathrm{j}\, z^s)] = [(\bar{z}^s\, \mathrm{j})] = [(\bar{z}^s)]$$

ergibt die durch $F([\mathfrak{x}]) = [a(\mathfrak{x})]$ definierte Projektivität von $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{H}}$ auf der durch die Standardbasis bestimmten $\mathbf{C}$-Struktur $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}} \subset \boldsymbol{P}^n_{\mathbf{H}}$ gerade die durch die Konjugation erzeugte Antiprojektivität.□

Es gilt jedoch

Folgerung 8. *Ist L ein Körper und F eine Projektivität von $\boldsymbol{P}^n_L$, welche* (41) *erfüllt, so ist $F|\boldsymbol{P}^n_K$ ebenfalls eine Projektivität.*

Zum Beweis genügt es zu bemerken, dass F das Doppelverhältnis invariant lässt, welches für Würfe aus $\boldsymbol{P}^n_K$ nur Werte in $\hat{K}$ annimmt, und Satz 4.6 anzuwenden.□

1.10.5 Projektive K-Geometrie von $\boldsymbol{P}^n_L$

Nach Folgerung 4 sind alle projektiven K-Strukturen von $\boldsymbol{P}^n_L$ projektiv äquivalent. Wir fixieren nun wieder eine solche Struktur und bezeichnen mit $\widetilde{\boldsymbol{PL}}_{n,K} \subset \boldsymbol{PL}(\boldsymbol{P}^n_L)$ die Untergruppe derjenigen Projektivitäten von $\boldsymbol{P}^n_L$, die Fortsetzungen von K-Projektivitäten von $\boldsymbol{P}^n_K$ sind; ist L ein Körper, so ist diese Gruppe nach Folgerung 8 die Isotropiegruppe von $\boldsymbol{P}^n_K$ unter der in Folgerung 4 beschriebenen Wirkung von $\boldsymbol{PL}(P^n_L)$. Offenbar gilt die Isomorphie

$$\widetilde{\boldsymbol{PL}}_{n,K} \cong \boldsymbol{PL}(\boldsymbol{P}^n_K). \tag{42}$$

Die Invarianten der Transformationsgruppe $[\widetilde{\boldsymbol{PL}}_{n,K}, \boldsymbol{P}^n_L]$ beschreiben die geometrischen Eigenschaften von Figuren aus $\boldsymbol{P}^n_L$ in bezug auf die projektive K-Struktur $\boldsymbol{P}^n_K$, kurz, die *projektive K-Geometrie* von $\boldsymbol{P}^n_L$.

Beispiel 5. Für die Anwendungen besonders wichtig ist der Fall $K = \mathbf{R}$, $L = \mathbf{C}$ der reellen Geometrie des komplexen projektiven Raumes. Aus Beispiel 4.7 entnimmt man unmittelbar, dass der dort definierte Begriff einer reellen Struktur im wesentlichen auf eine $\mathbf{R}$-Struktur hinausläuft: die *Staudtschen Ketten* sind dasselbe wie die $\mathbf{R}$-Strukturen in $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}}$ (vgl. die nächste Übung). □

Übung 11. Es bezeichne J eine reelle Struktur des komplexen projektiven Raumes $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}}$ und gleichzeitig die sie erzeugende konjugiert lineare Abbildung des zugehörigen Vektorraums $\boldsymbol{V}^{n+1}$, vgl Beispiel 4.7. Man zeige: a) die zu J gehörende Staudtsche Kette ist eine $\mathbf{R}$-Struktur in $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}}$, und jede $\mathbf{R}$-Struktur von $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}}$ ist eine Staudtsche Kette. – b) Ist eine $\mathbf{R}$-Struktur $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{R}} \subset \boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}}$ gegeben, so ist die Basis $(\mathfrak{b}_j)$ von $\boldsymbol{V}^{n+1}$ genau dann eine $\mathbf{R}$-Basis, wenn J bezüglich $(\mathfrak{b}_j)$ in der Normalform (4.46) dargestellt wird. – c) Es gilt

$$\widetilde{\boldsymbol{PL}}_{n,\mathbf{R}} = \{f \in \boldsymbol{PL}(\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}}) | f \circ J = J \circ f\}. \tag{43}$$

Beispiel 6. Wir betrachten nun die Erweiterung von $\mathbf{C}$ zu $\mathbf{H}$. Es sei $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}} \subset \boldsymbol{P}^n_{\mathbf{H}}$ eine $\mathbf{C}$-Struktur des quaternionisch projektiven Raumes und $(\mathfrak{b}_s), s = 0, \ldots, n$, eine $\mathbf{C}$-Basis der zugehörigen Vektorräume $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}^{n+1}_{\mathbf{C}} \subset \boldsymbol{V}^{n+1}_{\mathbf{H}} = \boldsymbol{V}$. In der Aufspaltung

$$x^s = z^s + \mathrm{j}\, w^s,\ z^s, w^s \in \mathbf{C},$$

erhalten wir durch

$$w^s = 0,\ s = 0, \ldots, n, \tag{44}$$

die Teilmenge $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}} \subset \boldsymbol{P}^n_{\mathbf{H}}$; die (z^s) sind dann homogene Koordinaten der Punkte von $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}}$. Die involutive Projektivität J von $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{H}}$ mit der Koordinatendarstellung $J : (x^s) \mapsto (\mathrm{i}\, x^s)$ (vgl. Beispiel 4.8, insbesondere (4.52)) hat bezüglich $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}} \subset \boldsymbol{P}^n_{\mathbf{H}}$ die zu der reellen Struktur J aus Übung 11 analogen Eigenschaften:

a) Es gilt

$$\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n_{\mathbf{H}} | J(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\}; \tag{45}$$

die Involutionen J mit der Normalform (4.52) und die $\mathbf{C}$-Strukturen $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}} \subset \boldsymbol{P}^n_{\mathbf{H}}$ entsprechen einander bijektiv.

b) Ist $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}} \subset \boldsymbol{P}^n_{\mathbf{H}}$ gegeben, so ist $(\boldsymbol{b}_s)$ genau dann eine $\mathbf{C}$-Basis für $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}}$, wenn J bezüglich $(\boldsymbol{b}_s)$ die Normalform

$$J(\mathfrak{b}_s) = \mathfrak{b}_s\,\mathrm{i},\; s = 0, \ldots, n, \tag{46}$$

hat. Wie Beispiel 4 zeigt, ist $\widetilde{\boldsymbol{PL}}_{n,\mathbf{C}}$ nicht mehr die Isotropiegruppe G von $\boldsymbol{PL}_{n,\mathbf{C}}$ unter der Wirkung von $\boldsymbol{PL}(\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{H}})$; indem man die Stetigkeit der Projektivitäten von $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{H}}$ ausnutzt, zeigt man leicht:

c) Die Isotropiegruppe G einer $\mathbf{C}$-Struktur $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}} \subset \boldsymbol{P}^n_{\mathbf{H}}$ ist

$$G = \{f \in \boldsymbol{PL}(\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{H}}) | f \circ J = J \circ f\}. \tag{47}$$

Die Abbildung $f \in G \mapsto f|\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}} \in \operatorname{Aut} \boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}}$ ist eine Isomorphismus von G auf die aus den Projektivitäten und Antiprojektivitäten bestehende Gruppe von Kollineationen von $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}}$.
□

Übung 12. Man beweise die in Beispiel 6 formulierten Aussagen. Hinweis. Man beachte die in Beispiel 4 beschriebene Situation.

Beispiel 7. Wir geben nun ein Schema an, dass die Beispiele 5, 6 verallgemeinert. Zunächst sei bemerkt, dass zu jedem Automorphismus $\sigma \in \operatorname{Aut} L$ die Menge der Fixelemente $K_\sigma := \{\xi \in L | \sigma(\xi) = \xi\}$ ein Teilschiefkörper des Schiefkörpers L ist. Es sei nun die folgende Bedingung erfüllt:

B) *Es sei L ein Schiefkörper,* $\operatorname{char} L \neq 2$, *und $\sigma \in \operatorname{Aut} L$ ein involutiver Automorphismus, $\sigma^2 = \mathrm{id}_L$, $\sigma \neq \mathrm{id}_L$. Wir setzen $K = K_\sigma$.*

Im Allgemeinen ist K nicht kommutativ. In Beispiel 5 ist $\sigma(z) = \bar{z}$ die Konjugation, und in Beispiel 6 ist $\sigma = \sigma_{\mathrm{i}}$ der innere Automorphismus

$$\sigma_{\mathrm{i}}(z + \mathrm{j}\,w) = -\,\mathrm{i}(z + \mathrm{j}\,w)\,\mathrm{i} = z - \mathrm{j}\,w. \tag{48}$$

Es sei nun $\boldsymbol{V}^{n+1}$ ein rechter Vektorraum über L und $(\mathfrak{a}_i)$ eine beliebige Basis von $\boldsymbol{V}$. Dann definiert

$$J(\sum_{i=0}^{n} \mathfrak{a}_i x^i) := \sum_{i=0}^{n} \mathfrak{a}_i \sigma(x^i) \tag{49}$$

eine σ-lineare Involution von $\boldsymbol{V}$, und diese bestimmt eine gleich bezeichnete Kollineation $J \in \operatorname{Aut}(\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{V}))$. Wir nennen J eine *σ-Konjugation*, wenn J bei geeigneter Wahl der Basis in der Gestalt (49) dargestellt werden kann. Wenn klar ist, um welchen Automorphismus es sich handelt, spricht man einfach von der Konjugation J. Zwei Elemente $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ (Punkte, Vektoren, Unterräume, …) heißen *zueinander konjugiert*, wenn $J(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$ ist.
□

Satz 9. *Unter der Voraussetzung* B) *gilt: Jede σ-Konjugation J bestimmt durch*

$$\boldsymbol{P}^n_K := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{V}) | J(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\} \tag{50}$$

eine K-Struktur in $\boldsymbol{P}^n_L := \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{V})$, und für jede K-Struktur $\boldsymbol{P}^n_K \subset \boldsymbol{P}^n_L$ gibt es genau eine σ-Konjugation J, für die (50) *erfüllt ist.*

Beweis. Es sei $(\mathfrak{a}_s)$ eine Basis von $\boldsymbol{V}$, in der (49) gilt. Dann liegt offenbar die durch diese Basis bestimmte K-Struktur (41) in der Fixpunktmenge von J. Ist umgekehrt $J(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, so gilt für den Vektor $(x^s) \in L^{n+1}$ der homogenen Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ bezüglich der Basis $\mathfrak{a}_s$: Es gibt ein $q \in L^*$ mit $\sigma(x^s) = x^s q$. Hieraus folgt $\sigma^2(x^s) = x^s = \sigma(x^s)\sigma(q) = x^s q\sigma(q)$. Da wenigstens ein $x^s \neq 0$ ist, ergibt sich

$$q\sigma(q) = 1, \tag{51}$$

und jede Koordinate $x^s \neq 0$ von $\boldsymbol{x}$ erfüllt die Gleichung $(x^s)^{-1}\sigma(x^s) = q$. Wir beweisen

Lemma 10. *Es sei* (51) *für ein* $q \in L$ *erfüllt. Dann gilt unter der Voraussetzung* B)*: Hat die Gleichung*

$$\xi^{-1}\sigma(\xi) = q \tag{52}$$

eine Lösung $\xi_0 \in L$*, so erhält man durch* $\xi = \kappa\xi_0$, $\kappa \in K^*$*, alle ihre Lösungen.*

Beweis. Aus $\sigma(\kappa) = \kappa$ folgt sofort, dass $\xi = \kappa\xi_0$ eine Lösung ist. Es sei nun $\xi \in L^*$ irgendeine Lösung von (52). Dann gilt wegen $\sigma(\xi_0^{-1})\xi_o = \sigma(q)$

$$\sigma(\xi\xi_0^{-1}) = \sigma(\xi)\sigma(\xi_0)^{-1} = \xi q\sigma(q)\xi_0^{-1} = \xi\xi_0^{-1}.$$

Folglich ist $\kappa := \xi\xi_0^{-1} \in K^*$, also $\xi = \kappa\xi_0$. □

Da nun die von Null verschiedenen Koordinaten die Gleichung (52) erfüllen, können wir $x^s = \kappa^s\xi_0$ mit $\kappa^s \in K$, $s = 0, \ldots, n$, $\xi_0 \in L^*$, schreiben; für $x^s = 0$ setzen wir $\kappa^s = 0$. Nach Übung 10 heißt das aber gerade $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}_K^n$. Ist nun umgekehrt eine K-Struktur gegeben, so erhalten wir eine σ-Konjugation J mit der Eigenschaft (50), wenn wir J durch (49) in bezug auf eine K-Basis $(\mathfrak{a}_s)$ definieren. Es sei nun J_1 ebenfalls eine σ-Konjugation mit der Fixpunktmenge $\boldsymbol{P}_K^n$. Dann gilt $J_1|\boldsymbol{P}_K^n = J|\boldsymbol{P}_K^n = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}_K^n}$, und wegen $J_1(\mathfrak{a}_s) = J(\mathfrak{a}_s) = \mathfrak{a}_s$ ist $J_1 = J$. □

Das Ergebnis der folgenden Übung wird weiter unten benötigt.

Übung 13. Unter der Voraussetzung B) beweise man: a) Es gibt ein $q \in L^*$ mit $\sigma(q) = -q$. – b) Ist $q_0 \in L^*$ ein fest gewähltes Element mit $\sigma(q_0) = -q_0$, so ist jedes $x \in L$ eindeutig in der Gestalt $x = \alpha + q_0\beta$ mit $\alpha, \beta \in K$ darstellbar, und es gilt $\dim_K L = 2$. – c) Die Abbildung $\alpha \in K \mapsto \tau(\alpha) := q_0\alpha q_0^{-1} \in L$ ist ein Automorphismus von K; τ ist involutiv genau dann, wenn q_0^2 im Zentrum $Z(K)$ von K liegt. – d) Man zeige an einem Beispiel, dass es kein $q \in L^*$ zu geben braucht, welches gleichzeitig $\sigma(q) = -q$ und $\sigma(q) = q^{-1}$ erfüllt. Hinweis. Man betrachte die Konjugation in $\mathbf{Q}[\sqrt{-3}]$.

1.10.6 K-Klassifikation der projektiven L-Unterräume

Wir wollen uns nun der projektiven K-Geometrie der L-Unterräume von $\boldsymbol{P}_L^n$ zuwenden. Aus Definition 1 folgt leicht:

Lemma 11. *Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Definition 1 gilt: Ist* $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P}_L^n$ *ein projektiver* L*-Unterraum, so ist* $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}_K^n$ *ein projektiver* K*-Unterraum, und es gilt*

$$\mathrm{Dim}_K\, \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}_K^n \leq \mathrm{Dim}_L\, \boldsymbol{A}; \tag{53}$$

das Gleichheitszeichen gilt in (53) *genau dann, wenn*

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}_K^n)_L = \boldsymbol{A} \tag{54}$$

erfüllt ist. □

Satz 12. *Unter der Voraussetzung* B) *betrachten wir die projektive Erweiterung* $\boldsymbol{P}_K^n \subset \boldsymbol{P}_L^n$*, wobei* $\boldsymbol{P}_K^n$ *nach* (50) *durch die* σ*-Konjugation* J *definiert sei. Dann gilt* (54) *für einen projektiven* L*-Unterraum* $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P}_L^n$ *genau dann, wenn* $J(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$ *ist.*

Beweis. Beziehen wir $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}_K^n$ auf eine K-Basis $(\mathfrak{a}_i)$, $i = 0, \ldots, l = \operatorname{Dim}_K \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}_K^n$, so folgt aus (54) sofort $l = \operatorname{Dim}_L \boldsymbol{A}$, also die Gleichheit in (53), und $J(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$. Es sei nun umgekehrt $J(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}$ erfüllt. Wir finden wieder eine K-Basis $(\mathfrak{a}_i)$, $i = 0, \ldots, l$, für $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}_K^n$. Angenommen, es gilt $k := \operatorname{Dim}_L \boldsymbol{A} > l$. Dann ist

$$\boldsymbol{B} := (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}_K^n)_L \subset \boldsymbol{A}, \ l = \operatorname{Dim}_L B < k,$$

und es gibt einen Punkt $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$. Folglich ist auch $J(\boldsymbol{b}) \in J(\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$; speziell gilt $\boldsymbol{b} \neq J(\boldsymbol{b})$. Wir wählen einen Vektor $\mathfrak{b}$ mit $\boldsymbol{b} = [\mathfrak{b}]$. Offenbar ist

$$J(\mathfrak{b} + J(\mathfrak{b})) = \mathfrak{b} + J(\mathfrak{b}), \ J(\mathfrak{b} - J(\mathfrak{b})) = -(\mathfrak{b} - J(\mathfrak{b})), \tag{55}$$

und daher gelten

$$\boldsymbol{a} := [\mathfrak{b} + J(\mathfrak{b})] \in \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}_K^n, \ \boldsymbol{a}' := [\mathfrak{b} - J(\mathfrak{b})] \in \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}_K^n.$$

Da $(\mathfrak{a}_i)$ eine K-Basis für diesen K-Unterraum ist, folgt aus Übung 13

$$\mathfrak{a} := \mathfrak{b} + J(\mathfrak{b}) = \sum_0^l \mathfrak{a}_i \gamma^i, \ \mathfrak{a}' := \mathfrak{b} - J(\mathfrak{b}) = \sum_0^l \mathfrak{a}_i \gamma'^i q, \tag{56}$$

γ^i, $\gamma'^i \in K$ und $q \in L^*$ mit

$$\sigma(q) = -q. \tag{57}$$

Hieraus erhalten wir sofort

$$2\mathfrak{b} = \sum_0^l \mathfrak{a}_i (\gamma^i + \gamma'^i q), \tag{58}$$

und weil $\operatorname{char} L \neq 2$ ist, folgt $2\mathfrak{b} \neq \mathfrak{o}$ und $\boldsymbol{b} = [\mathfrak{b}] \in \boldsymbol{B}$ im Widerspruch zur Wahl von $\boldsymbol{b}$. Daher gilt $l = k$, und aus Lemma 11 folgt (54). □

Aus Satz 12 folgt nun leicht die Klassifikation der L-Unterräume in der projektiven K-Geometrie von $\boldsymbol{P}_L^n$:

Satz 13. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 12 *gilt: Sind* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}_1 \subset \boldsymbol{P}_L^n$ *projektive Unterräume, so gibt es genau dann eine Projektivität* $f \in \widetilde{\boldsymbol{PL}}_{n,K}$ *mit* $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}_1$*, wenn*

$$\operatorname{Dim}_L \boldsymbol{A} = \operatorname{Dim}_L \boldsymbol{A}_1 \ \textit{und} \ \operatorname{Dim}_K \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}_K^n = \operatorname{Dim}_K \boldsymbol{A}_1 \cap \boldsymbol{P}_K^n \tag{59}$$

gelten.

B e w e i s. Wegen $f(\boldsymbol{P}^n_K) = \boldsymbol{P}^n_K$ ist die Notwendigkeit der Bedingung (59) klar. Für den Beweis der Umkehrung passen wir eine K-Basis dem Raum $\boldsymbol{A}$ an. Zunächst wählen wir eine Basis $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d \in \boldsymbol{W}$ des Raums $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}^n_K$; hier bezeichnet $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}^{n+1}$ den zur K-Struktur $\boldsymbol{P}^n_K$ gehörenden K-Vektorraum. Nun ist

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}^n_K = J(\boldsymbol{A}) \cap \boldsymbol{P}^n_K = (\boldsymbol{A} \wedge J(\boldsymbol{A})) \cap \boldsymbol{P}^n_K,$$

und es folgt nach Satz 12

$$d = \mathrm{Dim}_K\, \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}^n_K = \mathrm{Dim}_L\, \boldsymbol{A} \wedge J(\boldsymbol{A}); \tag{60}$$

denn $\boldsymbol{A} \wedge J(\boldsymbol{A})$ ist J-invariant. Es sei $k = \mathrm{Dim}_L\, \boldsymbol{A}$; wir ergänzen die Basis $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_d$ von $\boldsymbol{A} \wedge J(\boldsymbol{A})$ durch die Vektoren $\mathfrak{b}_{d+1}, \ldots, \mathfrak{b}_k \in \boldsymbol{V}^{n+1}$, $\boldsymbol{P}^n_L = \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{V})$, zu einer Basis von $\boldsymbol{A}$. Dann ist

$$J(\boldsymbol{A}) = [\mathfrak{a}_o] \vee \ldots \vee [\mathfrak{a}_d] \vee [J(\mathfrak{b}_{d+1})] \vee \ldots \vee [J(\mathfrak{b}_k)],$$

und $\boldsymbol{A} \vee J(\boldsymbol{A})$ wird von den $2k-d+1$ Vektoren $(\mathfrak{a}_\alpha)$, $\alpha = 0, \ldots, d$, $(\mathfrak{b}_\nu)$, $(J(\mathfrak{b}_\nu))$, $\nu = d+1, \ldots, k$, aufgespannt. Nach der Dimensionsformel ist

$$\mathrm{Dim}_L\, \boldsymbol{A} \vee J(\boldsymbol{A}) = 2k - \mathrm{Dim}_L\, \boldsymbol{A} \wedge J(\boldsymbol{A}) = 2k - d, \tag{61}$$

und folglich sind die eben angegebenen Vektoren linear unabhängig. Wir fixieren nun irgendein $q \in L^*$, das die Gleichung (57) erfüllt (vgl. Übung 13), und definieren

$$\mathfrak{a}_\nu := \mathfrak{b}_\nu + J(\mathfrak{b}_\nu),\ \hat{\mathfrak{a}}_\nu := (\mathfrak{b}_\nu - J(\mathfrak{b}_\nu))q^{-1}. \tag{62}$$

Wegen $J(\mathfrak{a}_\nu) = \mathfrak{a}_\nu$ und $J(\hat{\mathfrak{a}}_\nu) = \hat{\mathfrak{a}}_\nu$ liegen die $\mathfrak{a}_\nu, \hat{\mathfrak{a}}_\nu$ in $\boldsymbol{W}^{n+1}$, und da wir umgekehrt die $\mathfrak{b}_\nu, J(\mathfrak{b}_\nu)$ durch sie linear ausdrücken können ($\mathrm{char}\, L \neq 2$):

$$\mathfrak{b}_\nu = (\mathfrak{a}_\nu + \hat{\mathfrak{a}}_\nu q)/2,\ J(\mathfrak{b}_\nu) = (\mathfrak{a}_\nu - \hat{\mathfrak{a}}_\nu q)/2, \tag{63}$$

sind die $2k-d+1$ Vektoren $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_k, \hat{\mathfrak{a}}_{d+1}, \ldots, \hat{\mathfrak{a}}_k$ eine K-Basis für den J-invarianten Unterraum $\boldsymbol{A} \vee J(\boldsymbol{A})$. Wir ergänzen sie durch $(\mathfrak{a}_\lambda)$, $\lambda = 2k-d+1, \ldots, n$ zu einer K-Basis von $\boldsymbol{V}^{n+1}$. Bestimmt nun der Unterraum $\boldsymbol{A}_1$ dieselben Dimensionen d, k wie $\boldsymbol{A}$, so können wir ihm in ganz analoger Weise eine K-Basis von $\boldsymbol{V}$ zuordnen, die zu $\boldsymbol{A}_1$ dieselben Lageeigenschaften hat wie die K-Basis $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_n$ zu $\boldsymbol{A}$. Diese Basen bestimmen eine Projektivität $f \in \widetilde{\boldsymbol{PL}}_{n,K}$ mit $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}_1$. □

Folgerung 14. *Unter den Voraussetzungen von Satz 12 sei $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P}^n_L$ ein L-Unterraum. Dann genügen die Dimensionen $k = \mathrm{Dim}_L\, \boldsymbol{A}$, $d = \mathrm{Dim}_K\, \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}^n_K$ der Ungleichung*

$$\max(-1, 2k-n) \leq d \leq k \leq n. \tag{64}$$

Alle Paare (d, k), die dieser Ungleichung genügen, kommen als Dimensionen $k = \mathrm{Dim}_L\, \boldsymbol{A}$, $d = \mathrm{Dim}_K\, \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}^n_K$ für geeignete Unterräume vor.

B e w e i s. Die Notwendigkeit von (64) ergibt sich aus (60),

$$\mathrm{Dim}_L\, \boldsymbol{A} \vee J(\boldsymbol{A}) \leq \min(n, 2k+1) \tag{65}$$

und der Dimensionsformel Satz 1.1. Genügt umgekehrt das Paar (d, k) der Ungleichung (64), so finden wir wegen $d \leq k \leq n$ zunächst $d+1$ unabhängige Punkte $\boldsymbol{a}_\alpha \in \boldsymbol{P}^n_K$,

$\alpha = 0, \dots, d$. Aus (64) folgt $n - d \geq 2(k - d)$; daher finden wir $2(k - d)$ unabhängige Punkte $\boldsymbol{a}_\nu = [\mathfrak{a}_\nu], \boldsymbol{a}'_\nu = [\mathfrak{a}'_\nu] \in \boldsymbol{P}^n_K$, $\nu = d+1, \dots, k$, derart, dass $\boldsymbol{a}_0, \dots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}'_{d+1}, \dots, \boldsymbol{a}'_k$ unabhängig sind. Wir wählen nun wieder ein $q \in L^*$ mit (57) und definieren $\mathfrak{b}_\nu, \nu = d+1, \dots, k$, durch (63). Setzen wir $\boldsymbol{b}_\nu := [\mathfrak{b}_\nu]$, so ist $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_0 \vee \dots \vee \boldsymbol{a}_d \vee \boldsymbol{b}_{d+1} \vee \dots \vee \boldsymbol{b}_k$ ein k-dimensionaler Unterraum von $\boldsymbol{P}^n_L$ mit $\mathrm{Dim}_K\, \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{P}^n_K = d$. □

Übung 14. Es sei L ein Schiefkörper und $K \subset Z(L)$ ein im Zentrum von L liegender Teilkörper; ferner sei $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ ein Wurf von $\boldsymbol{P}^1_L$. Man zeige: a) Es gibt genau dann eine K-Gerade $\boldsymbol{P}^1_K \subset \boldsymbol{P}^1_L$ mit $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{P}^1_K$, $i = 0, \dots, 3$, wenn das DV$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1; \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ zu $\hat{K}$ gehört. – b) Zu jedem Wurf $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$ von $\boldsymbol{P}^1_{\mathbf{H}}$ gibt es eine komplexe Gerade $\boldsymbol{P}^1_{\mathbf{C}} \subset \boldsymbol{P}^1_{\mathbf{H}}$ mit $\boldsymbol{x}_i \in \boldsymbol{P}^1_{\mathbf{C}}$, $i = 0, \dots, 3$.

1.10.7 Erweiterungen von Nullsystemen, polaren Abbildungen und Quadriken

Wir wollen nun untersuchen, welche Beziehungen zwischen den Nullsystemen, Polaritäten und Quadriken von $\boldsymbol{P}^n_K$ und der projektiven Erweiterung $\boldsymbol{P}^n_L$ bestehen. Dazu benötigen wir einige einfache Vorbereitungen. Jeder K-Struktur $\boldsymbol{W}_K$ des rechten L-Vektorraumes $\boldsymbol{V}^{n+1}$ entspricht eine eindeutig bestimmte K-Struktur des dualen Vektorraums $\boldsymbol{V}'$:

$$\boldsymbol{W}'_K := \{\mathfrak{u} \in \boldsymbol{V}' \,|\, \mathfrak{u}(\boldsymbol{W}_K) \subset K\}; \tag{66}$$

$\boldsymbol{W}'_K$ ist der durch lineare Fortsetzung der Linearformen von $\boldsymbol{W}_K$ auf $\boldsymbol{V}$ entstehende $(n+1)$-dimensionale K-Vektorraum von $\boldsymbol{V}'$; er wird im Folgenden, wie schon durch die Bezeichnung angedeutet, mit dem Dual von $\boldsymbol{W}_K$ identifiziert. Offenbar ist die zu einer K-Basis $(\mathfrak{a}_i)$ von $\boldsymbol{V}$ duale Basis eine K-Basis von $\boldsymbol{V}'$ in der dualen K-Struktur $\boldsymbol{W}'_K$. Die Elemente der entsprechenden projektiven Räume $\boldsymbol{P}'^n_L \supset \boldsymbol{P}'^n_K$ interpretieren wir wieder als Hyperebenen in $\boldsymbol{P}^n_L$ bzw. $\boldsymbol{P}^n_K$.

Übung 15. Es sei $\dim_K L = r < \infty$. Man zeige: Für jede Hyperebene $\boldsymbol{U} = [\mathfrak{u}] \in \boldsymbol{P}'^n_L$ ist $n - r \leq \mathrm{Dim}_K\, \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{P}^n_K \leq n - 1$; dabei gilt $\mathrm{Dim}_K\, \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{P}^n_K = n - 1$ genau dann, wenn $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{P}'^n_K$ ist.

Wir behandeln zuerst die Aufgabe, eine autokorrelative Abbildung F von $\boldsymbol{P}^n_K$ zu einer autokorrelativen Abbildung $\tilde{F}$ von $\boldsymbol{P}^n_L$ fortzusetzen. Nach Definition 7.2 wird F von einer α-linearen Abbildung $a : \boldsymbol{W}_K \to \boldsymbol{W}'_K$ erzeugt, wobei α ein Anti-Automorphismus von K ist. Mittels τ-linearer Ausdehnung zeigt man leicht:

Lemma 15. *Die autokorrelative Abbildung F von $\boldsymbol{P}^n_K$ werde durch die α-lineare Abbildung $a : \boldsymbol{W}_K \to \boldsymbol{W}'_K$ erzeugt. F besitzt eine Fortsetzung $\tilde{F}$ als autokorrelative Abbildung $\tilde{F}$ von $\boldsymbol{P}^n_L$ genau dann, wenn der Anti-Automorphiosmus α von K eine Ausdehnung zu einem Anti-Automorphismus τ von L besitzt. Zu jeder derartigen Fortsetzung τ existiert genau eine Fortsetzung $\tilde{F} = \tilde{F}_\tau$, welche durch die τ-lineare Ausdehnung $\tilde{a}$ von a erzeugt wird; bezüglich einer K-Basis $(\mathfrak{a}_i)$ von $\boldsymbol{V}$ gilt (Summenkonvention!)*

$$\tilde{a}(\mathfrak{a}_i x^i) = \tau(x^i) a(\mathfrak{a}_i). \ \square$$

Beispiel 8. Ist L kommutativ und F ein *Nullsystem* über dem projektiven Raum $\boldsymbol{P}_K^n$ mit dem Teilkörper K, das durch die alternierende Bilinearform $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{W}_K^{n+1}$, bestimmt wird, dann definiert die lineare Fortsetzung $b_L(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}_L^{n+1}$, ein Nullsystem gleichen Ranges über der projektiven Erweiterung $\boldsymbol{P}_L^n$. Die Matrix von b_L bezüglich einer K-Basis von $\boldsymbol{V}$ stimmt nämlich mit der Matrix von b bezüglich dieser Basis überein. Man vergleiche hierzu auch Übung II.7.9.10. □

Wir diskutieren nun die Fortsetzungen polarer Abbildungen anhand einer Reihe von Beispielen.

Beispiel 9. Es sei $K = \mathbf{R}$ und $L = \mathbf{C}$. Nach Übung I.2.1.3 ist $\alpha = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$, und es gibt zwei Fortsetzungen dieses Automorphismus auf $\mathbf{C}$: $\tau = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$ oder τ ist die Konjugation von $\mathbf{C}$. Im ersten Fall ergibt jede polare Abbildung $F_{r,l}$ vom Rang r und Index l eine polare Abbildung F_r vom Rang r von $\boldsymbol{P}_{\mathbf{C}}^n$, vgl. Satz 9.5. Ist umgekehrt $(\mathfrak{a}_j)$ eine Basis des komplexen Vektorraums $\boldsymbol{V}^{n+1}$, bezüglich der die autopolare Abbildung F_r Normalform hat, so hat die durch die Basis

$$\mathfrak{b}_\lambda = \mathfrak{a}_\lambda\, \mathrm{i},\ \lambda = 0, \ldots, l-1,\ \mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{a}_\nu,\ \nu = l, \ldots, n,$$

bestimmte $\mathbf{R}$-Struktur $\boldsymbol{P}_{\mathbf{R}}^n \subset \boldsymbol{P}_{\mathbf{C}}^n$ die Eigenschaft, dass $F_r|\boldsymbol{P}_{\mathbf{R}}^n$ den Rang r und den Index l hat und sich durch F_r auf $\boldsymbol{P}_{\mathbf{C}}^n$ fortsetzt. Ist dagegen τ die Konjugation, so ergibt die Fortsetzung einer Abbildung vom Typ $F_{r,l}$ eine ebenso bezeichnete Abbildung von $\boldsymbol{P}_{\mathbf{C}}^n$, welche durch eine hermitesche Form bestimmt wird, vgl. Satz 9.7. □

Beispiel 10. Für $K = \mathbf{R}$ und $L = \mathbf{H}$ ergibt die Fortsetzung von $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ zur Konjugation τ aus $F_{r,l}$ wieder die ebenso bezeichneten Abbildungen aus Satz 9.7. Andererseits können wir wegen (9.19) den identischen Isomorphismus $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ auch durch den Anti-Automorphismus τ_{i} (vgl. (9.17) mit $q = \mathrm{i}$) auf $\mathbf{H}$ fortsetzen. Man zeigt leicht, dass sich eine polare Abbildung $F_{r,l}$ von $\boldsymbol{P}_{\mathbf{R}}^n$ dann zu einer Abbildung vom Typ J_r, vgl. Satz 9.14, von $\boldsymbol{P}_{\mathbf{H}}^n$ fortsetzt. □

Beispiel 11. Wir betrachten nun die Einbettung $\mathbf{C} \subset \mathbf{H}$. Ist $\alpha = \mathrm{id}_{\mathbf{C}}$, so existieren nach Satz 9.5 nur die autopolaren Abbildungen vom Typ F_r. Man erkennt leicht, dass der Anti-Automorphismus τ_{j} (nach (9.17) mit $q = \mathrm{j}$) α auf $\mathbf{H}$ fortsetzt; die Fortsetzung von F_r führt dabei auf eine polare Abbildung vom Typ J_r. Ist dagegen α die Konjugation von $\mathbf{C}$, so existieren zwei Fortsetzungen zu Anti-Automorphismen, nämlich die Konjugation τ von $\mathbf{H}$ und die schon in Beispiel 10 betrachtete Abbildung τ_{i}; erstere führt von einer polaren Abbildung $F_{r,l}$ von $\boldsymbol{P}_{\mathbf{C}}^n$ auf die ebenso bezeichnete von $\boldsymbol{P}_{\mathbf{H}}^n$, und letztere wieder auf eine Abbildung vom Typ J_r. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Einschränkung einer autopolaren Abbildung F von $\boldsymbol{P}_L^n$ auf eine gegebene K-Struktur $\boldsymbol{P}_K^n \subset \boldsymbol{P}_L^n$ nicht durch eine polare Abbildung von $\boldsymbol{P}_K^n$ beschrieben werden kann.

Beispiel 12. Es sei L eine Körpererweiterung vom Range s von K; $c_1, \ldots, c_s$ sei eine Basis von L über K und $\operatorname{char} K \neq 2$. Wir betrachten eine durch eine symmetrische

Bilinearform $b : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to L$ bestimmte polare Abbildung von $\boldsymbol{P}_L^n$. Ist $\boldsymbol{W}_K^{n+1} \subset \boldsymbol{V}^{n+1}$ der die K-Struktur bestimmende K-Unterraum, so zerlegen wir $b|\boldsymbol{W}_K \times \boldsymbol{W}_K$ nach

$$b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{\nu=1}^{s} c_\nu b^\nu(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \ \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{W}_K^{n+1}.$$

Dann sind die b^ν symmetrische Bilinearformen über $\boldsymbol{W}_K$, welche im allgemeinen voneinander unabhängig und ungleich Null sind; sie definieren s simultan zu betrachtende polare Abbildungen von $\boldsymbol{P}_K^n$. Die Behandlung der K-Geometrie der polaren Abbildungen, und damit auch der Quadriken, von $\boldsymbol{P}_L^n$ dürfte also im allgemeinen recht aufwändig werden. □

Übung 16. Wir betrachten eine $\mathbf{R}$-Struktur $\boldsymbol{P}_\mathbf{R}^n \subset \boldsymbol{P}_\mathbf{C}^n$. Es sei F eine polare Abbildung von $\boldsymbol{P}_\mathbf{C}^n$ vom Typ $F_{r,l}$, die durch die hermitesche Form b über dem komplexen Vektorraum $\boldsymbol{V}^{n+1}$ bestimmt werde. Man zeige: Es gilt

$$b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \alpha(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \mathrm{i}\,\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \ \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{W}_\mathbf{R}^{n+1}, \tag{67}$$

wobei $\alpha(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eine symmetrische und $\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ eine alternierende reelle Bilinearform auf $\boldsymbol{W}_\mathbf{R}^{n+1}$ ist. Sind umgekehrt α und β auf $\boldsymbol{W}_\mathbf{R}^{n+1}$ als symmetrische bzw. alternierende Bilinearformen gegeben, so gibt es eine eindeutig bestimmte Fortsetzung der durch (67) definierten Form b als hermitesche Form über$\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}$, die somit eine polare Abbildung von $\boldsymbol{P}_\mathbf{C}^n$ von einem gewissen Typ $F_{r,l}$ (vgl. Satz 9.7) bestimmt. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Invarianten von b, α und β?

Übung 17. Es sei wieder eine $\mathbf{R}$-Struktur $\boldsymbol{P}_\mathbf{R}^n \subset \boldsymbol{P}_\mathbf{C}^n$ gegeben. Die polare Abbildung F von $\boldsymbol{P}_\mathbf{C}^n$ sei nun durch die symmetrische Bilinearform b definiert, welche auf der $\mathbf{R}$-Struktur die Zerlegung (67) habe. Man zeige: Die komplexe Quadrik Q_F schneidet die $\mathbf{R}$-Struktur im Durchschnitt zweier Quadriken:

$$Q_F \cap \boldsymbol{P}_\mathbf{R}^n = Q_\alpha \cap Q_\beta, \tag{68}$$

wobei alle denkbaren Durchschnitte reeller Quadriken auftreten können. Unter welchen Bedingungen ist der Durchschnitt selbst eine Quadrik?

Kapitel 2

Cayley-Kleinsche Geometrien

Nach F. Klein's Erlanger Programm [51], das wir schon In § I.6.5 geschildert haben, hängen Geometrie und Theorie der Transformationsgruppen eng zusammen. Die größten Gruppen, von denen wir in diesem Kapitel ausgehen, sind die linearen Gruppen $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1})$ endlich-dimensionaler Vektorräume über einem Schiefkörper K und die ihnen zugeordneten projektiven Gruppen $\boldsymbol{PL}(\boldsymbol{P}^n)$, die schon in Kapitel 1 definiert wurden; wir fassen ihre Eigenschaften in den für die Anwendungen wichtigsten Fällen $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ im nächsten Abschnitt systematisch zusammen und bringen noch einige Ergänzungen. Zeichnet man nun in einer von diesen Gruppen bestimmten projektiven Geometrie ein Objekt F als *Absolut* aus, so bestimmt die Untergruppe G_F derjenigen projektiven Transformationen, die F fest lassen, also die *Isotropiegruppe von* F (vgl. § I.1.4), eine feinere als die projektive Geometrie, deren Inhalt diejenigen Eigenschaften ausmachen, die bei Einschränkung der projektiven Wirkung auf die Untergruppe G_F invariant bleiben. Da diese Gruppe eine Untergruppe der projektiven Gruppe ist, sind das mehr als die projektiven Eigenschaften; man spricht daher auch von einer *Obergeometrie* der projektiven Geometrie, vgl. O. Giering [35]. Von A. Cayley [26], [27] und F. Klein [46], [47], siehe auch [48], Bd. 1, wurden diese Geometrien besonders für den Fall betrachtet, dass F eine Polarität einer reellen projektiven Geometrie ist und invariante Metriken existieren; in diesen Fällen spricht man von *Cayley-Kleinschen Räumen, Geometrien und Metriken.* Wir wollen diese Begriffe, deren Umfang in der Literatur nicht einheitlich festgelegt ist, nicht weiter präzisieren. In dem schon erwähnten Buch von O. Giering [35] findet man einen derartigen Ansatz. Die vielfach zitierten Vorlesungen von Felix Klein [49], [50] enthalten detaillierte Darstellungen dieser Geometrien als Anwendung seines Erlanger Programms.

2.1 Die klassischen Gruppen

Die Bezeichnung *‚Klassische Gruppen'* ist wohl eher eine historisch-literarische Beschreibung einer Klasse von linearen Gruppen oder Matrizengruppen, die nicht nur in der Geometrie, sondern auch in vielen mathematischen Disziplinen von der Algebra über Zahlentheorie und Analysis bis zur theoretischen Physik eine fundamentale Rolle spielen. Obwohl dieser Begriff in den Titeln von zwei zeitlich weit auseinander liegenden Monographien auftritt, zuerst wohl im Jahr 1939 in H. Weyl's grundlegendem Buch [80] und dann

1971 in J. Dieudonné's Ergebnisbericht [31], findet man in diesen Büchern keine Definition der klassischen Gruppen. Da wir uns im Folgenden mit den Gruppen beschäftigen, die in diesen Werken auftreten, benutzen wir denselben Terminus in demselben etwas unscharfen Sinn. Im Abschnitt 2.1 beschreiben wir diese ‚klassischen' Gruppen, deren Geometrien in den darauf folgenden Abschnitten untersucht werden. [1] Speziell gehören die für die Cayley-Kleinschen Geometrien grundlegenden Gruppen zu den klassischen.

2.1.1 Die linearen und die projektiven Gruppen

Die linearen und die von ihnen abgeleiteten projektiven Gruppen wollen wir ebenfalls als *‚klassisch'* bezeichnen, obwohl sie in der Regel nicht einfache Liesche Gruppen sind. Sie wurden bereits im ersten Kapitel eingeführt, weil sie die Automorphismengruppen der projektiven Geometrie bestimmen. Die weiter unten betrachteten klassischen Gruppen sind in der Regel Untergruppen der linearen oder der projektiven Gruppen.

Wie bisher bezeichnen wir die Gruppe der linearen Automorphismen eines n-dimensionalen Vektorraums $\boldsymbol{V}^n$ über dem Schiefkörper K mit $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n)$. Sie ist zur Gruppe der invertierbaren quadratischen Matrizen der Ordnung n isomorph:

$$\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n) \cong \boldsymbol{GL}(n, K). \tag{1}$$

Ist K ein Körper, so besteht $\boldsymbol{GL}(n, K) \subset \boldsymbol{M}_n(K)$ aus den Matrizen, deren Determinante ungleich Null ist, vgl. Folgerung I.5.4.7. Für lineare Endomorphismen a des Vektorraums $\boldsymbol{V}^n$ hängt die Determinante der Matrix (a^i_j) von a nicht von der Wahl der Basis ab; sie wird die *Norm* $N(a)$ des Endomorphismus genannt, vgl. Satz I.5.7.2, Definition I.5.7.2. Auf der Grundlage einer von J. Dieudonné [30] gefundenen Verallgemeinerung der Determinanten auf Matrizen über Schiefkörpern gelingt eine ähnliche Charakterisierung auch in diesem Fall, vgl. dazu E. Artin [3], § IV.1. Weil wir hier als einzigen nicht kommutativen Schiefkörper den der Quaternionen betrachten, genügt für uns die in Übung 1.10.6 enthaltene Normdefinition. Mit dem Norm–Homomorphismus

$$a \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n) \longmapsto N(a) \in K^* \ (K \text{ Körper oder } K = \mathbf{H}) \tag{2}$$

ist der Kern $\operatorname{Ker} N$ gerade die *spezielle lineare Gruppe*

$$\boldsymbol{SL}(n, K) \cong \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{V}^n) := \{a \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n) | N(a) = 1\}, \tag{3}$$

die ebenfalls als klassisch angesehen werden soll. Das gleiche gilt für die *projektiven Gruppen*

$$\boldsymbol{PL}_n \cong \boldsymbol{GL}(n+1, K)/Z_{n+1},$$

wobei

$$Z_{n+1} := \{(\delta^i_j)k | k \in Z(K^*)\} \tag{4}$$

[1] Nach der auf E. Cartan zurückgehenden Klassifikation der halbeinfachen Lie Algebren gibt es vier unendliche Serien einfacher Liescher Algebren und fünf Typen von sog. Ausnahmealgebren, vgl. J. Tits [78]; man ist versucht, unter den klassischen Gruppen diejenigen (linearen) Gruppen zu verstehen, deren Lie Algebren zu den unendlichen Serien gehören. Wie schon im Vorwort bemerkt, werden die endlich vielen einfachen Ausnahmegruppen und ihre Geometrien in diesem Buch nicht behandelt; ihre Lie Algebren sind die Ausnahmealgebren. Sie finden in der Oktavengeometrie, vgl. H. Freudenthal [33] ihre geometrische Deutung.

das Zentrum von $\boldsymbol{GL}(n+1,K)$ bezeichnet, vgl. Übung II.7.4.7 und Definition 1.4.3. Für die Körper $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ haben wir bereits in Beispiel 1.4.5 den Zusammenhang der projektiven mit den speziell linearen Gruppen beschrieben; mit den dort eingeführten Bezeichnungen gelten

$$\boldsymbol{PL}_n(\mathbf{R}) \cong \boldsymbol{SL}(n+1,\mathbf{R}),\ n = 2k, \tag{5}$$
$$\boldsymbol{PL}_n(\mathbf{R}) \cong |\boldsymbol{SL}|(n+1,\mathbf{R})/\{\pm I_{n+1}\},\ n = 2k+1, \tag{6}$$
$$\boldsymbol{PL}_n(\mathbf{C}) \cong \boldsymbol{SL}(n+1,\mathbf{C})/K_{n+1}, \tag{7}$$

wobei

$$K_{n+1} = \{(\delta^i_j)k | k = e^{2\pi \mathrm{i}\, l/n+1},\ l = 0,\dots,n\}$$

die Gruppe der $(n+1)$-sten Einheitswurzeln bezeichnet. Im Fall der Quaternionen erhalten wir leicht eine ähnliche Darstellung: Nach Übung 1.10.6 ist für jedes $g \in \boldsymbol{GL}(n,\mathbf{H})$ die Norm $N(g)$ positiv. Daher können wir g eindeutig in der Form

$$g = g_o\rho,\ N(g_o) = 1,\ \rho > 0,\ N(g) = \rho^{2n},$$

darstellen. Hieraus folgt

$$\boldsymbol{PL}_n(\mathbf{H}) \cong \boldsymbol{SL}(n+1,\mathbf{H})/\{\pm I_{n+1}\}. \tag{8}$$

Übung 1. Man zeige, dass die Normalteiler in den Nennern von (6) – (8) gerade die Zentren der Zähler sind.

Übung 2. Es bezeichne $\boldsymbol{V}_{|\mathbf{C}}$ die komplexe Einschränkung des rechten quaternionischen Vektorraums $\boldsymbol{V}^n$. Man zeige, dass die Gruppe $\boldsymbol{SL}(n,\mathbf{H})$ zu der Untergruppe derjenigen linearen Abbildungen $g \in \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{V}_{|\mathbf{C}})$ isomorph ist, die mit der quaternionischen Struktur J von $\boldsymbol{V}_{|\mathbf{C}}$ kommutieren (vgl. Übung 1.10.5). Ferner gebe man natürliche Einbettungen von $\boldsymbol{SL}(n,\mathbf{C})$ und $\boldsymbol{SL}(n,\mathbf{R})$ in $\boldsymbol{SL}(n,\mathbf{H})$ an, so dass sich bei entsprechenden Identifizierungen die Folge

$$\boldsymbol{SL}(n,\mathbf{R}) \subset \boldsymbol{SL}(n,\mathbf{C}) \subset \boldsymbol{SL}(n,\mathbf{H}) \subset \boldsymbol{SL}(2n,\mathbf{C})$$

von Untergruppen ergibt.

Bemerkung. Die zur Gruppe $\boldsymbol{SL}(n,\mathbf{H})$ isomorphe Untergruppe von $\boldsymbol{SL}(2n,\mathbf{C})$ wird oft mit $\boldsymbol{SU}^*(2n)$ bezeichnet, vgl. S. Helgason [38], S. 445.

2.1.2 Die projektive Isotropiegruppe einer Korrelation

Das Schema zur Definition der übrigen klassischen Gruppen sieht nun folgendermaßen aus: Man zeichnet in der projektiven Geometrie $\mathfrak{P}^n$ eine symmetrische Korrelation F, also ein nicht ausgeartetes Nullsystem oder eine Polarität, aus, welche die *absolute Korrelation* genannt wird; ihre Isotropiegruppe unter der Wirkung der projektiven Gruppe $\boldsymbol{PL}_n$

$$\boldsymbol{PG}_n(F) := \{g \in \boldsymbol{PL}_n | g \circ F \circ g^{-1} = F\}, \tag{9}$$

vgl. Definition 1.8.2, heißt die *projektive Gruppe der Korrelation* F. Es sei nun $b = b_F$ eine die Korrelation F bestimmende σ-Biform. Nach Satz 1.7.6 ist sie bis auf einen

Proportionalitätsfaktor $\kappa \in K^*$ eindeutig bestimmt und nach Folgerung 1.8.3 nicht ausgeartet. Ihre Isotropiegruppe unter der Wirkung (I.5.9.44) der linearen Gruppe $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V})$ bezeichnen wir mit $\boldsymbol{UG}_m(b)$, $m = \dim \boldsymbol{V}$; es gilt also

$$g \in \boldsymbol{UG}_m(b) \longleftrightarrow g \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^m) \text{ und } b(g\mathfrak{x}, g\mathfrak{y}) = b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \text{ für alle } \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}^m. \tag{10}$$

Aus den Überlegungen im Abschnitt 1.8, vgl. (1.8.12), folgt

Lemma 1. *Es sei b eine die absolute Korrelation F bestimmende σ-Biform und $g \in \boldsymbol{PL}_n$ eine durch die lineare Transformation $a \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1})$ erzeugte Projektivität. Dann ist $g \in \boldsymbol{PG}_n(F)$ genau dann, wenn*

$$b(a\mathfrak{x}, a\mathfrak{y}) = \kappa(a) b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \text{ für alle } \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}^{n+1} \tag{11}$$

gilt; hier ist $\kappa(a) \in Z(K)^*$ ein nur von a abhängender Skalar, der $\sigma(\kappa(a)) = \kappa(a)$ erfüllt. Bezeichnet $p : \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1}) \longrightarrow \boldsymbol{PL}_n$ die kanonische Abbildung, so gilt speziell

$$p(\boldsymbol{UG}_{n+1}(b)) \subset \boldsymbol{PG}_n(F). \tag{12}$$

Beweis. Aus (1.8.12) folgt unmittelbar die Behauptung (11) mit $\kappa(a) \in K^*$. Da b nicht ausgeartet ist, findet man $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}^{n+1}$ mit $b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 1$. Nach (11) gilt für beliebiges $\lambda \in K$

$$\begin{aligned} b(a\mathfrak{x}\lambda, a\mathfrak{y}) &= \kappa(a) b(\mathfrak{x}\lambda, \mathfrak{y}) = \kappa(a)\sigma(\lambda) \\ &= \sigma(\lambda) b(a\mathfrak{x}, a\mathfrak{y}) = \sigma(\lambda)\kappa(a) b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sigma(\lambda)\kappa(a). \end{aligned}$$

Weil σ surjektiv ist, liegt $\kappa(a)$ im Zentrum von K. Ähnlich beweist man

$$\begin{aligned} b(a\mathfrak{y}, a\mathfrak{x}) &= \kappa(a) b(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \kappa(a) \\ &= \sigma(b(a\mathfrak{x}, a\mathfrak{y})) = \sigma(\kappa(a)). \ \square \end{aligned}$$

Die Menge der $a \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{n+1})$, die (11) erfüllen, ist offenbar eine Untergruppe; sie heißt die *konforme Gruppe der Biform* b und wird mit $\boldsymbol{CUG}_{n+1}(b)$ bezeichnet. Setzt man in (11) $a = a_2 \circ a_1$ ein, so ergibt sich

Folgerung 2. *Die Abbildung $\kappa : \boldsymbol{CUG}_{n+1}(b) \to Z(K)^*$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Ist K ein Körper, so gilt*

$$\kappa(a)^{n+1} = \sigma(N(a)) N(a). \tag{13}$$

Beweis. Geht man in (11) nach Einführung einer Basis zu der entsprechenden Matrizengleichung über, vgl. (1.8.13):

$$(\sigma(a_i^k))(b_{kl})(a_j^l) = \kappa(a)(b_{ij}) \tag{14}$$

und bildet davon die Determinante, so folgt aus $N(a) = \det(a_{ij})$, (a_{ij}) die Matrix von a, die Formel (13). $\square$

Die Beschreibung der eng miteinander zusammenhängenden Gruppen $\boldsymbol{PG}_n(F)$, $\boldsymbol{UG}_{n+1}(b)$, $\boldsymbol{CUG}_{n+1}(b)$ hängt von der Möglichkeit ab, die Biformen über dem Schiefkörper K zu klassifizieren. Für $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ wurde diese Aufgabe im Abschnitt 1.9 für die Polaritäten und (bei beliebigem K) im Abschnitt 1.8 für die Nullsysteme erledigt. Wir beschränken uns im folgenden auf diese wichtigen Fälle und verweisen für die allgemeine Theorie auf J. Dieudonné [31].

2.1.3 Die symplektischen Gruppen

Es sei $F : \mathfrak{P}^{2n-1} \to \mathfrak{P}^{2n-1}$ ein nicht ausgeartetes Nullsystem und $b : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to K$ eine F bestimmende Biform. Nach Satz 1.8.5 muss dann K ein Körper, b bilinear und alternierend und $\dim \boldsymbol{V} = 2n$ gerade sein; bei gegebenem K und n sind alle derartigen Nullsysteme F äquivalent. Durch geeignete Wahl der Basis können wir erreichen, dass die Matrix von b die Gestalt (I.5.9.82) mit $r = n$ hat. Oft wird eine etwas andere Normalform bevorzugt: führen wir die Koordinatentransformation

$$\hat{x}^i = x^{2i-1},\ \hat{x}^{n+i} = x^{2i},\ i = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

aus, so hat die Matrix von b in den neuen Koordinaten die Gestalt

$$(b_{lk}) = J_n := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Ein Vektorraum $\boldsymbol{V}^{2n}$, in dem eine nicht ausgeartete, alternierende Bilinearform b ausgezeichnet ist, wird *symplektisch* genannt. Die Basen (oder Koordinaten) in denen b die Normalform (16) hat, heißen *symplektisch* . Ist (ω^a) eine *symplektische Kobasis*, das ist die zu einer symplektischen Basis duale, so hat die alternierende 2-Form b in ihr die Gestalt

$$b = \omega^1 \wedge \omega^{n+1} + \omega^2 \wedge \omega^{n+2} + \ldots + \omega^n \wedge \omega^{2n}, \tag{17}$$

und umgekehrt (vgl. Beispiel II.8.3.2).

Die Transformationen $a \in \boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{V}^{2n}) := \boldsymbol{UG}_{2n}(b)$ heißen *symplektisch*, die Gruppe $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{V}^{2n})$ wird *symplektische Gruppe* genannt. Aus (13) folgt wegen $\kappa(a) = 1$ für Elemente $a \in \boldsymbol{UG}_m(b)$:

$$\sigma(N(a))N(a) = 1 \qquad (a \in \boldsymbol{UG}_m(b),\ K \text{ Körper;}) \tag{18}$$

für bilineare b und $a \in \boldsymbol{UG}_m(b)$ gilt also stets $N(a)^2 = 1$. Symplektische Transformationen erfüllen genauer

$$N(a) = 1 \qquad (a \in \boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{V}^{2n})). \tag{19}$$

Übung 3. Man beweise (19) unter der Voraussetzung $\operatorname{char} K > n$. Hinweis. Man betrachte die alternierende $2n$-Form $b^n := \bigwedge_1^n b$. Ohne die genannte Voraussetzung gilt (19) auch; der Beweis ist jedoch schwieriger, vgl. E. Artin [3], Satz 3.25.

Übung 4. Es sei $[\boldsymbol{V}^{2n}, b]$ ein symplektischer Vektorraum. Man zeige: eine Transformation $g \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^{2n})$ ist symplektisch genau dann, wenn ihre Matrix bezüglich einer symplektischen Basis die Blockstruktur

$$(a^i_j) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ mit } A, B, C, D \in \boldsymbol{M}_n(K),$$

$$A'C = C'A,\ B'D = D'B,\ A'D - C'B = I_n \tag{20}$$

besitzt; Diese Matrizen heißen *symplektisch.* Ihre Gesamtheit bildet eine zu $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{V}^{2n})$ isomorphe Untergruppe von $\boldsymbol{GL}(2n, K)$, die mit $\boldsymbol{Sp}(n, K)$ bezeichnet und ebenfalls *symplektische Gruppe* genannt wird.

Der zu einem symplektischen Vektorraum gehörende projektive Raum $\boldsymbol{P}^{2n-1} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}^{2n})$, in dem also das durch die alternierende Biform b bestimmte Nullsystem F ausgezeichnet ist, heißt *projektiv-symplektisch*, die F invariant lassenden Projektivitäten bilden die *projektiv-symplektische Gruppe* $\boldsymbol{PSp}_n := \boldsymbol{PG}_{2n-1}(F)$. Wir betrachten nun die Fälle $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ gesondert.

Beispiel 1. Es sei $\boldsymbol{P}^{2n-1}$ ein reeller, projektiv-symplektischer Raum. Wegen (6) erhalten wir bereits alle Projektivitäten, wenn wir uns auf die Transformationen a mit $N(a)^2 = 1$ einschränken, woraus nach (13) $\kappa(a)^{2n} = 1$ folgt. Die Abbildung s_o mit der Koordinatendarstellung

$$s_o:\ y^i = x^{n+i},\ y^{n+i} = x^i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{21}$$

erfüllt $\kappa(s_o) = -1$, und weil nach Folgerung 2 auch $\kappa : |\boldsymbol{SL}|(2n, \mathbf{R}) \longrightarrow \{\pm 1\}$ ein Homomorphismus ist, erhalten wir

$$\boldsymbol{PSp}_n(\mathbf{R}) \cong p(\boldsymbol{Sp}(n, \mathbf{R})) \cup p(s_o(\boldsymbol{Sp}(n, \mathbf{R})). \tag{22}$$

Jede reelle symplektische Transformation lässt sich durch eine symplektische Transformation $a \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}^{2n})$ oder durch eine Transformation der Gestalt $s_0 \circ a$, $a \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}^{2n})$, beschreiben. Da nur die Dilatationen zu $\operatorname{Ker} p$ gehören, folgt aus dem Homomorphiesatz

$$\boldsymbol{PSp}_n(\mathbf{R}) \cong (\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{V}^{2n}) \cup s_o(\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{V}^{2n}))/\{\pm I_{2n}\}.$$

□

Beispiel 2. Wir betrachten nun den komplexen projektiv-symplektischen Raum $\boldsymbol{P}^{2n-1} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}^{2n})$. Da für jede Dilatation d_μ, $\mu \in \mathbf{C}^*$, nach (11) $\kappa(d_\mu) = \mu^2$ gilt, können wir stets annehmen, dass die symplektische Projektivität $g = p(a) \in \boldsymbol{PSp}_n$ durch eine symplektische Transformation $a \in \boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{V}^{2n})$ erzeugt wird; es ist ja $p(a) = p(a \circ d_\mu)$ und

$$\kappa(a \circ d_\mu) = \kappa(a)\mu^2 = 1$$

stets lösbar. Somit gilt

$$\boldsymbol{PSp}_n(\mathbf{C}) = p(\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{V}^{2n})) \cong \boldsymbol{Sp}(n, \mathbf{C})/\{\pm I_{2n}\},$$

da nur die Elemente $\pm I_{2n}$ zu $\boldsymbol{Sp}(n, \mathbf{C}) \cap K_{2n}$ gehören (vgl. (7)). □

2.1.4 Orthogonale Gruppen

Wir wenden uns nun den Polaritäten F zu. Für $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ wurden sie im Abschnitt 1.9 klassifiziert. Die Ergebnisse dieser Klassifikation sind in Tabelle 2.1 am Ende des vorliegenden Abschnittes zusammengefasst. Wir diskutieren die einzelnen Fälle.

Beispiel 3. Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein reeller Vektorraum und b eine darauf ausgezeichnete symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform vom Index l. Dann nennt man $[\boldsymbol{V}^n, b]$ einen *pseudo-euklidischen Vektorraum* und die Isotropiegruppe die *pseudo-orthogonale Gruppe* $\boldsymbol{O}(l, n-l) := \boldsymbol{UG}_n(b)$. Da mit b auch $-b$ invariant ist, gilt

$$\boldsymbol{O}(l, n-l) = \boldsymbol{O}(n-l, l),$$

und wir können $0 \leq l \leq n/2$ voraussetzen. Offenbar ergibt $l = 0$ den *euklidischen Vektorraum* und die *orthogonale Gruppe* $\boldsymbol{O}(n) = \boldsymbol{O}(0, n)$ (vgl. Folgerung I.6.2.4). Für die Relativitätstheorie ist der *Minkowski-Raum* von grundlegender Bedeutung; das ist der vierdimensionale pseudo-euklidische Vektorraum vom Index 1. Die zugehörige Gruppe $\boldsymbol{O}(1, 3)$ wird die *Lorentz-Gruppe* genannt. Nach (18) gilt wegen $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$

$$N^2(a) = 1 \qquad (a \in \boldsymbol{O}(l, n-l)). \tag{23}$$

Um die Isotropiegruppe $\boldsymbol{PO}(l, n-l) := \boldsymbol{PG}_{n-1}(F_{n,l})$ der entsprechenden Polarität $F_{n,l}$ zu bestimmen können wir wegen (5) und (6) wieder von den linearen Transformationen a mit $N^2(a) = 1$ ausgehen; nach (13) ist für diese Transformationen $\kappa(a)^n = 1$. Gilt $n \neq n - l$, d.h. $l \neq n/2$, so muss nach dem Trägheitssatz I.5.9.6 sogar $\kappa(a) = 1$ sein, und es ist

$$\boldsymbol{PO}(l, n-l) = p(\boldsymbol{O}(l, n-l)) \cong \boldsymbol{O}(l, n-l)/\{\pm I_n\} \qquad (l \neq n/2). \tag{24}$$

Betrachten wir nun den Fall $\boldsymbol{O}(n, n)$, d.h. $F_{2n,n}$, und führen Koordinaten ein, in denen b Normalform hat, so erkennen wir, dass die Abbildung s_o nach (21) wieder den Faktor $\kappa(s_o) = -1$ hat. Hieraus folgt wie bei der symplektischen Gruppe

$$\begin{aligned} \boldsymbol{PO}(n, n) &= p(\boldsymbol{O}(n, n) \cup s_o(\boldsymbol{O}(n, n))) \text{ und} \\ \boldsymbol{PO}(n, n) &\cong (\boldsymbol{O}(n, n) \cup s_o(\boldsymbol{O}(n, n)))/\{\pm I_{2n}\}. \end{aligned} \tag{25}$$

□

Beispiel 4. Analog zu Beispiel 3 wird der *komplex-euklidische Vektorraum* $[\boldsymbol{V}^n, b]$ definiert; hier sei b eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform. Ihre Isotropiegruppe wird mit $\boldsymbol{O}(n, \mathbf{C}) := \boldsymbol{UG}_n(b)$ bezeichnet und *komplex-orthogonale Gruppe* genannt. Wie in den Beispielen 2, 3 folgt für die Isotropiegruppe der Polarität $\boldsymbol{PO}(n, \mathbf{C}) := \boldsymbol{PG}_{n-1}(F_n)$:

$$\boldsymbol{PO}(n, \mathbf{C}) \cong \boldsymbol{O}(n, \mathbf{C})/\{\pm I_n\}.$$

□

Nach Satz I.5.9.6 und Folgerung I.5.9.3 können wir für nicht ausgeartete symmetrische Bilinearformen b und $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ stets Basen $(\mathfrak{e}_i)$ von $\boldsymbol{V}^n$ finden, für die die *Orthogonalitätsrelationen*

$$b(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j) = \delta_{ij}\epsilon_i, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

gelten; hier ist $\epsilon_i = -1$ für $K = \mathbf{R}$ und $i = 1, \ldots, l$, und $\epsilon_i = 1$ sonst. Derartige Basen heißen *pseudo-orthonormiert* bzw. *orthonormiert*, wenn $l = 0$ oder $K = \mathbf{C}$ ist. Eine lineare Transformation a gehört zur Isotropiegruppe $\boldsymbol{UG}_n(b)$, wenn ihre Matrix (a_i^k) bezüglich einer pseudo-orthonormierten Basis *pseudo-orthogonal* ist, d.h. die *Orthogonalitätsrelationen*

$$\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k a_i^k a_j^k = \epsilon_i \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{26}$$

erfüllt. Die zu den Isotropiegruppen isomorphen Gruppen pseudo-orthogonaler Matrizen werden ebenso wie diese bezeichnet. Aus (13) folgt für pseudo-orthogonale Matrizen wieder $\det^2(a_i^k) = 1$. die Untergruppen derjenigen Matrizen (bzw. linearen Transformationen), deren Determinante (bzw. Norm) gleich 1 ist, werden *spezielle pseudo-orthogonale*

Gruppen genannt und mit $\boldsymbol{SO}(l,n-l)$ bezeichnet. Im Falle $l=0$ und $K=\mathbf{R}$ spricht man von der *speziellen orthogonalen Gruppe* $\boldsymbol{SO}(n)$ bzw. von der *speziellen komplex-orthogonalen Gruppe* $\boldsymbol{SO}(n,\mathbf{C})$.

2.1.5 Unitäre Gruppen

Es sei nun $K=\mathbf{C}$ oder $K=\mathbf{H}$, und b eine nicht ausgeartete hermitesche Form vom Index l, vgl. Lemma 1.9.8. Ihre Isotropiegruppen werden *pseudo-unitär* genannt, oder *unitär*, wenn $l=0$ ist. Sie werden im Fall $K=\mathbf{C}$ mit $\boldsymbol{U}(l,n-l)$, $\boldsymbol{U}(n):=\boldsymbol{U}(0,n)$ und im Fall $K=\mathbf{H}$ mit $\boldsymbol{Sp}(l,n-l)$, $\boldsymbol{Sp}(n):=\boldsymbol{Sp}(0,n)$ bezeichnet. Wie in Beispiel 3 kann $0\leq l\leq n/2$ angenommen werden. Der oben definierte Begriff einer pseudo-orthonormierten Basis bleibt auch für pseudo-unitäre Gruppen gültig. Die Matrizen pseudo-unitärer Transformationen bezüglich dieser Basen werden ebenfalls pseudo-unitär genannt. Sie werden durch die zu (26) analogen *Orthogonalitätsrelationen* charakterisiert:

$$\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k\bar{a}_i^k a_j^k=\epsilon_i\delta_{ij},\qquad i,j=1,\ldots,n, \tag{27}$$

Für $K=\mathbf{C}$ erhält man durch Übergang zur Determinante oder nach (13)

$$|N(a)|=|\det(a_j^i)|=1. \tag{28}$$

Man beachte, dass zum Beispiel $a=\mathrm{id}_{\boldsymbol{V}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ stets pseudo-unitär ist, während doch im allgemeinen $N(a)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\varphi}\neq 1$ gilt. Den Kern des Normhomomorphismus ($K=\mathbf{C}$)

$$N: a\in\boldsymbol{U}(l,n-l)\longmapsto N(a)\in S^1=\{z\in\mathbf{C}|\ |z|=1\}$$

nennt man die *spezielle pseudo-unitäre Gruppe*

$$\boldsymbol{SU}(l,n-l):=\{a\in\boldsymbol{U}(l,n-l)|\ N(a)=1\} \tag{29}$$

und definiert die *spezielle unitäre Gruppe* durch $\boldsymbol{SU}(n):=\boldsymbol{SU}(0,n)$ (vgl. (I.6.2.33)).

Für die *quaternionischen pseudo-unitären Gruppen* $\boldsymbol{Sp}(l,n-l)$ beweisen wir den folgenden Satz, der eine komplexe Realisierung dieser Gruppen enthält:

Satz 3. *Es sei $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^n$ ein n-dimensionaler, rechter Vektorraum über $\mathbf{H}$ und b eine nicht ausgeartete, τ-hermitesche Biform vom Index l über $\boldsymbol{V}$, $\tau(q)=\bar{q}$ die Konjugation in $\mathbf{H}$ (vgl. Satz 1.9.7). Weiter bezeichne $\boldsymbol{V}_{|\mathbf{C}}$ die komplexe Einschränkung von $\boldsymbol{V}$. Wir zerlegen $b(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ in seine beiden komplexen Komponenten nach*

$$b(\mathfrak{x},\mathfrak{y})=\alpha(\mathfrak{x},\mathfrak{y})+\mathrm{j}\,\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\qquad(\mathfrak{x},\mathfrak{y}\in\boldsymbol{V}), \tag{30}$$

$\alpha(\mathfrak{x},\mathfrak{y}),\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\in\mathbf{C}$. Dann gelten:
1) α ist nicht ausgeartet und hermitesch vom Index $2l$ über $\boldsymbol{V}_{|\mathbf{C}}$;
2) β ist eine nicht ausgeartete, alternierende Bilinearform über $\boldsymbol{V}_{|\mathbf{C}}$;
3) die Gruppe $\boldsymbol{Sp}(l,n-l)$ ist isomorph zu der Gruppe komplex-linearer Transformationen

$$\boldsymbol{Sp}(l,n-l)\cong\hat{\boldsymbol{U}}(2l,2(n-l))\cap\boldsymbol{Sp}(n,\mathbf{C}), \tag{31}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{U}}(2l, 2(n-l))$ die zu $\boldsymbol{U}(2l, 2(n-l))$ isomorphe Gruppe derjenigen Transformationen ist, welche die hermitesche Form α invariant lassen, deren Matrix (α_{ij}) in einer (bezüglich β) symplektischen Basis $(\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_{n+j})$, $j = 1, \ldots, n$, folgende Blockmatrix ist:

$$(\alpha_{ij}) = K_{l,n-l} := \begin{pmatrix} -I_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-l} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

B e w e i s. Da b eine τ-Biform ist, folgt

$$b(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \alpha(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) + \mathrm{j}\,\beta(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \overline{b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} = \overline{\alpha(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} + \overline{\mathrm{j}\,\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})}.$$

Nun gilt

$$\overline{\mathrm{j}\cdot\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} = \overline{\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} \cdot \bar{\mathrm{j}} = -\,\mathrm{j}\cdot\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}).$$

Der Vergleich der Komponenten zeigt, dass α hermitesch und β bilinear und alternierend ist. Es sei nun $(\mathfrak{a}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, eine bezüglich b pseudo-orthogonale Basis, d.h. es gelte

$$b(\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l) = \epsilon_k \delta_{kl}, \qquad k, l = 1, \ldots, n. \tag{33}$$

Dann ist $(\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_{n+k})$, $k = 1, \ldots, n$, mit $\mathfrak{a}_{n+k} := \mathfrak{a}_k \epsilon_k\, \mathrm{j}$ eine Basis von $\boldsymbol{V}_{\mathbf{C}}$. Man überprüft leicht durch eine direkte Rechnung, dass diese Basis bezüglich β symplektisch ist und die Biform α in ihr die Matrix (32) besitzt. Hieraus folgt, dass jede $\mathbf{H}$-lineare Transformation a, die b invariant lässt, als $\mathbf{C}$-lineare Transformation sowohl α als auch β invariant lässt und somit $a \in \hat{\boldsymbol{U}}(2l, 2(n-l)) \cap \boldsymbol{Sp}(n, \mathbf{C})$ erfüllt. Aus der nächsten Übung ergibt sich, dass jede Transformation $a \in \hat{\boldsymbol{U}}(2l, 2(n-l)) \cap \boldsymbol{Sp}(n, \mathbf{C})$ von $\boldsymbol{V}_{|\mathbf{C}}$ sogar $\mathbf{H}$-linear ist. Daher gilt (31). □

Übung 5. Man führe die im Beweis von Satz 3 fortgelassenen Rechnungen aus. Hinweis. Man stelle die Matrix der $\mathbf{C}$-linearen Abbildung a bezüglich der im Beweis definierten Basis $(\mathfrak{a}_k)$, $k = 1 \ldots, 2n$, als Blockmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad A, B, C, D \in \boldsymbol{M}_n(\mathbf{C}),$$

dar, berechne die Bedingungen für $a \in \hat{\boldsymbol{U}}(2l, 2(n-l))$ und $a \in \boldsymbol{Sp}(n, \mathbf{C})$, und gewinne daraus zwei Ausdrücke für a^{-1} als Blockmatrizen desselben Typs. Ihr Vergleich zeigt, dass $a(\mathfrak{x}\,\mathrm{j}] = a(\mathfrak{x})\,\mathrm{j}$ gilt. Hieraus folgt, dass a $\mathbf{H}$-linear ist.

Durch Satz 3 wird die enge Beziehung von $\boldsymbol{Sp}(l, n-l)$ zur symplektischen Gruppe $\boldsymbol{Sp}(n, \mathbf{C})$ deutlich und die Bezeichnung begründet. Speziell gilt

$$\boldsymbol{Sp}(n) \cong \boldsymbol{Sp}(n, \mathbf{C}) \cap \boldsymbol{U}(2n), \tag{34}$$

wobei die oben definierte Basis $(\mathfrak{a}_k)$, $k = 1, \ldots, 2n$, gleichzeitig symplektisch und orthonormiert ist. In der folgenden Übung wird ein zu Satz 3 analoges Resultat für die reelle Einschränkung eines komplexen pseudo-unitären Vektorraums formuliert.

Übung 6. Es sei $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^n$ ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\boldsymbol{V}_{|\mathbf{R}}$ seine reelle Einschränkung; b sei eine hermitesche Biform über $\boldsymbol{V}$ vom Index l. Man beweise: a) Die Zerlegung von $b(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ in Real- und Imaginärteil

$$b(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \alpha(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \mathrm{i}\,\beta(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \qquad (\mathfrak{x},\mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}),$$

definiert eine nicht ausgeartet symmetrische Bilinearform α vom Index $2l$ und eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform β über $\boldsymbol{V}_{|\mathbf{R}}$. – b) Die pseudo-unitäre Gruppe $\boldsymbol{U}(l, n-l)$ ist isomorph zu der Gruppe reell-linearer Transformationen

$$\boldsymbol{U}(l, n-l) \cong \hat{\boldsymbol{O}}(2l, 2(n-l)) \cap \boldsymbol{Sp}(n,\mathbf{R}),$$

wobei $\hat{\boldsymbol{O}}(2l, 2(n-l))$ die zur pseudo-orthogonalen Gruppe $\boldsymbol{O}(2l, 2(n-l))$ isomorphe Gruppe derjenigen reell-linearen Transformationen bezeichnet, welche die Bilinearform α invariant lassen, die in einer symplektischen Basis $(\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_{n+j})$, $j = 1,\ldots,n$, von $\boldsymbol{V}_{|\mathbf{R}}$ die Matrix (32) besitzt. Hinweis. Ist $(\mathfrak{a}_j)$, $j = 1,\ldots,n$, eine pseudo-orthonormierte Basis von $\boldsymbol{V}$, so definiere man $\mathfrak{a}_{n+j} := \mathfrak{a}_j\,\mathrm{i}\,\epsilon_j$ und verfahre wie beim Beweis von Satz 3 und Übung 5.

Übung 7. Wir betrachten die Wirkung der unitären Gruppe $\boldsymbol{U}(n)$ auf dem hermiteschen Vektorraum $\boldsymbol{V}^n$. Es bezeichne $G_{2n,k}(\mathbf{R})$, $0 < k < 2n$, die *Graßmann-Mannigfaltigkeit der k-dimensionalen reellen Unterräume der reellen Einschränkung $\boldsymbol{V}_{|\mathbf{R}}$ von $\boldsymbol{V}$*. Man beweise: a) $G_{2n,k}(\mathbf{R})$ bleibt unter der Wirkung von $\boldsymbol{U}(n)$ invariant. – b) Für $k = 1$ und für $k = 2n-1$ ist die Wirkung von $\boldsymbol{U}(n)$ auf $G_{2n,k}(\mathbf{R})$ transitiv, und für $1 < k < 2n-1$ gilt das nicht.

Beispiel 5. Wir betrachten nun die hermiteschen Polaritäten $H_{n,l}$ von $\boldsymbol{P}^{n-1}(K)$, $K = \mathbf{C},\mathbf{H}$. Wegen (7) und (8) können wir zur Bestimmung ihrer Isotropiegruppen

$$\boldsymbol{PU}(l, n-l) := \boldsymbol{PG}_{n-1}(H_{n,l}) \text{ für } K = \mathbf{C},$$
$$\boldsymbol{PSp}(l, n-l) := \boldsymbol{PG}_{n-1}(H_{n,l}) \text{ für } K = \mathbf{H}$$

wieder von $\boldsymbol{SL}(n,K)$ ausgehen; nach (13) erhalten wir $\kappa^n(a) = 1$, und da wiederum ein Trägheitssatz gilt (Lemma 1.9.8), erhalten wir für $l \neq n/2$ sogar $\kappa(a) = 1$. Es folgen

$$\boldsymbol{PU}(l, n-l) \cong \boldsymbol{SU}(l, n-l)/K_n \text{ für } K = \mathbf{C}, l \neq n/2,$$
$$\boldsymbol{PSp}(l, n-l) := \boldsymbol{Sp}(l, n-l)/\{\pm I_n\} \text{ für } K = \mathbf{H}, l \neq n/2.$$

Für $l = n/2$ liefert uns s_o nach (21) wieder eine Transformation mit $\kappa(s_o) = -1$, und man erhält ein zu (25) analoges Ergebnis. □

2.1.6 Die quaternionisch-schiefhermiteschen Polaritäten

Nun betrachten wir die Polaritäten H_n der quaternionischen projektiven Geometrie $\mathfrak{P}^{n-1}(\mathbf{H})$, vgl. Satz 1.9.12; sie werden durch die schiefhermitesche Biform (1.9.22) mit $r = n$ beschrieben. Diese Biform b zerlegen wir wieder nach (30) in ihre beiden komplexen Komponenten α, β und betrachten die komplexe Einschränkung $\boldsymbol{V}^n_{|\mathbf{C}}$. Weil b bezüglich $\mathbf{H}$ schiefhermitesch ist (vgl. 1.9.16)), ist die Biform α $\mathbf{C}$-schiefhermitesch und β symmetrisch und $\mathbf{C}$-bilinear. Es sei $(\mathfrak{b}_j)$, $j = 1,\ldots,n$, eine Basis von $\boldsymbol{V}^n$, bezüglich der die Matrix von b die Normalform (1.9.22) hat. Dann ist $(\mathfrak{b}_l, \mathfrak{b}_{n+l})$, $l = 1,\ldots,n$, mit $\mathfrak{b}_{n+l} := \mathfrak{b}_l\,\mathrm{j}$ eine Basis von $\boldsymbol{V}^n_{|\mathbf{C}}$; sind

$$x^l = \xi^l + \mathrm{j}\,\xi^{n+l},\; l = 1,\ldots,n,\; \xi^l, \xi^{n+l} \in \mathbf{C}, \tag{35}$$

die quaternionischen Koordinaten des Vektors $\mathfrak{x}$ bezüglich $(\mathfrak{b}_l)$, so sind die ξ^k, $k = 1, \ldots, 2n$, seine komplexen Koordinaten. In diesen drücken sich die Biformen α, β wie folgt aus:

$$\alpha(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \quad = \quad \mathrm{i} \sum_{l=1}^{n} (\bar{\xi}^l \eta^l - \bar{\xi}^{n+l} \eta^{n+l}), \tag{36}$$

$$\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \quad = \quad -\mathrm{i} \sum_{l=1}^{n} (\xi^l \eta^{n+l} + \xi^{n+l} \eta^l). \tag{37}$$

Man erkennt, dass beide Biformen nicht ausgeartet sind. Folglich ist β komplex euklidisch. Führen wir in $\boldsymbol{V}_{|\mathbf{C}}$ die Koordinatentransformation

$$\xi^l = (\xi'^l + \mathrm{i}\, \xi'^{n+l})/\sqrt{2}, \ \xi^{n+l} = (\xi'^l - \mathrm{i}\, \xi'^{n+l})\, \mathrm{i}/\sqrt{2}$$

aus, so erhalten wir beide Biformen in ihrer Normalgestalt

$$\alpha(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{l=1}^{n} (\bar{\xi}'^{n+l} \eta'^l - \bar{\xi}'^l \eta'^{n+l}), \tag{38}$$

$$\beta(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{l=1}^{n} (\xi'^l \eta'^l + \xi'^{n+l} \eta'^{n+l}). \tag{39}$$

Die Untergruppe der komplex-orthogonalen Transformationen, die α invariant lassen, wird mit $\boldsymbol{O}^*(2n)$ bezeichnet; weiter sei

$$\boldsymbol{SO}^*(2n) := \boldsymbol{SO}(2n, \mathbf{C}) \cap \boldsymbol{O}^*(2n). \tag{40}$$

Übung 8. Man zeige: $\boldsymbol{SO}^*(2n)$ ist eine Untergruppe von $\boldsymbol{SU}^*(2n)$ (vgl. die Bemerkung nach Übung 2).

Übung 9. Man beweise, dass die Untergruppe von $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n_{|\mathbf{C}})$, die α invariant lässt, zur Untergruppe $\boldsymbol{U}(n, n)$ isomorph ist.

Es sei nun $a \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n)$ eine $\mathbf{H}$-lineare Transformation, die (11) erfüllt. Nach Lemma 1 gilt dann $\kappa(a) \in \mathbf{R}^*$, und wir können stets $\kappa = \pm 1$ erreichen. Die Linksmultiplikation mit der imaginären Einheit $\mathrm{k} \in \mathbf{H}^*$, d.h. die Abbildung

$$s_o : \mathfrak{x} = \sum_{l=1}^{n} \mathfrak{b}_l x^l \longmapsto s_o(\mathfrak{x}) = \sum_{l=1}^{n} \mathfrak{b}_l\, \mathrm{k} \cdot x^l, \tag{41}$$

ergibt ein Element $s_o \in \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{V}^n)$, das (14) mit $\kappa(s_o) = -1$ erfüllt. Da wir uns nach (8) auf Elemente $a \in \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{V}^n)$ beschränken können, folgt analog zu (25) für die Isotropiegruppe von H_n

$$\boldsymbol{PG}_{n-1}(H_n) \cong (\boldsymbol{SO}^*(2n) \cup s_o(\boldsymbol{SO}^*(2n)))/\{\pm I_{2n}\}. \tag{42}$$

Übung 10. Man bestimme die Matrix der in (41) definierten Abbildung s_o in der komplexen Einschränkung $\boldsymbol{V}^n_{|\mathbf{C}}$, zeige $s_o \in \boldsymbol{SL}(\boldsymbol{V}^n)$ und $\kappa(s_o) = -1$.

Übung 11. Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein Vektorraum über dem Schiefkörper K und b eine nicht ausgeartete σ-hermitesche oder σ-schiefhermitesche Biform über $\boldsymbol{V}$. Weiter sei $a \in \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V}^n)$ eine lineare Transformation, die die Orthogonalität invariant lässt:

$$\text{Aus } b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0 \text{ folge stets } b(a(\mathfrak{x}), a(\mathfrak{y})) = 0.$$

Man beweise, dass dann $a \in \boldsymbol{CU}_n(b)$ gilt.

K	Polarität	Biform b	$\boldsymbol{UG}_n(b)$
$\mathbf{R}$	$F_{n,l}$	bilinear, symmetrisch, vom Index l	$\boldsymbol{O}(l, n-l)$, $\boldsymbol{O}(n) := \boldsymbol{O}(0, n)$
$\mathbf{C}$	F_n	bilinear, symmetrisch	$\boldsymbol{O}(n, \mathbf{C})$
$\mathbf{C}$	$H_{n,l}$	hermitesch vom Index l	$\boldsymbol{U}(l, n-l)$, $\boldsymbol{U}(n) := \boldsymbol{U}(0, n)$
$\mathbf{H}$	$H_{n,l}$	hermitesch vom Index l	$\boldsymbol{Sp}(l, n-l)$, $\boldsymbol{Sp}(n) := \boldsymbol{Sp}(0, n)$
$\mathbf{H}$	H_n	quaternionisch schiefhermitesch	$\boldsymbol{O}^*(2n)$

Die Normalformen der angegebenen nicht ausgearteten Biformen sind

$$
\begin{aligned}
F_{n,l}: \quad & -\sum_{\alpha=1}^{l} x^\alpha y^\alpha + \sum_{\kappa=l+1}^{n} x^\kappa y^\kappa, \ 0 \le l \le n/2, \\
F_n: \quad & \sum_{j=1}^{n} x^j y^j, \\
H_{n,l}: \quad & -\sum_{\alpha=1}^{l} \bar{x}^\alpha y^\alpha + \sum_{\kappa=l+1}^{n} \bar{x}^\kappa y^\kappa, \ 0 \le l \le n/2, \\
H_n: \quad & \sum_{j=1}^{n} \bar{x}^j \,\mathrm{i}\, y^j.
\end{aligned}
$$

Tabelle 2.1: Polaritäten, Biformen und ihre Isotropiegruppen

2.2 Vektorräume mit Skalarprodukt

Im vorigen Abschnitt haben wir die Isotropiegruppen von Biformen bei der natürlichen Wirkung der linearen Gruppen bestimmt und dabei die sogenannten klassischen Gruppen erhalten. Die Geometrien dieser Gruppen haben einige gemeinsame Eigenschaften, die wir in diesem Abschnitt herausarbeiten wollen; weiter unten werden wir einige der für die Anwendungen interessanten Geometrien im Einzelnen darstellen.

2.2.1 Vektorielle, projektive und affine Geometrien

Unter einer *linearen Gruppe* verstehen wir eine Untergruppe G der allgemeinen linearen Gruppe $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V})$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums $\boldsymbol{V}$ über einem Schiefkörper K, oder, nach Fixierung einer Basis, die ihr entsprechende, zu ihr isomorphe Matrizengruppe. Ihre *vektorielle Geometrie* wird bestimmt durch die Transformationsgruppe $[G, \boldsymbol{V}]$, wobei G als Untergruppe von $\boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V})$ linear über $\boldsymbol{V}$ wirkt. Der Inhalt dieser Geometrie besteht aus den G-invarianten Eigenschaften des Raumes $\boldsymbol{V}$ selbst und der mit ihm funktoriell verknüpften Räume: Mengenprodukte, Tensorräume u.s.w. Speziell gehört hierzu die *projektive Geometrie* $[G, \mathfrak{P}(\boldsymbol{V})]$, wobei die Wirkung von G durch die den Elementen von G entsprechenden Projektivitäten definiert ist. Zur Beschreibung der *affinen Geometrie* der Gruppe G gehen wir von der Formel (1.5.8) aus, welche die allgemeine affine Gruppe des affinen Raums beschreibt; schränkt man darin die Elemente $B \in \boldsymbol{GL}(n, K)$ auf die lineare Gruppe $G \subset \boldsymbol{GL}(n, K)$ ein, so erhält man eine durch G eindeutig bestimmte Untergruppe $GA \subset \mathfrak{A}(n)$ der affinen Gruppe; die Transformationsgruppe $[GA, \boldsymbol{A}^n]$ bei der affinen Wirkung von GA über dem affinen Raum $\boldsymbol{A}^n$ bestimmt dann die zu $[G, \boldsymbol{V}]$ gehörende affine Geometrie. Man kann die Gruppe GA auch als die von der Vereinigung der Translationsgruppe $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}^n)$ mit der Gruppe $G_{|\boldsymbol{A}}$ erzeugten Untergruppe der affinen Gruppe $\mathfrak{A}(n)$ definieren; im Falle eines Körpers K ist sie das halbdirekte Produkt von $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}^n)$ mit der Gruppe $G_{|\boldsymbol{A}}$, vgl. Übung 1.5.1.

Aus diesen recht allgemeinen Bemerkungen und dem Inhalt der Kapitel I.4-6 und des vorigen Kapitels ist klar, dass der vektorielle Standpunkt zumindest methodisch die beiden anderen beherrscht; daher wollen wir ihn in diesem Abschnitt in den Vordergrund stellen und eine entsprechende Terminologie fixieren.

Definition 1. Ein *Vektorraum mit Skalarprodukt* ist ein Paar $[\boldsymbol{V}, \langle , \rangle]$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\boldsymbol{V}$ ist ein endlichdimensionaler rechter Vektorraum über dem Schiefkörper K.

2. Das *Skalarprodukt* $\langle , \rangle$ ist eine σ-Biform über $\boldsymbol{V}$, $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, wobei σ ein involutiver Anti-Automorphismus von K ist.

3. Das Skalarprodukt ist nicht ausgeartet, d.h. für jedes $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}$, $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, ist $\langle \mathfrak{x}, \cdot \rangle$ eine von 0 verschiedene Linearform über $\boldsymbol{V}$.

4. Das Skalarprodukt ist eine alternierende oder eine symmetrische Bilinearform, oder σ-hermitesch.

5. Ist $\langle , \rangle$ nicht alternierend, so sei $\operatorname{char} K \neq 2$ vorausgesetzt.

□

Im Sinne dieser Definition sprechen wir von einem *projektiven* oder *affinen Raum mit Skalarprodukt*, wenn in dem unterliegendem Vektorraum ein Skalarprodukt ausgezeichnet ist. Eine *Geometrie* und der zu Grunde liegende *Raum* werden *symplektisch* genannt, wenn das Skalarprodukt alternierend ist, und *hermitesch* sonst. Ist K ein Körper und das Skalarprodukt symmetrisch, so spricht man von *orthogonaler Geometrie*; sie ist somit ein Spezialfall der hermiteschen. Wenn wir vom *Index* einer hermiteschen Form sprechen, so soll stets $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ oder $\mathbf{H}$ vorausgesetzt sein; man verwechsele diesen Begriff nicht mit dem Index eines Raumes mit Skalarprodukt (s.u. Definition 3). Ist $K = \mathbf{R}$ und der Index l des Skalarprodukts größer als Null, so spricht man von *pseudo-euklidischen* und in den Fällen $K = \mathbf{C}, \mathbf{H}$ und $l > 0$ von *pseudo-unitären Räumen*. Für $l = 0$ erhält man die in Kapitel I.6 behandelten *euklidischen* bzw. *unitären Räume*.

2.2.2 Unterräume

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass ein Vektorraum $\boldsymbol{V}$ mit Skalarprodukt $\langle,\rangle$ gegeben sei. Da eine Bilinearform als σ-hermitesch mit $\sigma = \mathrm{id}_K$ aufgefasst werden kann, sind die Begriffe *isotrop* und *total isotrop* für Unterräume $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ nach Definition 1.9.3 erklärt. Ebenso ist der grundlegende Begriff der *Orthogonalität*, Definition I.6.1.1, für Elemente und Unterräume definiert. Die Definition I.6.2.16 des zu einem Unterraum $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ orthogonalen Unterraums $\boldsymbol{W}^{\perp} \subset \boldsymbol{V}$ ist anwendbar; jedoch wollen wir hier nicht mehr vom orthogonalen Komplement sprechen, weil die Bedingung $\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{W}^{\perp} = \{\mathfrak{o}\}$ im allgemeinen nicht erfüllt ist. Vielmehr gilt der unmittelbar aus den Definitionen folgende

Satz 1. *Ein Unterraum $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ ist isotrop genau dann, wenn $\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{W}^{\perp} \neq \{\mathfrak{o}\}$ ist; mit $\boldsymbol{W}$ ist stets auch $\boldsymbol{W}^{\perp}$ isotrop.* □

Folgerung 2. *Ist $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ nicht isotrop, so ist $[\boldsymbol{W}, \langle,\rangle|\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}]$ ein Vektorraum desselben Typs, d.h. alternierend oder σ-hermitesch, wie $\boldsymbol{V}$. Hat $\langle,\rangle$ auf $\boldsymbol{V}$ den Index l, so hat $\langle,\rangle|\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$ einen Index $l_{\boldsymbol{W}} \leq l$.* □

Übung 1. . Es sei $\dim \boldsymbol{V} = n < \infty$. Man beweise Satz 1. Ferner zeige man, dass $\boldsymbol{W}$ genau dann isotrop ist, wenn $\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}^{\perp} \neq \boldsymbol{V}$ gilt, und dass die folgenden, aus der Theorie der unitären Vektorräume (Kapitel I.6) bekannten Eigenschaften auch hier gelten:

$$\dim \boldsymbol{W} + \dim \boldsymbol{W}^{\perp} = \dim \boldsymbol{V}, \tag{1}$$
$$(\boldsymbol{W}^{\perp})^{\perp} = \boldsymbol{W}, \tag{2}$$
$$(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W})^{\perp} = \boldsymbol{U}^{\perp} \cap \boldsymbol{W}^{\perp}, \tag{3}$$
$$(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W})^{\perp} = \boldsymbol{U}^{\perp} + \boldsymbol{W}^{\perp}, \tag{4}$$
$$\text{aus } \boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{W} \text{ folgt } \boldsymbol{W}^{\perp} \subset \boldsymbol{U}^{\perp}. \tag{5}$$

2.2.3 Der Satz von E. Witt

Wir wollen nun einen grundlegenden Satz von E. Witt über die Ausdehnung von Isomorphismen von Unterräumen zu Isomorphismen von Vektorräumen mit Skalarprodukt formulieren. Dazu definieren wir zuerst Morphismen für die Klasse von Paaren $[\boldsymbol{W}, b]$ von Vektorräumen über demselben Schiefkörper K und σ-Biformen b, wobei σ ein fixierter Automorphismus von K ist. Man beachte, dass Unterräume $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ von Räumen mit Skalarprodukt b stets durch die Einschränkung $[\boldsymbol{W}, b|\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}]$ ein solches Paar bestimmen, das jedoch, weil $b|\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$ ausarten kann, kein Vektorraum mit Skalarprodukt im Sinne der Definition 1 zu sein braucht.

Definition 2. Es seien $[\boldsymbol{W}, b]$ und $[\tilde{\boldsymbol{W}}, \tilde{b}]$ Vekorräume mit σ-Biformen über demselben Schiefkörper K. Eine lineare Abbildung $\varphi : \boldsymbol{W} \to \tilde{\boldsymbol{W}}$, die

$$b(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \tilde{b}(\varphi(\mathfrak{x}), \varphi(\mathfrak{y})), \qquad (\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{W}) \tag{6}$$

erfüllt, heißt ein *Morphismus* dieser Paare; ist φ außerdem bijektiv, so spricht man von einem *Isomorphismus*. Sind $\boldsymbol{W}, \tilde{\boldsymbol{W}}$ Unterräume von Vektorräumen mit Skalarprodukt, so wollen wir sie *isomorph* nenne, wenn ein Isomorphismus

$$\varphi : [\boldsymbol{W}, \langle,\rangle|\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}] \to [\tilde{\boldsymbol{W}}, \langle,\rangle|\tilde{\boldsymbol{W}} \times \tilde{\boldsymbol{W}}]$$

existiert. □

Offensichtlich bildet die Klasse der Paare $[\boldsymbol{W}, b]$, b alternierend, bzw. σ-hermitesch (σ, K fest), mit den definierten Morphismen eine Kategorie.

Übung 2. Man zeige: Ist mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Definition 2 die Abbildung $\varphi : \boldsymbol{W} \to \tilde{\boldsymbol{W}}$ ein Morphismus und ist b nicht ausgeartet, so ist φ injektiv, und $[\boldsymbol{W}, b]$ ist zu $[\varphi(\boldsymbol{W}), \tilde{b}|\varphi(\boldsymbol{W}) \times \varphi(\boldsymbol{W})]$ isomorph.

In den nächsten Teilabschnitten wollen wir den folgenden *Satz von E. Witt* beweisen:

Satz 3. (E. Witt). *Es seien $\boldsymbol{V}, \tilde{\boldsymbol{V}}$ endlich dimensionale, zueinander isomorphe Vektorräume mit Skalarprodukten über einem Schiefkörper K. Ferner sei $\varphi : \boldsymbol{W} \to \tilde{\boldsymbol{W}}$ ein Isomorphismus des Unterraums $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ auf den Unterraum $\tilde{\boldsymbol{W}} \subset \tilde{\boldsymbol{V}}$. Dann gibt es einen Isomorphismus $\psi : \boldsymbol{V} \to \tilde{\boldsymbol{V}}$ der Vektorräume mit Skalarprodukt derart, dass $\varphi = \psi|\boldsymbol{W}$ gilt.*

2.2.4 Eigenschaften isotroper Unterräume

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einige Aussagen über isotrope Unterräume, die auch sonst häufig angewandt werden.

Lemma 4. *Es sei $\mathfrak{v} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\}$ ein isotroper Vektor des Vektorraums $\boldsymbol{V}$ mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$. Dann gibt es stets einen isotropen Vektor $\hat{\mathfrak{v}} \in \boldsymbol{V}$ derart, dass $\langle \mathfrak{v}, \hat{\mathfrak{v}} \rangle = 1$ gilt; $\mathfrak{v}, \hat{\mathfrak{v}}$ sind linear unabhängig.*

Beweis. Da $\mathfrak{v} \neq \mathfrak{o}$ gilt und das Skalarprodukt nicht ausgeartet ist, finden wir einen Vektor $\mathfrak{w} \in \boldsymbol{V}$ mit $\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle \neq 0$. Weil $\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle$ in $\mathfrak{w}$ linear ist, können wir $\mathfrak{w}$ so normieren, dass $\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle = 1$ gilt. Ist das Skalarprodukt σ-hermitesch, so setzen wir $\hat{\mathfrak{v}}$ in der Gestalt $\hat{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}\xi + \mathfrak{w}$, $\xi \in K$, an. Da für σ-hermitesche Skalarprodukte $\sigma(\langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle) = \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle$ gilt, ergibt $\xi = -\langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle / 2$ eine Lösung; diese existiert wegen Bedingung 5 aus Definition 1. In einem symplektischen Raum ist jeder Vektor $\mathfrak{w} \neq \mathfrak{o}$ isotrop; wir setzen $\hat{\mathfrak{v}} := \mathfrak{w}$. Wären nun $\mathfrak{v}$ und $\hat{\mathfrak{v}}$ linear abhängig, so würde $\hat{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}\lambda$ gelten, also $\langle \mathfrak{v}, \hat{\mathfrak{v}} \rangle = \langle \mathfrak{v}, \mathfrak{v} \rangle \lambda = 0$ im Widerspruch zu $\langle \mathfrak{v}, \hat{\mathfrak{v}} \rangle = \langle \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle = 1$. □

Übung 3. Es sei $\boldsymbol{V}^n$, $n = 2m$, ein n-dimensionaler symplektischer Vektorraum. Man zeige, dass es für alle $k \leq m$ einen total isotropen Unterraum der Dimension k gibt.

Übung 4. Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein reeller pseudo-euklidischer oder ein komplexer pseudo-unitärer Vektorraum mit einem Skalarprodukt vom Index $l \leq n/2$. Man zeige, dass es in $\boldsymbol{V}$ für jedes $k \leq l$ einen total isotropen Unterraum der Dimension k gibt.

Satz 5. *Es sei $\boldsymbol{W}^m \subset \boldsymbol{V}^n$ ein total isotroper Unterraum des Vektorraums $\boldsymbol{V}$ mit Skalarprodukt und $(\mathfrak{b}_\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, m$, eine Basis von $\boldsymbol{W}^m$. Dann gibt es eine Folge $(\hat{\mathfrak{b}}_\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, m$, von isotropen Vektoren des Raumes $\boldsymbol{V}$ derart, dass*

$$\langle \mathfrak{b}_\beta, \hat{\mathfrak{b}}_\alpha \rangle = \delta_{\alpha\beta},\ \langle \hat{\mathfrak{b}}_\beta, \hat{\mathfrak{b}}_\alpha \rangle = 0, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

gelten und die Folge

$$\mathfrak{b}_1, \hat{\mathfrak{b}}_1, \ldots, \mathfrak{b}_m, \hat{\mathfrak{b}}_m \tag{7}$$

linear unabhängig ist.

Beweis. Für $m = 1$ liefert Lemma 1 die Behauptung. Wir nehmen an, dass Satz 5 schon für alle total isotropen Unterräume $\boldsymbol{W}_o$ mit $\dim \boldsymbol{W}_o < m$ bewiesen sei und betrachten die lineare Hülle $\boldsymbol{W}_o := \mathfrak{L}(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{m-1})$. Dann finden wir nach Induktionsannahme entsprechende Vektoren $\tilde{\mathfrak{b}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{b}}_{m-1}$ mit den in Satz 5 angegebenen Eigenschaften für $m-1$ anstelle von m und $\tilde{\mathfrak{b}}_\alpha$ anstelle von $\hat{\mathfrak{b}}_\alpha$. Es sei

$$\boldsymbol{U}^{2m-2} := \mathfrak{L}(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{m-1}, \tilde{\mathfrak{b}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{b}}_{m-1}).$$

Aus den Skalarprodukten dieser Basisvektoren folgt leicht, dass $\boldsymbol{U}$ nicht isotrop ist. Daher ist auch $\boldsymbol{U}^\perp$ nicht isotrop, und es gilt

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{U}^\perp. \tag{8}$$

Aus (8) erhalten wir die Zerlegung $\mathfrak{b}_m = \mathfrak{u}_m + \mathfrak{v}_m$, wobei $\mathfrak{u}_m \in \boldsymbol{U}$ die Darstellung

$$\mathfrak{u}_m = \sum_{\alpha=1}^{m-1} \mathfrak{b}_\alpha \lambda_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{m-1} \tilde{\mathfrak{b}}_\alpha \tilde{\lambda}_\alpha$$

hat. Multiplizieren wir diese Gleichung von links skalar mit $\mathfrak{b}_\beta$, so folgt aus $\langle \mathfrak{b}_\beta, \mathfrak{b}_m \rangle = \langle \mathfrak{b}_\beta, \mathfrak{u}_m \rangle = 0$ die Gleichung $\tilde{\lambda}_\beta = 0$, also

$$\mathfrak{u}_m = \sum_{\alpha=1}^{m-1} \mathfrak{b}_\alpha \lambda_\alpha. \tag{9}$$

Daher gelten auch $\mathfrak{v}_m \neq \mathfrak{o}$ und $\langle \mathfrak{b}_m, \mathfrak{b}_m \rangle = \langle \mathfrak{v}_m, \mathfrak{v}_m \rangle = 0$; denn $\mathfrak{b}_m$ und $\mathfrak{u}_m$ sind als Elemente von $\boldsymbol{W}$ isotrop, wegen (9) und der linearen Unabhängigkeit der $(\mathfrak{b}_\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, m$, ist $\mathfrak{v}_m \neq \mathfrak{o}$ und somit ebenfalls isotrop. Nach Lemma 4 finden wir einen isotropen Vektor $\hat{\mathfrak{b}}_m \in \boldsymbol{U}^\perp$ mit $\langle \mathfrak{v}_m, \hat{\mathfrak{b}}_m \rangle = 1$; denn $\boldsymbol{U}^\perp$ ist nicht isotrop. Wegen $\langle \mathfrak{b}_m, \hat{\mathfrak{b}}_m \rangle = \langle \mathfrak{v}_m, \hat{\mathfrak{b}}_m \rangle = 1$ ist der Raum $\boldsymbol{A} := \mathfrak{L}(\mathfrak{b}_m, \hat{\mathfrak{b}}_m)$ nicht isotrop, und somit gilt dasselbe auch für $\boldsymbol{A}^\perp$. Da $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{m-1}$ in $\boldsymbol{A}^\perp$ liegen, gibt es nach Induktionsannahme Vektoren $\hat{\mathfrak{b}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{b}}_{m-1} \in \boldsymbol{A}^\perp$ mit den in Satz 5 (für $m-1$ anstelle von m) angegebenen Eigenschaften. Man prüft leicht nach, dass die mit diesen Vektoren und $\mathfrak{b}_m, \hat{\mathfrak{b}}_m$ gebildete Folge (7) alle Anforderungen erfüllt. □

Folgerung 6. *Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $\boldsymbol{W}^k \subset \boldsymbol{V}^n$ ein total isotroper Unterraum. Dann gilt $k \leq n/2$.* □

Definition 3. Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Das Maximum l der Dimensionen total isotroper Unterräume $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}^n$ heißt *der Index von $\boldsymbol{V}^n$*.□

Dieser Begriff stimmt nicht ganz mit dem Begriff des Index einer symmetrischen Bilinearform (im Fall $K = \mathbf{R}$) oder einer hermiteschen Form ($K = \mathbf{C}, \mathbf{H}$) überein, vgl.

Definition I.5.9.7 und Abschnitt 1.9. Sind diese Formen nicht ausgeartet, so hängt ihr Index l_o mit dem eben definiertem Index l eines Vektorraums mit Skalarprodukt durch

$$l = \min(l_o, n - l_o) \tag{10}$$

zusammen (vgl. Übung 4). Der Index im Sinne von Definiton 3 ist bei beliebigem zu Grunde liegenden Schiefkörper K und bei beliebigem Skalarprodukt sinnvoll. Zum Beispiel folgt aus Übung 3: Jeder symplektische Vektorraum $\boldsymbol{V}^{2m}$ hat den Index m.

Es sei $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{V}$ ein beliebiger Unterraum. Nach Definition 1.9.2 ist dann $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{U}^\perp$ der Defektunterraum von $\boldsymbol{U}$, und für den *Defekt*

$$\operatorname{def}(\boldsymbol{U}) := \operatorname{def}(\langle,\rangle|\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{U})$$

gilt

$$\operatorname{def}(\boldsymbol{U}) = \operatorname{def}(\boldsymbol{U}^\perp) = \dim(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{U}^\perp). \tag{11}$$

Folgerung 7. *Es sei $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{V}$ ein beliebiger Unterraum. Dann gilt für die Dimension jedes minimalen nicht isotropen, $\boldsymbol{U}$ enthaltenden Unterraums $\boldsymbol{W}$*

$$\dim \boldsymbol{W} = \dim \boldsymbol{U} + \operatorname{def} \boldsymbol{U}. \tag{12}$$

Beweis. Man zeigt leicht

Lemma 8. *Ist $\boldsymbol{U}_1$ ein zum Defektunterraum $\boldsymbol{U}_o$ komplementärer Unterraum von $\boldsymbol{U}$, so ist $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_o \oplus \boldsymbol{U}_1$ eine Zerlegung von $\boldsymbol{U}$ in zueinander orthogonale Unterräume, und $\boldsymbol{U}_1$ ist nicht isotrop.* □

Daher ist auch $\boldsymbol{U}_1^\perp \subset \boldsymbol{V}$ ein nicht isotroper Unterraum, und es gilt $\boldsymbol{U}_o \subset \boldsymbol{U}_1^\perp$. Nach Satz 5 gibt es einen nicht isotropen Unterraum $\boldsymbol{W}_1$ mit $\boldsymbol{U}_o \subset \boldsymbol{W}_1 \subset \boldsymbol{U}_1^\perp$, nämlich den von einer Folge (7) mit $m = \operatorname{def} \boldsymbol{U}$, $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_m$ eine Basis von $\boldsymbol{U}_o$, aufgespannten Unterraum. Somit ist $\boldsymbol{W} := \boldsymbol{W}_1 \oplus \boldsymbol{U}_1 \supset \boldsymbol{U}$ ein nicht isotroper Unterraum, der (12) erfüllt. Nach Satz 5 können wir diese Konstruktion in jedem nicht isotropen Unterraum durchführen, der $\boldsymbol{U}$ enthält. Für einen solchen minimalen Unterraum $\boldsymbol{W}$ muss sich dann $\boldsymbol{W}$ selbst ergeben, so dass für diese (12) gilt. □

2.2.5 Der Beweis des Satzes von E. Witt

Wir wenden uns nun dem Beweis des Satzes von E. Witt zu und zeigen zuerst

Lemma 9. *Es seien $\boldsymbol{V}, \tilde{\boldsymbol{V}}$ Vektorräume über K mit Skalarprodukten, beide symplektisch oder beide σ-hermitesch. Ferner sei $\boldsymbol{U}$ ein beliebiger und $\boldsymbol{W} \supset \boldsymbol{U}$ ein minimaler, $\boldsymbol{U}$ enthaltender, nicht isotroper Unterraum. Dann lässt sich jeder injektive Morphismus $\varphi : \boldsymbol{U} \to \tilde{\boldsymbol{V}}$ zu einem injektiven Morphismus $\psi : \boldsymbol{W} \to \tilde{\boldsymbol{V}}$ fortsetzen.*

Beweis. Wir gehen von der im Beweis von Folgerung 7 konstruierten Zerlegung

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}_o \oplus \hat{\boldsymbol{U}}_o \oplus \boldsymbol{U}_1$$

aus, wobei

$$\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{U}_o \oplus \hat{\boldsymbol{U}}_o \text{ und } \hat{\boldsymbol{U}}_o = \mathfrak{L}(\hat{\mathfrak{b}}_1, \dots, \hat{\mathfrak{b}}_m),\ m = \operatorname{def} \boldsymbol{U},$$

zu setzen ist. Das Bild

$$\tilde{\boldsymbol{U}} := \varphi(\boldsymbol{U}) = \varphi(\boldsymbol{U}_o) \oplus \varphi(\boldsymbol{U}_1)$$

ist isomorph zu $\boldsymbol{U}$, da φ injektiv ist. Folglich ist

$$(\mathfrak{c}_\alpha) := (\varphi(\mathfrak{b}_\alpha)),\ \alpha = 1, \ldots, m,$$

eine Basis des Defektunterraums $\tilde{\boldsymbol{U}}_o := \varphi(\boldsymbol{U}_o)$ von $\tilde{\boldsymbol{U}}$, und $\tilde{\boldsymbol{U}}_1 := \varphi(\boldsymbol{U}_1)$ ist ein dazu komplementärer, nicht isotroper, zu $\tilde{\boldsymbol{U}}_o$ orthogonaler Unterraum von $\tilde{\boldsymbol{U}}$. Daher ist $\tilde{\boldsymbol{U}}_1^\perp \subset \tilde{\boldsymbol{V}}$ nicht isotrop, und $\tilde{\boldsymbol{U}}_o$ ist ein total isotroper Unterraum von $\tilde{\boldsymbol{U}}_1^\perp$. Nach Satz 5 finden wir eine zu (7) analoge Vektorfolge $\mathfrak{c}_1, \hat{\mathfrak{c}}_1, \ldots, \mathfrak{c}_m, \hat{\mathfrak{c}}_m$ in $\tilde{\boldsymbol{V}}$ mit den entsprechenden Eigenschaften. Man erkennt leicht, dass φ durch die Festlegung

$$\psi|\boldsymbol{U} := \varphi,\ \psi(\hat{\mathfrak{b}}_\alpha) := \hat{\mathfrak{c}}_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, m,$$

zu einem injektiven Morphismus $\psi : \boldsymbol{W} \to \tilde{\boldsymbol{V}}$ fortgesetzt wird. Sind beide Räume symplektisch, so gilt

$$\langle \hat{\mathfrak{c}}_\alpha, \mathfrak{c}_\alpha \rangle = -\langle \mathfrak{c}_\alpha, \hat{\mathfrak{c}}_\alpha \rangle = -1 = \langle \hat{\mathfrak{b}}_\alpha, \mathfrak{b}_\alpha \rangle,$$

während im σ-hermiteschen Fall wegen $\sigma(1) = 1$ hier

$$\langle \hat{\mathfrak{c}}_\alpha, \mathfrak{c}_\alpha \rangle = \sigma(\langle \mathfrak{c}_\alpha, \hat{\mathfrak{c}}_\alpha \rangle) = 1 = \langle \hat{\mathfrak{b}}_\alpha, \mathfrak{b}_\alpha \rangle$$

zutrifft. □

Man beachte, dass in Lemma 9 nicht die Isomorphie von $\boldsymbol{V}$ und $\tilde{\boldsymbol{V}}$ vorausgesetzt wurde. Gegen Ende des Beweises haben wir stillschweigend eine einfache Konstruktion angewandt, die in der folgenden Übung beschrieben wird:

Übung 5. Es sei $\boldsymbol{U} = \bigoplus_{i=1}^r \boldsymbol{U}_i$ eine direkte Summe paarweise orthogonaler Unterräume $\boldsymbol{U}_i \subset \boldsymbol{V}$. Ferner seien $\varphi_i : \boldsymbol{U}_i \to \tilde{\boldsymbol{V}}$ injektive Morphismen, für die $\tilde{\boldsymbol{U}} := \bigoplus_{i=1}^r \varphi_i(\boldsymbol{U}_i)$ eine direkte Summe paarweise orthogonaler Unterräume von $\tilde{\boldsymbol{V}}$ ist. Man zeige, dass dann

$$\varphi(\sum_{i=1}^r \mathfrak{x}_i) := \sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathfrak{x}_i) \qquad (\mathfrak{x}_i \in \boldsymbol{U}_i)$$

einen Isomorphismus von $\boldsymbol{U}$ auf $\tilde{\boldsymbol{U}}$ definiert.

Als nächstes wollen wir den Satz von E. Witt für symplektische Vektorräume beweisen. Nach Lemma 9 genügt es, den Beweis für nicht isotrope Unterräume zu führen; man beachte, dass $\boldsymbol{W}$ und $\psi(\boldsymbol{W})$ isomorph sind. Weil $\boldsymbol{V}$ und $\tilde{\boldsymbol{V}}$ als isomorph vorausgesetzt sind, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\boldsymbol{V} = \tilde{\boldsymbol{V}}$ annehmen. Ist nämlich $\rho : \boldsymbol{V} \to \tilde{\boldsymbol{V}}$ ein Isomorphismus, so reicht es aus, einen Automorphismus α von $\boldsymbol{V}$ zu finden, der $\boldsymbol{W}$ in $\rho^{-1}(\tilde{\boldsymbol{W}})$ überführt; dann ist $\psi = \rho \circ \alpha$ der gesuchte Isomorphismus. Mit diesen Bemerkungen lässt sich der symplektische Fall sofort erledigen: Ist nämlich $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ ein nicht isotroper Unterraum des symplektischen Vektorraums $\boldsymbol{V}$, so ist $\tilde{\boldsymbol{W}} = \varphi(\boldsymbol{W})$ ebenfalls nicht isotrop. Nach Satz 1 gilt dasselbe für die orthogonalen Unterräume $\boldsymbol{W}^\perp$ und $\tilde{\boldsymbol{W}}^\perp$. Da die Dimensionen gleich sind, gibt es einen Isomorphismus $\varphi^\perp : \boldsymbol{W}^\perp \to \tilde{\boldsymbol{W}}^\perp$ (vgl. Lemma 1.8.4 und Satz 1.8.5). Nach Übung 5 ist dann die aus φ und $\varphi^\perp$ zusammengesetzte Abbildung $\psi = \varphi \oplus \varphi^\perp$ der gesucht Automorphismus $\psi \in \boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{V})$. Offenbar kann man den Satz von E. Witt in jedem der in 2.1.4 bis 2.1.6 klassifizierten Fälle ($K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$) analog beweisen, indem man die Normalformen und gegebenenfalls den Trägheitssatz der angegebenen σ-Biformen heranzieht.

Wir wollen nun den Satz von E. Witt im allgemeinen Fall beweisen. Wie oben nehmen wir $\boldsymbol{V} = \tilde{\boldsymbol{V}}$ an und führen den Beweis durch Induktion nach $m := \dim \boldsymbol{W}$. Für $m = 0$ ist die Behauptung trivial. Es sei der Satz also für alle Dimensionen kleiner als m bewiesen. Wir wählen in $\boldsymbol{W}$ einen Unterraum $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{W}$ der Dimension $\dim \boldsymbol{U} = m - 1$. Dann ist $\varphi_1 := \varphi|\boldsymbol{U}$ ein Isomorphismus auf $\tilde{\boldsymbol{U}} := \varphi(\boldsymbol{U})$, den wir nach Induktionsvoraussetzung zu einem Automorphismus $\psi_1 : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$ ausdehnen können. Es sei $\boldsymbol{W}_1 := \psi_1^{-1}(\tilde{\boldsymbol{W}})$. Dann ist $\boldsymbol{U} = \psi_1^{-1}(\tilde{\boldsymbol{U}})$ und $\varphi_o := \psi_1^{-1} \circ \varphi : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W}_1$ ein Isomorphismus, der den Unterraum $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{W}$ elementweise fest lässt. Können wir also unter der zusätzlichen Annahme, dass es einen Unterraum $\boldsymbol{U}^{m-1} \subset \boldsymbol{W}^m$ gibt, für den $\varphi_o = \mathrm{id}_{\boldsymbol{U}}$ ist, eine Ausdehnung von φ_o zu einem Automorphismus ψ_o von $\boldsymbol{V}$ finden, so sind wir fertig; denn dann können wir $\varphi_o = \psi_1^{-1} \circ \varphi$ zu einem Automorphismus ψ_o von $\boldsymbol{V}$ ausdehnen, der $\psi_o(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}_1$ erfüllt, und $\psi = \psi_1 \circ \psi_o$ ist ein Automorphismus von $\boldsymbol{V}$ mit $\psi|\boldsymbol{W} = \varphi$. Wir beweisen zuerst einen Hilfssatz, der Übung 5 verallgemeinert:

Lemma 10. *Es sei $\boldsymbol{V}$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt, $\boldsymbol{W}_i \subset \boldsymbol{V}$, $i = 1, 2$, seien Unterräume und $u_i : \boldsymbol{W}_i \to \boldsymbol{V}$ injektive Morphismen. Es gelte ferner*

$$\boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2 = \{\boldsymbol{o}\} \text{ und } u_1(\boldsymbol{W}_1) \cap u_2(\boldsymbol{W}_2) = \{\boldsymbol{o}\}.$$

Schließlich sei für alle $\mathfrak{x}_i \in \boldsymbol{W}_i$

$$\langle u_1(\mathfrak{x}_1), u_2(\mathfrak{x}_2)\rangle = \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\rangle \tag{13}$$

erfüllt. Dann ist

$$u(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2) := u_1(\mathfrak{x}_1) + u_2(\mathfrak{x}_2) \qquad (\mathfrak{x}_i \in \boldsymbol{W}_i) \tag{14}$$

ein injektiver Morphismus von $\boldsymbol{W}_1 \oplus \boldsymbol{W}_2$ in $\boldsymbol{V}$.

Beweis. Wegen $\boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ ist (14) eine korrekte Definition. Man rechnet leicht nach, dass für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{W}_1 \oplus \boldsymbol{W}_2$ die Bedingung $\langle u(\mathfrak{x}), u(\mathfrak{y})\rangle = \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle$ erfüllt ist. Da $u : \boldsymbol{W}_1 \oplus \boldsymbol{W}_2 \to u_1(\boldsymbol{W}_1) \oplus u_2(\boldsymbol{W}_2)$ surjektiv ist und wegen $u_1(\boldsymbol{W}_1) \cap u_2(\boldsymbol{W}_2) = \{\boldsymbol{o}\}$ die Dimensionen dieser Räume gleich sind, ist u auch injektiv. □

Es sei nun $\boldsymbol{U}^{m-1} \subset \boldsymbol{W}^m$ ein Unterraum mit $\varphi|\boldsymbol{U} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{U}}$ und $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{W} \setminus \boldsymbol{U}$ ein komplementärer Vektor. Wir betrachten die Abbildung $\alpha := \varphi - \iota_{\boldsymbol{W}} : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V}$, wobei $\iota_{\boldsymbol{W}}$ die Einbettung von $\boldsymbol{W}$ in $\boldsymbol{V}$ bezeichnet. Da wir jeden Vektor $\mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}$ in der Gestalt $\mathfrak{w} = \mathfrak{u} + \mathfrak{a}\xi$ mit $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{U}$, $\xi \in K$, darstellen können, folgt für das Bild $\boldsymbol{H} := \alpha(\boldsymbol{W}) = \mathfrak{L}(\varphi(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a})$, also $\dim \boldsymbol{H} \leq 1$. Ist $\dim \boldsymbol{H} = 0$, so gilt $\varphi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, also $\varphi = \mathrm{id}_{\boldsymbol{W}}$, und $\psi = \mathrm{id}_{\boldsymbol{V}}$ ist eine geeignete Ausdehnung. Es sei also $\dim \boldsymbol{H} = 1$. Wir betrachten $\boldsymbol{H}^\perp$ und zeigen, dass $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{H}^\perp$ gilt. Es ist nämlich

$$\langle \varphi(\mathfrak{x}) - \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle = \langle \varphi(\mathfrak{x}), \mathfrak{y}\rangle - \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle = \langle \varphi(\mathfrak{x}), \mathfrak{y} - \varphi(\mathfrak{y})\rangle \tag{15}$$

für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{W}$. Setzen wir hier $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{y} \in \boldsymbol{U}$ ein, so folgt $\langle \varphi(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}, \mathfrak{y}\rangle = 0$. Es sei nun $\boldsymbol{W}_2 \subset \boldsymbol{H}^\perp$ ein Unterraum, der $\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{W}_2 = \{\mathfrak{o}\}$ und $\tilde{\boldsymbol{W}} \cap \boldsymbol{W}_2 = \{\mathfrak{o}\}$ erfüllt.

Wir zeigen, dass mit $u_1 = \varphi$, $\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{W}$, $u_2 = \iota_{\boldsymbol{W}}$ alle Voraussetzungen von Lemma 10 erfüllt sind: In der Tat ist wegen $u_1(\mathfrak{x}_1) - \mathfrak{x}_1 \in \boldsymbol{H}$ und $\mathfrak{x}_2 \in \boldsymbol{H}^\perp$ das Skalarprodukt $\langle u_1(\mathfrak{x}_1) - \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2\rangle = 0$, und daraus folgt (13). Somit können wir φ zu einem injektiven Morphismus $\varphi_1 : \boldsymbol{W} \oplus \boldsymbol{W}_2 \to \boldsymbol{V}$ ausdehnen. Für die Anwendung dieser Konstruktion unterscheiden wir zwei Fälle: 1. $\boldsymbol{W}$ ist nicht in $\boldsymbol{H}^\perp$ enthalten. Nach (15) ist dann auch $\varphi(\boldsymbol{W}) = \tilde{\boldsymbol{W}}$ nicht in $\boldsymbol{H}^\perp$ enthalten. Weil $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{H}^\perp$ die Dimension $m-1$ hat, gilt für jeden zu $\boldsymbol{U}$ komplementären Unterraum $\boldsymbol{W}_2 \subset \boldsymbol{H}^\perp$:

$$\dim \boldsymbol{W}_2 = n - m \qquad\qquad (n = \dim \boldsymbol{V})$$

und $\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{W}_2 = \{\mathfrak{o}\}$. Ebenso ist $\tilde{\boldsymbol{W}} \cap \boldsymbol{H}^\perp = \boldsymbol{U}$, also $\tilde{\boldsymbol{W}} \cap \boldsymbol{W}_2 = \{\mathfrak{o}\}$. Daher gilt $\boldsymbol{W} \oplus \boldsymbol{W}_2 = \boldsymbol{V}$, und wir erhalten nach Lemma 10 eine Ausdehnung von φ zu einem Automorphismus ψ von $\boldsymbol{V}$. – 2. Es sei nun $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{H}^\perp$. Dann folgt aus (15) $\tilde{\boldsymbol{W}} \subset \boldsymbol{H}^\perp$. Wir zeigen zuerst, dass φ zu einem injektiven Morphismus $\hat{\varphi} : \boldsymbol{H}^\perp \to \boldsymbol{V}$ fortgesetzt werden kann. Ist $\boldsymbol{W} = \tilde{\boldsymbol{W}} \subset \boldsymbol{H}^\perp$, so finden wir eine zu $\boldsymbol{W}$ komplementären Unterraum $\boldsymbol{W}_2 \subset \boldsymbol{H}^\perp$. Andernfalls ist $\boldsymbol{W} \cap \tilde{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{U}$. und wir finden einen zu $\boldsymbol{W}$ in $\boldsymbol{H}^\perp$ komplementären Unterraum $\boldsymbol{W}_2$ mit $\boldsymbol{W}_2 \cap \tilde{\boldsymbol{W}} = \{\mathfrak{o}\}$: dazu genügt es zu bemerken, dass $\boldsymbol{W} + \tilde{\boldsymbol{W}}$ die Dimension $\dim \boldsymbol{U} + 2$ hat; sind $\mathfrak{b}$ und $\tilde{\mathfrak{b}}$ Vektoren, die zusammen mit $\boldsymbol{U}$ jeweils $\boldsymbol{W}$ bzw. $\tilde{\boldsymbol{W}}$ aufspannen, und ist $\boldsymbol{U}_1$ ein zu $\boldsymbol{W} + \tilde{\boldsymbol{W}}$ komplementärer Unterraum von $\boldsymbol{H}^\perp$, so ist $\boldsymbol{W}_2 = \mathfrak{L}(\mathfrak{b} + \tilde{\mathfrak{b}}) + \boldsymbol{U}_1$ ein derartiger Unterraum. Nach Lemma 10 und dem oben angegebenem Schluss erhalten wir die gewünschte Ausdehnung $\hat{\varphi}$ von φ auf $\boldsymbol{H}^\perp$. Es bleibt, $\hat{\varphi}$ zu einem Automorphismus ψ von $\boldsymbol{V}$ auszudehnen. Weil im zweiten Fall $\boldsymbol{W} + \tilde{\boldsymbol{W}} \subset \boldsymbol{H}^\perp$ gilt, ist $\varphi(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a} \in \boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{H}^\perp$; $\boldsymbol{H}^\perp$ ist also eine isotrope Hyperebene. Daher ist $\boldsymbol{V}$ der kleinste nicht isotrope Unterraum, der $\boldsymbol{H}^\perp$ enthält, und nach Lemma 9 können wir $\hat{\varphi}$ zu einem Automorphismus ψ von $\boldsymbol{V}$ fortsetzen. □

2.2.6 Transitivitätsaussagen

Die Bedeutung des Satzes von E. Witt liegt in den zahlreichen geometrischen Anwendungen auf die Wirkungen der klassischen Gruppen über den Unterräumen; die Klassifikation der Unterräume nach dieser Wirkung wird auf die in den wichtigsten Fällen bereits bekannte Klassifikation der Biformen auf ihnen zurückgeführt. Insbesondere ergeben sich interessante Transitivitätsaussagen:

Folgerung 11. *Die Automorphismengruppe $G \subset \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V})$ eines Vektorraums mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$ wirkt transitiv auf den Isomorphieklassen der Unterräume $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ mit der induzierten Biform $b = \langle , \rangle | \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$* (vgl. Definition 2). □

Damit ist die Orbit-Zerlegung der Grassmann-Mannigfaltigkeiten $G_{n,k}$ der k-dimensionalen Unterräume des n-dimensionalen Vektorraums mit einem Skalarprodukt fast schon beschrieben.

Beispiel 1. Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein n-dimensionaler pseudo-euklidischer Vektorraum mit einem Skalarprodukt vom Index l. Nach dem Trägheitssatz I.5.9.6 ist die Isomorphieklasse der Bilinearform $b_{\boldsymbol{W}} := \langle , \rangle | \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$ durch ihren Rang $r_{\boldsymbol{W}}$ und ihren Index $l_{\boldsymbol{W}}$ gegeben; statt des Ranges können wir auch den *Defekt* $d_{\boldsymbol{W}} = \dim \boldsymbol{W} - r_{\boldsymbol{W}}$ betrachten.

Nach Folgerung 11 wirkt die pseudo-orthogonale Gruppe $\boldsymbol{O}(l, n-l)$ transitiv auf der Menge $G_{n,k,s,d}$ der k-dimensionalen Unterräume mit Index s und Defekt d. Ist der Vektorraum euklidisch, also $\langle,\rangle$ positiv definit, so gilt stets $l_{\boldsymbol{W}} = d_{\boldsymbol{W}} = 0$; es folgt, dass die orthogonale Gruppe $\boldsymbol{O}(n)$ transitiv auf der Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_{n,k}$ der k-dimensionalen Unterräume des $\boldsymbol{V}^n$ wirkt. □

Beispiel 2. Es sei $[\boldsymbol{A}^n, \boldsymbol{V}^n, K, \langle,\rangle]$ eine affine Geometrie über einem Vektorraum mit Skalarprodukt. Unter dem *Isomorphietyp einer k-Ebene $\boldsymbol{H}^k \subset \boldsymbol{A}^n$* verstehen wir den Isomorphietyp des zu $\boldsymbol{H}$ gehörenden Vektorraums $\boldsymbol{W}$ mit der induzierten Biform $b_{\boldsymbol{W}}$. Da die Translationsgruppe $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ transitiv über den zu einer festen k-Ebene parallelen k-Ebenen wirkt, ergibt sich aus Folgerung 11: Die durch die Automorphismengruppe $\boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{GL}(\boldsymbol{V})$ und die Translationsgruppe erzeugte Untergruppe $\boldsymbol{GA} \subset \mathfrak{A}(n)$ der affinen Gruppe wirkt transitiv auf den Mengen der k-Ebenen gleichen Isomorphietyps. □

Folgerung 12. *Die Automorphismengruppe G eines Vektorraums mit Skalarprodukt wirkt transitiv über der Menge der k-dimensionalen, total isotropen Unterräume. Sind $\boldsymbol{W}^k, \tilde{\boldsymbol{W}}^k$ zwei derartige Unterräume und $(\mathfrak{b}_\alpha)$, $(\mathfrak{c}_\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, k$, beliebige Basen von $\boldsymbol{W}$ bzw. $\tilde{\boldsymbol{W}}$, so gibt es eine Transformation $g \in G$ mit $g(\mathfrak{b}_\alpha) = \mathfrak{c}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, k$.*

Beweis. Offensichtlich ist die durch $\varphi(\mathfrak{b}_\alpha) = \mathfrak{c}_\alpha$ bestimmte lineare Abbildung $\varphi : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{V}$ ein injektiver Morphismus, den man nach dem Satz von E. Witt zu einem Automorphismus $g \in G$ fortsetzen kann. □

Beispiel 3. Die symplektische Gruppe $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{V}^{2n})$, also auch die projektiv-symplektische Gruppe $\boldsymbol{PSp}_n$, wirkt transitiv auf dem projektiv-symplektischen Raum $\boldsymbol{P}^{2n-1}$. □

Beispiel 4. Es sei $Q \subset \boldsymbol{P}^n$ eine durch die nicht ausgeartete σ-Biform b bestimmte Quadrik des projektiven Raumes $\boldsymbol{P}^n$. Wir definieren durch $\langle,\rangle := b$ ein Skalarprodukt in dem zu Grunde liegendem Vektorraum $\boldsymbol{V}$. Man beachte, dass b und damit auch das Skalarprodukt durch die Quadrik nur bis auf einen Faktor $k \in K^*$ bestimmt ist; die Festlegung dieses Faktors bezeichnet man als *Eichung*; die Automorphismengruppe G von $[\boldsymbol{V}, \langle,\rangle]$ hängt nicht von der Wahl des Eichfaktors ab. Aus den Ergebnissen dieses Abschnittes folgt: 1. Die Gruppe $\boldsymbol{PG}$ derjenigen Projektivitäten von $\boldsymbol{P}^n$, die Q invariant lassen, wirkt transitiv auf Q. – 2. Die Dimension einer projektiven k-Ebene $\boldsymbol{A} \subset Q$ erfüllt $\operatorname{Dim} \boldsymbol{A} \leq (n-1)/2$. – 3. Es sei m die maximale Dimension von in Q enthaltenen k-Ebenen. Dann stimmt $m+1$ mit dem Index l des Skalarprodukts überein; man nennt l daher auch den *Index der Quadrik*. Die Gruppe $\boldsymbol{PG}$ wirkt für jedes $k < l$ transitiv auf der Menge Q_k der in Q enthaltenen projektiven k-Ebenen. □

Beispiel 5. Bekanntlich ist die *euklidische Geometrie* eine Spezialisierung der affinen Geometrie, vgl. I.6.5. Sie ergibt sich als Spezialfall von Beispiel 2, wenn man $K = \mathbf{R}$ setzt und das Skalarprodukt positiv definit wählt. Ihre projektive Einordnung kann folgendermaßen beschrieben werden: Man zeichnet im reellen projektiven Raum eine Hyperebene $\boldsymbol{H}^{n-1}$ als Absolut aus (oftmals auch unendlich ferne Hyperebene genannt) und erhält so die Geometrie des affinen Raumes $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}^n \setminus \boldsymbol{H}^{n-1}$, vgl Abschnitt 1.5. Dort haben wir gezeigt, dass die Punkte $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}^{n-1}$ den Richtungen des $\boldsymbol{A}^n$ entsprechen. Die Vektoren der affinen Geometrie lassen sich nach Übung 1.5.4 als Elemente des zu der absoluten

Hyperebene $\boldsymbol{H}^{n-1}$ gehörenden Vektorraums $\boldsymbol{W}^n$ interpretieren. Gibt man nun in $\boldsymbol{H}^{n-1}$ eine *absolute Polarität* vor, so definiert die zu ihr gehörende Korrespondenz (Definition 1.7.4) $\langle , \rangle := b$ die Orthogonalität: zwei Richtungen $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]$, $\boldsymbol{y} = [\mathfrak{y}]$ sind orthogonal zueinander, wenn $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = 0$ gilt. Hat das Skalarprodukt den Index 0, so definiert es in $\boldsymbol{H}^{n-1}$ die nullteilige Quadrik $Q = \emptyset$; nimmt man noch eine Eichung zum Beispiel durch Auszeichnung eines Vektors $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{W}^n$, $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, als Einheitsvektor vor, so ist damit die Einordnung der euklidischen Geometrie in die projektive abgeschlossen, vgl. auch Übung 1.9.6. Wählt man statt des positiv definiten ein Skalarprodukt vom Index l, so entsteht auf analoge Weise die Serie der *pseudo-euklidischen Geometrien*, und im Falle $K = \mathbf{C}$ erhält man die *komplex-euklidische Geometrie*. Wie in Beispiel 2 ergeben sich die entsprechenden Transitivitätsaussagen. □

2.2.7 Neutrale Vektorräume

Wir beziehen uns nun noch einmal auf Satz 5 und nennen einen Vektorraum mit Skalarprodukt *neutral*, wenn er als direkte Summe zweier total isotroper Unterräume darstellbar ist (vgl. N. Bourbaki [16], §IX.4.2; E. Artin [3] nennt derartige Räume hyperbolisch, was mit dem vielfach benutztem Begriff des hyperbolischen Raumes der Geometrie konstanter negativer Schnittkrümmung kollidiert,vgl. Abschnitt 7 weiter unten). Den Begriff neutral wenden wir auch auf das zugehörige Skalarprodukt an. Offenbar ist jeder symplektische Vektorraum neutral. In den folgenden Übungen findet man einige Anwendungen dieses Begriffs.

Übung 6. Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein n-dimensionaler neutraler Vektorraum und $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}_1 \oplus \boldsymbol{W}_2$ eine Zerlegung von $\boldsymbol{V}$ in eine direkte Summe zweier total isotroper Unterräume. Man zeige: a) Die Abbildung

$$\varphi : \mathfrak{x} \in \boldsymbol{W}_2 \longmapsto \varphi(\mathfrak{x}) := \langle \mathfrak{x}, . \rangle | \boldsymbol{W}_1 \in \boldsymbol{W}_1' \tag{16}$$

ist σ-linear und injektiv. – b) Es gilt

$$\dim \boldsymbol{W}_1 = \dim \boldsymbol{W}_2, \tag{17}$$

und φ ist eine σ-lineare Bijektion. – c) Ist $(\mathfrak{x}_\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, k$, eine Basis von $\boldsymbol{W}_1$, so existiert eine eindeutig bestimmte Basis $(\mathfrak{y}_\beta)$, $\beta = 1, \ldots, k$, von $\boldsymbol{W}_2$ derart, dass gilt

$$\langle \mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{y}_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta},\ \alpha, \beta = 1, \ldots, k. \tag{18}$$

Übung 7. Sind $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2$ zwei neutrale, σ-hermitesche Vektorräume derselben endlichen Dimension über dem Schiefkörper K, so sind sie isomorph (Analogon von Satz 1.8.5). Die pseudo-euklidischen Vektorräume $\boldsymbol{V}^{2m}$ vom Index m sind neutral, desgleichen die Vektorräume mit den hermiteschen Skalarprodukten $H_{2m,m}$ für $K = \mathbf{C}, \mathbf{H}$.

Übung 8. Der Vektorraum $\boldsymbol{V}^n$ mit Skalarprodukt hat den Index k genau dann, wenn es in ihm einen maximalen neutralen Unterraum $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ der Dimension $2k$ gibt, und umgekehrt. Ein komplexer Vektorraum $\boldsymbol{V}^n$ mit dem Skalarprodukt F_n oder ein quaternionischer Vektorraum $\boldsymbol{V}^n$ mit dem schiefhermiteschem Skalarprodukt H_n ist neutral genau dann, wenn n gerade ist.

Übung 9. Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein n-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt. Man zeige: a) Es gibt eine Zerlegung

$$\boldsymbol{V}^n = \boldsymbol{W}_1 \oplus \boldsymbol{W}_2 \oplus \boldsymbol{U},\ \dim \boldsymbol{W}_1 = \dim \boldsymbol{W}_2 = \text{ index } \boldsymbol{V}^n, \tag{19}$$

$\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2$ total isotrop, $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{W}_1 \oplus \boldsymbol{W}_2)^\perp$ enthält keinen isotropen Vektor. Man nennt eine derartige Zerlegung eine *Witt-Zerlegung.* – b) Ist $\boldsymbol{V}^n = \tilde{\boldsymbol{W}}_1 \oplus \tilde{\boldsymbol{W}}_2 \oplus \tilde{\boldsymbol{U}}$ eine zweite Witt-Zerlegung, und sind $(\mathfrak{x}_\alpha)$, $(\tilde{\mathfrak{x}}_\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, k$, Basen von $\boldsymbol{W}_1$ bzw. $\tilde{\boldsymbol{W}}_1$, so gibt es einen Automorphismus g der Automorphismengruppe G von derart, dass

$$g(\mathfrak{x}_\alpha) = \tilde{\mathfrak{x}}_\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, k,\ g(\boldsymbol{W}_2) = \tilde{\boldsymbol{W}}_2, g(\boldsymbol{U}) = \tilde{\boldsymbol{U}} \tag{20}$$

gelten. – c) Sind $\boldsymbol{W}_i, \tilde{\boldsymbol{W}}_i$, $i = 1, 2$, zwei Paare total isotroper Unterräume maximaler Dimension mit $\boldsymbol{W}_1 \cap \boldsymbol{W}_2 = \tilde{\boldsymbol{W}}_1 \cap \tilde{\boldsymbol{W}}_2 = \{\mathfrak{o}\}$, so gibt es stets ein $g \in G\ [\boldsymbol{V}^n, \langle,\rangle]$ mit $g(\boldsymbol{W}_i) = \tilde{\boldsymbol{W}}_i$, $i = 1, 2$.

Übung 10. Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle,\rangle$. Man zeige: Sind $\boldsymbol{U}, \tilde{\boldsymbol{U}} \subset \boldsymbol{V}^n$ isomorphe Unterräume, so sind auch $\boldsymbol{U}^\perp, \tilde{\boldsymbol{U}}^\perp$ isomorph.

Übung 11. Es seien $[\boldsymbol{V}^n, \langle,\rangle]$ ein neutraler Raum und $\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{y}_\beta$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, k = n/2$, eine Basis mit der Eigenschaft (18), die einer Witt-Zerlegung $\boldsymbol{V}^n = \boldsymbol{W}_1 \oplus \boldsymbol{W}_2$ angepasst ist. Man zeige: a) Ist g ein Automorphismus von $\boldsymbol{V}^n$, für den $g|\boldsymbol{W}_1 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{W}_1}$ gilt, so wird g in dieser Basis durch eine Blockmatrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} I_k & A \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \in \boldsymbol{GL}(2k, K) \tag{21}$$

dargestellt, wobei für symplektische Räume die Matrix $A = A'$ symmetrisch ist, während für σ-hermitesche Räume die Matrix A σ-schiefhermitesch ist, d.h.

$$A' = -\sigma(A) \tag{22}$$

erfüllt. – b) Umgekehrt definiert jede Matrix mit den angegebenen Eigenschaften einen Automorphismus g von $\boldsymbol{V}^n$ mit $g|\boldsymbol{W}_1 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{W}_1}$.

Nach Übung 7 sind neutrale σ-hermitesche Vektorräume derselben Dimension über demselben Schiefkörper isomorph. Es ergibt sich die Aufgabe, die Automorphismengruppen $\boldsymbol{O}_n$ dieser Vektorräume mit Skalarprodukt zu bestimmen. Für spätere Anwendungen wollen wir wenigstens ein einfaches Ergebnis in dieser Richtung herleiten.

Satz 13. *Es sei $\boldsymbol{V}^2$ ein zweidimensionaler neutraler Vektorraum mit symmetrischem bilinearen Skalarprodukt über einem Körper K. Dann ist die* spezielle orthogonale Gruppe

$$\boldsymbol{SO}_2 := \{g \in \boldsymbol{O}_2 | \det g = 1\} \tag{23}$$

isomorph zur multiplikativen Gruppe K^* von K, und die orthogonale Gruppe $\boldsymbol{O}_2$ ist halbdirektes Produkt einer zu $\mathbf{Z}_2$ isomorphen Untergruppe mit dem Normalteiler $\boldsymbol{SO}_2$.

B e w e i s. Wegen $\operatorname{char} K \neq 2$ können wir eine isotrope Basis $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ von $\boldsymbol{V}^2$ so wählen, dass $\langle \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \rangle = 1/2$ gilt. Für $g \in \boldsymbol{O}_2$ setzen wir die Basisdarstellung

$$g\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_1\alpha + \mathfrak{z}_2\beta,\ g\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_1\gamma + \mathfrak{z}_2\delta$$

an und erhalten aus der Invarianz des Skalarprodukts die Bedingungen

$$\alpha\beta = \gamma\delta = 0, \ \alpha\delta + \beta\gamma = 1. \tag{24}$$

Ist also $\beta = 0$, so müssen $\delta \neq 0$ und $\gamma = 0$ gelten; es folgt die Isomorphie

$$g : \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \in \boldsymbol{SO}_2 \longmapsto \alpha \in K^*. \tag{25}$$

Für $\beta \neq 0$ ergeben sich analog $\alpha = 0$, $\gamma = \beta^{-1}$, also

$$g : \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Somit ist $\boldsymbol{O}_2 = \boldsymbol{SO}_2 \cup s(\boldsymbol{SO}_2)$, wobei s die Transformation ist, die $\mathfrak{z}_1$ mit $\mathfrak{z}_2$ vertauscht; man prüft leicht nach, dass $\boldsymbol{O}_2$ halbdirektes Produkt von $\boldsymbol{SO}_2 = \operatorname{Ker}\det$ mit $\{\mathrm{id}_{\boldsymbol{V}}, s\} \cong \mathbf{Z}_2$ ist. □

Übung 12. Unter den Voraussetzungen von Satz 13 zeige man: $\boldsymbol{O}_2$ ist genau dann abelsch, wenn K zum Körper $\mathbf{Z} \bmod 3$ aus 3 Elementen isomorph ist.

2.2.8 Tensoren. Volumenfunktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die Biformen auf Tensorräume ausdehnen und in Vektorräumen mit Skalarprodukt Volumenfunktionen betrachten. Dazu setzen wir voraus, dass der Skalarbereich ein Körper ist.

Übung 13. Es sei K ein Körper und b eine alternierende oder σ-hermitesche Biform über dem Vektorraum $\boldsymbol{V}^n$. Man zeige: a) Die Biform b ist auf $\boldsymbol{V}^n$ nicht ausgeartet, wenn für jede Basis $(\mathfrak{a}_i)$ von $\boldsymbol{V}^n$

$$\det(b(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j)) \neq 0 \tag{27}$$

gilt. – b) Durch bilineare bzw. σ-lineare und lineare Ausdehnung von

$$b^{\otimes p}(\mathfrak{x}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{x}_p, \mathfrak{y}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{y}_p) := \prod_1^p b(\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{y}_\alpha) \qquad (p \in \mathbf{N}) \tag{28}$$

bzw.

$$b^{(p)}(\mathfrak{x}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{x}_p, \mathfrak{y}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{y}_p) := \det(b(\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{y}_\beta)) \qquad (0 < p \leq n) \tag{29}$$

werden bilineare bzw. σ-hermitesche Biformen auf den Tensorräumen $\bigotimes^p \boldsymbol{V}^n$, $\bigwedge^p \boldsymbol{V}^n$ definiert (vgl. auch Beispiel II.8.3.4); die Biformen $b^{\otimes p}$, $b^{(p)}$ sind genau dann nicht ausgeartet, wenn b nicht ausgeartet ist. – c) Ist b σ-hermitesch, so gilt das auch für $b^{\otimes p}$ und $b^{(p)}$. – d) Ist b alternierend, so sind $b^{\otimes p}$ und $b^{(p)}$ alternierend, falls p ungerade, und symmetrisch, falls p gerade ist.

Es sei wie in Übung 13 $\boldsymbol{V}^n$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt über dem Körper K; $\boldsymbol{UG}_n$ bezeichne seine Automorphismengruppe. Im allgemeinen ist nach (1.13) für $a \in \boldsymbol{UG}_n$ nur $\sigma(N(a))N(a) = 1$; will man also die Invarianz eines Volumens erreichen, so muss man sich auf die *spezielle unitäre Gruppe*

$$\boldsymbol{SUG}_n := \{a \in \boldsymbol{UG}_n | N(a) = 1\} \tag{30}$$

einschränken. Es sei $[.,\dots,.]$ eine Volumenfunktion und $(\mathfrak{a}_j)$ eine Einheitsbasis, d.h. es gelten

$$[\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n]=1 \text{ und } [\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_n]=\det(\xi_k^j),$$

wenn $\mathfrak{x}_k=\mathfrak{a}_j\xi_k^j$ die Basisdarstellung von $\mathfrak{x}_k$, $k=1,\dots,n$, ist. Wir beweisen

Lemma 14. *Es sei $[\boldsymbol{V}^n,\langle,\rangle]$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt über einem Körper K. Für $k\in\mathbf{N}$ und $\mathfrak{b}_\kappa\in\boldsymbol{V}^n$, $\kappa=1,\dots,k$, gilt*

$$\det(\langle\mathfrak{b}_\kappa,\mathfrak{b}_\lambda\rangle)=0 \tag{31}$$

dann und nur dann, wenn die Folge $(\mathfrak{b}_\kappa)$, $\kappa=1,\dots,k$, linear abhängig oder der von ihr aufgespannte Unterraum isotrop ist.

Beweis. Aus der linearen Abhängigkeit der $\mathfrak{b}_\lambda$ ergibt sich eine lineare Abhängigkeit der Spalten der Matrix $(\langle\mathfrak{b}_\kappa,\mathfrak{b}_\lambda\rangle)$ und es folgt (31). Seien also die $(\mathfrak{b}_\kappa)$ linear unabhängig; dann folgt die Behauptung aus Übung 13 (mit $n=k$, $\boldsymbol{V}^k=\mathfrak{L}(\mathfrak{b}_1,\dots,\mathfrak{b}_k)$, $b=\langle,\rangle$). □

Lemma 15. *Mit denselben Voraussetzungen wie in Lemma* 14 *sei $(\mathfrak{a}_\kappa)$, $\kappa=1,\dots,k$, eine Basis von $\boldsymbol{W}^k\subset\boldsymbol{V}^n$; in $\boldsymbol{W}^k$ sei $[.,\dots,.]$ die Volumenfunktion, für die $[\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_k]=1$ gilt* (vgl. Satz I.4.7.5). *Ferner seien*

$$\mathfrak{x}_\lambda=\mathfrak{a}_\kappa\xi_\lambda^\kappa\in\boldsymbol{W}^k,\ \kappa,\lambda=1,\dots,k. \tag{32}$$

Dann gilt

$$\det(\langle\mathfrak{x}_\kappa,\mathfrak{x}_\lambda\rangle)=a\cdot[\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_k]\cdot\sigma([\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_k]) \tag{33}$$

mit

$$a:=\det(\langle\mathfrak{a}_\kappa,\mathfrak{a}_\lambda\rangle)=\sigma(a).\ \square \tag{34}$$

Bemerkungen. 1. Ist $\boldsymbol{W}^k$ isotrop, so gilt $a=0$, und (33) reduziert sich auf $\det(\langle\mathfrak{x}_\kappa,\mathfrak{x}_\lambda\rangle)=0$. – 2. Ist $\sigma=\mathrm{id}_K$ und gilt $a=1$, was für orthonormierte oder symplektische Basen stets der Fall ist, so ergibt sich die Formel I.(6.3.8) für die *Gramsche Determinante*. – 3. Ist $K=\mathbf{R}$ und die Basis $(\mathfrak{a}_\alpha)$ pseudo-orthonormiert, so gilt $a=(-1)^l$, l der Index von $\boldsymbol{W}^k$, und man erhält die Formel

$$[\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_k]^2=|\det(\langle\mathfrak{x}_\kappa,\mathfrak{x}_\lambda\rangle)|,$$

vgl. II(8.3.47), wo allerdings die Absolutstriche vergessen wurden.

Folgerung 16. *Ist in Lemma* (15) *$k=n$, also $[.,\dots,.]$ eine Volumenfunktion in $\boldsymbol{V}^n$, so hängt die Konstante a nicht von der Wahl der Einheitsbasis $(\mathfrak{a}_i)$ mit $[\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_n]=1$ ab.*

Beweis. Ist $(\mathfrak{b}_i)$ eine weitere Einheitsbasis von $\boldsymbol{V}^n$, so gilt nach (33) und (34)

$$b:=\det(\langle\mathfrak{b}_i,\mathfrak{b}_j\rangle)=a.\ \square$$

2.2.9 Allgemeines Vektorprodukt

Es zeigt sich, dass man auch den Begriff des Vektorprodukts und den es beschreibenden Satz I.6.3.2 (vgl. auch Übung II.8.3.14) weitgehend verallgemeinern kann:

Satz 17. *Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein Vektorraum über einem Körper K mit der σ-Biform $\langle,\rangle$ als Skalarprodukt ($\sigma = \mathrm{id}_K$, falls $\langle,\rangle$ bilinear). Ferner sei $[.,\ldots,.]$ eine Volumenfunktion über $\boldsymbol{V}^n$. Dann gibt es zu jedem $(n-1)$-Tupel $(\mathfrak{c}_\alpha)$, $\alpha = 1,\ldots,n-1$, von Vektoren $\mathfrak{c}_\alpha \in \boldsymbol{V}^n$ genau einen Vektor $\mathfrak{c} \in \boldsymbol{V}^n$, der*

$$\langle \mathfrak{c}, \mathfrak{x}\rangle = [\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}, \mathfrak{x}] \text{ für alle } \mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}^n \tag{35}$$

erfüllt.

Beweis. Weil das Skalarprodukt vermöge $\mathfrak{y} \in \boldsymbol{V} \mapsto \langle \mathfrak{y}, .\rangle \in \boldsymbol{V}'$ eine σ-lineare Bijektion und die Volumenfunktion in jedem Argument linear ist, folgt unmittelbar die Existenz des Vektors $\mathfrak{c}$, der durch das $(n-1)$-Tupel $(\mathfrak{c}_\alpha)$ eindeutig bestimmt ist (vgl. Definition 1.7.2). Dieser Vektor $\mathfrak{c}$ wird das *Vektorprodukt* der Vektoren $\mathfrak{c}_\alpha$ genannt und mit $\mathfrak{c}_1 \times \ldots \times \mathfrak{c}_{n-1}$ bezeichnet. □

Satz 18. *Unter den Voraussetzungen von Satz 17 hat das Vektorprodukt die folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Abbildung*

$$(\mathfrak{c}_\alpha) \in \prod^{n-1} \boldsymbol{V}^n \mapsto \mathfrak{c}_1 \times \ldots \times \mathfrak{c}_{n-1} \in \boldsymbol{V}^n$$

ist σ-linear in jedem Argument $\mathfrak{c}_\alpha$.

2. *Diese Abbildung ist alternierend.*

3. *Es gilt $\mathfrak{c}_1 \times \ldots \times \mathfrak{c}_{n-1} = \mathfrak{o}$ genau dann, wenn die Folge $(\mathfrak{c}_\alpha)$, $\alpha = 1,\ldots,n-1$, linear abhängig ist.*

4. *Das Vektorprodukt ist orthogonal zu jedem seiner Faktoren:*

$$\langle \mathfrak{c}_1 \times \ldots \times \mathfrak{c}_{n-1}, \mathfrak{c}_\alpha\rangle = 0,\ \alpha = 1,\ldots,n-1. \tag{36}$$

5. *Es gilt*

$$\det(\langle \mathfrak{c}_\alpha, \mathfrak{c}_\beta\rangle) = a\langle \mathfrak{c}_1 \times \ldots \times \mathfrak{c}_{n-1}, \mathfrak{c}_1 \times \ldots \times \mathfrak{c}_{n-1}\rangle, \tag{37}$$

wobei a die nach Folgerung 16 zur Volumenfunktion gehörende Konstante ist.

6. *Das Vektorprodukt $\mathfrak{c}_1 \times \ldots \times \mathfrak{c}_{n-1}$ ist isotrop genau dann, wenn der von den Faktoren aufgespannte Unterraum $\mathfrak{L}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1})$ isotrop ist.*

7. *Für unitäre Transformationen $g \in \boldsymbol{UG}_n$ ist*

$$g(\mathfrak{c}_1) \times \ldots \times g(\mathfrak{c}_{n-1}) = g(\mathfrak{c}_1 \times \ldots \times \mathfrak{c}_{n-1})N(g^{-1}). \tag{38}$$

B e w e i s. Die Eigenschaften 1. bis 4. folgen unmittelbar aus der Definition. Zum Beweis von (37) wenden wir (33) auf $(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}, \mathfrak{c})$ mit $k = n$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 \times \ldots \times \mathfrak{c}_{n-1}$ an. Wegen (36) folgt

$$\det(\langle \mathfrak{c}_\alpha, \mathfrak{c}_\beta \rangle) \langle \mathfrak{c}, \mathfrak{c} \rangle = a \langle \mathfrak{c}, \mathfrak{c} \rangle^2;$$

dabei haben wir (35) mit $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ und $\langle \mathfrak{c}, \mathfrak{c} \rangle = \sigma(\langle \mathfrak{c}, \mathfrak{c} \rangle)$ benutzt. Ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$, so ist (37) nach 3. und Lemma 14 trivial. Nach 4. ist für $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{o}$ der Unterraum $\boldsymbol{W}^{n-1} = \mathfrak{L}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1})$ isotrop genau dann, wenn $\mathfrak{c}$ isotrop ist; denn $\mathfrak{c}$ ist zu $\boldsymbol{W}^{n-1}$ orthogonal. Damit gilt 6., und nach Lemma 14 folgt (37) aus der zuletzt hergeleiteten Gleichung. Zum Beweis von 7. setzen wir $\hat{\mathfrak{c}} := g(\mathfrak{c}_1) \times \ldots \times g(\mathfrak{c}_{n-1})$. Aus I.(5.7.32) ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathfrak{c}}, \mathfrak{x} \rangle &= [g(\mathfrak{c}_1), \ldots, g(\mathfrak{c}_{n-1}), g(g^{-1}(\mathfrak{x}))], \\ &= [\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_{n-1}, g^{-1}(\mathfrak{x})] N(g), \\ &= \langle \mathfrak{c}, g^{-1}(\mathfrak{x}) \rangle N(g), \\ &= \langle g(\mathfrak{c}) N(g^{-1}), \mathfrak{x} \rangle; \end{aligned}$$

dabei haben wir (1.18) benutzt:

$$N(g^{-1}) = N(g)^{-1} = \sigma(N(g)) \text{ für } g \in \boldsymbol{UG}_n. \ \square \tag{39}$$

Bemerkung. Da in $\mathbf{R}$ eine Ordnung existiert und man aus jeder positiven Zahl die positive Wurzel ziehen kann, ist 5. aus Satz I.6.3.2 eine im allgemeinen nicht mögliche Spezialisierung von 5. aus Satz 18; aus demselben Grund ist die alte Eigenschaft 6. im allgemeinen Fall nicht formulierbar, während die neue Eigenschaft 6. für euklidische Vektorräume gegenstandslos wird.

Übung 14. Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Satz 17 seien die $\mathfrak{c}_i$, $i = 1, \ldots, n$, orthogonal. Man beweise: a) Ist $(\mathfrak{c}_i)$ eine Einheitsbasis: $[\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n] = 1$, so gilt

$$a = \prod_{i=1}^{n} \langle \mathfrak{c}_i, \mathfrak{c}_i \rangle.$$

b) an einem Beispiel zeige man, dass die Umkehrung von a) nicht gilt.
c) Ist $(\mathfrak{b}_\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, n-1$, eine orthogonale Folge von Vektoren mit $\langle \mathfrak{b}_\alpha, \mathfrak{b}_\alpha \rangle \neq 0$, so ergänzt

$$\mathfrak{b}_n := \mathfrak{b} / \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle \text{ mit } \mathfrak{b} := \mathfrak{b}_1 \times \ldots \times \mathfrak{b}_{n-1} \tag{40}$$

die Folge $(\mathfrak{b}_\alpha)$ zu einer Einheitsbasis von $\boldsymbol{V}^n$. – d) Für beliebige Vektoren $\mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{y}_\beta \in \boldsymbol{V}^n$ gilt in Verallgemeinerung von (37)

$$\langle \mathfrak{x}_1 \times \ldots \times \mathfrak{x}_{n-1}, \mathfrak{y}_1 \times \ldots \times \mathfrak{y}_{n-1} \rangle = a \det(\langle \mathfrak{x}_\alpha, \mathfrak{y}_\beta \rangle). \tag{41}$$

(Hinweis. Man beachte die Linearität bzw. σ-Linearität der in (41) auftretenden Funktionen in sllen Variablen und benutze Basisdarstellungen.)

2.3 Projektive Geometrie einer Polarität

In diesem Abschnitt betrachten wir σ-hermitesche und speziell bilineare Skalarprodukte aus projektiver Sicht. Hierdurch beschränken wir uns auf Polaritäten; für die Untersuchung von ausgearteten Fällen gehe man wie in Übung 1.9.7 zu einer Polarität auf einem Kegelschnitt über. Wir setzen in diesem Abschnitt stets voraus, dass ein rechter Vektorraum $\boldsymbol{V}^{n+1}$ über einem Schiefkörper K, $\operatorname{char} K \neq 2$, mit einem σ-hermiteschem Skalarprodukt $\langle , \rangle$ gegeben sei; mit $\boldsymbol{P}^n$ bezeichnen wir den zu $\boldsymbol{V}$ gehörenden projektiven Raum, und F sei die durch $\langle , \rangle$ definierte Polarität, welche die möglicherweise leere Quadrik $Q = Q_F$ bestimmt; $\boldsymbol{PG}_n = \boldsymbol{PG}_n(F)$ sei die projektive Gruppe der Polarität F.

Natürlich werden diese Voraussetzungen später noch weiter spezialisiert; so werden wir in der zweiten Hälfte dieses Abschnittes nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearformen $\langle , \rangle$ betrachten

2.3.1 Die Quadrik einer Polarität

Zur projektiven Deutung der mit dem Skalarprodukt zusammenhängenden Begriffe erinnern wir daran, dass der bezüglich $\langle , \rangle$ zu einem Unterraum $\boldsymbol{W}$ orthogonale Unterraum $\boldsymbol{W}^\perp$ der durch die Polarität zugeordnete ist (vgl. (1.7.22)):

$$F: \ \boldsymbol{W} \in \mathfrak{P} \longmapsto F(\boldsymbol{W}) := \boldsymbol{W}^\perp \in \mathfrak{P}.$$

Die total isotropen Unterräume $\boldsymbol{E}$ sind gerade die in der Quadrik Q enthaltenen (Folgerung 1.9.15); ihre projektive Dimension erfüllt nach Folgerung 2.6 die Ungleichung

$$\operatorname{Dim} \boldsymbol{E} \leq (n-1)/2. \tag{1}$$

In Abschnitt 1.9 stellten wir fest, dass die isotropen Unterräume die Quadrik Q in ihrem Defektunterraum $\boldsymbol{W}_o = \boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{W}^\perp$ berühren (Folgerung 1.9.19). Aus dem Satz 2.3 von E. Witt folgt unmittelbar

Folgerung 1. *Zwei Punkte $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{P}^n$ sind $\boldsymbol{PG}_n$-äquivalent, wenn sie durch Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \boldsymbol{V}$ repräsentiert werden können, die*

$$\boldsymbol{a} = [\mathfrak{a}], \ \boldsymbol{b} = [\mathfrak{b}], \ \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle = \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle \tag{2}$$

erfüllen. Dual dazu sind zwei Hyperebenen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{P}^n$ $\boldsymbol{PG}_n$-äquivalent, wenn sie durch Gleichungen

$$\boldsymbol{A}: \ \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{x} \rangle = 0, \qquad \boldsymbol{B}: \ \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{x} \rangle = 0$$

mit $\boldsymbol{PG}_n$-äquivalenten Polen $\boldsymbol{A}^\perp = [\mathfrak{a}]$, $\boldsymbol{B}^\perp = [\mathfrak{b}]$ dargestellt werden können, für deren repräsentierende Vektoren (2) gilt. Speziell wirkt $\boldsymbol{PG}_n$ transitiv auf den Punkten und den Tangentialhyperebenen von Q. □

Im nächsten Abschnitt 2.4 werden die Orbits von Punkten, allgemeiner von Punktfolgen, genauer betrachtet. Wir beschränken uns hier auf das folgende

Beispiel 1. Es seien $K = \mathbf{R}$ und $F = F_{n+1,l}$ eine Polarität vom Index l, $0 \leq l \leq (n+1)/2$. Im Fall $0 < l < (n+1)/2$ gibt es drei Orbits von $\boldsymbol{PO}(l, n+1-l)$ in $\boldsymbol{P}^n$:

$$\begin{aligned} Q &= \{\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{P}^n | \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = 0\}, \\ I(Q) &:= \{\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{P}^n | \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle < 0\}, \\ A(Q) &:= \{\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{P}^n | \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle > 0\}. \end{aligned}$$

Die Menge $I(Q)$ heißt das *Innengebiet* und $A(Q)$ das *Außengebiet* der Quadrik. Bei geeigneter Normierung können wir wegen $\langle \mathfrak{x}\lambda, \mathfrak{x}\lambda\rangle = \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle\lambda^2$ die Punkte $\boldsymbol{x}$ stets durch Vektoren $\mathfrak{x}$ repräsentieren, die

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle = 0,\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle = -1 \ \text{ oder } \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle = 1 \tag{3}$$

erfüllen.Im Falle $l = 0$ gelten $Q = I(Q) = \emptyset$ und $A(Q) = \boldsymbol{P}^n$; die Gruppe $\boldsymbol{PO}(n+1)$ wirkt transitiv auf dem $\boldsymbol{P}^n$. Die durch diese Wirkung auf dem projektiven Raum bestimmte Geometrie heißt die *elliptische Geometrie*, wir werden uns weiter unten noch ausführlich mit ihr befassen. Ist $l = 1$, so liegt der Punkt $\boldsymbol{x}$ in $I(Q)$ genau dann, wenn seine Polare $F(\boldsymbol{x})$ die Quadrik Q nicht schneidet. Für alle l mit $0 < l < (n+1)/2$ liegt ein Punkt $\boldsymbol{x}$ genau dann in $A(Q)$, wenn seine Polare $F(\boldsymbol{x})$ die Quadrik Q in einer Quadrik $F(\boldsymbol{x})\cap Q$ vom selben Index l schneidet, während die Polare $F(\boldsymbol{x})$ eines Punktes $\boldsymbol{x} \in I(Q)$ die Quadrik Q in einer Quadrik vom kleineren Index trifft; zum Beweis genügt es, eine pseudo-orthonormierte Basis an die Unterräume $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x}^\perp = F(\boldsymbol{x})$ anzupassen und den Trägheitssatz von Sylvester anzuwenden. Der Fall $l = (n+1)/2$ hat eine gewisse Sonderstellung, vgl. Beispiel 1.3 und Übung 1. Die beschriebenen Eigenschaften der Polaren in der reellen projektiven Geometrie werden von M. Stary [73] zum Ausgangspunkt der Definition von Innen- und Außengebiet einer Quadrik bei beliebigem Grundkörper K mit $\operatorname{char} K \neq 2$ gemacht. □

Übung 1. Es sei $Q \subset \boldsymbol{P}^n(\mathbf{R})$ eine nicht ausgeartete Quadrik. Man zeige, dass es genau dann eine Projektivität $a \in \boldsymbol{PO}(l, n+1-l)$ gibt, die das Außengebiet $A(Q)$ in das Innengebiet $I(Q)$ überführt und umgekehrt, wenn für den Index l der Q bestimmenden Polarität $l = (n+1)/2$ gilt.

Übung 2. Wir betrachten den pseudo-euklidischen Vektorraum $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^{n+1}$ vom Index l, $0 < l \leq (n+1)/2$. Man zeige, dass die zugehörige Quadrik $Q_l \subset \boldsymbol{P}^n(\mathbf{R})$ als Orbitraum

$$Q_l \approx (S^{l-1} \times S^{n-l})/\mathbf{Z}_2$$

dargestellt werden kann, wobei $\mathbf{Z}_2 = \{\pm\,\mathrm{id}_{\boldsymbol{V}}\}$ gilt und S^{l-1}, S^{n-l} Hypersphären in zwei zueinander komplementären Unterräumen von $\boldsymbol{V}$ sind. (Hinweis. Man schreibe die Gleichung der Quadrik in der Gestalt

$$\sum_{a=1}^{l} |x^a|^2 = \sum_{k=l+1}^{n+1} |x^k|^2, \tag{4}$$

wobei die x^i, $i = 1, \ldots, n+1$, homogene Koordinaten des Punktes $\boldsymbol{x} \in Q$ sind.) Speziell ist $Q_1 \approx S^{n-1}$ eine Hypersphäre des projektiven Raums $\boldsymbol{P}^n(\mathbf{R})$. Aus einfachen differentialgeometrischen Überlegungen folgt, dass die nicht leeren, nicht ausgearteten Quadriken Q_l kompakte, zusammenhängende Hyperflächen in $\boldsymbol{P}^n(\mathbf{R})$ sind.

Übung 3. Man zeige: Unter den Voraussetzungen von Übung 2 sind Innen- und Außengebiet einer Quadrik Q_l offene, zusammenhängende Teilmengen von $\boldsymbol{P}^n(\mathbf{R})$.

Übung 4. Es sei $\boldsymbol{V}^n$ der n-dimensionale pseudo-euklidische Vektorraum vom Index l. Mit $E_{n,k,s,d}$ bezeichnen wir die Menge der k-dimensionalen Unteräume $\boldsymbol{H}^k \subset \boldsymbol{V}^n$, auf denen das Skalarprodukt den Index s und den Defekt d hat; dabei ist $0 \leq s$, $0 \leq d$, $s + d \leq k$. Wir setzen $p := k - s - d$. Man zeige:$E_{n,k,s,d}$ ist genau dann nicht leer, wenn $s + d \leq l$ und $p + d \leq n - l$ gelten.

Beispiel 2. Es sei $\boldsymbol{P}^n(\mathbf{C})$ der komplex-orthogonale projektive Raum mit der durch ein bilineares Skalarprodukt $\langle,\rangle$ gegebenen Quadrik Q. Da man jeden Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n \setminus Q$ durch $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]$, $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}$ mit $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = 1$ darstellen kann, wirkt $G := \boldsymbol{PO}(n+1, \mathbf{C})$ transitiv auf Q und auf $\boldsymbol{P}^n \setminus Q$. Die Graßmann-Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{P}_{n,k}$ der k-Ebenen zerfällt unter der Wirkung von G in endliche viele Orbits, die durch den Rank r von $\langle,\rangle|\boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W}$ auf den zugehörigen $(k+1)$-dimensionalen Unterräumen $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ (oder äquivalent durch deren Defekt $d = k - r + 1$) gekennzeichnet werden.□

Übung 5. Unter den Voraussetzungen von Beispiel 2 zeige man: Für jedes $d \in \mathbf{N}$, das $0 \leq d \leq (n+1)/2$ und $d \leq k+1$ erfüllt, gibt es Unterräume $\boldsymbol{W}^{k+1} \subset \boldsymbol{V}^{n+1}$ vom Defekt d. Für die Dimensionen $n \leq 4$ diskutiere man alle Lagebeziehungen von k-Ebenen zur Quadrik Q.

Übung 6. Man gebe einen Homöomorphismus der Graßmann-Mannigfaltigkeit $\tilde{\boldsymbol{G}}_2(\mathbf{R}^{n+1})$ der orientierten zweidimensionalen Unterräume des $(n+1)$-dimensionalen reellen Vektorraumes auf die Quadrik $Q \subset \boldsymbol{P}^n(\mathbf{C})$ aus Beispiel 2 an. Hinweis. Man betrachte den komplexen Vektorraum $\mathbf{C}^{n+1}$ von $\boldsymbol{P}^n(\mathbf{C})$ als Komplexifizierung des reellen euklidischen Vektorraum $\mathbf{R}^{n+1}$ bei bilinearer Ausdehnung des Skalarprodukts. Ist $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ eine positiv orientierte, orthonormierte Basis von $\boldsymbol{U}^2 \subset \mathbf{R}^{n+1}$, so rechtfertige man die Definition des Homöomorphismus $\varphi(\boldsymbol{U}^2) := [\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2\, \mathrm{i}]_{\mathbf{C}}$ und überprüfe die Behauptung.

Beispiel 3. Die hermiteschen Skalarprodukte vom Index l in den projektiven Geometrien über $\mathbf{C}$ und $\mathbf{H}$ ergeben ein zur pseudo-orthogonalen Geometrie in vielen Punkten ähnliches Bild. Die Gleichung der Quadrik Q_l lässt sich wieder in der Gestalt (4) schreiben, wobei jetzt natürlich das Normquadrat bezüglich $\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{H}$ zu betrachten ist. Gilt $l = 0$, so ist die Quadrik $Q_0 = \emptyset$ wieder leer, und die projektiv-unitäre Gruppe $\boldsymbol{PU}(n+1)$ bzw. $\boldsymbol{PSp}(n+1)$ wirkt transitiv über dem projektiven Raum $\boldsymbol{P}^n$. Andernfalls lassen sich wie in Beispiel 1 Innen- und Außengebiet von Q definieren. Geht man zu den Reellifizierungen über, so entsteht aus (4) eine Gleichung in den reellen Koordinaten, die wieder bereits in der Normalform (4) mit $K = \mathbf{R}$ erscheint; für jedes Betragsquadrat sind zwei bzw. 4 reelle Quadrate zu schreiben. In der Reellifizierung haben wir also Spezialfälle der in Beispiel 1 betrachteten Quadriken. Im komplexen Fall ist das Urbild $\theta^{-1}(Q_l)$ bei der Hopfschen Faserung $\theta : \boldsymbol{P}^{2n+1}(\mathbf{R}) \to \boldsymbol{P}^n(\mathbf{C})$, vgl. (1.10.3), eine Hyperquadrik $Q_{2l} \subset \boldsymbol{P}^{2n+1}(\mathbf{R})$, während im quaternionischen Fall die Quadrik Q_l als Urbild bei der Hopfschen Faserung $\theta : \boldsymbol{P}^{4n+3}(\mathbf{R}) \to \boldsymbol{P}^n(\mathbf{H})$ eine reelle Hyperquadrik Q_{4l} hat. Bei Einschränkung der Hopfschen Faserungen auf diese Quadriken ergeben sich entsprechend Faserungen von Q_{2l} über $Q_l(\mathbf{C})$ durch eindimensionale und von Q_{4l} über $Q_l(\mathbf{H})$ durch dreidimensionale reelle projektive Räume. Im einfachsten Fall $(l, n) = (1, 1)$ ist $Q_1(\mathbf{C})$ der Kreis

$$|z^0|^2 = |z^1|^2, \text{ d.h. } |\zeta| = |z^1/z^0| = 1$$

auf der Riemannschen Zahlenkugel $S^2 = \boldsymbol{P}^1(\mathbf{C})$, und $\theta^{-1}(Q_1(\mathbf{C}))$ ist die durch

$$(x^0)^2 + (y^0)^2 = (x^1)^2 + (y^1)^2$$

beschriebene Quadrik $Q_2 \subset \boldsymbol{P}^3(\mathbf{R})$. Man beachte, dass durch die Polarität bei Einschränkung der Skalare kompliziertere Strukturen auf den Urbildräumen induziert werden, als nur die den angegebenen (reellen) Quadriken entsprechenden Polaritäten (vgl. Beispiel 1.10.12 und Übung 1.10.16). □

Beispiel 4. Über die Quadriken, die zu den quaternionisch-schiefhermiteschen Polaritäten H_n von $\boldsymbol{P}^{n-1}(\mathbf{H})$ gehören, scheint wenig bekannt zu sein. Bezeichnet b die H_n bestimmende schiefhermitesche Form, so erhält man wegen $b(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) \in \mathbf{R}^\perp$ durch $\langle\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle = -\,\mathrm{i}\,b(\mathfrak{x},\mathfrak{x}) = 0$ drei quadratische Gleichungen in reellen Koordinaten; die hierdurch bestimmte Quadrik wird also eine reell $(4n-7)$-dimensionale reelle Untermannigfaltigkeit des reell $(4n-4)$-dimensionalen Raums $\boldsymbol{P}^{n-1}(\mathbf{H})$ sein. Geht man in den Formeln (1.36) und (1.37) oder den dazu äquivalenten (1.38), (1.39) zur Reellifizierung von $\boldsymbol{V}_{|\mathbf{C}}$, also zu den reellen Koordinaten über, so erkennt man, dass diese reelle Untermannigfaltigkeit der Durchschnitt von drei reellen Hyperquadriken vom Index $2n$ ist. Im Fall $n = 2$ ergibt sich ein Kreis in $S^4 = \boldsymbol{P}^1(\mathbf{H})$, vgl. Beispiel 1.9.7. □

2.3.2 Effektivität

Wir betrachten nun wieder eine allgemeine Polarität F und wollen gewisse Effektivitätsaussagen über die Wirkungen ihrer projektiven Gruppe $\boldsymbol{PG}_n(F)$ beweisen.

Satz 2. *Es sei F eine durch die σ-Biform $\langle,\rangle$ definierte Polarität des $\boldsymbol{P}^n$, $n \geq 2$; die entsprechende Quadrik Q_F sei nicht leer. Gilt dann für ein $g \in \boldsymbol{PG}_n(F)$*

$$g|Q_F = \mathrm{id}_{Q_F},$$

so ist $g = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^n}$.

B e w e i s. Wir gehen zu dem rechten Vektorraum $\boldsymbol{V}^m$, $m = n+1$, mit dem σ-hermiteschem Skalarprodukt $\langle,\rangle$ über und haben folgende, zu Satz 2 äquivalente Aussage zu beweisen:

Satz 3. *Gibt es in $\boldsymbol{V}^m$, $m > 2$, isotrope Vektoren und gilt für ein $g \in \boldsymbol{CUG}_m$, dass für jeden isotropen Vektor $\mathfrak{v} \in \boldsymbol{V}$ eine Beziehung*

$$g\mathfrak{v} = \mathfrak{v}c_{\mathfrak{v}} \text{ mit } c_{\mathfrak{v}} \in K^*$$

erfüllt ist, so ist $g = \mathrm{id}_{\boldsymbol{V}} \cdot c$ für ein gewisses $c \in Z(K)^*$.

B e w e i s. Nach Lemma 2.4 gibt es zu jedem isotropen Vektor $\mathfrak{v}$ einen davon linear unabhängigen isotropen Vektor $\hat{\mathfrak{v}} \in \boldsymbol{V}$, der $\langle\mathfrak{v},\hat{\mathfrak{v}}\rangle = 1$ erfüllt. Dann ist die lineare Hülle $\boldsymbol{W}^2 := \mathfrak{L}(\mathfrak{v},\hat{\mathfrak{v}})$ ein nicht isotroper Unterraum, und es gilt $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} \oplus \boldsymbol{W}^\perp$. In dem ebenfalls nicht isotropen Unterraum $\boldsymbol{W}^\perp$ wählen wir eine Basis $(\mathfrak{b}_\alpha)$, $\alpha = 1,\ldots,m-2$, die wenigstens einen nicht isotropen Vektor, etwa $\mathfrak{b}_1$, enthält. Wir setzen $\lambda_\alpha := \langle\mathfrak{b}_\alpha,\mathfrak{b}_\alpha\rangle$ und

$$\mathfrak{v}_\alpha := \mathfrak{b}_\alpha - \hat{\mathfrak{v}}\lambda_\alpha/2 + \mathfrak{v}. \tag{5}$$

Man rechnet leicht nach, dass die Vektoren $\mathfrak{v}_\alpha$ isotrop sind. Nach Voraussetzung gibt es Elemente $c, \hat{c}, c_\alpha \in K^*$ mit

$$g\mathfrak{v} = \mathfrak{v}c,\; g\hat{\mathfrak{v}} = \hat{\mathfrak{v}}\hat{c},\; g\mathfrak{v}_\alpha = \mathfrak{v}_\alpha c_\alpha,\; \alpha = 1,\ldots,m-2.$$

Wenden wir diese Beziehungen auf die Definition (5) der $\mathfrak{v}_\alpha$ an, so folgt

$$\begin{aligned} g\mathfrak{v}_\alpha &= g\mathfrak{b}_\alpha - g\hat{\mathfrak{v}}\lambda_\alpha/2 + g\mathfrak{v} = (\mathfrak{b}_\alpha - \hat{\mathfrak{v}}\lambda_\alpha/2 + \mathfrak{v})c_\alpha \\ &= g\mathfrak{b}_\alpha - \hat{\mathfrak{v}}\hat{c}\lambda_\alpha/2 + \mathfrak{v}c,\; \alpha = 1,\ldots,m-2. \end{aligned}$$

Da $m > 2$ ist, gibt es wenigstens eine derartige Relation. Weil nun g die Orthogonalität und den Unterraum $\boldsymbol{W}$, also auch $\boldsymbol{W}^\perp$, invariant lässt, und die Vektoren $\mathfrak{v}, \hat{\mathfrak{v}}, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{m-2}$ eine Basis von $\boldsymbol{V}$ bilden, erhält man durch skalare Multiplikation mit $\hat{\mathfrak{v}}$ die Gleichungen $c = c_\alpha$, und aus der Invarianz von $\boldsymbol{W}^\perp$ folgt $g\mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{b}_\alpha c$, also $g|\boldsymbol{W}^\perp = \mathrm{id}_{\boldsymbol{W}^\perp} c$. Da g linear ist, folgt $c \in Z(K)^*$. Aus dem Vergleich der Koeffizienten des Vektors $\hat{\mathfrak{v}}$ ergibt sich schließlich

$$\hat{c}\lambda_\alpha/2 = (\lambda_\alpha/2)c = c(\lambda_\alpha/2),$$

also für $\alpha = 1$ wegen $\lambda_1 \neq 0$ die Behauptung $\hat{c} = c$ und $g = \mathrm{id}_{\boldsymbol{V}}\, c$. □

Übung 7. Man zeige, dass die Aussage von Satz 2 für $n = 1$ im allgemeinen nicht gilt.

Satz 4. *Es sei K ein Schiefkörper der Charakteristik* $\mathrm{char}\, K \neq 2, 3$, *oder es sei $n > 1$. Sind für die einem σ-hermiteschen Skalarprodukt entsprechende Polarität F alle nicht zur Quadrik von F gehörenden Punkte $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n \setminus Q_F$ Fixpunkte der Transformation $g \in \boldsymbol{PG}_n(F)$, so ist $g = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^n}$.*

Beweis. Ist $Q = Q_F = \emptyset$, so ist die Behauptung trivial. Es gelte nun $n > 1$, und es sei $\boldsymbol{v} = [\mathfrak{v}] \in Q$. Nach Lemma 2.4 gibt es einen zweiten isotropen Vektor $\hat{\mathfrak{v}}$ mit $\langle \mathfrak{v}, \hat{\mathfrak{v}} \rangle = 1$. Der Raum $\boldsymbol{W}^2 := \mathfrak{L}(\mathfrak{v}, \hat{\mathfrak{v}})$ ist als neutraler ein nicht isotroper Unterraum. Wegen $\dim \boldsymbol{V} > 2$ gibt es in dem ebenfalls nicht isotropen Unterraum $\boldsymbol{W}^\perp$ einen nicht isotropen Vektor $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$. Dann ist auch $\mathfrak{b} = \mathfrak{v} + \mathfrak{a}$ nicht isotrop, und nach Voraussetzung gibt es $a, b \in K$ mit

$$g(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\, a,\ g(\mathfrak{b}) = g(\mathfrak{v}) + g(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}\, b,$$

also auch

$$g(\mathfrak{v}) = g(\mathfrak{b}) - g(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{v} + \mathfrak{a})b - \mathfrak{a}a = \mathfrak{v}b + \mathfrak{a}(b - a).$$

Weil $\mathfrak{v}$ isotrop ist, gilt das auch für $g(\mathfrak{v})$, und es folgen $a = b$ und $g(\mathfrak{v}) = \mathfrak{v}b$. Daher bleibt der beliebig gewählte Punkt $\boldsymbol{v} = [\mathfrak{v}] \in Q$ ebenfalls fest, und es folgt die Behauptung.

Es sei nun $n = 1$, $Q \neq \emptyset$, und seien $\mathfrak{v}$, $\hat{\mathfrak{v}}$ wie oben definiert. Dann ist

$$\mathfrak{v}_+ := \mathfrak{v} + \hat{\mathfrak{v}},\ \mathfrak{v}_- := \hat{\mathfrak{v}} - \mathfrak{v} \tag{6}$$

eine orthogonale Basis von $\boldsymbol{V}^2$ mit

$$\langle \mathfrak{v}_+, \mathfrak{v}_+ \rangle = -\langle \mathfrak{v}_-, \mathfrak{v}_- \rangle = 2. \tag{7}$$

Wir betrachten die Punkte

$$\boldsymbol{c}(t) := [\mathfrak{v}_+ + \mathfrak{v}_- t] \in \boldsymbol{P},\ t \in K.$$

Für ihre Vektoren $\mathfrak{c}(t)$ gilt

$$\langle \mathfrak{c}(t), \mathfrak{c}(t) \rangle = 2(1 - \sigma(t)t);$$

denn es ist $2 \in Z(K)$: 2 gehört ja zum Ring $\mathbf{Z}1 \subset Z(K)$. Wegen $\mathrm{char}\, K \neq 2, 3$ gibt es ein $t_o \in \mathbf{Z}1$ mit $t_o \neq 0, -1, 1$. Weil nun für alle $t \in \mathbf{Z}1$ offenbar $\sigma(t) = t$ gilt, ist $\boldsymbol{c}_o = [\mathfrak{c}(t_o)] \notin Q$, $\mathfrak{c}_o := \mathfrak{c}(t_o) \neq \mathfrak{v}_+$, $\mathfrak{c}_o \neq \mathfrak{v}_-$. Nach Voraussetzung gibt es Skalare $b_+, b_-, c \in K^*$ so, dass

$$g(\mathfrak{v}_+) = \mathfrak{v}_+ b_+,\, g(\mathfrak{v}_-) = \mathfrak{v}_- b_-,\, g(\mathfrak{c}_o) = \mathfrak{c}_o c$$

gelten. Andererseits ist

$$g(\mathfrak{c}_o) = g(\mathfrak{v}_+) + g(\mathfrak{v}_-)t_o = \mathfrak{v}_+b_+ + \mathfrak{v}_-b_-t_o = (\mathfrak{v}_+ + \mathfrak{v}_-t_o)c.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $c = b_+$, $b_-t_o = t_oc$. Wegen $t_o \neq 0$, $t_o \in \mathbf{Z}1 \subset Z(K)$ folgt $b_+ = b_- = c$. Da $(\mathfrak{v}_+, \mathfrak{v}_-)$ eine Basis von $\boldsymbol{V}^2$ ist, erhalten wir wieder für die lineare Abbildung $g = \mathrm{id}_{\boldsymbol{V}}\, c$, also projektiv $g = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}}$. □

Bemerkung. Ist K ein Körper, so genügt es, die Existenz von $n+2$ Fixpunkten von g in allgemeiner Lage nachzuweisen, vgl. Satz 1.3.14. Die Formel (1.3.35) mit $f = g$, $\boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}$ ergibt $g = \mathrm{id}_{\boldsymbol{P}^n}$.

2.3.3 Orthogonale Geometrie. Spiegelungen

In diesem Abschnitt wollen wir hauptsächlich die von E. Artin [3] *orthogonal* genannten Geometrien betrachten. Es sei also eine durch ein bilineares Skalarprodukt $\langle , \rangle$ definierte Polarität F gegeben, wobei der Skalarbereich K notwendig ein Körper ist. Die Isotropiegruppe des auf einem n-dimensionalen Vektorraum $\boldsymbol{V}^n$ gegebenen Skalarprodukts wird mit $\boldsymbol{O}_n = \boldsymbol{O}_n(\langle , \rangle)$ bezeichnet und *orthogonale Gruppe* genannt. Die wichtigsten Spezialfälle sind die reellen Gruppen $\boldsymbol{O}(n)$, $\boldsymbol{O}(l, n-l)$ und die komplex-orthogonale Gruppe $\boldsymbol{O}(n, \mathbf{C})$.

Für die Zwecke dieses Abschnittes wollen wir den schon in Beispiel 1.4.6 eingeführten Begriff einer Spiegelung spezialisieren. Es sei $\boldsymbol{W}^{n-1} \subset \boldsymbol{V}^n$ ein nicht isotroper (n-1)-dimensionaler Unterraum; dann ist sein orthogonales Komplement $\boldsymbol{W}^\perp$ ein nicht isotroper, eindimensionaler Unterraum, den wir die *Normale* von $\boldsymbol{W}$ nennen; jeder Vektor $\mathfrak{n} \in \boldsymbol{W}^\perp$, $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{o}$, ist ein *Normalenvektor* von $\boldsymbol{W}$. Die direkte Zerlegung $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} \oplus \boldsymbol{W}^\perp$ bestimmt dann nach Beispiel 1.4.6 eine Spiegelung

$$s_W : \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_n \in \boldsymbol{V} \longmapsto \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_n \in \boldsymbol{V}, \ (\mathfrak{x}_0 \in \boldsymbol{W}, \mathfrak{x}_n \in \boldsymbol{W}^\perp),$$

welche wir *orthogonale Spiegelung* an dem nicht isotropen (n-1)-dimensionalen Unterraum $\boldsymbol{W}^{n-1}$ nennen; in diesem Abschnitt wollen wir unter einer Spiegelung stets eine derartige orthogonale Spiegelung verstehen. Ist $\mathfrak{n}$, $\langle \mathfrak{n}, \mathfrak{n} \rangle = \rho \neq 0$, ein Normalenvektor von $\boldsymbol{W}$, so gilt

$$s_W : \mathfrak{x} = \mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} \longmapsto s_W(\mathfrak{x}) := \mathfrak{x} - \mathfrak{n} \cdot 2\langle \mathfrak{n}, \mathfrak{x} \rangle / \rho. \tag{8}$$

Eine einfache Rechnung zeigt $s_W \in \boldsymbol{O}_n$. Die entsprechenden projektiven Abbildungen werden ebenfalls *orthogonale Spiegelungen* genannt. Offenbar ist die Norm (Determinante; vgl. I(5.7.30)) einer Spiegelung stets $N(s_W) = -1$. Wir beweisen nun einen Satz, der die Aussage von Lemma II.8.10.6 verschärft(vgl. E. Artin [3], Theorem 3.20):

Satz 5. *Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein Vektorraum über einem Körper K, $\operatorname{char} K \neq 2$, und $\langle , \rangle$ ein symmetrisches bilineares Skalarprodukt über $\boldsymbol{V}^n$. Dann lässt sich jede orthogonale Transformation $g \in \boldsymbol{O}_n$ als Produkt von $r \leq n$ Spiegelungen darstellen.*

Beweis. Ist $n = 0, 1$ oder $g = \mathrm{id}_V$, so ist die Behauptung trivial. Wir nehmen an, dass der Satz schon für alle natürlichen Zahlen $m < n$ bewiesen sei, und führen einen Induktionsbeweis in vier Schritten.

1. Es möge ein nicht isotroper Vektor $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\}$ existieren, der $g(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ erfüllt, und es sei $\boldsymbol{W} := (\mathfrak{a}K)^\perp$ der zu $\mathfrak{a}$ orthogonale Unterraum. Da $\mathfrak{a}$ nicht isotrop ist, erhalten

wir die orthogonale Zerlegung $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} \oplus \mathfrak{a}K$ in g-invariante, nicht isotrope Unterräume. Nach Induktionsvoraussetzung finden wir $r \leq n-1$ Spiegelungen $\tilde{s}_\nu$ an Hyperebenen $\boldsymbol{U}_\nu$ von $\boldsymbol{W}$ so, dass $g|\boldsymbol{W} = \tilde{s}_r \circ \ldots \circ \tilde{s}_1$ gilt. Dann ist nach Übung 2.5 $s_\nu := \tilde{s}_\nu + \mathrm{id}_{\mathfrak{a}K} \in \boldsymbol{O}_n$; diese Abildung ist eine Spiegelung an dem Unterraum $\boldsymbol{W}_\nu := \boldsymbol{U}_\nu \oplus \mathfrak{a}K$, und es gilt $g = s_r \circ \ldots \circ s_1$ mit $r \leq n-1$.

2. Es möge nun ein nicht isotroper Vektor $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\}$ existieren, für den $\mathfrak{b} := g(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ nicht isotrop ist; sei s die Spiegelung an dem ebenfalls nicht isotropen Unterraum $\boldsymbol{W} := (\mathfrak{b}K)^\perp$. Wegen

$$\langle g(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}, g(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a} \rangle = \langle g(\mathfrak{a}), g(\mathfrak{a}) \rangle - \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle = 0$$

ist $g(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a} \in \boldsymbol{W}$. Daher gelten

$$s(g(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}) = -g(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a},\ s(g(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a},$$

und durch Addition folgt $s \circ g(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ für den nicht isotropen Vektor $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$. Nach 1. können wir $s \circ g$ als Produkt von $r < n$ Spiegelungen s_ν darstellen, und damit ist $g = s \circ s_r \circ \ldots \circ s_1$ ein Produkt von $r+1 \leq n$ Spiegelungen.

3. Wir behandeln nun den Fall $\dim \boldsymbol{V} = 2$. Nach 1. und 2. gilt die Behauptung, wenn $\boldsymbol{V}$ keine isotropen Vektoren enthält. Sei also $\mathfrak{v} \in \boldsymbol{V}$ ein isotroper Vektor. Nach Lemma 2.4 finden wir eine isotrope Basis $(\mathfrak{v}, \hat{\mathfrak{v}})$ von $\boldsymbol{V}$ mit $\langle \mathfrak{v}, \hat{\mathfrak{v}} \rangle = 1$. Da jeder isotrope Vektor von $\boldsymbol{V}$ zu $\mathfrak{v}$ oder $\hat{\mathfrak{v}}$ proportional sein muss, gibt es für $g \in \boldsymbol{O}_2$ nur folgende Möglichkeiten:

a) $\quad g\mathfrak{v} = \hat{\mathfrak{v}}\beta,\ g\hat{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v}\beta^{-1},$

b) $\quad g\mathfrak{v} = \mathfrak{v}\beta,\ g\hat{\mathfrak{v}} = \hat{\mathfrak{v}}\beta^{-1}.$

Im Fall a) ist $g(\mathfrak{v} + \hat{\mathfrak{v}}\beta) = \mathfrak{v} + \hat{\mathfrak{v}}\beta$ ein nicht isotroper, bei g fester Vektor, und nach 1. gilt die Behauptung. Im Fall b) können wir $\beta \neq 1$ voraussetzen, weil sonst $g = \mathrm{id}_V$ gilt. Dann sind die Vektoren $\mathfrak{a} := \mathfrak{v} + \hat{\mathfrak{v}}$ und

$$g(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a} = \mathfrak{v}(\beta - 1) + \hat{\mathfrak{v}}(\beta^{-1} - 1)$$

nicht isotrop, und die Behauptung folgt aus 2.

4. Wir können nun annehmen, dass $\dim \boldsymbol{V} \geq 3$ ist, dass jeder nicht isotrope Vektor $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{V}$ nicht invariant ist: $g(\mathfrak{a}) \neq \mathfrak{a}$, und dass für ihn $g(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}$ isotrop ist. Hieraus lässt sich schließen, dass $g(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}$ sogar für alle $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{V}$ isotrop ist. Ist nämlich $\mathfrak{v} \in \boldsymbol{V}$ isotrop, so ist auch der $(n-1)$-dimensionale Unterraum $(\mathfrak{v}K)^\perp$ isotrop, und sein Defekt ist 1. Daher gibt es einen nicht isotropen Vektor $\mathfrak{a} \in (\mathfrak{v}K)^\perp$. Es gelten also

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle \neq 0 \text{ und } \langle \mathfrak{a} + \mathfrak{v}c, \mathfrak{a} + \mathfrak{v}c \rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle \neq 0$$

für alle $c \in K$. Nach unserer Annahme sind die Vektoren $g(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}$ und

$$g(\mathfrak{a} + \mathfrak{v}c) - (\mathfrak{a} + \mathfrak{v}c) = g(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a} + (g(\mathfrak{v}) - \mathfrak{v})c$$

isotrop. Für das Skalarquadrat des letzten Vektors gilt also

$$0 = 2\langle g(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}, g(\mathfrak{v}) - \mathfrak{v} \rangle c + \langle g(\mathfrak{v}) - \mathfrak{v}, g(\mathfrak{v}) - \mathfrak{v} \rangle c^2.$$

Setzen wir hier $c = \pm 1$ ein und addieren die beiden so entstehenden Gleichungen, so folgt $\langle g(\mathfrak{v}) - \mathfrak{v}, g(\mathfrak{v}) - \mathfrak{v} \rangle = 0$, und $g(\mathfrak{v}) - \mathfrak{v}$ ist isotrop.

Aus dem Bewiesenem folgt, dass das Bild $\boldsymbol{W} := (g - \mathrm{id}_V)(\boldsymbol{V}) \neq \{\mathfrak{o}\}$ ein total isotroper Unterraum von $\boldsymbol{V}$ ist. Es sei nun $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{V}$ und $\mathfrak{b} \in \boldsymbol{W}^\perp$. Dann ist

$$0 = \langle g(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}, g(\mathfrak{b}) - \mathfrak{b}\rangle = \langle g(\mathfrak{a}), g(\mathfrak{b})\rangle - \langle \mathfrak{a}, g(\mathfrak{b})\rangle - \langle g(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle.$$

Wegen $\langle g(\mathfrak{a}), g(\mathfrak{b})\rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle$ und $\mathfrak{b} \in \boldsymbol{W}^\perp$ folgen

$$\langle g(\mathfrak{a}) - \mathfrak{a}, \mathfrak{b}\rangle = 0,\ \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} - g(\mathfrak{b})\rangle = 0.$$

Da die letzte Gleichung für alle $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{V}$ gilt, ergibt sich $g(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$, also $g|\boldsymbol{W}^\perp = \mathrm{id}_{W^\perp}$. Da nach unserer Annahme kein nicht isotroper Fixvektor existiert, muss $\boldsymbol{W}^\perp$ ebenfalls ein total isotroper Unterraum sein.

Nach Folgerung 2.6 ist

$$\dim \boldsymbol{W} \leq n/2,\ \dim \boldsymbol{W}^\perp \leq n/2,$$

und wegen $\dim \boldsymbol{W} + \dim \boldsymbol{W}^\perp = n$ und $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{W}^\perp$ folgen

$$\dim \boldsymbol{W} = \dim \boldsymbol{W}^\perp = n/2 \text{ und } \boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}^\perp.$$

Nach Satz 2.5 muss also $\boldsymbol{V}$ ein neutraler Raum und speziell $n = \dim \boldsymbol{V} = 2r$ gerade sein. Der Automorphismus g lässt jedes Element von $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}^\perp$ fest und hat daher die Form (2.21). Folglich gilt $N(g) = 1$. Hieraus ergibt sich, dass für einen neutralen Raum $\boldsymbol{V}^{2r}$ und jedes g mit $N(g) \neq 1$ die Behauptung erfüllt ist. Es sei nun s eine beliebige Spiegelung und $g \in \boldsymbol{O}_n$ ein Element mit $N(g) = 1$. Dann gilt $N(s \circ g) = N(s) \cdot N(g) = -1$; folglich gibt es eine Darstellung $s \circ g = s_k \circ \ldots \circ s_1$ von $s \circ g$ als Produkt von $k \leq 2r$ Spiegelungen. Da $N(s \circ g) = (-1)^k = -1$ ist, muss k ungerade und daher kleiner als $2r$ sein. Hieraus folgt: $g = s \circ s_k \circ \ldots \circ s_1$ ist als ein Produkt von höchstens $n = 2r$ Spiegelungen dargestellt. □

Folgerung 6. *Für alle $g \in \boldsymbol{O}_n$ gilt $N(g^2) = 1$. Die spezielle orthogonale Gruppe*

$$\boldsymbol{SO}_n := \{g \in \boldsymbol{O}_n | N(g) = 1\}$$

besteht aus allen denjenigen orthogonalen Transformationen, die sich als Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen darstellen lassen. □

Man nennt die Elemente $g \in \boldsymbol{SO}_n$ auch *eigentliche* und die aus $\boldsymbol{O}_n \setminus \boldsymbol{SO}_n$ *uneigentliche Bewegungen*, oder *Drehungen* bzw. *Drehspiegelungen*.

Folgerung 7. *Ist $g \in \boldsymbol{O}_n$ als Produkt von $r \leq n$ Spiegelungen darstellbar, so hat der Raum der Fixvektoren $\boldsymbol{U} := \{\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}^n | g\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\}$ mindestens die Dimension $\dim U \geq n - r$. Ist also n ungerade (bzw. gerade), so hat jede eigentliche (bzw. uneigentliche) Bewegung g wenigstens einen Fixvektor $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, also einen Fixpunkt in $\boldsymbol{P}^{n-1}(\boldsymbol{V})$.*

Beweis. Ist $g = s_r \circ \ldots \circ s_1$, s_ρ die Spiegelung an $\boldsymbol{W}_\rho^{n-1}$, so gilt für alle

$$\mathfrak{x} \in \boldsymbol{U}_r := \bigcap_{\rho=1}^{r} \boldsymbol{W}_\rho$$

jedenfalls $g(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$. Durch Induktion beweist man leicht $\dim \boldsymbol{U}_k \geq n-k$, und wegen $\boldsymbol{U} \supset \boldsymbol{U}_r$ folgt $\dim U \geq n-r$. Wenn n ungerade ist, muss also für jede eigentliche Bewegung $\dim U \geq 1$ gelten, und wenn n gerade ist, gilt das für jede uneigentliche Bewegung. □

Übung 8. Es sei $g \in \boldsymbol{O}_n$ ein Element, das nicht als Produkt von weniger als n Spiegelungen dargestellt werden kann. Man zeige, dass dann das erste (oder letzte) Element in einer Darstellung $g = s_n \circ \ldots \circ s_1$ als eine beliebig vorgegebene Spiegelung s gewählt werden kann.

Übung 9. Es sei $g \in \boldsymbol{O}_n$ eine Involution. Man zeige: a) Die Zerlegung $\boldsymbol{V}^n = \boldsymbol{W}_1 \oplus \boldsymbol{W}_{-1}$ in die Eigenunterräume der einzig möglichen Eigenwerte ± 1 ist orthogonal. – b) Die Eigenunterräume $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_{-1}$ sind nicht isotrop. – c) Es gibt keine orthogonale Spiegelung an einer isotropen Hyperebene. (Vgl. Beispiel 1.4.6.)

Übung 10. Man zeige: a) Ist $g \in \boldsymbol{O}_n$ und gilt $g|\boldsymbol{W}^{n-1} = \mathrm{id}_W$ für eine isotrope Hyperebene $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}^n$, so ist $g = \mathrm{id}_V$. (Hinweis. Man wende Lemma 2.4 auf einen Vektor $\mathfrak{v} \neq \mathfrak{o}$ des Defektunterraums von $\boldsymbol{W}$ an.) – b) Sind $g, h \in \boldsymbol{O}_n$ und ist $\boldsymbol{U}^{n-1} \subset \boldsymbol{V}^n$ eine Hyperebene, für die $g|\boldsymbol{U} = h|\boldsymbol{U}$ gilt, so ist $g = h$ oder $g = s_U \circ h$; ist $\boldsymbol{U}$ isotrop, so ist $g = h$.

Nach Übung 9 gibt es keine orthogonalen Spiegelungen an isotropen Hyperebenen. Dieser Sachverhalt wird in dem folgenden Satz verallgemeinert:

Satz 8. *Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein Vektorraum mit einem symmetrischem, bilinearen Skalarprodukt $\langle , \rangle$ und $\varphi : \boldsymbol{U} \to \tilde{\boldsymbol{U}}$ ein Isomorphismus des Unterraums $\boldsymbol{U}$ auf den Unterraum $\tilde{\boldsymbol{U}}$ (vgl. Definition 2.2). Man kann genau dann (nach dem Satz von E. Witt existierende) Fortsetzungen $g \in \boldsymbol{O}_n$ von φ mit beliebig vorgegebener Norm $N(g) = \pm 1$ finden, wenn gilt*

$$\dim \boldsymbol{U} + \operatorname{def} \boldsymbol{U} < \dim \boldsymbol{V}. \tag{9}$$

B e w e i s. Sind $g_1, g_2 \in \boldsymbol{O}_n$ Fortsetzungen mit verschiedener Norm, so ist

$$g := g_2^{-1} \circ g_1 \in \boldsymbol{O}_n$$

eine Abbildung mit der Norm $N(g) = -1$, welche $g|\boldsymbol{U} = \mathrm{id}_U$ erfüllt; es ist also zu zeigen, dass man id_U genau dann zu einer uneigentlichen Bewegung fortsetzen kann, wenn (9) gilt. Wir zerlegen $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_o \oplus \boldsymbol{U}_1$ in eine orthogonale Summe seines Defektunterraums $\boldsymbol{U}_o$ und eines Komplements $\boldsymbol{U}_1$. Dann ist $\boldsymbol{U}_1$ nicht isotrop; in $\boldsymbol{U}_1^\perp$ gibt es einen total isotropen Unterraum $\hat{\boldsymbol{U}}_o$, $\dim \hat{\boldsymbol{U}}_o = \dim \boldsymbol{U}_o$ und $\boldsymbol{U}_o \oplus \hat{\boldsymbol{U}}_o$ nicht isotrop (nach Satz 2.5). Offenbar ist $\dim \boldsymbol{U} \oplus \hat{\boldsymbol{U}}_o = \dim \boldsymbol{U} + \operatorname{def} \boldsymbol{U}$, und $\boldsymbol{U} \oplus \hat{\boldsymbol{U}}_o$ ist nicht isotrop. Wenn (9) gilt, gibt es eine nicht isotrope Hyperebene $\boldsymbol{W}^{n-1} \supset \boldsymbol{U} \oplus \hat{\boldsymbol{U}}_o$, und die Spiegelung s_W an dieser Hyperebene erfüllt $N(s_W) = -1$ und $s_W|\boldsymbol{U} = \mathrm{id}_U$. Es sei nun umgekehrt $\dim \boldsymbol{U} + \operatorname{def} \boldsymbol{U} = n$. Dann ist $\boldsymbol{V}^n = \hat{\boldsymbol{U}}_o \oplus \boldsymbol{U} = \hat{\boldsymbol{U}}_o \oplus \boldsymbol{U}_o \oplus \boldsymbol{U}_1$. Da $\hat{\boldsymbol{U}}_o \oplus \boldsymbol{U}_o = \boldsymbol{U}_1^\perp$ ein neutraler Raum ist und $\boldsymbol{U}_o \subset \boldsymbol{U}$ gilt, ist $g|\boldsymbol{U}_1^\perp$ eine Abbildung, welche die Bedingungen aus Übung 2.11 erfüllt. Wegen $g|\boldsymbol{U}_1 = \mathrm{id}_{U_1}$ folgt

$$N(g) = N(g|\boldsymbol{U}_1) \cdot N(g|\boldsymbol{U}_1^\perp) = 1. \qquad \square$$

Übung 11. a) Man stelle die Gleichungen der Quadriken Q_F auf, die zu den in Satz 1.9.4 klassifizierten reellen autopolaren Abbildungen gehören. – b) Man bestimme die maximale Dimension der in Q_F enthaltenen projektiven Unterräume. – c) Man zeige, dass man jeden Typ dieser Quadriken $Q_F \subset \boldsymbol{P}^n$ als Schnitt $Q_F = \boldsymbol{P}^n \cap \tilde{Q}$ einer n-Ebene $\boldsymbol{P}^n \subset \tilde{\boldsymbol{P}}^N$ mit einer geeigneten Quadrik $\tilde{Q}$ eines größeren projektiven Raums $\tilde{\boldsymbol{P}}^N$ erhalten kann, und bestimme den kleinsten Wert von N (in Abhängigkeit von n und vom Typ von F), für den eine solche Darstellung möglich ist.

Übung 12. Es sei $(\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ ein Polarsimplex der Polarität F des n-dimensionalen projektiven Raumes $\boldsymbol{P}^n$. Bezeichnet s_i die Spiegelung an der i-ten Seite $F(\boldsymbol{a}_i)$ des Polarsimplexes, so beweise man

$$s_0 \circ s_1 \circ \ldots \circ s_n = \mathrm{id}_{P^n} .$$

2.4 Invarianten endlicher Konfigurationen

Wie in Abschnitt 2 dieses Kapitels gehen wir von einem Vektorraum mit Skalarprodukt $[\boldsymbol{V}^n, \langle , \rangle]$ aus, der die absolute symmetrische Autokorrelation F der zugehörigen projektiven Geometrie bestimmt. Ihre projektive Isotropiegruppe bezeichnen wir wieder mit $\boldsymbol{PG}_n = \boldsymbol{PG}_n(F)$. Wirkt $\boldsymbol{PG}_n$ als Transformationsgruppe auf einer Menge M, so ergibt sich nach dem Erlanger Programm von F. Klein [51] die Aufgabe, die Orbits dieser Wirkung durch Invarianten zu beschreiben. In diesem Abschnitt betrachten wir einige Spezialfälle dieser Aufgabe für Transformationsgruppen, die sich in naheliegender Weise aus der Wirkung von $\boldsymbol{PG}_n$ über $\boldsymbol{P}^n$ als Isotropiegruppe von F ergeben: Die Elemente der Menge M sollen sich durch endlich viele projektive Unterräume von $\boldsymbol{P}^n$ beschreiben lassen. Wir nennen sie daher *endliche Konfigurationen*. Die Wirkung eines Elementes $g \in \boldsymbol{PG}_n$ auf eine Konfiguration ergibt sich aus der simultanen Wirkung von g auf die *Komponenten* der Konfiguration, also der Unterräume, die die Konfiguration definieren. Wir beginnen mit der Untersuchung von Punktfolgen. Die Dualisierung der Ergebnisse mit Hilfe der Polarität F führt auf Invarianten für Hyperebenen, die daher in diesem Abschnitt nicht speziell betrachtet werden müssen. In den nächsten Abschnitten, bei der Darstellung der elliptischen und hyperbolischen Geometrien, wird sich zeigen, dass der Abstand von Punktepaaren und der Winkel zwischen zwei Hyperebenen zueinander duale Begriffe sind. In diesen metrischen Geometrien und in der Möbius-Geometrie werden wir die Invarianten von Paaren von Unterräumen beliebiger Dimensionen beschreiben.

2.4.1 $\boldsymbol{PG}_n$-Kongruenz endlicher Punktfolgen

Die Wirkung von $\boldsymbol{PG}_n$ auf den Punktfolgen wird definiert durch

$$g: (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) \in (\boldsymbol{P}^n)^k \longmapsto g(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) := (g\boldsymbol{x}_1, \ldots, g\boldsymbol{x}_k) \in (\boldsymbol{P}^n)^k \ (g \in \boldsymbol{PG}_n). \quad (1)$$

Hier bezeichnet $(B)^k$ das k-fache Mengenprodukt der Menge B. Punktfolgen, die durch eine derartige Transformation ineinander übergehen, werden *kongruent* oder genauer $\boldsymbol{PG}_n$-*äquivalent* genannt. Diese Redeweise wenden wir entsprechend auch bei anderen Transformationsgruppen an. Um nicht ständig Sonderfälle ausschließen zu müssen, schränken wir die Wirkung auf die offenbar $\boldsymbol{PG}_n$-invariante Teilmenge der aus lauter verschiedenen Punkten bestehenden Folgen ein; es sei also für eine beliebige Menge B

$$M_k(B) := \{(x_1, \ldots, x_k) \in (B)^k | x_\mu \neq x_\nu \text{ für } \mu \neq \nu\}. \quad (2)$$

Aus der Invarianz der Dimension und Lemma 1.1 ergibt sich sofort die folgende notwendige Bedingung

Satz 1. *Dafür, dass zwei k-Tupel $(\boldsymbol{x}_\mu), (\boldsymbol{y}_\mu) \in M_k(\boldsymbol{P}^n)$ kongruent sind, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:*

a) Für alle ρ_λ mit $1 \leq \rho_1 < \ldots < \rho_l \leq k$, $1 \leq l \leq k$ gilt

$$\operatorname{Dim} \boldsymbol{x}_{\rho_1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_{\rho_l} = \operatorname{Dim} \boldsymbol{y}_{\rho_1} \vee \ldots \vee \boldsymbol{y}_{\rho_l}. \tag{3}$$

b) Es gibt ein $\kappa \in Z(K)^*$ mit $\sigma(\kappa) = \kappa$, und es gibt Vektoren $\mathfrak{x}_\mu, \mathfrak{y}_\mu \in \boldsymbol{V}^{n+1}$ so, dass $\boldsymbol{x}_\mu = [\mathfrak{x}_\mu], \boldsymbol{y}_\mu = [\mathfrak{y}_\mu]$ und

$$\langle \mathfrak{y}_\mu, \mathfrak{y}_\nu \rangle = \kappa \langle \mathfrak{x}_\mu, \mathfrak{x}_\nu \rangle \text{ für } 1 \leq \mu \leq \nu \leq k$$

gelten. □

Dass diese Bedingungen nicht hinreichend sind, zeigt

Beispiel 1. Es sei $K = \mathbf{R}$ und $F_{4,2}$ die Polarität des $\boldsymbol{P}^3$ vom Index 2. Dann gibt es eine total isotrope Gerade $\boldsymbol{H}^1 \subset Q$. Man findet zwei Quadrupel $(\boldsymbol{x}_\mu), (\boldsymbol{y}_\mu) \in M_4(\boldsymbol{H}^1)$, deren Doppelverhältnisse nicht übereinstimmen; sie können also durch keine Projektivität ineinander transformiert werden. Andererseits sind für zwei beliebige derartige Quadrupel die Bedingungen a), b) aus Satz 1 erfüllt. Ein analoges Beispiel kann man mit zwei isotropen Geraden des dreidimensionalen projektiv symplektischen Raumes konstruieren. □

Fordert man zusätzlich, dass die projektive Hülle der betrachteten Punktfolgen nicht isotrop ist, so kann man die folgende Bedingung für die Kongruenz zweier Punktfolgen beweisen:

Satz 2. *Es seien $(\boldsymbol{x}_\mu), (\boldsymbol{y}_\mu) \in M_k(\boldsymbol{P}^n)$ zwei Punktfolgen, welche die Bedingungen a), b) aus Satz 1 erfüllen. Gilt außerdem:*

c) Die projektive Hülle $\boldsymbol{x}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_k$ ist nicht isotrop,
so gibt es einen projektiven Isomorphismus

$$\varphi : \boldsymbol{x}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_k \longrightarrow \boldsymbol{y}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{y}_k \tag{4}$$

mit den Eigenschaften

$$\varphi(\boldsymbol{x}_\mu) = \boldsymbol{y}_\mu, \ \mu = 1, \ldots, k, \tag{5}$$

$$\langle \varphi(\mathfrak{x}), \varphi(\mathfrak{y}) \rangle = \kappa \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle \text{ für alle } \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{x}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_k. \tag{6}$$

Ist $\operatorname{Dim} \boldsymbol{x}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_k = n$, *oder gilt*

d) Es gibt ein $\rho \in Z(K)^*$ als Lösung von $\sigma(\rho)\rho = \kappa$,
so sind die Punktfolgen kongruent.

B e w e i s. Es seien $\boldsymbol{X} := \boldsymbol{x}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_k$ und $m := \operatorname{Dim} \boldsymbol{X}$. Dann gibt es in der Folge $(\boldsymbol{x}_\mu)$ $m+1$ Punkte, die ihre projektive Hülle erzeugen. Die (nach b))entsprechenden Vektoren, sagen wir

$$\mathfrak{a}_0 := \mathfrak{x}_{\mu_0}, \ldots, \mathfrak{a}_m := \mathfrak{x}_{\mu_m},$$

bilden dann eine Basis von $\boldsymbol{X}$. Aus der Bedingung a) folgt, dass dann die Vektoren

$$\mathfrak{b}_0 := \mathfrak{y}_{\mu_0}, \ldots, \mathfrak{b}_m := \mathfrak{y}_{\mu_m}$$

eine Basis des Raums $\boldsymbol{Y} := \boldsymbol{y}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{y}_k$ sind. Wir betrachten den durch die Bilder der Basis $\varphi(\mathfrak{a}_\mu) := \mathfrak{b}_\mu$ definierten linearen Isomorphismus $\varphi : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$. Aus der Bedingung b) folgt unmittelbar, dass die Gleichung (6) erfüllt ist. Wir beweisen nun (5). Es seien $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_\nu$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_\nu$ zwei der einander entsprechenden, nach b) die Punktfolgen bestimmenden Vektoren. Ihre Basisdarstellungen in $\boldsymbol{X}$ bzw. $\boldsymbol{Y}$ seien

$$\mathfrak{x} = \sum_{\mu=0}^{m} \mathfrak{a}_\mu x^\mu, \;\; \mathfrak{y} = \sum_{\mu=0}^{m} \mathfrak{b}_\mu y^\mu.$$

Multiplizieren wir diese Basisdarstellungen von links skalar mit $\mathfrak{a}_\nu$ bzw. $\mathfrak{b}_\nu$, so folgen

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{x} \rangle &= \sum_{\mu=0}^{m} \langle \mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{a}_\mu \rangle x^\mu, \; \nu = 0, \ldots, m \\ \langle \mathfrak{b}_\nu, \mathfrak{y} \rangle &= \sum_{\mu=0}^{m} \langle \mathfrak{b}_\nu, \mathfrak{b}_\mu \rangle y^\mu, \; \nu = 0, \ldots, m.\end{aligned}$$

Da alle in dem zweiten Gleichungssystem auftretenden Vektoren den darüber stehenden in unseren Punktfolgen entsprechen, können wir auf das zweite System die Bedingung b) anwenden und erhalten nach Kürzen des Skalars κ ein Gleichungssystem mit denselben Koeffizienten wie das erste. Weil nach der Bedingung c) der Raum $\boldsymbol{X}$ nicht isotrop ist, ist der Rang dieser Gleichungssysteme gleich $m + 1$; folglich müssen die Lösungen übereinstimmen: $(y^\mu) = (x^\mu)$. Nach Definition von φ ergibt sich

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \sum_{\mu=0}^{m} \varphi(\mathfrak{a}_\mu) x^\mu = \sum_{\mu=0}^{m} \mathfrak{b}_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^{m} \mathfrak{b}_\mu y^\mu = \mathfrak{y}.$$

Damit erfüllt die von φ erzeugte und gleich bezeichnete projektive Abbildung die behaupteten Gleichungen (5) und (6). Ist $m = n$, so folgt aus Lemma 1.1, dass φ in $\boldsymbol{PG}_n(F)$ liegt, und wir sind fertig. Im Falle $m < n$ wollen wir den Satz 2.3 von E. Witt anwenden. Weil φ im allgemeinen kein Isomorphismus der Unterräume mit induziertem Skalarprodukt ist – das gilt ja nur im Fall $\kappa = 1$, vgl. (6), benötigen wir nun die Bedingung d) und definieren $\psi(\mathfrak{x}) := \varphi(\mathfrak{x})(\rho)^{-1}$. Dann folgt aus (6) wegen $\rho \in Z(K)^*$:

$$\langle \psi(\mathfrak{x}), \psi(\mathfrak{y}) \rangle = \sigma(\rho^{-1})\rho^{-1} \langle \varphi(\mathfrak{x}), \varphi(\mathfrak{y}) \rangle = (\kappa)^{-1} \kappa \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle \text{ für alle } \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{x}_1 \vee \ldots \vee \boldsymbol{x}_k.$$

Daher ist ψ ein Isomorphismus der Unterräume, den wir nach dem Satz von E. Witt zu einem Automorphismus $g \in \boldsymbol{PG}_n$ fortsetzen können. Weil die von den linearen Abbildungen ψ und φ erzeugten projektiven Abbildungen übereinstimmen, realisiert g die Kongruenz der Punktfolgen. □

Beispiel 2. Wir wollen zeigen, dass die Bedingung d) im Fall $m < n$ nicht entbehrt werden kann. Es seien $K = \mathbf{R}$, $n = 4$, $\boldsymbol{V}^5$ der pseudo-orthogonale Vektorraum vom

Index 2, und $(\mathfrak{e}_i)$, $i = 0, \ldots, 4$, eine pseudo-orthonormierte Basis. Wir betrachten die Punktepaare $\boldsymbol{x}_1 = [\mathfrak{e}_0], \boldsymbol{x}_2 = [\mathfrak{e}_1]$ und $\boldsymbol{y}_1 = [\mathfrak{e}_3], \boldsymbol{y}_2 = [\mathfrak{e}_4]$. Dann sind die Bedingungen a), b), c) mit $\kappa = -1$ erfüllt, nicht jedoch d). Wir erhalten zwar einen projektiven Isomorphismus $\varphi : \boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2 \to \boldsymbol{y}_1 \vee \boldsymbol{y}_2$, den wir wegen des Trägheitssatzes nicht zu einem Isomorphismus $g \in \boldsymbol{PG}_4$ fortsetzen können. Das kommt auch in der nächsten Folgerung 3 zum Ausdruck: □

Folgerung 3. *Für $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{H}$ sei F eine der in Tabelle 2.1 angegebenen Polaritäten. Dann kann man in der notwendigen Bedingung b) von Satz 1 $\kappa = \pm 1$ fordern. Ist $F = F_{n+1}$, $F = F_{n+1,l}$ oder $F = H_{n+1,l}$, und gilt $l < (n+1)/2$, so kann man $\kappa = 1$ verlangen. Für reelle Nullsysteme kann $\kappa = \pm 1$ und für komplexe $\kappa = 1$ gesetzt werden. In den Fällen, in denen $\kappa = 1$ verlangt werden kann, sind die Bedingungen a), b) (mit $\kappa = 1$) und c) hinreichend für die Kongruenz der Punktfolgen.*

Beweis. Die Zahl κ hängt nur von der zu findenden Transformation ab. In den Beispielen 1.3-5 und im Abschnitt 2.1.6 wurde gezeigt, dass man sich auf die in Folgerung 3 genannten Werte beschränken kann. Die Aussage über die Nullsysteme folgt aus den Betrachtungen des Abschnitts 2.1.3. Gilt schließlich $\kappa = 1$, so ist d) trivial erfüllt mit $\rho = 1$.□

2.4.2 Orbits der Punkte. Normierte Vertreter

Die Folgerung 3.1 enthält bereits eine Aussage über die $\boldsymbol{PG}_n$-Äquivalenz zweier Punkte, das in den oben bewiesenen allgemeineren Kriterien enthalten ist. Nach Beispiel 2.3 wirkt die projektiv-symplektische Gruppe $\boldsymbol{PSp}_n$ transitiv auf dem projektiven Raum $\boldsymbol{P}^{2n-1}$. Ebenso wirkt die Isotropiegruppe $\boldsymbol{PG}_n(F)$ einer Polarität transitiv auf der zu F gehörenden Quadrik. Wir können uns also auf die Betrachtung von Polaritäten und dabei auf die nicht in Q liegenden Punkte beschränken. Diese werden durch nicht isotrope Vektoren bestimmt: $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]$ mit $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \neq 0$. Das Skalarquadrat hängt natürlich von der Wahl des Repräsentanten ab. Die Substitution $\mathfrak{x} \mapsto \mathfrak{x}\xi$, $\xi \in K^*$, führt auf

$$\langle \mathfrak{x}\xi, \mathfrak{x}\xi \rangle = \sigma(\xi)\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \xi = \bar{\xi}\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \xi. \tag{7}$$

Hier und im Folgenden, wenn klar ist, um welchen involutiven Anti-Automorphismus σ es sich handelt, verwenden wir oft die von der Konjugation in $\mathbf{H}$ bekannte Schreibweise $\sigma(\xi) = \overline{\xi}$; für sie gelten die üblichen Regeln

$$\overline{\xi + \eta} = \overline{\xi} + \overline{\eta},\ \overline{\xi\eta} = \overline{\eta}\overline{\xi},\ \overline{0} = 0,\ \overline{1} = 1, \tag{8}$$

$$\overline{(-\xi)} = -\bar{\xi},\ \overline{(\xi^{-1})} = \bar{\xi}^{-1}\ (\xi \in K^*),\ \overline{\overline{\xi}} = \xi. \tag{9}$$

Es sei $K_\sigma := \{\xi \in K | \overline{\xi} = \xi\}$ die Menge der Fixelemente von σ. K_σ ist eine Untergruppe der additiven Gruppe von K, aber im allgemeinen kein Unterring. In jedem Fall gilt: Liegt $\xi \neq 0$ in K_σ, so gehört auch ξ^{-1} zu K_σ; gilt $K_\sigma \subset Z(K)$, so nennen wir σ *zentral*; in diesem Fall ist K_σ ein Teilkörper von $Z(K)$, also auch von K. Bezeichnet K_o den Primkörper von K, so ergibt sich aus $\overline{1} = 1$ sofort $K_o \subset K_\sigma$.

Die Formel (7) führt uns auf die Rechts-Wirkung

$$\lambda \in K^*,\ \xi \in K \longmapsto \overline{\lambda}\xi\lambda \in K \tag{10}$$

K	F	σ	K_σ	P	K_1^*
$\mathbf{R}$	$F_{n,l}$	$\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$	$\mathbf{R}$	$\{0,1,-1\}$	$\{1,-1\}$
$\mathbf{C}$	F_n	$\mathrm{id}_{\mathbf{C}}$	$\mathbf{C}$	$\{0,1\}$	$\{1,-1\}$
$\mathbf{C}$	$H_{n,l}$	τ	$\mathbf{R}$	$\{0,1,-1\}$	S^1
$\mathbf{H}$	$H_{n,l}$	τ	$\mathbf{R}$	$\{0,1,-1\}$	S^3
$\mathbf{H}$	H_n	τ_{i}	$\mathfrak{L}(1,\mathrm{j},\mathrm{k})$	$\{0,1\}$	S^1

Es bedeuten: τ die Konjugation in $\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{H}$, $\tau_{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}\,\tau\,\mathrm{i}$, $S^1 \subset \mathbf{C}$ der Einheitskreis und $S^3 \subset \mathbf{H}$ die Einheitshypersphäre.

Tabelle 2.2: Normierung für die klassischen Polaritäten

von K^* über K, für die K_σ eine invariante Teilmenge ist. Bekanntlich liegen die Skalarquadrate in K_σ. Wir betrachten die Wirkung von K^* über K_σ und zeichnen in jedem Orbit einen Repräsentanten aus; es bezeichne $P \subset K_\sigma$ die Menge dieser Repräsentanten. Offenbar gilt $0 \in P$; wir wählen 1 als Repräsentanten des Orbits $\{\overline{\lambda}\lambda\}$, $\lambda \in K^*$ und, falls $\mu \in P$ und $-\mu$ nicht zu μ äquivalent ist, $-\mu$ als Repräsentanten von $\{-\overline{\lambda}\mu\lambda\}$, sowie für $\mu \neq 0$ und μ^{-1} nicht äquivalent zu μ auch μ^{-1} als Repräsentanten von $\{\overline{\lambda}\mu^{-1}\lambda\}$. Daher ist stets entweder $-1 = \overline{\lambda}\lambda$ für ein gewisses $\lambda \in K^*$, oder es gilt $\{0,1,-1\} \subset P$. Man bemerkt, dass die Bedingung d) aus Satz 2 gerade bedeutet, dass κ unter der Wirkung (10) zu 1 äquivalent ist.

Beispiel 3. Es sei $\sigma = \mathrm{id}_K$. Dann ist $K = K_\sigma$ ein Körper; zwei Elemente sind unter der Wirkung (10) äquivalent, wenn sie sich um einen quadratischen Faktor unterscheiden, und der Orbitraum ist die Null vereinigt mit der Faktorgruppe $K^*/(K^*)^2$. Für $K = \mathbf{R}$ gilt also $P = \{0,1,-1\}$; auf diese Eigenschaft stützt sich die Definition von Innen- und Außengebiet einer reellen Quadrik in Beispiel 3.1. Dieses Beispiel zeigt auch, dass nicht jedes Element von P als Repräsentant eines Orbits vorkommen muss; so ist im Falle $l = 0$ das Orbit von -1 leer. Für $K = \mathbf{C}$ ist wie für jeden algebraisch abgeschlossenen Körper $P = \{0,1\}$ vgl. Beispiel 3.2. Ist jedoch $K = \mathbf{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen, so wird $\mathbf{Q}^*/(\mathbf{Q}^*)^{\mathbf{2}}$ unendlich; zwei Zahlen $\xi, \eta \in \mathbf{Q}^*$ sind genau dann äquivalent, wenn $\xi\eta^{-1}$ ein Quadrat ist, wenn also alle seine Primfaktoren gerade Vielfachheit haben, vgl. Satz I.2.6.5. Da wir hier auf ähnliche Schwierigkeiten wie bei der Auswertung von Satz 1.9.3 für die Klassifikation der Polaritäten stoßen, werden ohne spezielle Voraussetzungen an den Skalarbereich K kaum befriedigende Antworten auf die eingangs gestellte Frage zu erhalten sein. □

Wir kehren nun wieder zum allgemeinen Fall zurück. Jedem Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n$ ordnen wir dasjenige Element $\xi(\boldsymbol{x}) \in P$ zu, das $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle$ für irgendeinen Vertreter $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}^{n+1}$ mit $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]$ repräsentiert. Ein Vektor $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}^{n+1}$ heißt *normiert*, wenn $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \in P$ gilt. Man beachte, dass ein normierter Vertreter eines Punktes $\boldsymbol{x}$ nie eindeutig bestimmt ist; denn es gilt $\langle -\mathfrak{x}, -\mathfrak{x} \rangle = \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle$. Allgemein ist mit $\mathfrak{x}$ auch $\mathfrak{x}\lambda$ normiert, wenn λ zur Isotropiegruppe von $\xi = \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \in P$ unter der Wirkung (10) gehört. In der Tabelle 2.2 haben wir die entsprechenden Daten für die klassischen Polaritäten zusammengestellt; dabei bezeichnet $K_1^* \subset K^*$ die Isotropiegruppe des Elements 1, die mit der von -1 übereinstimmt. Aus Folgerng 3.1 ergibt sich, dass aus $\xi(\boldsymbol{x}) = \xi(\boldsymbol{y})$ die Kongruenz von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ folgt.

Übung 1. Man verifiziere die in Tabelle 2.2 gemachten Angaben. Hinweis. Man beachte Abschnitt 1.9.5, insbesondere dort die Formeln (19), (20).

Übung 2. Man zeige am Beispiel des Standardskalarprodukts im rationalen Vektorraum $\mathbf{Q}^2$, für das die Standardbasis $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ orthonormiert ist, dass es orthogonale Basen $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ mit $\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \rangle = \lambda \delta_{ij}$ und λ keine Quadratzahl gibt.

Interpretiert man die Trägheitssätze so, dass die Anzahl $l(\xi)$ der Basiselemente einer orthogonalen Basis, die zu einem gegebenem Vertreter $\xi \in P$ gehören, nicht von der Wahl der Basis abhängt, so erkennt man aus Übung 2, dass ein derart aufgefasster Trägheitssatz im allgemeinen nicht gilt.

Übung 3. a) Ist F eine der klassischen Polaritäten aus Tabelle 2.2, und ist $l < n/2$, so beweise man: Zwei Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}^{n-1}$ sind genau dann $\boldsymbol{PG}_{n-1}(F)$-äquivalent, wenn $\xi(\boldsymbol{x}) = \xi(\boldsymbol{y})$ gilt. – b) Man zeige an einem Beispiel, dass diese Aussage im Fall $l = n/2$ nicht richtig ist; in diesem Fall sind alle nicht zur Quadrik gehörenden Punkte $\boldsymbol{PG}_{n-1}(F)$-äquivalent.

2.4.3 Invarianten von Punktepaaren

Wir wollen nun die für die Grundlagen der metrischen Geometrien wichtigen Invarianten von Punktepaaren $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in M_2(\boldsymbol{P}^n)$ finden. Da zwei solche Punkte stets eine Gerade bestimmen, können wir an Abschnitt 1.9.8 anknüpfen, in dem wir die Lagebeziehungen von Gerade und Quadrik untersuchten. Etwas spezieller als dort setzen wir für diesen Abschnitt voraus:

Voraussetzung A. *Es sei ein Vektoraum $\boldsymbol{V}^{n+1}$ mit einem σ-hermiteschem oder symmetrischen Skalarprodukt über einem Schiefkörper der Charakteristik $\operatorname{char} K \neq 2$ gegeben, welcher die Polarität F der n-dimensionalen projektiven Geometrie bestimmen möge; dabei ist auch der Fall zugelassen, dass die Quadrik $Q = Q_F$ leer ist.*

Man vergleiche hierzu die Definition 2.1; die Nullsysteme sind jetzt ausgeschlossen. Gehört einer der Punkte zur Quadrik, so erhalten wir aus den Ergebnissen des Abschnitts 1.9.8 sofort

Folgerung 4. *Unter der Voraussetzung A sei das Punktepaar $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in M_2(\boldsymbol{P}^n)$ und $\boldsymbol{x}_1 \in Q$. Ferner sei $\xi = \xi(\boldsymbol{x}_2) \in P$. Dann gibt es nur die folgenden, einander ausschließenden Möglichkeiten:*

a) $\xi = 0$ *und* $\langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2 \subset Q$.

b) $\xi \neq 0$ *und* $\langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2$ *ist Tangente von* Q.

c) $\langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle \neq 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2$ *ist Sekante von* Q.

Punktepaare $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2), (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) \in M_2(\boldsymbol{P}^n)$, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1 \in Q$, sind kongruent, wenn sie dieselbe Eigenschaft a), b) oder c) haben und $\xi(\boldsymbol{x}_2) = \xi(\boldsymbol{y}_2)$ erfüllen. Die Gruppe $\boldsymbol{PU}_{n+1}$ wirkt transitiv auf allen diesen Orbits. Gilt $\boldsymbol{PG}_n(F) = \boldsymbol{PU}(n+1)$, so sind die angegebenen Bedingungen auch notwendig für die Kongruenz der Punktepaare.

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus Beispiel 1.9.8. Wir zeigen die behauptete Kongruenz der Paare. Im Fall a) ist das ein Spezialfall von Folgerung 2.12. In den beiden anderen Fällen normieren wir die Vektoren $\mathfrak{x}_2, \mathfrak{y}_2$ so dass $\xi = \langle \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_2 \rangle = \langle \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_2 \rangle$ gilt. Im Fall c) können wir durch Multiplikation von $\mathfrak{x}_1$ mit einem geeigneten Faktor stets $\langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle = 1$ erreichen. Damit sind die Skalarprodukte von repräsentierenden Vektoren der beiden Paare desselben Typs a), b) oder c) entsprechend gleich; die Zuordnung dieser Basenpaare liefert einen Isomorphismus der Unterräume, welcher nach dem Satz 2.3 von E. Witt zu einem Automorphismus von $\boldsymbol{V}^{n+1}$ fortgesetzt werden kann; es gilt $\kappa = 1$ und daher gehört die entsprechende Projektivität zu $\boldsymbol{PU}_{n+1}$; sie realisiert die geforderte Kongruenz. Die letzte Behauptung folgt aus der Invarianz der eigenschaften a), b), c) und daraus, dass es genügt, Transformationen mit $\kappa = 1$ zu betrachten. □

Bemerkung. Am Beispiel der Quadrik $Q(F_{4,2})$ im reellen dreidimensionalen projektiven Raum $\boldsymbol{P}^3$ erkennt man, dass die Bedingung $\xi(\boldsymbol{x}_2) = \xi(\boldsymbol{y}_2)$ in Folgerung 4 nicht notwendig ist, vgl. Übung 3 und Beispiel 6 weiter unten.

Beispiel 4. Es seien $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in Q$, $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$. Dann gibt es nur folgende Möglichkeiten: Fall a): $\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2 \subset Q$, oder Fall c): $\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2$ ist Sekante von Q. Nach Folgerung 4 wirkt $\boldsymbol{PU}_{n+1}$ und erst recht $\boldsymbol{PG}_n$ transitiv auf jeder dieser Menge von Punktepaaren. Ist speziell Q eine Quadrik vom Index 1 (vgl. Beispiel 2.4), so gibt es keine in Q enthaltenen Geraden, und es folgt: *Für Quadriken Q vom Index 1 wirkt die Gruppe $\boldsymbol{PU}_{n+1}$ transitiv auf der Menge der Punktepaare $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in Q \times Q$, $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$.* Speziell gilt das für die in Tabelle 2.1 aufgezählten Polaritäten $F_{n+1,1}$ ($K = \mathbf{R}$) und $H_{n+1,1}$ ($K = \mathbf{C}, \mathbf{H}$). Nach Beispiel 2.4 wirkt $\boldsymbol{PU}_{n+1}$ transitiv auf der Menge der in Q enthaltenen Geraden. Aus Folgerung 4, Fall c) mit $\xi = 0$, ergibt sich

Folgerung 5. *Unter der Voraussetzung A wirkt die Gruppe $\boldsymbol{PU}_{n+1}$ transitiv auf der Menge der Sekanten der Quadrik Q.*

□

Von nun an wollen wir Punktepaare $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in M_2(\boldsymbol{P}^n)$ mit $\boldsymbol{x}_j \notin Q$, $j = 1, 2$, betrachten.

Beispiel 5. Es seien $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2), (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) \in M_2(\boldsymbol{P}^n)$, $\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j \notin Q$, $j = 1, 2$, Punktepaare, für die $\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{y}_1 \vee \boldsymbol{y}_2$ Tangenten der Quadrik Q, aber nicht in Q enthalten sind. Dann sind die entsprechenden Unterräume isotrop, aber nicht total isotrop. Es sei $\boldsymbol{z} = Q \cap (\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2)$ der eindeutig bestimmte Berührungspunkt der Tangente; er entspricht dem Defektunterraum des zugehörigen vektoriellen Unterraums. Wir zeigen: *Die Punktepaare $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2), (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ sind genau dann $\boldsymbol{PU}_{n+1}$-äquivalent, wenn*

$$\xi(\boldsymbol{x}_j) = \xi(\boldsymbol{y}_j) \qquad (j = 1, 2) \tag{11}$$

gelten. Die Bedingung (11) ist offenbar notwendig. Wir zeigen die Umkehrung. Es seien $\boldsymbol{z} = [\mathfrak{z}], \boldsymbol{x}_j = [\mathfrak{x}_j]$. Wegen $\boldsymbol{x}_1 \notin Q$ bilden $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{z})$ eine Basis von $\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$. Sei $\xi(\boldsymbol{x}_1) = \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_1 \rangle$ und

$$\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_1 \alpha + \mathfrak{z} \beta$$

die Basisdarstellung von $\mathfrak{x}_2$. Wir können durch Multiplikation mit α^{-1}, Umnormung des isotropen Vektors $\mathfrak{z}$ und von $\mathfrak{x}_2$ erreichen, dass

$$\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{z} \tag{12}$$

gilt; α und β müssen nämlich wegen $\langle \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_2 \rangle \neq 0$ und $\mathfrak{x}_1 \neq \mathfrak{x}_2$ beide von Null verschieden sein. Man bemerkt, dass aus (12) sogar

$$\xi = \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_1 \rangle = \langle \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_2 \rangle = \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle \tag{13}$$

folgt, woraus wir schließen, dass *alle Paare vom Berührungspunkt verschiedener Punkte einer Tangente* $\boldsymbol{PU}_{n+1}$*-äquivalent sind.* Nach Voraussetzung (11) können wir für die Tangente $\boldsymbol{y}_1 \vee \boldsymbol{y}_2$ eine Basis $(\mathfrak{y}_1, \hat{\mathfrak{z}})$ mit entsprechend gleichen Skalarquadraten finden. Aus dem Satz 2.3 von E. Witt ergibt sich die Behauptung. □

Beispiel 6. Es sei $K = \mathbf{R}$. Wir betrachten die Polaritäten $F_{n+1,l}$ des $\boldsymbol{P}^n$. Da hier $P = \{0, 1, -1\}$ gilt, gibt es für $l > 1$ *innere* ($\xi = -1$) und *äußere* ($\xi = 1$) *Tangenten.* Die Abbildung 2.1 zeigt ein Stück des Hyperboloids

$$Q: \quad -(x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0 \tag{14}$$

des $\boldsymbol{P}^3$ mit je einer inneren bzw. äußeren Tangente durch einen Punkt $\boldsymbol{z} \in Q$. Der Durchschnitt von Q mit der Tangentialebene $F_{4,2}(\boldsymbol{z})$ im Punkt $\boldsymbol{z}$ besteht aus zwei Geraden, den *Erzeugenden von Q durch $\boldsymbol{z}$*, welche die inneren von den äußeren Tangenten trennen. Man beachte, dass hier der Fall $l = (n+1)/2$ vorliegt; es gibt also eine Projektivität, die das Innengebiet $I(Q)$ mit dem Außengebiet $A(Q)$ vertauscht. Sind daher $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2), (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) \in M_2(\boldsymbol{P}^3)$ von den Berührungspunkten verschiedene Punkte zweier Tangenten $\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1 \vee \boldsymbol{y}_2$ von Q, so gibt es stets ein $g \in \boldsymbol{PG}_3(F_{4,2})$ mit $g(\boldsymbol{x}_j) = \boldsymbol{y}_j$, $j = 1, 2$. Ist $l < (n+1)/2$, so wird die Unterscheidung von Innen- und Außengebiet projektiv relevant: Äußere Tangenten können nicht durch ein $g \in \boldsymbol{PG}_n(F_{n+1,l})$ in innere Tangenten übergeführt; diese Gruppe wirkt transitiv auf der Menge der äußeren und der Menge der inneren Tangenten. □

Wir kommen nun zu dem interessanteren Fall, dass die Verbindungsgeraden der Punktepaare nicht tangentiell sind. Es gilt also

$$(\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2) \wedge F(\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{o};$$

der zugehörige Vektorraum $\boldsymbol{W}^2 := \mathfrak{L}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ ist nicht isotrop. Es seien $\mathfrak{x}_j$ normierte Repräsentanten:

$$\boldsymbol{x}_j = [\mathfrak{x}_j],\ \xi_j = \xi(\boldsymbol{x}_j) = \langle \mathfrak{x}_j, \mathfrak{x}_j \rangle \in P,\ j = 1, 2.$$

Da die ξ_j nur bis auf Umnormung mit $\lambda_j \in K^*_{\xi_j}$, der Isotropiegruppe von ξ_j, bestimmt sind, erhalten wir für die Skalarprodukte bei $\hat{\mathfrak{x}}_j = \mathfrak{x}_j \lambda_j$

$$\langle \hat{\mathfrak{x}}_j, \hat{\mathfrak{x}}_j \rangle = \langle \mathfrak{x}_j, \mathfrak{x}_j \rangle,\ \langle \hat{\mathfrak{x}}_1, \hat{\mathfrak{x}}_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle \lambda_2,\ \lambda_j \in K^*_{\xi_j},\ j = 1, 2. \tag{15}$$

Wählt man in jeder Klasse $K^*_{\xi_1} \times K^*_{\xi_2}$-äquivalenter Elemente von K einen Vertreter η, so ergibt sich nach Normierung auf diesen Vertreter durch

$$\xi_1 = \xi(\boldsymbol{x}_1),\ \xi_2 = \xi(\boldsymbol{x}_2),\ \eta = \eta(\langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle) \tag{16}$$

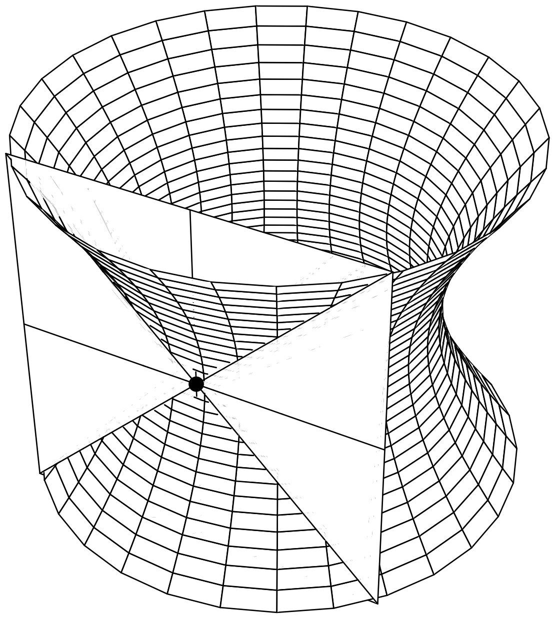

Abbildung 2.1: Hyperboloid, Tangentialebene, innere und äußere Tangenten.

ein vollständiges Invariantensystem für die Entscheidung der $\boldsymbol{PU}_{n+1}$-Kongruenz der Punktepaare. In den folgenden Beispielen betrachten wir einige spezielle Räume.

Beispiel 7. Unter der Voraussetzung A sei $K, \operatorname{char} K \neq 2$, ein Körper und das Skalarprodukt bilinear, also $\sigma = \mathrm{id}_K$. Dann gilt $K_\xi^* = \{1, -1\}$ für alle $\xi \neq 0$; stets ist $K_0^* = K^*$. Wir definieren

$$\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) := \frac{\langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle^2}{\langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_1 \rangle \langle \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_2 \rangle} \qquad (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \notin Q) \tag{17}$$

□

Offenbar ist $\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ von der Wahl der Repräsentanten $\mathfrak{x}_j$ von $\boldsymbol{x}_j$ unabhängig und eine Invariante gegenüber Transformationen aus $\boldsymbol{PG}_n(F)$, vgl. Lemma 1.1. Sind $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ nicht zu Q gehörende Punkte einer Tangente, so ergibt (17) stets den Wert $\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 1$, vgl. (13). Wir beweisen

Satz 6. *Unter den Voraussetzungen von Beispiel 7 seien $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \notin Q$ Punkte einer nicht tangentiellen Geraden $\boldsymbol{B}$. Dann gilt $\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 1$ genau dann, wenn $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ ist. Sind die Punkte $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ verschieden, so ist $Q \cap \boldsymbol{B} \neq \emptyset$ genau dann, wenn*

$$-\det(\langle \mathfrak{x}_j, \mathfrak{x}_k \rangle) = \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle^2 - \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_1 \rangle \langle \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_2 \rangle$$

ein Quadrat in K ist.

Beweis. Wir wählen als Basis des zu $\boldsymbol{B}$ gehörenden Vektorraums eine orthogonale Basis $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ mit $[\mathfrak{a}_1] = \boldsymbol{x}_1$. Es seien $\lambda_j := \langle \mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_j \rangle$, $j = 1, 2$. Für einen Vektor $\mathfrak{x}_2$ mit $\boldsymbol{x}_2 = [\mathfrak{x}_2]$ sei $\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{a}_1\alpha + \mathfrak{a}_2\beta$ die Basisdarstellung. Es gilt $\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 1$ genau dann, wenn $\alpha^2\lambda_1^2 = \lambda_1(\lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2)$ ist, und das gilt genau dann, wenn $\lambda_1\lambda_2\beta^2 = 0$ ist. Da $\boldsymbol{B}$ nicht tangentiell, also der zugehörige Vektorraum nicht isotrop ist, gilt $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ und es folgt die erste Behauptung. Die zweite ergibt sich unmittelbar aus der Diskussion der Bedingung für $\boldsymbol{y} := [\mathfrak{x}_1 t + \mathfrak{x}_2] \in Q$ mit $t \in K$:

$$\langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle = \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_1 \rangle t^2 + 2t\langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle + \langle \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_2 \rangle = 0. \;\square$$

Übung 4. Man zeige unter den Voraussetzungen von Beispiel 7: Sind $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2), (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) \in M_2(\boldsymbol{P}^n)$ und gilt $\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \neq 0$, so gibt es genau dann ein $g \in \boldsymbol{PU}_{n+1}$ mit $g\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{y}_j$, $j = 1, 2$, wenn $\xi(\boldsymbol{x}_1) = \xi(\boldsymbol{y}_1)$ und

$$\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \mathrm{Sq}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) \tag{18}$$

gelten.

Übung 5. Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Beispiel 7 sei K jetzt algebraisch abgeschlossen. Es seien $\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j \notin Q$, $j = 1, 2$. Man zeige: $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ ist genau dann zu $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ kongruent, wenn (18) gilt.

Durch Übung 5 wird speziell der Fall $K = \mathbf{C}$ erledigt: Die Paare von nicht zu Q gehörenden Punkte werden durch die $\boldsymbol{PG}_n(F)$-Invariante $\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ klassifiziert.

2.4.4 Reelle Orthogonalgeometrien

Beispiel 8. Wir wenden uns nun den reellen Polaritäten $F = F_{n+1,l}$ des projektiven Raums $\boldsymbol{P}^n$ über dem Körper $K = \mathbf{R}$ zu und beginnen mit dem Fall $l = 0$. Nach Beispiel 3.1 wirkt die Gruppe $\boldsymbol{PO}(n+1) = \boldsymbol{PG}_n(F)$ transitiv auf $\boldsymbol{P}^n$. Weil das Skalarprodukt positiv definit ist, ist der zu Grunde liegende Vektorraum euklidisch, und es gilt $\xi(\boldsymbol{x}) = 1$ für alle $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n$. Aus Satz 2 folgt unmittelbar, dass die Punktepaare durch die Invariante (17) klassifiziert werden. Zur geometrischen Deutung von (17) repräsentieren wir die Punkte durch Einheitsvektoren $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ derart, dass $\langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle \geq 0$ gilt. Nach der Formel I.(6.1.17) wird dann durch

$$\cos\varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle = \sqrt{\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)}$$

der Winkel $\varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ als Winkel zwischen den entsprechenden Einheitsvektoren eindeutig bestimmt; er erfüllt

$$0 \leq \varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \leq \pi/2, \tag{19}$$

wobei nach Satz 6 $\varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ genau dann gleich Null ist, wenn $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ gilt. Der reelle projektive Raum $\boldsymbol{P}^n(\mathbf{R})$, in dem eine absolute Polarität $F = F_{n+1,0}$ ausgezeichnet ist, wird n-dimensionaler *elliptischer Raum* genannt (vgl. Beispiel 3.1); die *elliptische Geometrie* wird weiter unten in Abschnitt 5 ausführlich behandelt. $\square$

Beispiel 9. Es sei wieder $K = \mathbf{R}$ und $F = F_{n+1,l}$ eine Polarität vom Index $l > 0$. Die durch zwei Punkte $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ bestimmte Gerade $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2$ kann dann folgende Lagen zur stets nicht leeren Quadrik Q annehmen (vgl. Beispiel 1.9.8):

a) $\boldsymbol{B} \subset Q$; das geht nur für $l > 1$.

b) $\boldsymbol{B}$ tangiert Q: $\boldsymbol{B} \cap Q$ ist einpunktig.

c) $\boldsymbol{B} \cap Q = \emptyset$; dafür ist $n > 1$ notwendig.

d) $\boldsymbol{B} \cap Q = \{\boldsymbol{z}_+, \boldsymbol{z}_-\}$ besteht aus zwei Punkten $\boldsymbol{z}_+ \neq \boldsymbol{z}_-$.

Für $n > 1$ kommen alle angeführten Fälle wirklich vor, wobei im Fall a) wegen $l \leq (n+1)/2$ die Ungleichung $n \geq 3$ erfüllt sein muss. Die Fälle a) und b) wurden in Folgerung 4 und den Beispielen 5, 6 allgemein behandelt. Fall c) lässt sich wie im vorigen Beispiel erledigen: dieser Fall tritt genau dann ein, wenn das auf den zu $\boldsymbol{B}$ gehörenden Unterraum $\boldsymbol{W}^2 \subset \boldsymbol{V}^{n+1}$ eingeschränkte Skalarprodukt positiv oder negativ definit ist. Wir beschäftigen uns mit dem Fall d). Weil auf der Geraden $\boldsymbol{B}$ zwei verschiedene Punkte der Quadrik existieren, muss es in dem zugehörigen Vektorunterraum $\boldsymbol{W}^2$ zwei linear unabhängige isotrope Vektoren geben. Somit ist $\boldsymbol{W}^2$ pseudo-euklidisch vom Index 1. Weil nach Folgerung 2.11 alle derartigen Unterräume isomorph sind und sich andererseits jeder Automorphismus eines solchen Unterraums zu einem Automorphismus von $\boldsymbol{V}^{n+1}$ fortsetzen lässt, genügt es, für die Bestimmung der Invarianten der Punktepaare die Transformationen des $\boldsymbol{W}^2$ auf sich zu betrachten. Es sei $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ eine pseudo-orthonormierte Basis von $\boldsymbol{W}^2$:

$$\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1 \rangle = -1,\ \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2 \rangle = 1,\ \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \rangle = 0.$$

Für die nicht zu Q gehörenden Punkte $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ gilt $\xi(\boldsymbol{x}) = \pm 1$. Die entsprechend normierten Vektoren mit der Basisdarstellung $\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_1\zeta_1 + \mathfrak{a}_2\zeta_2$ bestimmen in $\boldsymbol{W}^2$ ein Paar von Hyperbeln

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = -\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = \pm 1$$

mit den gemeinsamen Asymptoten

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = (-\zeta_1 + \zeta_2)(\zeta_1 + \zeta_2) = 0.$$

Die Schnittpunkte mit der Quadrik werden durch die isotropen Vektoren $\mathfrak{a}_2 \pm \mathfrak{a}_1$ bestimmt. Wir können die repräsentierenden Vektoren $\mathfrak{x}_j$ der Punkte $\boldsymbol{x}_j$, $j = 1, 2$, stets so normieren, dass

$$\langle \mathfrak{x}_j, \mathfrak{x}_j \rangle = \xi(\boldsymbol{x}_j) = \pm 1 \text{ und } \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle \geq 0 \tag{20}$$

gelten. Nach Satz 2 bilden daher die Größen

$$\xi_1 = \xi(\boldsymbol{x}_1),\ \xi_2 = \xi(\boldsymbol{x}_2),\ \mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2), \tag{21}$$

welche die Skalarprodukte (20) eindeutig bestimmen, ein vollständiges Invariantensystem für die hier betrachteten Punktepaare $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in M_2(\boldsymbol{P}^n)$, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \notin Q$, $\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2$ Sekante von Q, gegenüber der Gruppe $\boldsymbol{PO}(l, n+1-l)$. Man beachte, dass im Fall $l = (n+1)/2$ wieder Transformationen s_o mit $\kappa = -1$ existieren. In diesem Fall gilt für die ξ-Werte entsprechender Punkte $\boldsymbol{y} = s_o(\boldsymbol{x})$:

$$\xi(\boldsymbol{y}) = \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle = -\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = -\xi(\boldsymbol{x}).$$

Die Kongruenzbedingung lautet allgemein: *Zwei Punktepaare* $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2), (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ *der hier betrachteten Menge sind* $\boldsymbol{PG}_n(F)$*-kongruent genau dann, wenn es ein* ϵ *gibt, für das*

$$\xi(\boldsymbol{y}_1) = \epsilon\xi(\boldsymbol{x}_1),\ \xi(\boldsymbol{y}_2) = \epsilon\xi(\boldsymbol{x}_2) \textit{ und } \langle \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2 \rangle = \epsilon\langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \rangle$$

bei geeignet normierten Repräsentanten erfüllt sind; wobei im Fall $l < (n+1)/2$ stets $\epsilon = 1$ und für $l = (n+1)/2$ entweder $\epsilon = 1$ oder $\epsilon = -1$ gelten muss.$\square$

Es ist üblich und zweckmäßig, auch hier den Zusammenhang der Funktion Sq mit den trigonometrischen Funktionen der reellen Analysis herzustellen. Nach Satz 6 gilt wegen $Q \cap (\boldsymbol{x}_1 \vee \boldsymbol{x}_2) \neq \emptyset$ nun

$$\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle^2 \geq \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 \rangle \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2 \rangle. \tag{22}$$

Liegen beide Punkte im Innengebiet oder beide Punkte im Außengebiet, so ist die rechte Seite von (22) positiv, und es folgt

$$\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \geq 1; \tag{23}$$

liegen dagegen die Punkte $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ in verschiedenen Gebieten, so ist (22) trivial, und es gilt nach (17)

$$\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \leq 0. \tag{24}$$

Im ersten Fall definieren wir den *hyperbolischen Winkel* $\varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ durch

$$\cosh \varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = +\sqrt{\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)},\ \varphi \geq 0. \tag{25}$$

Aus der Monotonie von cosh folgt, dass (25) die Zahl $\varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ für jedes Punktepaar $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ mit $\xi(\boldsymbol{x}_1) = \xi(\boldsymbol{x}_2)$ eindeutig definiert; nach Satz 6 gilt $\varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = 0$ genau dann, wenn $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ ist. Daher wird $\varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ ebenfalls als ein Abstand zu interpretieren sein; in der Tat ist $\varphi(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ im Fall $l = 1$ der Ausgangspunkt für die Definition des Abstandes in der hyperbolischen Geometrie, vgl. Abschnitt 6.

2.4.5 Projektive Orthogonalgeometrien bei beliebigem Körper

Wir kehren noch einmal zu den Voraussetzungen von Beispiel 7 zurück. In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass man unter recht allgemeinen Voraussetzungen über den Körper K die gesamte elementare Trigonometrie zur Verfügung hat. Die Winkelfunktionen erscheinen dabei als Matrixfunktionen der einfachsten Darstellungen der orthogonalen Gruppen.

Wir betrachten eine projektive Gerade $\boldsymbol{P}^1(K)$ mit einer nicht leeren Quadrik $Q = \{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2\}$, vgl Beispiel 1.9.5. Der zugehörige Vektorraum $\boldsymbol{V}^2$ besitzt somit ein neutrales Skalarprodukt, dessen orthogonale Gruppe $\boldsymbol{O}_2$ in Satz 2.13 beschrieben wurde. Gehen wir von einer isotropen Basis $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ von $\boldsymbol{V}^2$ in der Normierung

$$\langle \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \rangle = 1/2,\ \langle \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1 \rangle = \langle \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_2 \rangle = 0$$

zu der pseudo-orthonormierten

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2,\ \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2, \tag{26}$$

$$-\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1 \rangle = \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_2 \rangle = 1,\ \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \rangle = 0,$$

über, so erhalten wir nach einer leichten Rechnung die Matrixdarstellung für $g(\alpha) \in \boldsymbol{SO}_2$:

$$\begin{pmatrix} c(\alpha) & s(\alpha) \\ s(\alpha) & c(\alpha) \end{pmatrix} \in \boldsymbol{SO}_2 \text{ mit } c(\alpha) := (\alpha + \alpha^{-1})/2,\ s(\alpha) := (\alpha - \alpha^{-1})/2,\ \alpha \in K^*. \tag{27}$$

Für die Funktionen $c(\alpha), s(\alpha)$ gelten

$$c^2(\alpha) - s^2(\alpha) = 1, \tag{28}$$
$$c(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = c(\alpha_1)c(\alpha_2) + s(\alpha_1)s(\alpha_2), \tag{29}$$
$$s(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = s(\alpha_1)c(\alpha_2) + s(\alpha_2)c(\alpha_1). \tag{30}$$

Diese Gleichungen erhält man durch direkte Rechnung oder aus $N(g(\alpha)) = 1$ und der Tatsache, dass $\alpha \in K^* \mapsto g(\alpha) \in \boldsymbol{SO}_2$ ein Isomorphismus ist. Die Elemente aus $\boldsymbol{O}_2 \setminus \boldsymbol{SO}_2$ haben in dieser Basis die Matrizen

$$\begin{pmatrix} -c(\alpha) & s(\alpha) \\ -s(\alpha) & c(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Gibt es einen Homomorphismus exp der additiven in die multiplikative Gruppe von K:

$$\exp : t \in K \longmapsto \mathrm{e}^t = \exp t \in K^*, \tag{32}$$

so lassen sich die *hyperbolischen trigonometrischen Funktionen* des Körpers K

$$\cosh t := c(\mathrm{e}^t),\ \sinh t := s(\mathrm{e}^t),\ \ t \in K,$$

definieren. Die Gleichungen (27) – (30) gehen mit diesen Definitionen in die bekannten Grundformeln der reellen hyperbolischen Trigonometrie über, aus denen man den gesamten Formelapparat herleiten kann. Man wird alle Werte von $c(\alpha), s(\alpha)$ nur dann erreichen, wenn das *Exponential* exp surjektiv ist. Für $K = \mathbf{R}$ ist das Bild $\exp \mathbf{R}$ bekanntlich die multiplikative Gruppe $\mathbf{R}_+^*$ der positiven reellen Zahlen; man erhält also ganz $\boldsymbol{SO}(1,1)$ erst dann, wenn man auch $\alpha = -\exp t$ zulässt:

$$\boldsymbol{SO}(1,1) = \{\pm \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbf{R}\}. \tag{33}$$

Für $\boldsymbol{PSO}(1,1)$ ist das offenbar ohne Belang. Die gesamte Gruppe $\boldsymbol{O}(1,1)$ besteht aus vier zu $\mathbf{R}$ homöomorphen Stücken, ihren *zusammenhängenden Komponenten.* Für $K = \mathbf{C}$ ist das Exponential surjektiv. Nach Satz 2.13 ist die Gruppe $\boldsymbol{SO}(2, \mathbf{C})$ zur punktierten Gaußschen Ebene $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ homöomorph und zusammenhängend; $\boldsymbol{O}(2, \mathbf{C})$ besteht aus zwei derartigen Gebieten, die durch $N(g) = \pm 1$ definiert sind. Die hier verwendeten topologischen Begriffe stützen sich auf die Übertragung der in $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$ vorhandenen Topologien durch die angegebenen bijektiven Abbildungen, die damit natürlich Homöomorphismen werden.

Beispiel 10. Es sei $\boldsymbol{P}^n$ ein projektiver Raum über einem Körper K mit einer Polarität F, die durch ein Skalarprodukt gegeben sei, für das eine orthonormierte Basis $(\mathfrak{e}_j)$ existiert; wir sprechen dann von einem *Standardskalarprodukt* über dem zugehörigen Vektorraum $\boldsymbol{V}^{n+1}$:

$$\langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 0, \ldots, n. \tag{34}$$

Für diesen Fall wollen wir jetzt die orthogonale Gruppe $\boldsymbol{O}(2, K)$ bestimmen. Mit

$$S_K^1 := \{\mathfrak{a} \in \boldsymbol{V}^2 \mid \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle = 1\} \tag{35}$$

bezeichnen wir den Einheitskreis in $\boldsymbol{V}^2$. Es sei weiter $[\mathfrak{x}, \mathfrak{y}]$ die Volumenfunktion über $\boldsymbol{V}^2$, für die $[\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2] = 1$ gilt (Satz I.4.7.5). Wir behaupten, dass die Abbildung

$$g \in \boldsymbol{SO}(2, K) \longmapsto \mathfrak{a} := g\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1\alpha + \mathfrak{e}_2\beta \in S^1_K \tag{36}$$

bijektiv ist; ist nämlich $\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_1\alpha + \mathfrak{e}_2\beta \in S^1_K$, so gibt es genau eine Transformation $g \in \boldsymbol{SO}(2, K)$, die $\mathfrak{a} = g\mathfrak{e}_1$ erfüllt; sie hat in der Basis $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ die Matrix

$$g \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{37}$$

Die zu $\boldsymbol{SO}(2, K)$ isomorphe Gruppe dieser Matrizen wird ebenfalls mit $\boldsymbol{SO}(2, K)$ bezeichnet; sie ist abelsch. Die Transformationen aus $\boldsymbol{O}(2, K) \setminus \boldsymbol{SO}(2, K)$ haben die Matrizen

$$g \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Als *orientierten Winkel* $\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in S^1_K$, bezeichnen wir das eindeutig bestimmte Gruppenelement $\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = g \in \boldsymbol{SO}(2, K)$, für das $g\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ gilt. Man beachte, dass das auch im Fall $K = \mathbf{R}$ die ‚richtige' Winkeldefinition ist; denn die Zahl φ ist dort nur $\bmod 2\pi$ eindeutig bestimmt.

Nach Fixierung des Einheitsvektors $\mathfrak{e}_1$ (und damit der positiv orientierten, orthonormierten Basis $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$) können wir (36) zur Identifizierung benutzen:

$$\begin{gathered} \varphi = \varphi(g) \longleftrightarrow \varphi = \varphi(\mathfrak{e}_1, g\mathfrak{e}_1) \longleftrightarrow g\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1 \cos\varphi + \mathfrak{e}_2 \sin\varphi \\ \text{mit} \quad \cos\varphi := \langle \mathfrak{e}_1, g\mathfrak{e}_1 \rangle,\ \sin\varphi := [\mathfrak{e}_1, g\mathfrak{e}_1] \quad (g \in \boldsymbol{SO}(2, K)). \end{gathered} \tag{38}$$

Damit sind die Winkelfunktionen $\cos\varphi, \sin\varphi$ als Matrixelemente auf $\boldsymbol{SO}(2, K)$ definiert. Nach (37) erhält man die für $K = \mathbf{R}$ bekannte Matrixdarstellung

$$g \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \cos\varphi, \beta = \sin\varphi.$$

Im Zusammenhang mit dem Winkelbegriff ist es üblich, die Gruppenoperation für die bei der Identifizierung (38) auftretenden Winkel additiv zu schreiben:

$$\begin{aligned} g = g(\varphi), &\quad g(\varphi_1 + \varphi_2) = g(\varphi_1) \cdot g(\varphi_2), \\ \varphi = \varphi(g), &\quad \varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2). \end{aligned}$$

Mit dieser Verabredung sind $\sin\varphi, \cos\varphi$ Funktionen auf der Gruppe $\boldsymbol{SO}(2, K)$ mit Werten in K, welche die bekannten *trigonometrischen Formeln* erfüllen:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1, \tag{39}$$

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2, \tag{40}$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1. \tag{41}$$

Diese Additionstheoreme folgen unmittelbar aus der Matrizenmultiplikation. Offenbar gelten auch $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0$ und

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi,\ \sin(-\varphi) = -\sin\varphi. \tag{42}$$

Schließlich ist für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in S^1_K$

$$\cos\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle, \ \sin\varphi(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]. \tag{43}$$

Wir bezeichnen das Gruppenelement $\varphi(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ mit $\pi/2$, also

$$\cos(\pi/2) = 0, \ \sin(\pi/2) = 1. \tag{44}$$

Aus den Additionstheoremen (40),(41) ergeben sich die üblichen Werte

$$\cos m\pi = (-1)^m, \ \sin m\pi = 0, \quad (m \in \mathbf{Z}). \tag{45}$$

□

Beispiel 11. Nun nehmen wir an, dass -1 kein Quadrat in K ist, und betrachten die algebraische Erweiterung $\tilde{K} := K(\mathrm{i})$, $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$, des Körpers K. Mit $\tilde{\boldsymbol{V}}^2$ bezeichnen wir die $\tilde{K}$-Erweiterung des Vektorraums $\boldsymbol{V}^2$, vgl. Abschnitt 1.10.4 oder Beispiel II.7.9.9. Wir dehnen das Standardskalarprodukt bilinear auf $\tilde{\boldsymbol{V}}^2$ aus; dann wird $[\tilde{\boldsymbol{V}}^2, \tilde{K}, \langle, \rangle]$ ein Vektorraum mit Standardskalarprodukt über $\tilde{K}$, der außerdem ein neutraler Vektorraum ist. Die isotropen Unterräume werden von den Vektoren

$$\mathfrak{z}_1 := (\mathfrak{e}_1\,\mathrm{i} + \mathfrak{e}_2)/2, \ \mathfrak{z}_2 := (\mathfrak{e}_2 - \mathfrak{e}_1\,\mathrm{i})/2 \tag{46}$$

aufgespannt. Jede Transformation $g \in \boldsymbol{O}(2, \tilde{K})$ hat nach (2.25) in dieser isotropen Basis die Darstellung

$$g \in \boldsymbol{SO}(2, \tilde{K}) \longmapsto \gamma \in \tilde{K}^* \text{ mit } g\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_1\gamma, \ g\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_2\gamma^{-1}, \tag{47}$$

wobei die Zuordnung $g \mapsto \gamma$ ein Gruppenisomorphismus ist. Durch lineare Ausdehnung der Transformationen $g \in \boldsymbol{O}(2, K)$ erhalten wir gleich bezeichnete orthogonale Transformationen $g \in \boldsymbol{O}(2, \tilde{K})$, was auf die kanonischen Einbettungen $\boldsymbol{O}(2, K) \subset \boldsymbol{O}(2, \tilde{K})$, $\boldsymbol{SO}(2, K) \subset \boldsymbol{SO}(2, \tilde{K})$ führt. Für $g \in \boldsymbol{SO}(2, K)$ ergibt sich aus (38) und (46)

$$g\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}, \ g\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi}, \quad (g \in \boldsymbol{SO}(2, K)), \tag{48}$$

wobei wir eine im Fall $K = \mathbf{R}$ bekannte Formel jetzt zur Definition benutzen:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} := \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \in \tilde{K}^*; \tag{49}$$

das ist ein Isomorphismus von $\boldsymbol{SO}(2, K)$ auf die mit S^1_K zu identifizierende Untergruppe

$$S^1_K = \{z \in \tilde{K} \mid z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2 = 1\} \subset \tilde{K}^*. \tag{50}$$

Hierbei bezeichnet $z = \alpha + \mathrm{i}\,\beta \mapsto \bar{z} := \alpha - \mathrm{i}\,\beta$ den kanonischen Isomorphismus der Erweiterung $\tilde{K} = K(\mathrm{i})$. Schließlich folgen mit den Bezeichnungen (27)

$$c(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}) = \cos(\varphi), \ s(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}) = \mathrm{i}\sin(\varphi). \tag{51}$$

Wir betrachten nun die pseudo-orthonormierte Basis (26), welche mit der orthonormierten $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ durch

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{e}_1\,\mathrm{i}, \ \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{e}_2$$

zusammenhängt. Da (38) auch für $g \in \boldsymbol{SO}(2,\tilde{K})$ sinnvoll ist, erhalten wir eine Ausdehnung der trigonometrischen Funktionen von $\boldsymbol{SO}(2,K)$ auf $\boldsymbol{SO}(2,\tilde{K})$; somit gilt für alle $g \in \boldsymbol{SO}(2,\tilde{K})$:

$$\begin{aligned} g\mathfrak{e}_1 &= \mathfrak{e}_1 \cos\psi + \mathfrak{e}_2 \sin\psi, \\ g\mathfrak{e}_2 &= -\mathfrak{e}_1 \sin\psi + \mathfrak{e}_2 \cos\psi. \end{aligned}$$

Vergleichen wir die sich aus dieser Darstellung von g ergebende Matrix von g in der Basis $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ mit der Matrix (27), so folgen in Verallgemeinerung von (51):

$$\cos\psi(\gamma) = \frac{\gamma+\gamma^{-1}}{2}, \ \sin\psi(\gamma) = -\,\mathrm{i}\,\frac{\gamma-\gamma^{-1}}{2}, \ (\gamma \in \tilde{K}^*). \tag{52}$$

Für $g \in \boldsymbol{SO}(2,K)$ ergeben sich aus (48) bei den im Falle $K = \mathbf{R}$ üblichen Definitionen die bekannten Beziehungen zu den Funktionen der hyperbolischen Trigonometrie:

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\varphi}}{2} =: \cosh(\mathrm{i}\,\varphi), \ \mathrm{i}\sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} - \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\varphi}}{2} =: \sinh(\mathrm{i}\,\varphi). \tag{53}$$

□

Übung 6. Es sei $Q \subset \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{V})$ die zum Standardskalarprodukt $\langle,\rangle$ des Vektorraums $\boldsymbol{V}^{n+1}$ über einem Körper K gehörende Quadrik. a) Man zeige: Es gilt $Q \neq \emptyset$ genau dann, wenn -1 als Summe von n Quadraten darstellbar ist. – b) Man gebe ein Beispiel an, bei dem $Q \neq \emptyset$ gilt und -1 kein Quadrat in K ist.

Übung 7. Man finde ein Beispiel für einen Vektorraum $\boldsymbol{V}$ mit Standardskalarprodukt über einem Körper K mit $\sqrt{-1} \notin K$, der neutrale Unterräume $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ besitzt. (Hinweis. Man betrachte Vektorräume über endlichen Körpern.)

Übung 8. Man zeige, dass es im rationalen Vektorraum $\boldsymbol{V}^2 \cong \mathbf{Q}^2$ positiv definite Skalarprodukte gibt, für die keine orthonormierten Basen existieren.

2.4.6 Ebene Kegelschnitte

In diesem Abschnitt betrachten wir *Ellipsen* einer projektiven Ebene $\boldsymbol{P}^2$ über einem Körper K mit $\operatorname{char} K \neq 2$. Darunter verstehen wir eine Quadrik, deren Gleichung in homogenen Koordinaten auf die Normalform

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 = 0 \tag{54}$$

gebracht werden kann. Es bezeichne $\langle,\rangle$ das entsprechende symmetrische, bilineare Skalarprodukt in dem zu $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}^3)$ gehörenden Vektorraum $\boldsymbol{V}^3$. Man überzeugt sich leicht davon, dass $[\boldsymbol{V}^3, \langle,\rangle]$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt vom Index 1 ist. Für $K = \mathbf{R}$ kann man die zugehörige Quadrik Q mit dem Einheitskreis S^1_K identifizieren: Weil jeder Punkt $\boldsymbol{x} \in Q$ im Komplement der als Absolut genommenen Geraden $x^0 = 0$ liegt, also in der zu dieser Geraden komplementären euklidischen Ebene, können wir $x^0 = 1$ annehmen, so dass (54) in die Gleichung des Einheitskreises übergeht. Im allgemeinen ist jedoch der Durchschnitt von Q mit der absoluten Geraden nicht leer; in der komplexen projektiven

Ebene zum Beispiel besteht dieser Durchschnitt aus den Punkten mit den Koordinaten $(0,1,\mathrm{i}),(0,1,-\mathrm{i})$. Der nächste Satz beschreibt die *Zentralprojektion* der Ellipse von einem ihrer Punkte aus auf die Tangente in einem anderen Punkt. Diese Projektion gestattet es, die projektive Struktur einer Geraden auf der Ellipse einzuführen.

Satz 7. *In der projektiven Ebene $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}^3)$ über einem Körper K mit* $\operatorname{char} K \neq 2$ *seien Q die Ellipse mit der Normalform* (54) *, $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s} \in Q$, $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{s}$, und $\boldsymbol{T_n}, \boldsymbol{T_s}$ ihre Tangenten in $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s}$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} f : \boldsymbol{x} \in Q \longmapsto \boldsymbol{y} := (\boldsymbol{n} \vee \boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{T_s} \in \boldsymbol{T_s},\ (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{n}),\\ f(\boldsymbol{n}) := \boldsymbol{T_n} \wedge \boldsymbol{T_s}, \end{aligned} \tag{55}$$

eine Bijektion von Q auf $\boldsymbol{T_s}$.

Beweis. Da $\boldsymbol{T_s} \cap Q = \{s\}$ und $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{s}$ ist, ist die Gerade $\boldsymbol{n} \vee \boldsymbol{y}$ für alle $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{T_s}$ definiert. Jede Gerade $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{T_n}$ durch $\boldsymbol{n}$ trifft die Quadrik Q in genau einem weiteren Punkt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \cap Q \neq \boldsymbol{n}$, und es ist $\boldsymbol{T_n} \cap Q = \{\boldsymbol{n}\}$, vgl. Beispiel 1.9.8. Daher ist f bijektiv. Hier benutzen wir, dass das Skalarprodukt den Index 1 hat und folglich keine Gerade in Q liegen kann (vgl. Folgerung 2.2). □

Mit Hilfe der Bijektion (55) übertragen wir nun eine projektive Skala von $\boldsymbol{T_s}$ auf die Ellipse Q. Wegen $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{s} \in Q$, $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{s}$, können wir die repräsentierenden isotropen Vektoren $\mathfrak{s}, \mathfrak{n}$, $\boldsymbol{s} = [\mathfrak{s}], \boldsymbol{n} = [\mathfrak{n}]$, so wählen, dass $\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{n} \rangle = -1/2$ gilt. Dann ist

$$\mathfrak{a}_0 := \mathfrak{s} + \mathfrak{n},\ \mathfrak{a}_1 := \mathfrak{s} - \mathfrak{n},\ \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_1 \tag{56}$$

eine pseudo-orthonormierte Basis von $\boldsymbol{V}^3$; dabei gilt wegen

$$\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{a}_2 \rangle = \langle \mathfrak{n}, \mathfrak{a}_2 \rangle = 0,$$

dass $\boldsymbol{b} := [\mathfrak{a}_2]$ der Schnittpunkt der Tangenten $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T}_n \wedge \boldsymbol{T_s}$ ist. Die Vektoren

$$\mathfrak{c}_0 := \mathfrak{s},\ \mathfrak{c}_1 := \mathfrak{a}_2$$

bilden eine Basis des zu $\boldsymbol{T_s}$ gehörenden Vektorraums, die nach (1.1.4) eine projektive Skala ξ auf $\boldsymbol{T_s}$ bestimmt, für die

$$\xi(\boldsymbol{s}) = 0,\ \xi(\boldsymbol{b}) = \infty$$

gelten. Eine elementare Berechnung der inversen Funktion f^{-1} ergibt eine Parameterdarstellung der Ellipse mit der projektiven Skala ξ als Parameter und damit einen rechnerischen Beweis von Satz 7:

$$\xi \in \hat{K} \longmapsto \boldsymbol{x}(\xi) = [\mathfrak{s} + \mathfrak{a}_2 \xi + \mathfrak{n} \xi^2] \in Q. \tag{57}$$

Übung 9. Unter den Voraussetzungen von Satz 7 zeige man: a) In der Basis (56) ist

$$\varphi \in \boldsymbol{SO}(2,K) \longmapsto [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 \cos\varphi + \mathfrak{a}_2 \sin\varphi \in Q$$

eine Bijektion, die Q mit $S^1_K \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ zu identifizieren gestattet (vgl. Beispiel 10). – b) In der oben definierten Basis $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1$ des Vektorraums von $\boldsymbol{T_s}$ hat die Abbildung (55) bei Anwendung von a) die Koordinatendarstellung

$$\boldsymbol{x} = [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1 \cos\varphi + \mathfrak{a}_2 \sin\varphi] \in Q \longmapsto [\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}_1 \xi(\varphi)] \in \boldsymbol{T_s} \text{ mit}$$

$$\xi(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \text{ für } \varphi \neq \pi,\ \xi(\pi) = \infty. \tag{58}$$

c) Man berechne die Umkehrung von (58):

$$\cos\varphi = \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2},\ \sin\varphi = \frac{2\xi}{1+\xi^2}.$$

Übung 10. Für $K = \mathbf{R}$ kann man statt (58) $\xi(\varphi) = \tan(\varphi/2)$ schreiben. Man zeige am Beispiel des Körpers $\mathbf{Z}_3$, dass man im allgemeinen nicht jeden Winkel $\varphi \in \boldsymbol{SO}(2,K)$ halbieren kann; es braucht also kein $\psi \in \boldsymbol{SO}(2,K)$ mit $\varphi = 2\psi$ zu existieren. (Zur Erinnerung: Die Operation in $\boldsymbol{SO}(2,K)$ ist additiv geschrieben, vgl. die Formeln (38)-(41).)

Übung 11. Man beweise, dass $\boldsymbol{O}(2,K)$ für keinen Körper K mit $\operatorname{char} K \neq 2$ abelsch ist. Ist K darüber hinaus ein endlicher Körper aus m Elementen, so enthält $\boldsymbol{O}(2,K)$ genau $2m+2$ Elemente.

Mit Hilfe der Bijektion (55) übertragen wir die projektiven Skalen der Tangente $\boldsymbol{T_s}$ auf die Ellipse Q, die dadurch die projektive Struktur einer Geraden erhält. Die Tangente können wir dabei durch eine beliebige, den Punkt $\boldsymbol{n}$ nicht enthaltende Gerade ersetzen; denn je zwei derartige Geraden sind durch die Zentralprojektion mit dem Zentrum $\boldsymbol{n}$ miteinander verbunden. Bezeichnet $\hat{f}$ die mit Hilfe eines anderen Punktes $\hat{\boldsymbol{n}} \in Q$ erzeugte Bijektion, so erhält die Abbildung $h := \hat{f} \circ f^{-1}$ nach Konstruktion die Doppelverhältnisse und ist somit eine Projektivität der Tangente $\boldsymbol{T_s}$. Betrachtet man die eindimensionale projektive Geometrie der Geradenbüschel, vgl. Abschnitt 1.6.3, so ergibt sich aus dieser Überlegung ein Satz von J. Steiner , vgl. W. Blaschke [13], S. 48:

Folgerung 8. *Sind unter den Voraussetzungen von Satz 7 $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \in Q$, $\boldsymbol{n}_1 \neq \boldsymbol{n}_2$, zwei Punkte der Ellipse und bezeichnen τ_i, $i = 1,2$ die Geradenbüschel mit den Zentren $\boldsymbol{n}_i$, so sind die Abbildungen*

$$\begin{aligned}
&F_1 : \boldsymbol{x} \in Q, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{n}_1, \longmapsto \boldsymbol{n}_1 \vee \boldsymbol{x} \in \tau_1,\ F_1(\boldsymbol{n}_1) = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}_1},\\
&F_2 : \boldsymbol{x} \in Q, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{n}_2, \longmapsto \boldsymbol{n}_2 \vee \boldsymbol{x} \in \tau_2,\ F_2(\boldsymbol{n}_2) = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}_2},\\
&H = F_2 \circ F_1^{-1} : \tau_1 \to \tau_2,
\end{aligned}$$

Projektivitäten der in den Geradenbüscheln bzw. auf Q definierten projektiven Geometrien. □

Offenbar gilt für die Projektivität H

$$H(\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}_1}) = \boldsymbol{n}_1 \vee \boldsymbol{n}_2,\ H(\boldsymbol{n}_1 \vee \boldsymbol{n}_2) = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}_2}. \tag{59}$$

Nach Folgerung 8 sind also zwei Geradenbüschel, deren Zentren auf einer Ellipse liegen, durch die Punkte der Ellipse projektiv aufeinander bezogen. Die Umkehrung dieses Sachverhalts ist die nach J. Steiner benannte *Erzeugung der Ellipse* :

Satz 9. *Es sei $\boldsymbol{P}^2$ eine projektive Ebene über einem Körper K,* $\operatorname{char} K \neq 2$. *In $\boldsymbol{P}^2$ seien τ_1, τ_2 Geradenbüschel mit den Zentren $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \in \boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{n}_1 \neq \boldsymbol{n}_2$, und $H : \tau_1 \to \tau_2$ eine Projektivität der Geradenbüschel mit $H(\boldsymbol{n}_1 \vee \boldsymbol{n}_2) \neq \boldsymbol{n}_1 \vee \boldsymbol{n}_2$. Dann ist die Menge der Punkte*

$$Q := \{\boldsymbol{g} \wedge H(\boldsymbol{g}) | \boldsymbol{g} \in \tau_1\}$$

eine Ellipse.

Beweis. Wir wählen eine geeignete, der gegebenen Konfiguration angepasste Basis $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ des Vektorraums $\boldsymbol{V}^3$ von $\boldsymbol{P}^2$. Es seien

$$\boldsymbol{n}_1 = [\mathfrak{a}_1],\ \boldsymbol{n}_2 = [\mathfrak{a}_2].$$

Dann ist die Verbindungsgerade $\boldsymbol{g}_0 := \boldsymbol{n}_1 \vee \boldsymbol{n}_2$ durch den Kovektor $\mathfrak{u}^0$ der dualen Basis gegeben:

$$\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{g}_0 \longleftrightarrow \mathfrak{u}^0(\mathfrak{x}) = x^0 = 0.$$

Wir betrachten die Gerade $\boldsymbol{g}_2 \in \tau_1$ mit $H(\boldsymbol{g}_2) = \boldsymbol{g}_0$ und setzen $\boldsymbol{g}_1 := H(\boldsymbol{g}_0) \in \tau_2$. Es gilt $\boldsymbol{g}_1 \neq \boldsymbol{g}_2$: Aus $\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{g}_2$ würde ja $\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{n}_1 \vee \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{g}_0$ und somit $H(\boldsymbol{g}_0) = \boldsymbol{g}_0$ folgen entgegen der Voraussetzung. Daher ist $\boldsymbol{p} := \boldsymbol{g}_1 \wedge \boldsymbol{g}_2$ ein von $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ unabhängiger Punkt; wir wählen $\mathfrak{a}_0$ als seinen Vertreter, $\boldsymbol{p} = [\mathfrak{a}_0]$. Somit ist das Büschel τ_1 durch die Kovektoren aus $[\mathfrak{a}_1]^\perp = [\mathfrak{u}^0, \mathfrak{u}^2]$ und τ^2 durch $[\mathfrak{a}_2]^\perp = [\mathfrak{u}^0, \mathfrak{u}^1]$ gegeben, wobei $(\mathfrak{u}^0, \mathfrak{u}^1, \mathfrak{u}^2)$ die zu $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ duale Basis bezeichnet. Die Abbildung H werde durch die lineare Abbildung $a : [\mathfrak{u}^0, \mathfrak{u}^2] \to [\mathfrak{u}^0, \mathfrak{u}^1]$ erzeugt. Wegen

$$H(\boldsymbol{g}_0) = \boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{n}_2 \vee \boldsymbol{p} :\ x^1 = 0,$$

ist $a(\mathfrak{u}^0) = \mathfrak{u}^1\alpha$. Die Bedingung

$$H(\boldsymbol{g}_2) = \boldsymbol{g}_0,\ \boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{n}_1 \vee \boldsymbol{p} : x^2 = 0,$$

ergibt $a(\mathfrak{u}^2) = \mathfrak{u}_0\beta$. Lassen wir in beiden Büscheln die Einheitsgeraden $\mathfrak{u}^0 + \mathfrak{u}^2, \mathfrak{u}^0 + \mathfrak{u}^1$ einander entsprechen, so erhalten wir a in Gestalt einer Zuordnung durch gleiche Koordinaten:

$$a(\mathfrak{u}^0\alpha + \mathfrak{u}^2\beta) = \mathfrak{u}^0\beta + \mathfrak{u}^1\alpha.$$

Der Schnittpunkt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g} \wedge H(\boldsymbol{g}) = [\mathfrak{x}]$, $\boldsymbol{g} \in \tau_1$, genügt den Gleichungen

$$\begin{aligned}(\mathfrak{u}^0\alpha + \mathfrak{u}^2\beta)(\mathfrak{x}) &= x^0\alpha + x^2\beta = 0,\\ (\mathfrak{u}^0\beta + \mathfrak{u}^1\alpha)(\mathfrak{x}) &= x^0\beta + x^1\alpha = 0.\end{aligned}$$

Für $\beta = 0$ folgt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}_0 \wedge \boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{n}_2$. Im Falle $\beta \neq 0$ setzen wir $\beta = 1$ und erhalten nach Elimination von α die Gleichung einer Ellipse in der Gestalt

$$(x^0)^2 - x^1x^2 = 0,$$

welche durch die Substitution

$$x^1 = y^0 - y^1,\ x^2 = y^0 + y^1,\ x^0 = y^2$$

in die Normalform übergeht. Nach Folgerung 8 erhalten wir auf diese Art jeden Punkt der Ellipse.□

Übung 12. Mit Hilfe der Steinerschen Erzeugung der Ellipse beweise man: Durch fünf Punkte in allgemeiner Lage der Ebene $\boldsymbol{P}^2_K$, char $K \neq 2$, gibt es genau eine Ellipse. Hinweis. Man betrachte die Geradenbüschel τ_1, τ_2 durch zwei der Punkte und konstruiere mit Hilfe der drei anderen eine geeignete Projektivität $H :\ \tau_1 \to \tau_2$.

2.5 Sphärische und elliptische Geometrie

In diesem Abschnitt wollen wir zwei klassische reelle Geometrien, die sphärische und die elliptische, detailliert vom projektiven Standpunkt aus betrachten; der zugrunde liegende Körper sei also durchweg $K = \mathbf{R}$. Beide Geometrien sind wegen der praktischen Anwendungen der sphärischen Geometrie (n= 2, Geodäsie, Astronomie, siehe zum Beispiel das Buch [12] von H.-G. Bigalke) und wegen ihrer ausgezeichneten Position als Geometrien konstanter positiver Krümmung (vgl. [82] von J. A. Wolf) in den Grundlagen der Geometrie von zentraler Bedeutung. Lokal unterscheiden sich beide Geometrien nicht; global ist die Sphäre eine zweifache Überlagerung des projektiven Raums derselben Dimension, so dass sich hier enge Zusammenhänge ergeben.

2.5.1 Sphärische Geometrie als Überlagerung der elliptischen

Die elliptische Geometrie wurde schon in Beispiel 3.1 als reelle projektive Geometrie einer nicht ausgearteten Polarität F vom Index 0 definiert. Es sei also $\boldsymbol{V}^{n+1}$ ein $(n+1)$-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\pi : \boldsymbol{V}^{n+1} \to \boldsymbol{P}_o^n$ die kanonische Abbildung (1.1.2) auf den zugehörigen projektiven Raum. Das euklidische, also positiv definite, Skalarprodukt definiert dann die Polarität F:

$$F: \ \boldsymbol{A} \in \mathfrak{P}^n \longmapsto \boldsymbol{A}^\perp \in \mathfrak{P}^n.$$

Nach (1.24) ist $\boldsymbol{PO}(n+1) = \boldsymbol{O}(n+1)/\{\pm I_{n+1}\}$ die Isotropiegruppe der Polarität F, welche die elliptische Geometrie von $\mathfrak{P}^n$ im Sinne des F. Kleinschen Erlanger Programms bestimmt. Ist $n = 2m$ gerade, so gilt $\det(-I_{n+1}) = -1$, und es folgt die Isomorphie

$$\boldsymbol{PO}(2m+1) \cong \boldsymbol{SO}(2m+1). \tag{1}$$

Für das Folgende ist es jedoch zweckmäßig, die nicht effektiven Wirkungen von $\boldsymbol{O}(n+1)$ auf den in der projektiven Geometrie auftretenden Räumen und Mannigfaltigkeiten zu betrachten.

Die Orbits der Gruppe $\boldsymbol{O}(n+1)$ bei ihrer linearen Wirkung auf dem euklidischen Vektorraum $\boldsymbol{V}^{n+1}$ sind der Ursprung $\mathfrak{o}$ und die *Sphären vom Radius* r:

$$S^n(r) := \{\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}^{n+1} | \ |\mathfrak{x}| = r\}. \tag{2}$$

In der Tat wirkt nicht nur $\boldsymbol{O}(n+1)$, sondern auch die spezielle orthogonale Gruppe $\boldsymbol{SO}(n+1)$ transitiv auf $S^n(r)$, was sich aus dem Spezialfall $k = 1$ der folgenden Übung ergibt:

Übung 1. Man beweise folgende einfache Verschärfung des Satzes von E. Witt für euklidische Vektorräume: Sind $\boldsymbol{A}^k, \boldsymbol{B}^k$ orientierte Unterräume des orientierten euklidischen Vektorraums $\boldsymbol{V}^n$, $0 \le k \le n$, so gibt es eine Abbildung $g \in \boldsymbol{SO}(n)$ mit $g(\boldsymbol{A}^k) = \boldsymbol{B}^k$, die eine beliebig vorgegebene, positiv orientierte, orthonormierte Basis von $\boldsymbol{A}^k$ in eine beliebig vorgegebene, positiv orientierte, orthonormierte Basis von $\boldsymbol{B}^k$ überführt (vgl. Folgerung I.6.2.1).

Im Folgenden bezeichne $(\mathfrak{e}_j)$, $j = 0, \dots, n$, eine feste orthonormierte Basis des euklidischen Vektorraums $\boldsymbol{V}^{n+1}$. Wir identifizieren die Punkte der n-Sphäre mit ihren Ortsvektoren bezüglich des fest gewählten Ursprungs des euklidischen Punktraums. Als Ursprung von $S^n(r)$ wählen wir den Punkt $\mathfrak{e}_0 r$; seine Isotropiegruppe $\boldsymbol{O}(n)$ erscheint dann in Bezug auf die Basis $(\mathfrak{e}_i)$ in der üblichen Darstellung durch orthogonale Matrizen (a_{ij}) (vgl. I.6.2, (27) – (29)) mit

$$a_{00} = 1,\ a_{0j} = a_{i0} = 0 \text{ für } i, j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Die Isotropiegruppen der Sphären $S^n(r)$ in der euklidischen Gruppe $\boldsymbol{E}(n{+}1)$ stimmen überein, sie sind gleich der orthogonalen Gruppe $\boldsymbol{O}(n{+}1)$. In der transitiven Transformationsgruppe $[\boldsymbol{O}(n{+}1), S^n(r)]$ ist die Isotropiegruppe des Punktes $\mathfrak{e}_0 r \in S^n(r)$ gleich $\boldsymbol{O}(n)$, so dass diese Sphären als homogene Räume alle isomorph sind (vgl. Beispiel I.1.5.3):

$$S^n(r) \cong \boldsymbol{O}(n+1)/\boldsymbol{O}(n).$$

Hier bezeichnet $\boldsymbol{O}(n+1)/\boldsymbol{O}(n)$ die Faktormenge der Gruppe $\boldsymbol{O}(n+1)$ nach der Untergruppe $\boldsymbol{O}(n)$, vgl. Definition I.3.1.1; in der Geometrie spricht man meist von einem *Faktorraum*. Der Radius $r > 0$ ist lediglich ein die relative Größe der Sphäre im Verhältnis zu einem Einheitsmaßstab beschreibender Parameter. Unter der *sphärischen Geometrie* versteht man die Geometrie des homogenen Raumes $[\boldsymbol{O}(n+1), S^n(r)]$ im Sinne des F. Kleinschen Erlanger Programms. Bis zum Ende dieses Abschnitts setzen wir zur Abkürzung

$$G_n := \boldsymbol{O}(n+1),\ SG_n := \boldsymbol{SO}(n+1).$$

Der Anschaulichkeit halber betrachten wir die n-dimensionalen Sphären ihrer Definition (2) nach als in den euklidischen $(n{+}1)$-dimensionalen Vektorraum (oder dem mit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}{+}\mathfrak{x}$ entsprechenden Punktraum) eingebettet. Abstrahiert man von der Größe des Radius r, setzt etwa $r = 1$, so kann man alle Überlegungen auch auf die Transformationsgruppe $[G_n, G_n/G_{n-1}]$ beziehen. Im Folgenden schreiben wir $S^n := S^n(1)$.

Wir schränken nun die kanonische Abbildung $\pi : \boldsymbol{V}^{n+1} \to \boldsymbol{P}^n$ auf eine n-Sphäre ein:

$$p := \pi | S^n(r) : \mathfrak{x} \in S^n(r) \longmapsto \boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{P}^n. \tag{4}$$

Offenbar ist p surjektiv; jeder Punkt $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{P}^n$ hat genau zwei Urbilder

$$p^{-1}(\boldsymbol{x}) = \{\mathfrak{x}, -\mathfrak{x}\}.$$

Allgemein ist das Urbild $p^{-1}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cap S^n(r)$ einer k-Ebene $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{P}^n$ der Durchschnitt des entsprechenden gleich bezeichneten $(k+1)$-dimensionalen Unterraums $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{V}^{n+1}$ mit der n-Sphäre $S^n(r)$; man nennt diese Durchschnitte k-*Großsphären*, $k = -1, \ldots, n$, und definiert für sie die ebenfalls mit F bezeichnete *sphärische Polarität* mit Hilfe der Orthogonalität:

$$F : \boldsymbol{A} \cap S^n(r) \longmapsto \boldsymbol{A}^\perp \cap S^n(r). \tag{5}$$

Offenbar ist $\boldsymbol{A} \cap S^n(r) \subset \boldsymbol{A}$ selbst eine k-dimensionale Sphäre vom Radius r, und die zu ihr polare Großsphäre ist eine $(n-k-1)$-Sphäre vom Radius r. Die eindimensionlen Großsphären werden *Großkreise* genannt. Speziell sind die 0-Großsphären Paare diametral gegenüberliegender Punkte; aus formalen Gründen, wegen $F(S^n(r)) = \boldsymbol{o} \cap S^n(r) = \emptyset$, betrachten wir die leere Menge als (-1)-dimensionale Großsphäre. Auf der S^2 mit den üblichen geografischen Koordinaten ist die Nullsphäre bestehend aus Nord- und Südpol die Polare des Äquators.

Übung 2. Man beweise: a) Die Abbildung

$$S : \boldsymbol{A} \in \mathfrak{P}^n \longmapsto S(\boldsymbol{A}) := \boldsymbol{A} \cap S^n(r)$$

ist eine G_n-Isomorphie des Verbandes $\mathfrak{P}^n$ der Unterräume des elliptischen Raumes auf den Verband der in $S^n(r)$ enthaltenen Großsphären; dabei gilt für die Polaritäten

$$F(S(\boldsymbol{A})) = S(F(\boldsymbol{A})).$$

b) Erweitert man die Projektion (4) vermöge $p(M) := [M]$ auf beliebige Teilmengen $M \subset S^n(r)$, so gilt $p(S(\boldsymbol{A})) = \boldsymbol{A}$, und $S(p(M))$ ist die kleinste Großsphäre, die M enthält. – c) Die Punkte $\mathfrak{x}_i \in S^n(r)$, $i = 0, \ldots, k, k \leq n$, nennt man *in allgemeiner Lage* , wenn sie in keiner $(k-1)$-Großsphäre liegen. Durch je $k+1$ Punkte in allgemeiner Lage geht genau eine k-Großsphäre.

Die k-Großsphären spielen in der sphärischen Geometrie die Rolle der k-Ebenen; sie sind spezielle Teilsphären: Eine Menge $\Sigma^k \subset S^n(r)$ wird *k-Teilsphäre* genannt, wenn es eine euklidische $k+1$-Ebene $\boldsymbol{H}^{k+1} \subset \boldsymbol{E}^{n+1}$ gibt mit $\Sigma^k = S^n(r) \cap \boldsymbol{H}^{k+1}$, $0 \leq k \leq n$, und Σ^k wenigstens zwei Punkte enthält. Eine Teilsphäre ist also eine Großsphäre, wenn die sie definierende euklidische $(k+1)$-Ebene das Zentrum von $S^k(r)$, also den Urprung des Koordinatensystems, enthält. Zum Beispiel sind die Breitenkreise der geografischen Koordinaten auf einer Sphäre S^2 1-Teilsphären, von denen nur der Äquator ein Großkreis ist. Einige elementare Eigenschaften der Teilsphären kann man der folgenden Übung entnehmen:

Übung 3. Man beweise: Jede k-Teilsphäre $\Sigma^k \subset S^n(r)$ bestimmt die sie erzeugende $k+1$-Ebene $\boldsymbol{H}^{k+1}$ eindeutig. Sie ist eine Hypersphäre in $\boldsymbol{H}^{k+1}$, deren Mittelpunkt $\boldsymbol{m}$ der Fußpunkt des Lots des Mittelpunktes $\boldsymbol{o}$ von $S^n(r)$ auf $\boldsymbol{H}^{k+1}$ ist und deren euklidischer Radius gleich $\sqrt{r^2 - c^2}$ ist, wobei c den Abstand von $\boldsymbol{o}$ zu $\boldsymbol{H}^{k+1}$ bezeichnet, vgl. Übung I.6.2.3.

Natürlich schneidet eine beliebige euklidische $k+1$-Ebene genau dann auf $S^n(r)$ eine k-Teilsphäre aus, wenn ihr Abstand $c \geq 0$ zum Ursprung $\boldsymbol{o}$ kleiner als r ist; für $c = 0$ ergeben sich die k-Großsphären.

Beispiel 1. Die Einschränkung der kanonischen Abbildung p auf eine offene Halbsphäre

$$S^n_+(r, \mathfrak{a}) := \{\mathfrak{x} \in S^n(r) | \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a} \rangle > 0\} \qquad (\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}) \tag{6}$$

ist injektiv. Identifiziert man diametral gegenüberliegende Punkte der diese Halbsphäre berandenden *Großhypersphäre*:

$$S^{n-1}(r, \mathfrak{a}) := \{\mathfrak{x} \in S^n(r) | \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a} \rangle = 0\} \qquad (\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}), \tag{7}$$

so erhält man ein bijektive Beziehung zum projektiven Raum; hat man eine Großhypersphäre (7) ausgewählt, so nennt man sie oft auch den *Äquator*. Durch diese Bijektion, oder indem man p als topologische Überlagerung betrachtet, lassen sich die topologischen Eigenschaften des projektiven Raumes $\boldsymbol{P}^n$ auf die der n-Sphäre zurückführen. Lokal, genauer auf eine beliebige Halbsphäre eingeschränkt, ist p dann ein Homöomorphismus, und, wenn man die differenzierbare Struktur überträgt, sogar ein Diffeomorphismus. Der reelle projektive Raum $\boldsymbol{P}^n$ wird auf diese Weise zu einer kompakten n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit, die bei ungerader Dimension n orientierbar und sonst

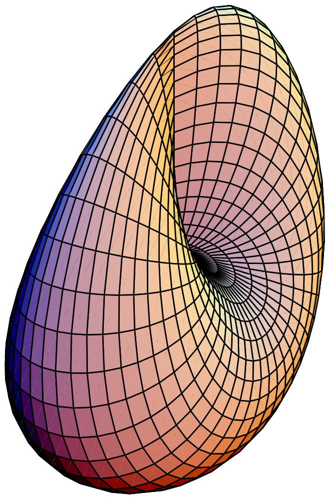

Abbildung 2.2: Eine Kreuzhaube.

nicht orientierbar ist (siehe zum Beispiel R. Sulanke. P. Wintgen [77], wo auch ein elementares Orientierbarkeitskriterium angegeben wird).

Die projektive Ebene ist damit eine nicht orientierbare geschlossene Fläche, die nur mit Selbstdurchdringungen in den dreidimensionalen euklidischen Raum $\boldsymbol{E}^3$ eingebettet werden kann. Abbildung 2.2 zeigt ein Modell dieser Fläche, das außer einer Selbstdurchdringung auch Singularitäten hat; sie wird eine *Kreuzhaube* genannt. Weiter unten in Beispiel 4 kommen wir noch einmal auf diese Darstellung zurück. Eine andere, ebenfalls Singularitäten enthaltende Fläche ist die von J. Steiner gefundene *römische Fläche*, Abbildung 2.3. Ausführliche Besprechungen verschiedener Darstellungen der projektiven Ebene findet man in dem Buch von F. Apery [2], das zahlreiche anschauliche Grafiken enthält, siehe auch den von G. Fischer herausgegebenen Sammelband [32]. Parameterdarstellungen und Methoden zur Erzeugung der Grafiken mit Hilfe des von S. Wolfram [83] geschaffenen Programms *Mathematica* sind in Alfred Gray's Lehrbuch [36] enthalten. Die *Boysche Fläche* ist eine singularitätenfreie Darstellung der projektiven Ebene mit Selbstdurchdringungen im euklidischen Raum $\boldsymbol{E}^3$, Abbildung 2.4. W. Boy hat sie in seiner Dissertation [17], die durch eine Fragestellung von D. Hilbert angeregt wurde, definiert und beschrieben, vgl. auch W. Boy [18]. Die in der Abbildung sichtbaren Kanten sind durch die numerische Approximation bedingt; in Wirklichkeit ist die Fläche glatt. $\square$

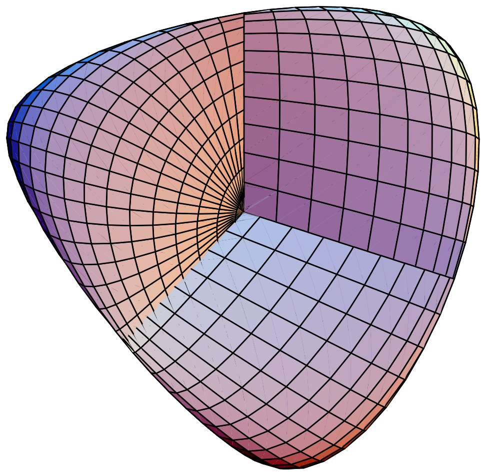

Abbildung 2.3: J. Steiner's römische Fläche

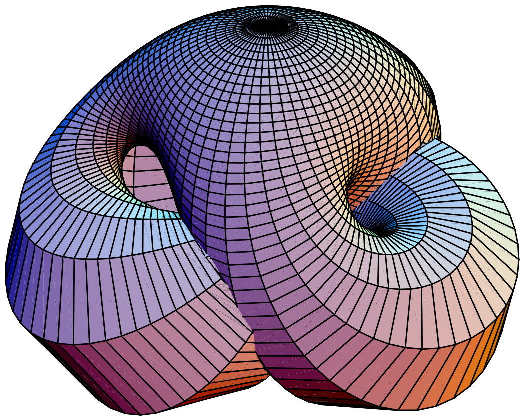

Abbildung 2.4: Die Boysche Fläche

2.5.2 Abstand und Winkel

Die wichtigste Invariante der orthogonalen Gruppe G_n bei ihrer linearen Wirkung auf dem euklidischen Vektorraum und in allen daraus abgeleiteten Transformationsgruppen ist das die Polarität F bestimmende Skalarprodukt $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle$. Mit seiner Hilfe definiert man den *sphärischen Abstand* zweier Punkte

$$\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in S^n(r) \longmapsto d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) := r \arccos(\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle / r^2), \tag{8}$$

das ist die Länge des kürzeren Bogens eines Großkreises durch die Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$. Liegen sich diese Punkte *diametral gegenüber* : $\mathfrak{y} = -\mathfrak{x}$, so ist der Abstand zwischen ihnen gleich $r\pi$ unabhängig von der Wahl des Großkreises. Offenbar hat der Abstand d die Eigenschaften

$$0 \leq d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \leq r\pi, \; d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0 \longleftrightarrow \mathfrak{x} = \mathfrak{y}, \; d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = d(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = d(-\mathfrak{x}, -\mathfrak{y}). \tag{9}$$

Die zum Abstandsbegriff gehörende Dreiecksungleichung ergibt sich weiter unten aus dem Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie. Der *Durchmesser der Sphäre* $S^n(r)$, das ist das Supremum der Abstände $d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, wird für zwei diametral gegenüberliegende Punkte erreicht:

$$d(\mathfrak{x}, -\mathfrak{x}) = r\pi \qquad (\mathfrak{x} \in S^n(r)).$$

Übung 4. Man beweise: Zwei Paare $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2), (\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2) \in S^n(r) \times S^n(r)$ sind genau dann SG_n-kongruent (G_n-kongruent), wenn

$$d(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = d(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2)$$

gilt.

Zur Definition des Abstandes in der elliptischen Geometrie betrachten wir wieder die Überlagerung (4). Für jedes $g \in \boldsymbol{GL}(n+1, \mathbf{R})$ gilt nach Definition der Projektivitäten $g[\mathfrak{x}] = [g\mathfrak{x}]$, d.h. π ist eine äquivariante Abbildung. Aus (4) folgt, dass auch p eine äquivariante Abbildung für die Wirkungen von G_n ist. Setzen wir diese Wirkungen kanonisch auf die k-Tupelmengen und auf die Potenzmengen fort:

$$g(x_1, \ldots, x_k) := (gx_1, \ldots, gx_k), \tag{10}$$

$$g(A) := \{gx | x \in A\}, \tag{11}$$

so entstehen wieder äquivariante Wirkungen auf den einander entsprechenden Fortsetzungen. Eine Abbildung $f : \boldsymbol{P}^n \times \ldots \times \boldsymbol{P}^n \to M$, wobei M eine beliebige nicht leere Menge bezeichnet, ist eine *G_n-Invariante*, wenn sie

$$f(g\boldsymbol{x}_1, \ldots, g\boldsymbol{x}_k) = f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k) \text{ für alle } g \in G_n, \; \boldsymbol{x}_\kappa \in \boldsymbol{P}^n, \; \kappa = 1, \ldots, k, \tag{12}$$

erfüllt. Eine analoge Terminologie verwenden wir auch bei anderen Transformationsgruppen. Unmittelbar aus den Definitionen folgt

Lemma 1. *Ist $f : \boldsymbol{P}^n \times \ldots \times \boldsymbol{P}^n \to M$ eine G_n-Invariante auf dem Raum der k-Tupel projektiver Punkte, so ist auch die zurückgezogene Abbildung*

$$p^* f(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k) := f(p(\mathfrak{x}_1), \ldots, p(\mathfrak{x}_k)) \tag{13}$$

eine G_n-Invariante; dabei erfüllt die Abbildung $F := p^* f$ die Symmetriebedingungen

$$F(\pm\mathfrak{x}_1, \ldots, \pm\mathfrak{x}_k) = F(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k). \tag{14}$$

Ist umgekehrt eine G_n-Invariante F auf dem Raum der k-Tupel aus Punkten der n-Sphäre $S^n(r)$ gegeben, welche die Symmetriebedingungen (14) *erfüllt, so ist*

$$f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k) := F(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_k) \text{ mit } p(\mathfrak{x}_\kappa) = \boldsymbol{x}_\kappa,\ \kappa = 1,\ldots,k, \tag{15}$$

eine korrekt, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $\mathfrak{x}_\kappa \in p^{-1}(\boldsymbol{x}_\kappa)$ definierte G_n-Invariante. □

Offenbar genügt der sphärische Abstand (8) nicht den Symmetriebedingungen (14). Ersetzen wir in (8) jedoch das Skalarprodukt durch seinen absoluten Betrag, so erhalten wir eine auf $S^n(r) \times S^n(r)$ definierte Funktion, die (14) erfüllt. Nach Lemma 1 können wir also den *Abstand* zweier Punkte des elliptischen Raums folgendermaßen definieren:

$$e(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := r\arccos(|\langle\mathfrak{x},\mathfrak{y}\rangle|) \text{ mit } \boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}], \boldsymbol{y} = [\mathfrak{y}], \mathfrak{x},\mathfrak{y} \in S^n(1)). \tag{16}$$

Aus (9) ergeben sich die entsprechenden Eigenschaften der Metrik

$$0 \le e(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le r\pi/2, e(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, e(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = e(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}); \tag{17}$$

die Dreiecksungleichung wird weiter unten bewiesen. Den *elliptischen Raum* versehen mit der durch (16) definierten Metrik bezeichnen wir mit $\boldsymbol{P}^n(r)$. Die Abbildung p ist natürlich keine *Isometrie*[1]: der Durchmesser des elliptischen Raumes ist ja nur halb so groß wie der Durchmesser der Sphäre vom Radius r:

Übung 5. a) Man beweise: Im elliptischen Raum $\boldsymbol{P}^n(r)$ gilt für den *Durchmesser*, also das Supremum der Abstandsfunktion,

$$\sup\{e(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}^n(r)\} = r\pi/2.$$

b) Für die Projektion (4) $p : S^n(r) \to \boldsymbol{P}^n(r)$ gilt:

$$e(p(\mathfrak{x}),p(\mathfrak{y})) = d(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \longleftrightarrow d(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \le r\pi/2 \qquad (\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \in S^n(r).$$

c) In einem Raum E mit einer Metrik d bezeichne $B(\boldsymbol{z},\rho)$ den *offenen Ball vom Radius ρ mit dem Zentrum $\boldsymbol{z}$*:

$$B(\boldsymbol{z},\rho) := \{\boldsymbol{x} \in E|\ d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) < \rho\} \qquad (\rho > 0). \tag{18}$$

Man zeige: Für jeden offenen Ball $B(\boldsymbol{z},\rho) \subset S^n(r)$ mit $\rho \le r\pi/4$ ist $p : B(\boldsymbol{z},\rho) \to p(B(\boldsymbol{z},\rho))$ eine Isometrie, d.h. es gilt

$$e(p(\mathfrak{x}),p(\mathfrak{y})) = d(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \text{ für alle } \mathfrak{x},\mathfrak{y} \in B(\boldsymbol{z},\rho),$$

und für $\rho > r\pi/4$ gilt dies nicht.

Allgemein nennt man eine surjektive Abbildung $p : E \to P$ zwischen zwei metrischen Räumen eine *lokale Isometrie*, wenn es zu jedem Punkt $\boldsymbol{z} \in E$ einen offenen Ball $B = B(\boldsymbol{z},\epsilon)$ so gibt, dass die Einschränkung $q := p|B : B \to p(B)$ eine Isometrie ist. Man beweist leicht, dass eine Isometrie q stets bijektiv und die inverse Abbildung q^{-1} wieder eine Isometrie ist. Nimmt man die offenen Bälle eines metrischen Raumes als Umgebungen ihrer Zentren, so erzeugen sie eine *metrische Topologie*, in der Konvergenz, offene und

[1] Bekanntlich nennt man eine surjektive Abbildung $q : E_1 \to E_2$ zwischen zwei metrischen Räumen eine *Isometrie*, wenn sie den Abstand invariant lässt, also $d_2(q(x),q(y)) = d_1(x,y)$ für alle $x,y \in E_1$ erfüllt.

abgeschlossene Mengen u.s.w. analog zur reellen Analysis definiert werden können, vgl. etwa W. Rinow [70], S. 28 ff. Eine sehr anschauliche Einführung in die reelle projektive Geometrie der Ebene und des Raumes unter Betonung metrischer Gesichtspunkte gibt das Buch von H. Busemann und P. J. Kelly [21]

In einem Raum E mit einer Metrik d bezeichne $S(\boldsymbol{z}, \rho)$ die *metrische Hypersphäre vom Radius ρ mit dem Zentrum $\boldsymbol{z}$*:

$$S(\boldsymbol{z}, \rho) := \{\boldsymbol{x} \in E |\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \rho\} \qquad (\rho > 0).$$

Der euklidische Radius einer Teilsphäre ist dabei von dem sphärischen Radius zu unterscheiden, der sich aus der Metrik d auf der n-Sphäre ergibt:

Übung 6. Man beweise: a) Ist wie in Übung 3 $\Sigma^k \subset S^n(r)$ eine k-Teilsphäre mit $c > 0$, so ist sie enthalten in der metrischen Sphäre mit dem Mittelpunkt $\boldsymbol{m}_o = [\mathfrak{m}r/|\mathfrak{m}|]$ und dem Radius $\rho = r \arccos(c/r)$:

$$\Sigma^k = \{\boldsymbol{x} \in S^n(r) \cap \boldsymbol{H}^{k+1} |\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{m}_o) = \rho\}. \tag{19}$$

b) Gilt für eine $k+1$-Ebene $\boldsymbol{H}^{k+1}$ die Gleichung $c = r$, so ist $\boldsymbol{H}^{k+1}$ tangentiell zu $S^n(r)$, und der Durchschnitt $S^n(r) \cap \boldsymbol{H}^{k+1}$ ist der Berührungspunkt. – c) Ist die Teilsphäre eine Großsphäre ($c = 0$), so gilt (19) für jeden Punkt $\boldsymbol{m}_o$ der zu ihr polaren Großsphäre und $\rho = r\pi/2$. – d) Jede k-Teilsphäre Σ^k ist Orbit einer zu der Untergruppe $\boldsymbol{O}(k+1)$ von $\boldsymbol{O}(n+1)$ konjugierten Untergruppe. – e) Die metrischen Hypersphären sind $(n-1)$-Teilsphären, und umgekehrt.

Da es in euklidischen Vektorräumen keine isotropen Unterräume gibt, erhalten wir aus Satz 4.2

Satz 2. *Zwei endliche Punktfolgen $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k)$, $(\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_k)$ des elliptischen Raums $\boldsymbol{P}^n(r)$ sind genau dann G_n-kongruent, wenn die entsprechenden Abstände gleich sind:*

$$e(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = e(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j),\ i, j = 1, \dots, k. \ \square$$

Zum Beweis genügt es zu bemerken, dass wir die Punkte so durch Vektoren repräsentieren können, dass die Skalarprodukte entsprechend gleich sind. Aus den Eigenschaften der Gramschen Determinante, vgl. Folgerung I.6.3.1 oder (2.33), erhalten wir die Voraussetzung a) von Satz 4.1 über die Dimensionen der einander entsprechenden, von den Punkten aufgespannten Unterräume, so dass wir Satz 4.2 anwenden können.

Übung 7. Man beweise, dass ein zu Satz 2 analoges Resultat auch für Punktfolgen auf der n-Sphäre gilt. Hinweis. Man zeige zuerst, dass die linearen Hüllen $\mathfrak{L}(\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_h), \mathfrak{L}(\mathfrak{y}_1, \dots, \mathfrak{y}_h)$, $h = 1, \dots, k$, jeweils gleiche Dimension haben und stelle die Vektoren mit entsprechend gleichen Koordinaten in geeignet angepassten orthonormierten Repères dar.

Mit Hilfe der Polarität $F : \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A}^\perp$ definiert man als den zu dem Abstand zweier Punkte dualen Begriff den *Winkel* zweier Hyperebenen $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ des elliptischen Raums $\boldsymbol{P}^n(r)$ als den normierten Abstand ihrer Pole:

$$\angle(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) := e(\boldsymbol{X}^\perp, \boldsymbol{Y}^\perp)/r. \tag{20}$$

Die Normierung stört zwar die Dualität ein wenig; sie ist jedoch aus historischen und praktischen Gründen üblich. Da die Polarität eine G_n-äquivariante Involution ist, folgt aus den Eigenschaften (17) der Metrik unmittelbar

$$0 \leq \angle(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \leq \pi/2, \angle(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = 0 \longleftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y}, \angle(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \angle(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}). \tag{21}$$

Durch Anwenden der Polarität erhält man aus Satz 2

Folgerung 3. *Zwei endliche Hyperebenenfolgen* $(\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_k)$, $(\boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_k)$ *des elliptischen Raums* $\boldsymbol{P}^n(r)$ *sind genau dann* G_n*-kongruent, wenn die entsprechenden Winkel gleich sind:*

$$\angle(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j) = \angle(\boldsymbol{Y}_i, \boldsymbol{Y}_j),\ i, j = 1, \ldots, k. \ \square$$

Aus Übung 5, a), resultiert

$$\sup\{\angle(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) |\ \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \subset \boldsymbol{P}^n(r) \text{ Hyperebenen}\} = \pi/2. \tag{22}$$

Übung 8. Man zeige: Definiert man den *Winkel zwischen zwei Großhypersphären* als den Winkel zwischen den ihnen entsprechenden Hyperebenen des elliptischen Raums (vgl. (20)), so gilt eine zu Folgerung 3 analoge Aussage für Großhypersphärenfolgen der $S^n(r)$.

Im Unterschied zur elliptischen Geometrie kann man in der sphärischen Geometrie den Orientierungsbegriff uneingeschränkt definieren und anwenden. Wir nennen eine Sphäre $S^n(r)$ *orientiert*, wenn der sie enthaltende euklidische Vektorraum $\boldsymbol{V}^{n+1}$ orientiert ist; ein *sphärisches* n*-Simplex* $(\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ ist positiv orientiert, wenn das Volumen des aus den Ecken gebildeten Quaders positiv ist:

$$[\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n] = \det(\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_n) > 0;$$

hierbei ist die Determinante aus den Koordinaten bezüglich der Standardbasis zu bilden, die wir als positiv orientiert annehmen. Eine k-Simplex $(\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_k)$ mit Ecken in allgemeiner Lage bestimmt eine k-Großsphäre und gleichzeitig deren Orientierung, wenn wir es als positiv orientiert betrachten; bestimmt $(\mathfrak{y}_0, \ldots, \mathfrak{y}_k)$ dieselbe k-Großsphäre, so sind die Simplices $(\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_k)$, $(\mathfrak{y}_0, \ldots, \mathfrak{y}_k)$ *gleich orientiert*, wenn die Determinante der Basistransformation positiv ist:

$$\mathfrak{y}_j = \sum_0^k \mathfrak{x}_i \alpha_{ij}, \qquad \det(\alpha_{ij}) > 0. \tag{23}$$

Offenbar ist das eine Äquivalenzrelation mit zwei Äquivalenzklassen, welche die beiden möglichen Orientierungen der k-Großsphäre repräsentieren. Ist die n-Sphäre $S^n(r)$ orientiert, so definiert die Polarität F eine Involution zwischen orientierten Großsphären: Im Bild $F(S^k(r)) = S_1^{n-k-1}(r)$ ist ein erzeugendes Simplex $(\mathfrak{y}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{y}_n)$ als positiv orientiert zu betrachten, wenn es zusammen mit einem positiv orientiertem Simplex $(\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_k)$ von $S^k(r)$ ein positiv orientiertes n-Simplex $(\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{y}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{y}_n)$ von $S^n(r)$ aufspannt. Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Definition nicht von der Auswahl der die Orientierungen repräsentierenden Simplices abhängt. Die orientierten 0-Großsphären und, vermöge der Polarität F, auch die orientierten Großhypersphären entsprechen bijektiv den Punkten von $S^n(r)$. Den Pol einer von $(\mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1})$ aufgespannten Großhypersphäre bezüglich der Polarität F erhält man leicht mit Hilfe des Vektorprodukts zu

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_0 \times \ldots \times \mathfrak{x}_{n-1} r / |\mathfrak{x}_0 \times \ldots \times \mathfrak{x}_{n-1}|. \tag{24}$$

Man beachte hierzu, dass die Vektoren eines erzeugenden $(n-1)$-Simplex linear unabhängig sind, und vergleiche Satz I.6.3.2. Den *Winkel zwischen zwei orientierten Großhypersphären* definiert man als den normierten Abstand ihrer Pole, wobei gilt

$$0 \leq \angle(S^{n-1}(r), S_1^{n-1}(r)) := d(F(S), F(S_1))/r \leq \pi. \tag{25}$$

Beispiel 2. Eine 0-Großsphäre besteht aus zwei diametral gegenüberliegenden Punkten; sie ist durch Angabe ihrer Reihenfolge $S^0 = (-\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ also durch Angabe von $\mathfrak{x}$, orientiert. Ein orientierter Großkreis auf der Einheitssphäre S^2 des euklidischen Vektorraums $\boldsymbol{V}^3$ ist durch ein Paar $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1)$ linear unabhängiger Einheitsvektoren bestimmt; er zerlegt die S^2 in zwei Halbsphären, von denen eine den Pol des orientierten Großkreises

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_0 \times \mathfrak{x}_1 / |\mathfrak{x}_0 \times \mathfrak{x}_1|$$

enthält; diese betrachten wir als die *positive Halbsphäre*:

$$\Sigma_+(\mathfrak{y}) := \{\mathfrak{x} \in S^2 | \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle > 0\}$$

und die gegenüberliegende $\Sigma_- = -\Sigma_+$ als *negative*. Der Großkreis als Polare von $\mathfrak{y}$ ist durch die Bedingung

$$S^1(\mathfrak{y}) = \{\mathfrak{x} \in S^2 | \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = 0\}$$

bestimmt; er wird durch ein Paar seiner Punkte $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1)$, für die

$$[\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1] > 0$$

gilt, orientiert. □

Beispiel 3. Wir definieren ein *Zweieck* als ein Gebiet auf der Sphäre S^2, das durch zwei halbe Großkreise, die sich in zwei gegenüberliegenden Punkten schneiden, berandet wird. Zwei Großkreise zerlegen die Sphäre S^2 in vier Zweiecke, von denen je zwei einander gegenüberliegende kongruent sind. Die vier Zweiecke lassen sich durch die vier möglichen Kombinationen der Orientierungen der sie berandenden Großkreise bestimmen, oder als Durchschnitte der durch die Großkreise definierten Halbsphären:

$$\Sigma_{1+} \cap \Sigma_{2+},\ \Sigma_{1+} \cap \Sigma_{2-},\ \Sigma_{1-} \cap \Sigma_{2-},\ \Sigma_{1-} \cap \Sigma_{2+}.$$

Als *Winkel β des Zweiecks* bezeichnen wir den Winkel $\beta = \alpha$ zwischen den berandenden Großkreisen, wenn das Zweieck eines der vier durch die Großkreise bestimmten Zweiecke ist, und $\beta = 2\pi - \alpha$ andernfalls; anschaulich ist also β, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ der innere Winkel des Zweiecks. Man beweist leicht, dass der Winkel das Zweieck bis auf G_2-Kongruenz charakterisiert.□

2.5.3 Kosinussatz und Dreiecksungleichung

Es seien – mit den in der Elementargeometie üblichen Bezeichnungen – A, B, C drei Punkte in allgemeiner Lage auf der Sphäre $S^n(r)$. Um die Vorstellung zu fixieren, denken wir uns die drei Punkte stets zu einem Tripel geordnet. Die *sphärische Trigonometrie* beschäftigt sich mit der Frage nach den Invarianten derartiger Punktetripel und damit zusammenhängenden Konstruktionsaufgaben. Da jedes Tripel (A, B, C) eine zweidimensionale Großsphäre $S^2(r) \subset S^n(r)$ eindeutig bestimmt und zwei derartige Großsphären

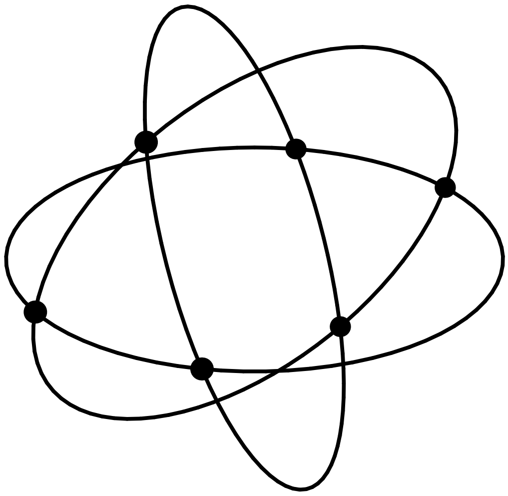

Abbildung 2.5: Eulersche Dreiecke

stets G_n-kongruent sind, können wir uns auf den Fall $n = 2$ beschränken.[2] Die Punktepaare $(A, B), (B, C), (C, A)$ definieren dann drei Großkreise, die *Seitenkreise* des Tripels, welche die Sphäre S^2 in acht *Dreiecksgebiete* aufteilen. Jedes dieser Dreiecksgebiete ist Durchschnitt von drei Halbsphären, die durch die Großkreise bestimmt sind, vgl. Abbildung 2.5. Von diesen acht Dreiecksgebieten wird eines dem Tripel A, B, C eindeutig folgendermaßen zugeordnet: Es bezeichne Σ_C die durch den Großkreis $S^1(A, B)$ berandete Halbsphäre, welche C enthält; analog werden Σ_B und Σ_A definiert. Der Durchschnitt $\Sigma_A \cap \Sigma_B \cap \Sigma_C$ wird das *Eulersche Dreieck* mit den *Ecken* A, B, C genannt, vgl. H.-G. Bigalke [12]. Man bemerkt, dass alle acht bei der Zerlegung der Sphäre entstehenden Dreiecksgebiete Eulersche Dreiecke geeigneter Tripel aus Punkten und Gegenpunkten des Tripels A, B, C sind.

Übung 9. Man beweise, dass ein von drei Großkreisbögen berandetes Gebiet der Sphäre $S^2(r)$ genau dann ein Eulersches Dreieck ist, wenn die Großkreisbögen kürzer als $r\pi$ sind, und dass ist genau dann der Fall, wenn die Innenwinkel des Gebiets an den drei Ecken kleiner als π sind.

Im Unterschied zur euklidischen Ebene kann man auf der Sphäre einem Punktetripel (A, B, C) in verschiedener Weise Dreiecksgebiete zuordnen, deren Rand aus Großkreisbögen AB, BC, CA besteht. Zum Beispiel ist das Komplement des zugehörigen Eulerschen

[2] Im Folgenden geben wir den Parameter r nur an einigen wichtigen Stellen an; ist er fortgelassen, so gelten die Betrachtungen für beliebiges, fixiertes r.

Dreiecks ein solches Dreiecksgebiet. Wir gehen wieder von den Seitenkreisen des Tripels (A, B, C) aus. Als *Seite* c wählen wir einen der *Bögen* $AB \subset S^1(A, B)$ des Großkreises von A nach B aus, in die dieser von den Punkten A, B zerlegt wird. Es seien $b = CA$, $a = BC$ die entsprechend gewählten anderen Seiten des Dreiecks. Wir setzen voraus, dass die durch Aneinanderlegen der Seiten gebildete geschlossene Kurve abc keine Selbstdurchdringungen hat. Nach dem Jordanschen Kurvensatz[3] zerlegt sie daher die S^2 in zwei Gebiete, deren gemeinsamer Rand sie ist, und die wir wie schon oben *Dreiecksgebiete* nennen. Wir denken uns eins dieser Gebiete ausgewählt und verstehen unter einem *sphärischen Dreieck* ein Dreiecksgebiet mit den Ecken A, B, C und den oben definierten Seiten a, b, c. Formal ist es mitunter zweckmäßig, auch die Halbsphären als Dreiecke zu betrachten, indem man auf dem berandendem Großkreis drei paarweise verschiedene Punkte als Ecken wählt. Die Dreiecksseiten und die durch sie bestimmten Großkreise denken wir uns durch die geordneten Paare $(A, B), (B, C), (C, A)$ orientiert; die beiden von abc berandeten Dreiecke unterscheiden wir als *rechtes* bzw. *linkes*, je nachdem, ob das Dreiecksgebiet beim Durchlaufen von abc auf der Sphäre im Sinne der Orientierung rechts oder links von diesem Rand liegt. Unter dem *Winkel* α des Dreiecks an der Ecke A verstehen wir den Winkel desjenigen Zweiecks aus den anliegenden Seitenkreisen der Seiten b, c, das das Dreiecksgebiet enthält; analog werden die Winkel β an der Ecke B und γ an der Ecke C definiert.

Wie in der Elementargeometrie vielfach üblich bezeichnen wir die Seitenlängen eines Dreiecks mit denselben Buchstaben wie die Seiten:

$$c = d(A, B),\ a = d(B, C),\ b = d(C, A).$$

Nach Beispiel 1 erhalten wir für die Pole der orientierten Seiten auf der $S^n(r)$, wenn wir die Punkte mit ihren Ortsvektoren identifizieren:

$$C' = \frac{A \times B}{|A \times B|} r,\ A' = \frac{B \times C}{|B \times C|} r,\ B' = \frac{C \times A}{|C \times A|} r. \tag{26}$$

Nach Satz I.6.3.2 und Formel I.(6.3.35) gilt für die Beträge der Vektorprodukte

$$|A \times B| = r^2 \sin(c/r),\ |B \times C| = r^2 \sin(a/r),\ |C \times A| = r^2 \sin(b/r). \tag{27}$$

Die Winkel an den Ecken sind nach Definition (25) gleich den Abständen der normierten Pole. Um diese Definition anzuwenden müssen wir voraussetzen, dass die Winkel des Dreiecks kleiner oder gleich π sind; das ist nach Beispiel 2 für Eulersche Dreiecke der Fall. Aus (17) und (14) erhalten wir

$$\cos\gamma = -\langle A', B'\rangle/r^2,\ \cos\alpha = -\langle B', C'\rangle/r^2,\ \cos\beta = -\langle C', A'\rangle/r^2. \tag{28}$$

Das entgegengesetzte Vorzeichen ergibt sich daraus, dass für die Winkelbestimmung die Großkreise von dem Scheitelpunkt zu den beiden anderen Punkten zu orientieren sind. Setzen wir (26) und (27) in (28) ein und wenden die bekannte Formel I.(6.3.30) der Vektoralgebra:

$$\langle X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2\rangle = \langle X_1, Y_1\rangle\langle X_2, Y_2\rangle - \langle X_1, Y_2\rangle\langle X_2, Y_1\rangle$$

[3] Vergleiche zum Beispiel W. Rinow [70], S. 400. Der dort für die Ebene ausgesprochene Satz gilt nach stereographischer Projektion oder Einpunktkompaktifizierung auch für die Sphäre S^2.

an, so folgt der *Seitenkosinussatz* der sphärischen Geometrie: *Für die Seitenlängen a, b, c und den Winkel γ eines Eulerschen Dreiecks gilt*

$$\cos(c/r) = \cos(a/r)\cos(b/r) + \sin(a/r)\sin(b/r)\cos\gamma, \tag{29}$$

entsprechend für die anderen Winkel und Seiten. Aus der Formel (29) erhält man nun leicht die metrischen Eigenschaften der Abstandsfunktionen d, e:

Satz 4. *Die in* (8) *bzw.* (16) *definierten Abstandsfunktionen sind G_n-invariante Metriken auf den n-dimensionalen Sphären $S^n(r)$ bzw. dem elliptischen Raum $\boldsymbol{P}^n(r)$.*

Beweis. Nach (9) bzw. (17) sind alle eine Abstandsfunktion definierenden Eigenschaften von d und e außer der Dreiecksungleichung bereits bekannt. Da die G_n-Invarianz aus den Definitionen unmittelbar klar ist, genügt es, für die Abstandsfunktion d das folgende Lemma zu beweisen:

Lemma 5. *Die durch* (8) *bzw.* (16) *definierten Abstandsfunktionen erfüllen die* Dreiecksungleichungen

$$\begin{aligned} d(A,B) &\leq d(A,C) + d(B,C), \qquad (A,B,C \in S^n(r)), &(30)\\ e(A,B) &\leq e(A,C) + e(B,C), \qquad (A,B,C \in \boldsymbol{P}^n(r)). &(31)\end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (30) *genau dann, wenn A, B, C auf einem Großkreis liegen und C auf einem Bogen der Länge $d(A,B) \leq r\pi$ dieses Großkreises zwischen*[4] *A und B liegt; analog gilt in* (31) *das Gleichheitszeichen genau dann, wenn A, B, C auf einer Geraden liegen und C auf einer Strecke der Länge $d(A,B) \leq r\pi/2$ zwischen A und B liegt.*

Beweis. Sind die drei Punkte in allgemeiner Lage, so bestimmen sie auf der Sphäre $S^n(r)$ eine zweidimensionale Teilsphäre $S^2(r)$ und auf dieser ein Eulersches Dreieck, für dessen Seiten

$$c = d(A,B),\ a = d(B,C),\ b = d(A,C)$$

gelten. Wegen $a, b, c < r\pi$ und $0 < \gamma < \pi$ folgt aus dem Seitenkosinussatz

$$\begin{aligned} \cos(c/r) &= \cos(a/r)\cos(b/r) - \sin(a/r)\sin(b/r) + \sin(a/r)\sin(b/r)(1+\cos\gamma),\\ \cos(c/r) &> \cos((a+b)/r)). \end{aligned}$$

Weil $\cos x$ für $0 \leq x \leq \pi$ monoton fällt, folgt $c < a + b$, und das ist die Ungleichung (30) mit $<$ anstelle von $\leq$. Da in der elliptischen Ebene die Abstände kleiner oder gleich $r\pi/2$ sind, finden wir in der überlagernden Sphäre ein die Punkte A, B, C überlagerndes Tripel mit entsprechend gleichen Abständen, so dass (31) unmittelbar aus (30) folgt. Wenn in diesen Ungleichungen die Gleichheit eintritt, so sind die Punkte nicht in allgemeiner Lage, liegen also auf einem Großkreis bzw. einer Geraden. Eine einfache Fallunterscheidung bestätigt die Behauptung des Lemmas. □□

[4]Wir haben darauf verzichtet, die Zwischenrelation begrifflich zu fassen. Sie ist stets auf Kurvendarstellungen mit einem reellen Parameter t im Sinne der durch die Parameterdarstellung übertragenen Ordnung von $\mathbf{R}$ zu verstehen.

Folgerung 6. *Für die Seitenlängen a, b, c eines Eulerschen Dreiecks auf der Sphäre $S^2(r)$ oder der elliptischen Ebene $\boldsymbol{P}^2(r)$ gilt stets*

$$0 < a + b + c < 2\pi r.$$

Beweis. Wir betrachten das Komplement des Eulerschen Dreiecks (A, B, C) in dem durch die Seiten CA, CB bestimmten Zweieck der Sphäre. Es ist selbst ein Eulersches Dreieck, nämlich $(A, B, -C)$. Für die Längen seiner Seiten gelten

$$a' = \pi r - a,\ b' = \pi r - b,\ c' = c.$$

Nach Lemma 5 gilt $c < a' + b' = 2\pi r - (a + b)$, und das ist die Behauptung. Im Fall der elliptischen Ebene geht das im Zweieck komplementäre Eulersche Dreieck $A, B, -C$ bei der Überlagerung (4) in dasjenige Dreieck A, B, C über, das von den komplementären Strecken der Dreiecksseiten a, b des ursprünglichen Dreiecks und seiner Seite c berandet wird; die Seitenlängen dieses Dreiecks sind wieder durch die letzte Formelzeile gegeben, und Lemma 5 ist anwendbar. □

Satz 7. *Für die Winkel eines Eulerschen Dreiecks auf der Sphäre oder eines Dreiecks der elliptischen Ebene gelten die Ungleichungen*

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi, \tag{32}$$

$$\alpha + \beta < \gamma + \pi,\ \alpha + \gamma < \beta + \pi,\ \beta + \gamma < \alpha + \pi. \tag{33}$$

Beweis. Wir orientieren die Seiten des Dreiecks so, dass das Dreiecksgebiet beim Durchlaufen des Randes im Sinne der Orientierung links liegt. Die Winkel $\alpha' = \pi - \alpha, \beta' = \pi - \beta, \gamma' = \pi - \gamma$ nennt man die *Außenwinkel* des Dreiecks A, B, C. Da es nur auf die Winkel ankommt, können wir annehmen, dass das Dreieck auf der Einheitssphäre S^2 liegt. Die Pole $a^\perp, b^\perp, c^\perp$ der orientierten Seiten sind die Ecken des *Polardreiecks*, dessen orientierte Seiten die Polaren $A^\perp, B^\perp, C^\perp$ der Ecken des gegebenen Dreiecks sind. Nach Übung 9 ist das Polardreieck ebenfalls ein Eulersches Dreieck. Die Winkel zwischen den orientierten Seiten, also die Außenwinkel α', β', γ', sind nach (20) gleich den Seitenlängen des Polardreiecks. Aus Folgerung 6 ergibt sich daher

$$0 < \alpha' + \beta' + \gamma' = 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma) < 2\pi$$

und daraus folgt leicht (32). Aus der Dreiecksungleichung für das Polardreieck ergibt sich $\gamma' < \alpha' + \beta'$, also die erste der Ungleichungen (32), und die übrigen folgen analog. Da nach Übung 8 die Winkel zwischen den Großkreisen gleich den Winkeln zwischen den ihnen bei der Überlagerung (4) entsprechenden Geraden der elliptischen Ebene sind, gelten die Ungleichungen auch in diesem Fall. □

Übung 10. Man beweise: Der Seitenkosinussatz geht für $r \to \infty$ in den Kosinussatz der euklidischen Geometrie

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

über.

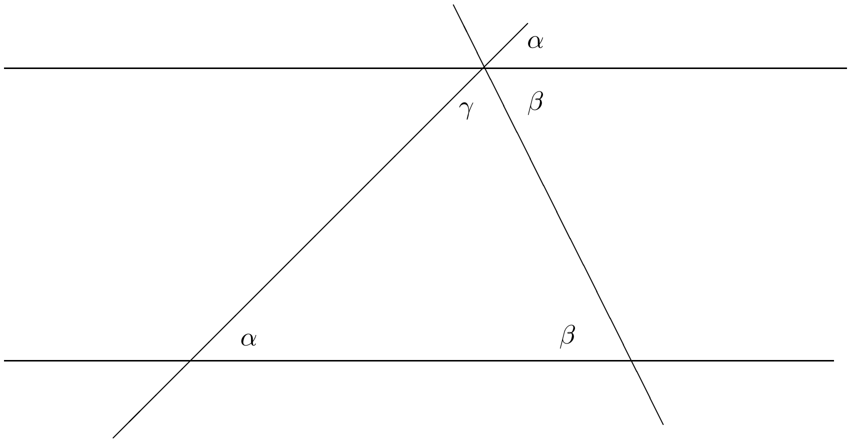

Abbildung 2.6: Winkel eines euklidischen Dreiecks.

2.5.4 Exzess, Krümmung, Flächeninhalt

Aus der Ungleichung (32) ergibt sich nun ein ganz wesentlicher Unterschied der elliptischen zur euklidischen Geometrie: Der so genannte *Exzess* des Dreiecks Δ

$$\epsilon(\Delta) := \alpha + \beta + \gamma - \pi \tag{34}$$

ist stets positiv, während in der euklidischen Geometrie bekanntlich die *Winkelsumme für jedes Dreieck gleich* π *ist*, was unmittelbar aus dem Parallelenpostulat und einfachen Sätzen über die Winkel an Parallelen und eine sie schneidende Gerade folgt, vgl. Abbildung 2.6.

Parallelenpostulat. *Ist* $\boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{E}^2$ *eine Gerade der euklidischen Ebene und* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}^2 \setminus \boldsymbol{H}$ *ein nicht auf ihr liegender Punkt, so gibt es genau eine Gerade* $\boldsymbol{H}_1 \subset \boldsymbol{E}^2$*, welche* $\boldsymbol{H}$ *nicht schneidet.*

Diese Gerade nennt man bekanntlich die *Parallele durch* $\boldsymbol{x}$ *zu* $\boldsymbol{H}$ (vgl. Folgerung I.4.3.1). Offenbar kann es in der elliptischen Geometrie und auch in der sphärischen Geometrie, wo die Großkreise die Geraden repräsentieren, keine Parallelen geben, weil sich zwei verschiedene Geraden einer Ebene stets schneiden. Eine andere Verneinung des Parallelenpostulats werden wir im nächsten Abschnitt kennenlernen, welcher der hyperbolischen Geometrie gewidmet ist.

Den Exzess können wir zur Definition des elementaren *Flächeninhaltes* in der zweidimensionalen sphärischen und elliptischen Geometrie benutzen: Unter dem *Flächeninhalt* eines Eulerschen Dreiecks Δ der Sphäre $S^2(r)$ oder der elliptischen Ebene $\boldsymbol{P}^2(r)$ versteht man die stets positive Zahl

$$F(\Delta) := \epsilon(\Delta) r^2. \tag{35}$$

Eine Teilmenge M einer Sphäre oder elliptischen Ebene nennen wir *elementar*, wenn sie eine *Triangulation* $M = \bigcup_1^k \Delta_j$ besitzt, das ist eine Darstellung von M als Vereinigung von endlich vielen Eulerschen Dreiecken, die paarweise höchstens Randelemente (Ecken oder Seiten) gemeinsam haben. Der Flächeninhalt einer elementaren Menge wird als

Summe der Flächeninhalte dieser Dreiecke definiert:

$$F(M) := \sum_1^k F(\Delta_j). \tag{36}$$

Zur Rechtfertigung dieser Definition ist zu beweisen, dass der Flächeninhalt (36) nicht von der betrachteten Triangulation abhängt. Wir zeigen zuerst

Lemma 8. *Für jede Triangulation* $\Delta = \bigcup_{j=1}^f \Delta_j$ *eines Dreiecks* Δ *mit den Winkeln* α, β, γ *der Sphäre* S^2 *oder der elliptischen Ebene gilt*

$$\epsilon(\Delta) = \sum_{j=1}^f \epsilon(\Delta_j). \tag{37}$$

Beweis. Es bezeichne e_{int} die Anzahl der im Innern von Δ liegenden Ecken der Triangulation, e_{rd} die Anzahl der auf dem Rand von Δ liegenden Ecken (einschließlich der Ecken von Δ), k_{int} die Anzahl der im Innern von Δ liegenden Kanten der Triangulation und k_{rd} die Anzahl der auf dem Rand von Δ liegenden Kanten. Für die Anzahl e aller Ecken und k aller Kanten der Triangulation gilt dann

$$e = e_{int} + e_{rd}, \; k = k_{int} + k_{rd}.$$

Nach der *Eulerschen Polyederformel* (s. Übung 13) ist

$$f - k + e = 1. \tag{38}$$

Da jede innere Kante zu genau zwei Dreiecken der Triangulation gehört und jedes Dreieck Δ_j drei Kanten hat, gilt

$$3f = 2k_{int} + k_{rd}. \tag{39}$$

Nun ist

$$\sum_{j=1}^f \epsilon(\Delta_j) = \alpha + \beta + \gamma + e_{int} 2\pi + (e_{rd} - 3)\pi - f\pi;$$

an den Ecken von Δ addieren sich nämlich die Winkel der daran anstoßenden Dreiecke Δ_j der Triangulation zu α, β bzw. γ, während sie an den $e_{rd} - 3$ davon verschiedenen Ecken der Triangulation auf dem Rand von Δ sich zu π und an jeder inneren Ecke zu 2π aufsummieren. Zusammengefasst ist also

$$\sum_{j=1}^f \epsilon(\Delta_j) = \alpha + \beta + \gamma - \pi(f - 2e_{int} - e_{rd} + 3).$$

Aus $e_{int} = e - e_{rd}$ folgt

$$f - 2e_{int} - e_{rd} + 3 = f - 2e + e_{rd} + 3,$$

und wegen $e_{rd} = k_{rd}$ erhalten wir durch eine einfache Rechnung aus (38)

$$f - 2e_{int} - e_{rd} + 3 = 3f - 2k + k_{rd} + 1.$$

Beachten wir nun $k = k_{int} + k_{rd}$, so folgt aus (39)

$$f - 2e_{int} - e_{rd} + 3 = 3f - 2k_{int} - k_{rd} + 1 = 1,$$

und das ist die Behauptung. □

Aus diesem Lemma ergibt sich leicht die Rechtfertigung der Definition (36):

Folgerung 9. *Der durch (36) definierte Flächeninhalt einer elementaren Menge M hängt nicht von der Triangulation ab. Der Flächeninhalt ist additiv in dem folgenden Sinn: Ist $M = M_1 \cup M_2$ Vereinigung zweier elementarer Mengen, welche höchstens Randpunkte gemeinsam haben, so gilt $F(M) = F(M_1) + F(M_2)$.*

Beweis. Es seien $M = \bigcup_1^f \Delta_j = \bigcup_1^{\hat{f}} \hat{\Delta}_k$ zwei Triangulationen der elementaren Menge M. Wir finden eine gemeinsame Verfeinerung dieser Triangulationen; das ist eine Triangulation $M = \bigcup_{j,k} \Delta_{j,k}$ von M derart, dass die Dreiecke Δ_j, $\hat{\Delta}_k$ durch Dreiecke der Verfeinerung trianguliert werden:

$$\Delta_j = \bigcup_k \Delta_{j,k},\ \hat{\Delta}_k = \bigcup_j \Delta_{j,k}.$$

Nach dem Lemma 8 erhalten wir durch aufsummieren über die Dreiecke der jeweiligen Triangulationen:

$$\sum_{j=1}^{f} \epsilon(\Delta_j) = \sum_{j=1}^{f} \sum_k \epsilon(\Delta_{j,k}) = \sum_{k=1}^{\hat{f}} \sum_j \epsilon(\Delta_{j,k}) = \sum_{k=1}^{\hat{f}} \epsilon(\hat{\Delta}_k).$$

Die Multiplikation mit r^2 ergibt die Rechtfertigung von (36). Die Additivität folgt nun unmittelbar aus dieser Definition. □

Bemerkung. Der Exzess $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ kennzeichnet quantitativ die Abweichung der Geometrie des Dreiecks von der eines euklidischen Dreiecks mit denselben Winkeln; sie wird daher auch *Krümmung* des Dreiecks genannt. Dass wir sie hier zur Grundlage der Definition des Flächeninhaltes nehmen konnten, wird durch die Homogenität der Sphäre ermöglicht: Die Krümmungsfunktion oder Gaußsche Krümmung der Sphäre ist konstant, und die Krümmung eines Gebiets ist seinem Flächeninhalt proportional. Oft wird selbst in elementaren Lehrbüchern, man vgl. etwa M. Berger [8] oder H. G. Bigalke [12], auf die differentialgeometrische Definition des Flächeninhalts zurückgegriffen. Eine synthetische, allein auf die Begriffe der durch die Metrik bestimmten inneren Geometrie der Fläche gegründete Definition des Flächeninhalts findet man in Kapitel X des Buches [1] von A. D. Alexandrow. Dieses Buch ist den konvexen Flächen gewidmet, für die sogar Singularitäten wie Ecken und Kanten zugelassen werden; die Sphären sind dafür die einfachsten und wegen ihrer vollendeten Symmetrie sehr interessante Beispiele. Für nicht homogene Flächen ist der Exzess daher als Maß für die Krümmung des Dreiecks, und nicht als Flächeninhalt des Dreiecks, zu interpretieren. Für konvexe Flächen zum Beispiel ist der Exzess eines Dreiecks (berandet von kürzesten Linien auf der Fläche) stets nicht negativ. Die Beziehungen zur Differentialgeometrie sind ausführlicher in M. Berger's Buch [8] dargestellt. Mit den in der Maßtheorie entwickelten Konstruktionen kann man ausgehend von den elementaren Mengen ein Flächenmaß und ebenso ein Krümmungsmaß für allgemeinere Mengen entwickeln. Sind die betrachteten Flächen glatt, so erhält man dasselbe wie bei den Flächenintegralen oder Krümmungsintegralen in der Differentialgeometrie. Für die Sphäre $S^2(r)$ und die elliptische Ebene $\boldsymbol{P}^2(r)$ ist die Gaußsche Krümmung $K = 1/r^2$ die Dichte des Krümmungsmaßes. Anschaulich ist klar, dass die Krümmung einer Sphäre umso größer ist, je kleiner ihr Radius wird. Denken wir uns in der Formel (35) den Flächeninhalt eines Dreiecks Δ auf der $S^2(r)$ konstant und lassen ihren Radius r gegen unendlich gehen, so muss der Exzess $\epsilon(\Delta)$ gegen Null streben: mit wachsendem Radius nähert sich die lokale Geometrie der Sphäre $S^2(r)$ der euklidischen Geometrie. Daher kann man von nicht zu großen Gebieten der Erdoberfläche halbwegs genaue, maßstabsgetreue ebene Karten entwerfen.

Wir wollen noch eine Formel für den Flächeninhalt eines konvexen sphärischen Polygons herleiten. Unter einem *sphärischen Polygon* P verstehen wir ein einfach zusammenhängendes Gebiet der Sphäre $S^2(r)$, das von endlich vielen Großkreisbögen, seinen *Seiten*, berandet wird, welche paarweise höchstens einen ihrer Endpunkte gemeinsam haben. Diese Endpunkte heißen die *Ecken* des Polygons. Es bezeichne n die Anzahl der Eckpunkte des Polygons. Eine Halbsphäre oder ein Zweieck können wir stets durch Einführung formaler Ecken auf einen der Randbögen als ein Dreieck betrachten. Also können wir annehmen, dass $n \geq 3$ gilt. Zu jeder Ecke A_i des Polygons wird als Winkel α_i der Winkel desjenigen Zweiecks definiert, das von den an A_i zusammentreffenden Seiten bestimmt wird und in beliebiger Nähe von A_i innere Punkte des Polygons enthält. Der Winkel an einer formalen Ecke ist damit stets gleich π. Das Polygon P_n wird *konvex* genannt, wenn zu je zwei Punkten $A, B \in P_n$ ein kürzester Großkreisbogen AB zu P_n gehört. Folgendes Lemma gibt einen Ausdruck für den Flächeninhalt eines konvexen sphärischen Polygons:

Lemma 10. *Es sei P_n ein in der Sphäre $S^2(r)$ liegendes konvexes Polygon mit den Winkeln α_i an den Ecken A_i, $i = 1, \ldots, n$. Dann ist sein Flächeninhalt*

$$F(P_n) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi)r^2. \tag{40}$$

B e w e i s. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r = 1$ voraussetzen. Ist das Polygon ein Dreieck, so stimmt (40) mit (35) überein. Es sei (40) schon für alle ganzen Zahlen j, $3 \leq j \leq n$, bewiesen. Wir betrachten ein Polygon P_{n+1} mit $n+1$ Ecken und ziehen die Sehne A_1A_n. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1. Der Punkt A_{n+1} liegt auf dem Großkreis Σ durch A_1, A_n. In diesem Fall ist A_{n+1} nur eine formal eingeführte Ecke mit dem Winkel $\alpha_{n+1} = \pi$. Für den Flächeninhalt ergibt sich, wie zu erwarten:

$$F(P_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i - (n-1)\pi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi = F(P_n).$$

2. Der Punkt A_{n+1} liege nicht auf dem Großkreis Σ. Es bezeichne Σ_- die durch Σ berandete, abgeschlossene Halbsphäre, die A_{n+1} nicht enthält. Aus der Konvexität von P_{n+1} ergibt sich, dass alle anderen Eckpunkte von P_{n+1} in Σ_- liegen, und dass das Polygon P_n mit den Ecken $(A_1, \ldots, A_n)$ als Durchschnitt von P_{n+1} mit der Halbsphäre Σ_- wieder konvex ist. Es mögen α_1', α_n' die Winkel von P_n an den Ecken A_1, A_n bezeichnen. Damit gilt nach (40) für das Polygon P_n und den Definitionen (35) und (36), wobei wieder $r = 1$

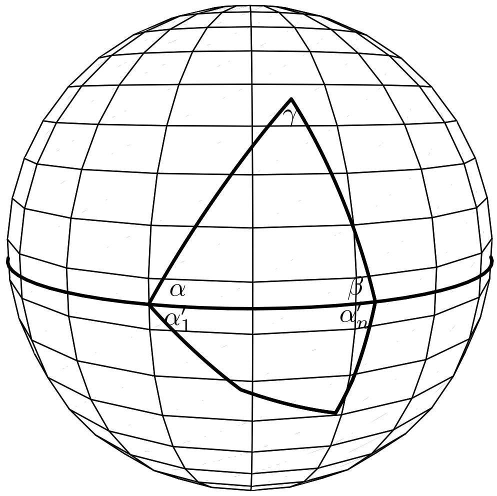

Abbildung 2.7: Zum Beweis von Lemma 10.

vorausgesetzt wird,

$$\begin{aligned} F(P_{n+1}) &= F(P_n) + F(\Delta(A_1, A_n, A_{n+1})) \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i + \alpha_1' + \alpha_n' - (n-2)\pi + \alpha + \beta + \alpha_{n+1} - \pi \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i - (n+1-2)\pi; \end{aligned}$$

denn die Winkel von P_n und Δ an den gemeinsamen Ecken A_1, A_n addieren sich zu den Winkeln von P_{n+1}, vgl. Abbildung 2.7:

$$\alpha_1 = \alpha_1' + \alpha,\ \alpha_n = \alpha_n' + \beta,$$

während der Winkel γ von Δ gerade der Winkel α_{n+1} von P_{n+1} ist. Das Ergebnis ist Formel (40) für P_{n+1}. Da der Beweis für jede Triangulation von P_n gilt und das Ergebnis nicht von der Triangulation, sondern nur von den Invarianten des betrachteten Polygons abhängt, ist der Beweis des Lemmas beendet. □

B e m e r k u n g. Die Volumenberechnung für Polyeder höherer Dimension ist weitaus komplizierter. Es gibt anscheinend keine geschlossene Formel für das Volumen eines allgemeinen n-Simplexes, $n \geq 3$, in Räumen konstanter Krümmung. Man vgl. hierzu J. Böhm, H. Hertel [22].

Übung 11. Man beweise: Der Flächeninhalt eines Zweiecks mit dem Winkel α auf der $S^2(r)$ ist gleich $2r^2\alpha$. Der Flächeninhalt der Sphäre $S^2(r)$ selbst ist gleich $4r^2\pi$.

Übung 12. Man definiere für die elliptische Ebene $\boldsymbol{P}^2(r)$ die Begriffe eines konvexen Polygons, seiner Winkel und seines Flächeninhalts und zeige, dass die Formel (40) auch in diesem Fall gilt. Der Flächeninhalt der gesamten elliptischen Ebene $\boldsymbol{P}^2(r)$ ist gleich $2r^2\pi$.

Übung 13. Die *Eulersche Polyederformel* ist eine der Wurzeln der kombinatorischen Topologie. Sie gilt nicht nur für Triangulationen in dem oben definierten strikten Sinn, sondern für beliebige, auch krummlinige Zerlegungen von ebenen Gebieten, die durch eine einfache geschlossene Kurve berandet sind, in ebensolche Gebiete, wobei die Kanten als Bögen zwischen zwei Ecken definiert sind; sie dürfen paarweise höchstens Ecken gemeinsam haben. Man beweise die Eulersche Polyederformel (38). Hinweis. Entfernt man eine Kante, die zwei Gebiete der Triangulation voneinander trennt, so ändert sich die Zahl (38) nicht. Entfernt man eine nicht trennende Kante mitsamt einer nur zu ihr gehörenden Ecke, so gilt dasselbe. Einen Beweis findet man zum Beispiel in H. G. Bigalke, [12], S. 310. (Man beachte, dass in Satz 10.1 von [12] eine Zerlegung der ganzen Sphäre betrachtet wird, so dass das Komplement von Δ zu f hinzu zu zählen ist und sich daher $f - k + e = 2$ für die Zerlegung von S^2 ergibt. Diese Formel gilt für die Anzahlen der Seiten, Kanten und Ecken eines beliebigen, zur Sphäre S^2 homöomorphen Polyeders.)

2.5.5 Sphärische Trigonometrie

Bereits im Teilabschnitt 3 haben wir den Seitenkosinussatz bewiesen und als Grundaufgabe der sphärischen oder elliptischen Trigonometrie die Frage nach den Invarianten von Dreiecken gestellt. Im Folgenden formulieren wir einige Ergebnisse der sphärischen Trigonometrie als Übungsaufgaben. Dabei beschränken wir uns auf Eulersche Dreiecke der Einheitssphäre S^2 und verwenden wie oben die in der Elementargeometrie üblichen Bezeichnungen.

Übung 14. Man beweise den *Winkelkosinussatz*:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c.$$

Hinweis. Man wende den Seitenkosinussatz auf das Polardreieck an.

Übung 15. Man beweise den *Sinussatz* der sphärischen Trigonometrie:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$

Hinweis. Man zeige zuerst

$$\det(A, B, C) = \sin b \sin c \sin\alpha. \tag{41}$$

Hierzu stelle man A, B, C in einem geeignet angepassten orthonormierten Dreibein dar. Beim Beweis von (41) erhält man auch den ersten der in der folgenden Übung angegebenen Kongruenzsätze.

Übung 16. Man beweise die folgenden *Kongruenzsätze*:
a) Zwei Eulersche Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn zwei entsprechende Seiten und der eingeschlossene Winkel übereinstimmen.
b) Zwei Eulersche Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sie entsprechend gleiche Seiten haben.
c) Zwei Eulersche Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn sie entsprechend gleiche Winkel haben.

Während die ersten beiden Kongruenzsätze wörtlich auch in der euklidischen Geometrie gelten, ist das für die Behauptung c) nicht der Fall: in der sphärischen Geometrie sind ähnliche Dreiecke stets kongruent. Wir empfehlen, weitere Formeln und Lehrsätze der sphärischen Trigonometrie aus einer Formelsammlung, z. Bsp. I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew [19], Abschnitt 2.6.4, zu entnehmen und sie mit den bisher gewonnenen Hilfsmitteln zu beweisen; vgl. auch M. Berger [8], Abschnitt 18.6.

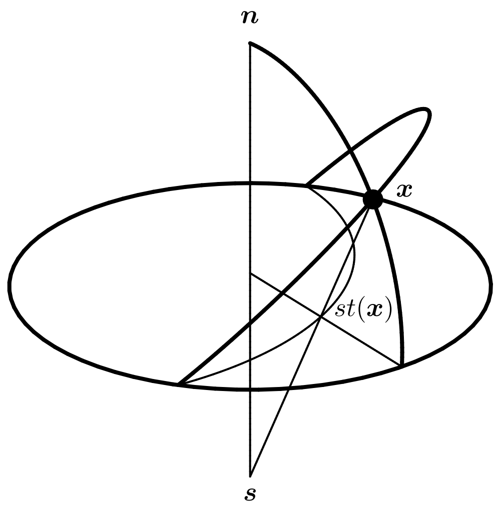

Abbildung 2.8: Stereographische Projektion von $\boldsymbol{P}^2(\mathbf{R})$.

Beispiel 4. Mit Hilfe der Überlagerungsabbildung (4) haben wir uns die reelle projektive Ebene als Sphäre mit Identifizierung diametral gegenüberliegender Punkte veranschaulicht, vgl. Beispiel 1 und Beispiel 1.1.1. Wir erhalten ein für detaillierte Betrachtungen sehr geeignetes Bild dieser Ebene, wenn wir die obere Halbsphäre $S_+ := S^2_+(\mathfrak{e}_2) \cup S^1(\mathfrak{e}_2)$

einschließlich des Äquators $S^1(\mathfrak{e}_2)$ *aus dem Südpol* $\boldsymbol{s} = -\mathfrak{e}_2$ *stereographisch auf die Äquatorebene* $\boldsymbol{E} : x^2 = 0$ *projizieren*, vgl. (6), (7). Diese Projektion ist (vg. Abbildung 2.8)

$$st : \boldsymbol{x} \in S_+ \longmapsto \boldsymbol{y} = st(\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{s} \vee \boldsymbol{x}) \cap \boldsymbol{E}, \tag{42}$$

sie hat folgende Eigenschaften:

1. Das Bild der projektiven Ebene ist die abgeschlossene Einheitskreisscheibe; diametral gegenüberliegende Punkte des Randes, also des Äquators, sind zu identifizieren.

2. Der Äquator ist das Bild einer projektiven Geraden, nämlich die Polare des Nordpols $\boldsymbol{n} = [\mathfrak{e}_2]$. Da die Projektion p auf der offenen Halbsphäre $S^2_+(\mathfrak{e}_2)$ injektiv ist und alle Geraden projektiv äquivalent sind ergibt sich, dass das Komplement einer Geraden in der reellen projektiven Ebene zu einer offenen Kreisscheibe homöomorph ist.

3. Die Geraden durch den Nordpol $\boldsymbol{n}$ entsprechen den Großkreisen durch $\mathfrak{e}_2$; sie gehen durch st in Durchmesser des Äquators über.

4. Die Geraden, welche den Nordpol $\boldsymbol{n}$ nicht enthalten, gehen durch st in Kreisbögen über, die den Äquator in diametral gegenüber liegenden Punkten schneiden.

5. Ist die projektive Ebene die elliptische Ebene, so erhält die Abbildung st die Winkel: Die Winkel von zwei Geraden der elliptischen Ebene sind gleich den Winkeln zwischen ihren Bildern in der euklidischen Ebene [5] $\boldsymbol{E}$.

Der Beweis dieser Aussagen kann durch Rechnungen im euklidischen Raum $\boldsymbol{E}^3$ geführt werden, was wir dem Leser überlassen[6]. Zwischen zwei Punkten der elliptischen Ebene (oder des elliptischen Raumes $\boldsymbol{P}^n$) gibt es genau dann zwei *Kürzeste*, wenn ihr Abstand gleich dem Durchmesser des Raumes, also in unserem Fall der elliptischen Ebene mit $r = 1$ gleich $\pi/2$ ist, vgl. Übung 5, und das sind die beiden Strecken, in die die Verbindungsgerade durch die Punkte zerlegt wird. Unter einer Kürzesten versteht man allgemein eine Verbindungskurve kleinster Länge. Die Länge einer Kurve wird in der Differentialgeometrie definiert; aus der Definition und der Dreiecksungleichung ergibt sich leicht, dass die Kürzesten in der elliptischen Geometrie Strecken sein müssen. Unter dem *Schnittort* eines Punktes $\boldsymbol{x}$ versteht man die Menge aller derjenigen Punkte des gerade betrachteten metrischen Raums, zu denen von $\boldsymbol{x}$ aus mindestens zwei Kürzeste existieren. Auf der Sphäre S^n ist also der Schnittort von $\mathfrak{x}$ der gegenüberliegende Punkt $-\mathfrak{x}$, während im elliptischen Raum der Schnittort von $\boldsymbol{x}$ die Polare $F(\boldsymbol{x})$ ist. In der Abbildung 2.8 ist die Polare des Nordpols der Äquator mit Identifizierung der gegenüberliegenden Punkte; die beiden Strecken, die zu einem Punkt $[\mathfrak{x}] = [-\mathfrak{x}] \in F(\boldsymbol{n})$ führen, werden durch die beiden Strecken vom Zentrum $\mathfrak{o} \in \boldsymbol{E}$ des durch $\mathfrak{x}$ bestimmten Durchmessers nach $\mathfrak{x}$ bzw. $-\mathfrak{x}$ dargestellt. Die stereographische Projektion ist natürlich keine Isometrie, Abstände von Bildern und Urbildern unterscheiden sich im allgemeinen.

Wir betrachten nun drei Punkte A, B, C der elliptischen Ebene in allgemeiner Lage. Ihre Verbindungsgeraden zerlegen die Ebene in vier Dreiecke I, II, III, IV, vgl. Abbildung 2.9. Führt man die Identifizierung des Äquators zunächst nur in dem Dreieck II

[5] Der Winkel zwischen zwei Kurven in einem Schnittpunkt ist als Winkel zwischen ihren Tangenten in diesem Punkt definiert.

[6] Ausführlicher wird die n-dimensionale stereographische Projektion im nächsten Abschnitt betrachtet, vgl. Lemma 6.3, Übung 5.4.

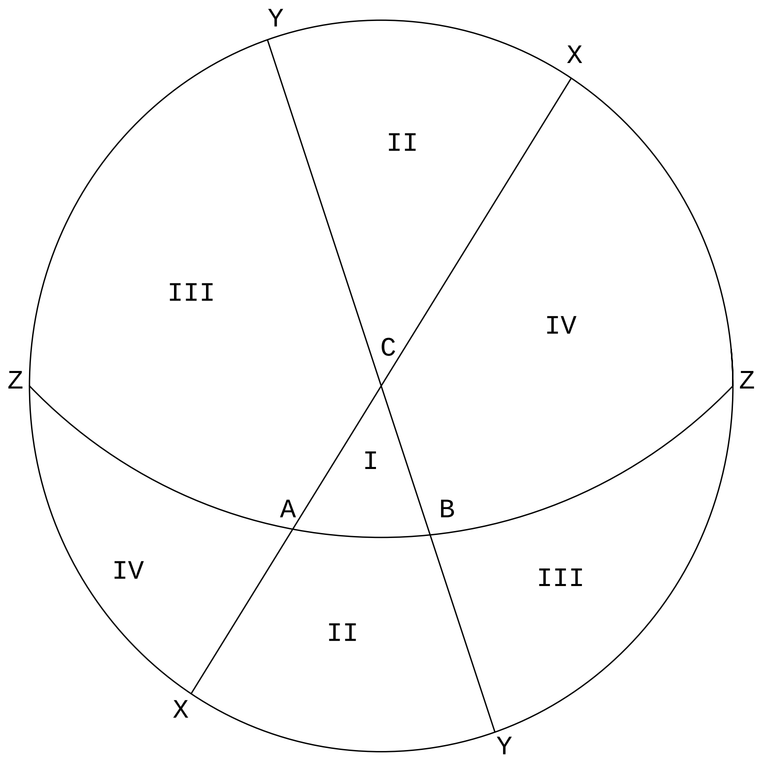

Abbildung 2.9: Eulersche Dreiecke in $\boldsymbol{P}^2(\mathbf{R})$.

aus, so entsteht ein *Möbiusband*, siehe Abbildung 2.10; das ist eine oft *einseitig* genannte, d.h. nicht orientierbare Fläche, deren Rand die zu einem Kreis homöomorphe, geschlossene Kurve ist, welche sich aus den beiden noch nicht identifizierten Bögen XY des Äquators zusammensetzt. Will auch man diese Identifizierung ausführen, so gelingt das nur mit Selbstdurchdringungen der Fläche, wodurch dann eine zur Kreuzhaube der Abbildung 2.2 ähnliche Fläche entsteht. Durch eine Bewegung können wir stets erreichen, dass der Punkt C durch den Nordpol repräsentiert wird, $p(\mathfrak{e}_2) = C$; die Seitengeraden $A \vee C, B \vee C$ erscheinen dann in $\boldsymbol{E}$ als Durchmesser, welche sich in C mit dem Winkel γ schneiden. Die Punkte A, B zerlegen die Seitengerade $A \vee B$ in zwei Teilstrecken der Längen $c = e(A, B) \leq pi/2$ und $c' = \pi - c \geq pi/2$, analog für die anderen Seitengeraden. Da für Strecken der Länge kleiner oder gleich $\pi/2$ die darauf projizierten Großkreisbögen aus S_+ dieselbe Länge haben, – der sphärische Abstand ist ja in diesem Fall gleich dem elliptischen – finden wir stets ein in S_+ liegendes Eulersches Dreieck, dessen Ecken $A, B, C = \boldsymbol{n}$ repräsentieren und dessen Seitenlängen die Abstände der Ecken sind. Sind die Seitenlängen a, b, c paarweise verschieden oder ist höchstens eine dieser Längen gleich $\pi/2$, so ist dieses Dreieck sogar eindeutig bestimmt. In unserer Abbildung 2.9 ist I das Bild eines solchen Dreiecks bei der stereographischen Projektion st. Sind zum Beispiel alle Abstände gleich $\pi/2$, so erhalten wir vier zueinander kongruente Dreiecke, deren Winkel ebenfalls gleich $\pi/2$ sind; sie entsprechen den Durchschnitten von S_+ mit den

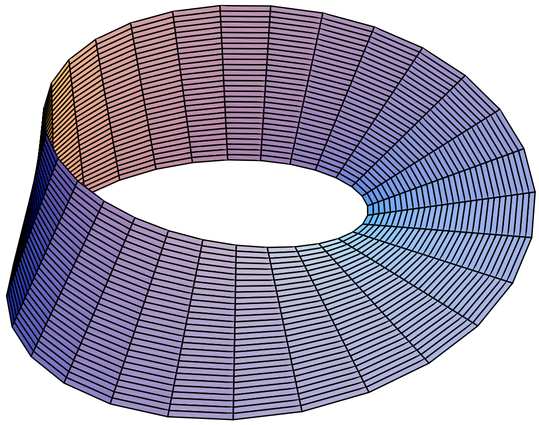

Abbildung 2.10: Ein Möbius Band.

vier oberen Oktanten des gewählten orthonormierten Koordinatensystems des $\boldsymbol{E}^3$. Ihre stereographische Projektion ergibt das einfache Bild 2.11. Aus dieser Zerlegung folgt, dass der Flächeninhalt der elliptischen Ebene gleich 2π, für $\boldsymbol{P}^2(r)$ also gleich $2r^2\pi$ ist. □

2.5.6 Metrische Geometrie des elliptischen Raumes

In diesem Abschnitt formulieren wir einige Ergebnisse der metrischen Geometrie der n-Sphären und der n-dimensionalen elliptischen Räume in Gestalt von Übungsaufgaben. Offenbar ist die Menge

$$Iso(M) := \{f : M \to M | f \text{ Isometrie}\}$$

der Isometrien eines metrischen Raumes $[M, \rho]$ mit der Operation der Verknüpfung $\circ$ der Abbildungen eine Gruppe, welche die *Isometriegruppe* des metrischen Raumes genannt wird.

Übung 17. Man beweise, dass die Isometriegruppe der n-Sphäre $S^n(r)$ (bzw. des elliptischen Raumes $\boldsymbol{P}^n(r)$) zur orthogonalen Gruppe $\boldsymbol{O}(n+1)$ (bzw. zur projektiv-orthogonalen Gruppe $\boldsymbol{PO}(n+1)$) isomorph ist. (Hinweis. Um zu zeigen, dass jede Isometrie f zu der angegebenen Gruppe gehört, zeige man zuerst, dass bei der Isometrie f auch die Winkel invariant sind. Man betrachte ein Repère aus $n+1$ paarweise orthogonalen Vektoren; das entsprechende orthogonale n-Simplex wird durch f in ein ebenfalls orthogonales n-Simplex transformiert. Andererseits gibt es eine orthogonale Transformation $g \in \boldsymbol{O}(n+1)$, die auf den Ecken des Simplex mit f übereinstimmt. Weil die Koordinaten eines beliebigen Punktes durch die Abstände zu den Ecken des Simplex bestimmt sind, die sowohl bei f als auch bei g invariant sind, muss $f = g$ sein.)

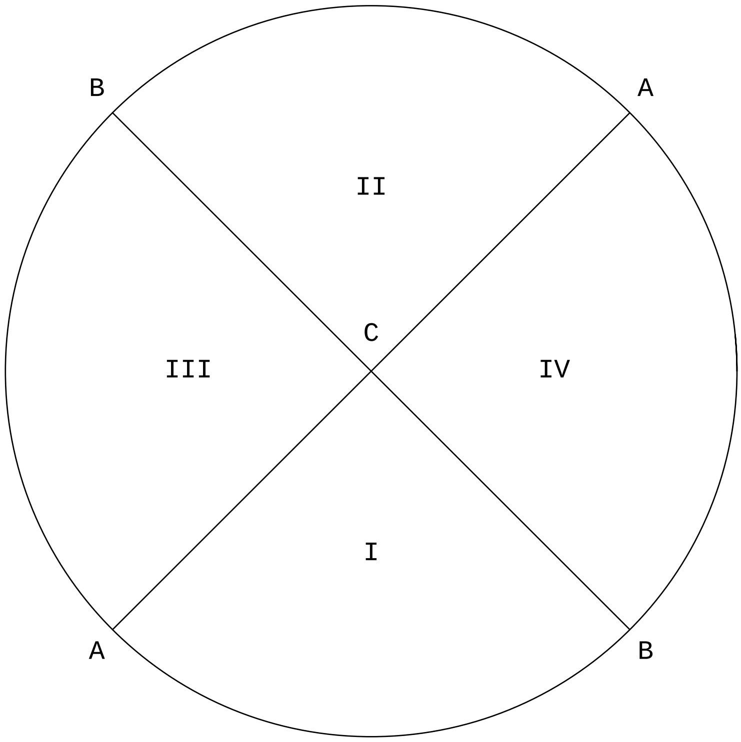

Abbildung 2.11: Zerlegung von $\boldsymbol{P}^2(\mathbf{R})$ in vier kongruente Dreiecke.

Übung 18. Ein metrischer Raum $[M, \rho]$ heißt *zweipunkthomogen*, wenn er die folgende Eigenschaft besitzt: Sind $(a, b), (a', b') \in M \times M$ Punktepaare mit dem gleichen Abstand $\rho(a, b) = \rho(a', b')$, so gibt es stets eine Isometrie $g \in Iso(M)$ mit $g(a) = a'$ und $g(b) = b'$. Offenbar ist jeder zweipunkthomogene Raum homogen. Man beweise, dass die euklidischen Räume $\boldsymbol{E}^n$, die elliptischen Räume $\boldsymbol{P}^n(r)$ und die n-Sphären $S^n(r)$ zweipunkthomogen sind.

Es sei $[M, \rho]$ ein metrischer Raum und $B \subset M$ eine nicht leere Menge. Für jeden Punkt $x \in M$ definiert men den ***Abstand von x nach B*** bekanntlich als das Infimum

$$\rho(x, B) := \inf\{\rho(x, b) | b \in B\}$$

der Abstände von x zu den Punkten $b \in B$.

Übung 19. Es sei nun $S_1^m \subset S^n$ eine m-Großsphäre in S^n, $r = 1$, $0 \leq m < n$. Man zeige: a) Für den sphärischen Abstand d gilt

$$d(\mathfrak{x}, S_1^m) = \arccos(|p_1(\mathfrak{x})|), \tag{43}$$

wobei p_1 die orthogonale Projektion auf die von S_1^m aufgespannte $(m+1)$-Ebene $\boldsymbol{H}$ bezeichnet; es gilt also $0 \leq d(\mathfrak{x}, B) \leq \pi/2$. – b) Für jeden Punkt $\mathfrak{x} \in S^n \setminus (S_1 \cup S_1^{\perp})$ gibt es genau einen Punkt $\mathfrak{z} \in S_1$ mit $d(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}) = d(\mathfrak{x}, S_1)$. Der durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$ bestimmte Großkreis ist orthogonal zu S_1 und schneidet S_1 in der 0-Sphäre $\{\mathfrak{z}, -\mathfrak{z}\}$. – c) Man formuliere und beweise zu a) und b) analoge Aussagen für die elliptischen Räume.

Das Ergebnis der letzten Übung, c), ist

Folgerung 11. *Ist $\boldsymbol{B}$ eine m-Ebene des elliptischen Raumes und $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n(r) \setminus \boldsymbol{B}^\perp$ ein nicht zur Polare von $\boldsymbol{B}$ gehörender Punkt, so gibt es genau einen Punkt $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{B}$ für den $e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{B}) = e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ gilt.* □

Da in diesem Fall $e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) < r\pi/2$ gilt, ist auch die Strecke $\boldsymbol{xz} \subset \boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{z}$ eindeutig bestimmt; sie heißt *das Lot von $\boldsymbol{x}$ auf $\boldsymbol{B}$*, und $\boldsymbol{z}$ wird der *Fußpunkt des Lotes* genannt. Für $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$ ist natürlich $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$.

Es sei wieder $[M, \rho]$ ein metrischer Raum und $B \subset M$ eine nicht leere Menge. Unter *der Abstandsmenge $\delta(B, \epsilon)$ vom Radius ϵ* verstehen wir die Menge

$$\delta(B, \epsilon) := \{x \in M | \rho(x, B) = \epsilon\}. \tag{44}$$

Übung 20. Mit den Bezeichnungen von Übung 19 möge die m-Großsphäre S_1^m in der von den Vektoren $\mathfrak{e}_0, \ldots, \mathfrak{e}_m$ aufgespannten $(m+1)$-Ebene $\boldsymbol{H}$ der orthonormierten Basis $(\mathfrak{e}_j), j = 0, \ldots, n$, liegen. Man beweise: a) Die Abstandsmenge $\delta(S_1, \epsilon)$ für $\epsilon < \pi/2$ ist der Durchschnitt von S^n mit dem durch

$$(\sum_{\mu=0}^{m} (x^\mu)^2) \cos^2 \epsilon - (\sum_{\nu=m+1}^{n} (x^\nu)^2) \sin^2 \epsilon = 0 \tag{45}$$

definiertem Hyperkegel. Hieraus schließe man, dass diese Abstandsmenge ein verallgemeinerter *Torus* ist; sie ist nämlich als Hyperfläche von S^n durch die Abbildung

$$h: \ (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \in S_1^m(a) \times S_1^\perp(\sqrt{1-a^2}) \longmapsto \mathfrak{x} + \mathfrak{y} \in S^n \quad \text{mit } a = \cos \epsilon$$

darstellbar, die ein Homöomorphismus ist. Dabei bezeichnen $S_1^m(a)$ die Hypersphäre vom Radius a in $\boldsymbol{H}$ und $S_1^\perp(\sqrt{1-a^2})$ die Hypersphäre vom Radius $\sqrt{1-a^2}$ in $\boldsymbol{H}^\perp$. Für $n = 3$ und $m = 1$ erhält man den Torus als Produktmannigfaltigkeit zweier Kreise. – b) Mit $\mathfrak{x}$ erfüllt auch $-\mathfrak{x}$ die Gleichung (45); die Abstandsmenge ist also bei dieser Transformation invariant. Bei der Überlagerung $p: S^n \to \boldsymbol{P}^n$ geht sie in die von ihr doppelt überlagerte Abstandsmenge der m-Ebene $p(S_1^m)$ bezüglich der elliptischen Metrik über.

Übung 21. Man zeige, dass sich jede der in Übung 20 betrachteten Abstandsmengen $\delta(S_1^m, \epsilon)$ auch als Abstandsmenge einer anderen, $(n-m-1)$-dimensionalen Großsphäre deuten lässt; welcher und mit welchem Radius?

Übung 22. Man betrachte die Abstandsmenge $D := \delta(S_1^m, \epsilon) \subset S^n$ und bestimme ihre Isotropiegruppe $G_D := \{g \in G_n | gD = D\}$. Man beweise, dass sich D in zweierlei Weise durch eine *verallgemeinerte Rotation* gewisser Teilsphären Σ erzeugen lässt: $D = \bigcup_{h \in H} h\Sigma$, wobei H die Untergruppe aller derjenigen Elemente $h \in SG_n$ ist, die alle Vektoren eines fixierten Unterraums des euklidischen Vektorraums $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}^{n+1}$ elementweise fest lassen: $h|\boldsymbol{W} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{W}}$. Die Isotropiegruppe G_D wirkt transitiv auf D; man bestimme die Isotropiegruppen dieser Wirkung.

Es sei $[M, \rho]$ ein metrischer Raum, $B \subset M$ eine nicht leere Teilmenge und $\epsilon > 0$. Die Menge

$$U_\epsilon(B) := \{x \in M | \rho(x, B) < \epsilon\} \tag{46}$$

wird eine *Umgebung vom Radius ϵ von B* genannt.

Übung 23. Man beweise, dass die Umgebung $U := U_\epsilon(\boldsymbol{A})$ einer Geraden $\boldsymbol{A}$ der elliptischen Ebene $\boldsymbol{P}^2, r = 1$, vom Radius ϵ, $0 < \epsilon < \pi/2$, ein Möbiusband ist, vgl. Abbildung 2.10. Das Komplement $\boldsymbol{P}^2 \setminus U$ ist zu einer abgeschlossenen Kreisscheibe homöomorph. Die reelle projektive Ebene ist also als topologischer Raum eine geschlossene Fläche, die durch Einkleben einer Kreisscheibe an den Rand eines Möbiusbandes entsteht, der ja zu einem Kreis homöomorph ist.

Übung 24. Wir betrachten die Abstandsmenge $D := \delta(S_1^m, \epsilon)$, $\epsilon < \pi/2$, einer m-Großsphäre $S_1 \subset S^n$. Es sei $k := \min\{m, n-m-1\}$. Man zeige: a) Durch jeden Punkt $\mathfrak{x} \in D$ gibt es eine k-Großsphäre, die ganz in D liegt. – b) Für alle $l > k$ gibt es keine l-Großsphäre, die in D liegt. – c) Gilt $k = 0$, so ist die 0-Sphäre $\{\mathfrak{x}, -\mathfrak{x}\}$ die einzige, in D liegende Großsphäre durch $\mathfrak{x}$. – d) Ist $n = 3$ und $m = 1$, so gibt es durch jeden Punkt $\mathfrak{x} \in D$ genau zwei in D liegende Großkreise. – e) In den von c) und d) verschiedenen Fällen gibt es stets unendlich viele, in D liegende k-Großsphären durch jeden Punkt $\mathfrak{x} \in D$. (Hinweis. Man beachte Übung 2.4 und Gleichung (2.10).)

Im Fall d) der vorigen Übung sei $S_2 \subset D$ einer der Großkreise durch $\mathfrak{x} \in D$. Weil S_2 in der Abstandsmenge D von S_1 vom Radius ϵ liegt, ist der Abstand $d(\mathfrak{y}, S_1)$ für alle $\mathfrak{y} \in S_2$ derselbe, eine Eigenschaft, die in der euklidischen Geometrie die zu einer gegebenen Geraden parallelen Geraden charakterisiert. Daher nennt man S_2 eine *Clifford-Parallele zu* S_1. Man beachte, dass diese Definition keine Äquivalenzrelation ergibt, denn die Transitivität gilt nicht: Sind S_2, S_2' die beiden Clifford-Parallelen durch $\mathfrak{x}$ in D, so ist wegen $d(\mathfrak{x}, S_2') = 0$ und $S_2 \neq S_2'$ der Großkreis S_2 keine Clifford-Parallele zu S_2'. Eine ausführliche Behandlung der Clifford-Parallelen und Verweise auf die Literatur, inbesondere auch auf Verallgemeinerungen der Clifford-Parallelen, findet man bei M. Berger [8], Abschnitt 18.8.

Übung 25. Man beweise: Ist S_2 Clifford-Parallele zum Großkreis S_1, so ist S_1 Clifford-Parallele zu S_2. (Beachte: Die Definition ist nicht symmetrisch!)

B e m e r k u n g. Die in diesem Abschnitt behandelten Begriffe der metrischen Geometrie lassen weitgehende Verallgemeinerungen zu. Eine besonders erfolgreiche Entwicklung erfuhr die metrische Geometrie durch die Arbeiten von A. D. Alexandrow [1] und seiner Mitarbeiter zur Flächentheorie. Eine systematische Darstellung enthält die Monographie von W. Rinow [69]. Sehr allgemeine Resultate über den Schnittort auf konvexen Flächen findet man in der Dissertation von J. Kunze [56]. Es ist bekannt, dass die Schnittorte von Punkten konvexer Flächen keine geschlossenen Kurven enthalten. Für die elliptische Ebene ist das Gegenteil der Fall: obwohl die lokale Geometrie sphärisch, also gewiss konvex ist, ist der Schnittort jedes Punktes eine geschlossene Kurve, nämlich, wie oben gezeigt wurde, seine Polare.

2.5.7 Winkel zwischen Unterräumen und Abstände von Großsphären

In diesem Abschnitt behandeln wir die Aufgabe, vollständige Invariantensysteme für Paare (S_1^k, S_2^m) von Großsphären der n-Sphäre zu finden; dabei werden auch Großsphären unterschiedlicher Dimension zugelassen. Für alle k, m mit $0 \leq k \leq m < n$ betrachten wir die Menge dieser Paare, auf der die Gruppe G_n wirkt, wobei diese Wirkung durch die Wirkung auf der n-Sphäre induziert wird, wie in (10), (11) beschrieben. Da die bijektive Beziehung zwischen den Groß-Teilsphären und den Vektorunterräumen ebenso wie die zwischen diesen und den projektiven Unterräumen G_n-Isomorphismen der Transformationsgruppen sind, genügt es, vollständige Invariantensysteme für die Wirkungen der orthogonalen Gruppe $\boldsymbol{O}(n)$ auf den Produktmengen $G_{n,k} \times G_{n,m}$ der Graßmann-Mannigfaltigkeiten zu finden. Die Lösung dieser Aufgabe führt uns auf die Winkel zwischen den Unterräumen, vgl. H. Reichardt, [67], § V.3; das Ergebnis wurde allgemein für unitäre Räume schon in Übung I.6.4.5 formuliert. Wir behandeln zuerst rein algebraisch diesen Fall und folgern daraus die entsprechenden geometrischen Resultate. Der Einfachheit halber und in Übereinstimmung mit den in I.6.4 benutzten Bezeichnungen setzen wir nun voraus:

Voraussetzung A. *Es sei $\boldsymbol{V}^n$ ein n-dimensionaler reeller oder komplexer unitärer Vektorraum, über dem die orthogonale Gruppe $G := \boldsymbol{O}(n)$ im Falle $K = \mathbf{R}$ oder die unitäre Gruppe $G := \boldsymbol{U}(n)$ im Falle $K = \mathbf{C}$ linear wirkt, wobei das euklidische bzw. das positiv definite hermitesche Skalarprodukt invariant bleibt* (vgl. Abschnitt I.6.1). *Diese Wirkung induziert, wie allgemeiner in* (10), (11) *beschrieben, eine Wirkung von G über den Produkten von Graßmann-Mannigfaltigkeiten $G_{n,k} \times G_{n,m}$:*

$$g(\boldsymbol{U}^k, \boldsymbol{W}^m) = (g\boldsymbol{U}^k, g\boldsymbol{W}^m),\ g \in G,\ 1 \leq k \leq m < n. \tag{47}$$

Es sei $\boldsymbol{V}^n = \boldsymbol{W} \oplus \boldsymbol{W}^\perp$ die durch den Unterraum $\boldsymbol{W}$ bestimmte direkte orthogonale Zerlegung des Vektorraums $\boldsymbol{V}^n$, $pr : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ die orthogonale Projektion auf die erste Komponente und $q := pr|\boldsymbol{U} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{W}$ ihre Einschränkung auf den Unterraum $\boldsymbol{U}$; $q' : \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{U}$ bezeichne den adjungierten Operator (Definition I.6.4.1), welcher der dualen Abbildung entspricht.

Satz 12. *Es gelte die Voraussetzung* A. *Zu jedem Paar von Unterräumen $(\boldsymbol{U}^k, \boldsymbol{W}^m) \in G_{n,k} \times G_{n,m}$ gehört der eindeutig bestimmte selbstadjungierte Operator $a := q' \circ q \in$* $\mathrm{End}(\boldsymbol{U}^k)$. *Seine k Eigenwerte λ_α sind reell und erfüllen*

$$1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 0. \tag{48}$$

Die Folge dieser Eigenwerte ist ein vollständiges Invariantensystem für die Wirkung von G auf $G_{n,k} \times G_{n,m}$.

Beweis. Aus Folgerung I.6.4.1 ergibt sich $a' = (q' \circ q)' = q' \circ (q')' = q' \circ q = a$; also ist a selbstadjungiert. Nach Satz I.6.4.2 ist a diagonalisierbar und hat nur reelle Eigenwerte; es existiert eine orthonormierte Basis $(\mathfrak{b}_\kappa), \kappa = 1, \ldots, k$, von $\boldsymbol{U}^k$ aus Eigenvektoren von a. Ist $\mathfrak{b}$, $|\mathfrak{b}| = 1$, ein Eigenvektor , so gilt

$$1 \geq \lambda = \langle a\mathfrak{b}, \mathfrak{b} \rangle = \langle q\mathfrak{b}, q\mathfrak{b} \rangle \geq 0.$$

Die erste Ungleichung ergibt sich daraus, dass $q\mathfrak{b}$ als orthogonale Projektion von $\mathfrak{b}$ keine größere Norm als $\mathfrak{b}$ haben kann. Daher erhalten wir bei geeigneter Nummerierung der Eigenwerte die Ungleichungen (48). Bei einer simultanen Transformation (47) der Unterräume durch eine unitäre oder orthogonale Transformation gelten, wenn pr_1, q_1, a_1 die zu dem Paar $(g\boldsymbol{U}^k, g\boldsymbol{W}^m)$ gehörenden Abbildungen bezeichnen:

$$pr_1 \circ g = g \circ pr,\ q_1 = g \circ q \circ g^{-1}|\boldsymbol{U}_1,\ a_1 = g|\boldsymbol{U} \circ a \circ g^{-1}|\boldsymbol{U}_1.$$

Weil $g|\boldsymbol{U} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U}_1$ unitär ist, gehen die Eigenvektoren von a in die Eigenvektoren von a_1 mit denselben Eigenwerten über. Daher besteht die Folge (48) der Eigenwerte aus G-Invarianten. Wir zeigen nun, dass dieses Invariantensystem vollständig ist, dass also Unterraumpaare mit derselben Folge (48) von Eigenwerten durch eine Transformation $g \in G$ ineinander übergeführt werden können. Dazu passen wir dem Paar $(\boldsymbol{U}^k, \boldsymbol{W}^m)$ eine orthonormierte Basis $(\mathfrak{a}_j)$ von $\boldsymbol{V}^n$ derart an, dass die Lage der Unterräume in dieser Basis durch die Eigenwerte bestimmt ist; haben dann zwei Unterraumpaare dieselben Eigenwerte, so bestimmen die angepassten Basen eindeutig eine unitäre Transformation, die die Basen und damit auch die Unterraumpaare ineinander überführt. Die Basis wird dabei so gewählt, dass $\boldsymbol{W} = \mathfrak{L}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m)$ gilt und folglich $\boldsymbol{W}^\perp$ die lineare Hülle der übrigen Basisvektoren ist. Wir denken uns wie oben eine orthonormierte Basis $(\mathfrak{b}_\kappa), \kappa = 1, \ldots, k$, von $\boldsymbol{U}^k$ aus Eigenvektoren von a fixiert. Die Vektoren dieser Basis zerlegen wir in ihre Komponenten bezüglich $\boldsymbol{W}$ und $\boldsymbol{W}^\perp$:

$$\mathfrak{b}_\kappa = q\mathfrak{b}_\kappa + q^\perp \mathfrak{b}_\kappa. \tag{49}$$

Aus der Orthonormiertheit der Basis $(\mathfrak{b}_\kappa)$ folgen

$$\begin{aligned} \langle q\mathfrak{b}_\mu, q\mathfrak{b}_\nu \rangle &= \langle a\mathfrak{b}_\mu, \mathfrak{b}_\nu \rangle = \lambda_\mu \delta_{\mu\nu},\ \mu, \nu = 1, \ldots, k, && (50)\\ \langle q^\perp \mathfrak{b}_\mu, q^\perp \mathfrak{b}_\nu \rangle &= \langle \mathfrak{b}_\mu, \mathfrak{b}_\nu \rangle - \langle q\mathfrak{b}_\mu, q\mathfrak{b}_\nu \rangle = (1 - \lambda_\mu)\delta_{\mu\nu}. && (51) \end{aligned}$$

Gilt $\lambda_\mu = 1$, so ist nach (50) $\langle q\mathfrak{b}_\mu, q\mathfrak{b}_\mu \rangle = \langle \mathfrak{b}_\mu, \mathfrak{b}_\mu \rangle = 1$, und es folgt $q\mathfrak{b}_\mu = \mathfrak{b}_\mu \in \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$. Offenbar ist $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$ der Eigenunterraum zum Eigenwert 1. Wir setzen

$$\mathfrak{a}_\alpha := \mathfrak{b}_\alpha \text{ für } \alpha = 1, \ldots, d := \dim \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}. \tag{52}$$

Es seien nun $\mathfrak{b}_\beta, \beta = d+1, \ldots, s$, diejenigen Vektoren der Eigenbasis, deren Komponenten in (49) beide nicht Null sind; $k - s$ ist also die Vielfachheit des Eigenunterraums zum Eigenwert $\lambda = 0$, welcher der Kern von a und auch der Kern von q ist. Daher gilt nach (50) und (51)

$$\lambda_\gamma = 0, \mathfrak{b}_\gamma = q^\perp \mathfrak{b}_\gamma \in \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}^\perp \iff \gamma = s+1, \ldots, k. \tag{53}$$

Man beachte, dass die Fälle $d = 0$ oder $s = k$ möglich sind. Für $\rho = d+1, \ldots, s$ sind beide Komponenten in (49) von Null verschieden; wir normieren diese und setzen

$$\mathfrak{a}_\rho := q\mathfrak{b}_\rho / |q\mathfrak{b}_\rho| \in \boldsymbol{W},\ \mathfrak{a}_{m+\rho-d} := q^\perp \mathfrak{b}_\rho / |q^\perp \mathfrak{b}_\rho| \in \boldsymbol{W}^\perp, \rho = d+1, \ldots, s. \tag{54}$$

Nach (53) finden wir weitere Basisvektoren von $\boldsymbol{W}^\perp$ durch

$$\mathfrak{a}_{m-d+\sigma} := \mathfrak{b}_\sigma \in \boldsymbol{W}^\perp \text{ für } \sigma = s+1, \ldots, k. \tag{55}$$

Die in (52), (54) und (55) definierten Vektoren sind nach (50) und (51) orthonormiert. Ist $s < m$ oder $k - d < n - m$, so ergänzen wir $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_s$ zu einer orthonormierten Basis von $\boldsymbol{W}^m$ oder $\mathfrak{a}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{a}_{m+k-d}$ zu einer orthonormierten Basis von $\boldsymbol{W}^\perp$. Damit ist die Anpassung der Basis von $\boldsymbol{V}^n$ beendet. Für sie gilt:

1. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$ spannen den Unterraum $\boldsymbol{W}$ auf.

2. Die Vektoren $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_k$ mit den Basisdarstellungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_\alpha &= \mathfrak{a}_\alpha \text{ für } \alpha = 1, \ldots, d, \\
\mathfrak{b}_\rho &= \mathfrak{a}_\rho \cos\varphi_\rho + \mathfrak{a}_{m+\rho-d} \sin\varphi_\rho \text{ für } \rho = d+1, \ldots, s, \\
\mathfrak{b}_\sigma &= \mathfrak{a}_{m-d+\sigma} \text{ für } \sigma = s+1, \ldots, k,
\end{aligned}$$

spannen den Unterraum $\boldsymbol{U}$ auf; dabei sind unter Berücksichtigung von (51) die *Winkel* φ_κ*,* $0 \leq \varphi_\kappa \leq \pi/2$*, zwischen* $\boldsymbol{U}$ *und* $\boldsymbol{W}$ durch die Gleichung

$$\langle q\mathfrak{b}_\kappa, q\mathfrak{b}_\kappa \rangle = \lambda_\kappa = \cos^2\varphi_\kappa,\ \kappa = 1, \ldots, k, \tag{56}$$

eindeutig bestimmt.

Offenbar sind d, s und die Winkel φ_κ durch die Folge (48) der Eigenwerte eindeutig bestimmt und bestimmen ihrerseits die Gestalt der angepassten Basis, die natürlich selbst im allgemeinen schon wegen der auftretenden Basisergänzungen und der Vielfachheiten der Eigenwerte nicht eindeutig bestimmt ist. Haben wir ein zweites Unterraumpaar $(\hat{\boldsymbol{U}}^k, \hat{\boldsymbol{W}}^m)$ mit denselben Eigenwerten (48), so finden wir eine an sie angepasste orthonormierte Basis $(\hat{\mathfrak{a}}_i)$ von $\boldsymbol{V}^n$, die entsprechend die Eigenschaften 1., 2. für $(\hat{\boldsymbol{U}}^k, \hat{\boldsymbol{W}}^m)$ besitzt. Man überzeugt sich leicht, dass die durch $g\mathfrak{a}_i = \hat{\mathfrak{a}}_i$, $i = 1, \ldots, n$, eindeutig bestimmte unitäre Transformation das Paar $(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W})$ in $(\hat{\boldsymbol{U}}^k, \hat{\boldsymbol{W}}^m)$ überführt. □

Beispiel 5. Es sei nun wieder (S_1^k, S_2^m), $0 \leq k \leq m < n$, ein Paar von Groß-Teilsphären der n-Sphäre $S^n, r = 1$. Da die Dimensionen der entsprechenden Vektorräume um eins größer sind als die der Sphären, beginnen wir die Zählung der Indizes wieder mit der Null. Nach Übung 19, (43), ist die quadratische Form

$$Q_2(\mathfrak{x}) := \cos^2(d(\mathfrak{x}, S_2^m)) = \langle q\mathfrak{x}, q\mathfrak{x} \rangle$$

das Quadrat des Kosinus des Abstands des Punktes $\mathfrak{x}$ zur m-Großsphäre S_2. Die Einschränkung von Q_2 auf die k-Großsphäre S_1 ist gerade die quadratische Form, deren Eigenwerte $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$ das in Satz 12 bestimmte Invariantensystem bilden. Nach den Extremaleigenschaften der Eigenwerte, siehe zum Beispiel Übung I.6.5.4, ist also φ_0 das Minimum der Abstände von Punkten $\mathfrak{x} \in S_1$ zur m-Großsphäre S_2; es ist gleich Null genau dann, wenn $\lambda_0 = 1$ ist, also $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ gilt. Die Winkel φ_κ sind die stationären Werte der Abstandsfunktion $d(\mathfrak{x}, S_2^m)$ unter der Nebenbedingung $\mathfrak{x} \in S_1$, und φ_k ist der maximale Abstand von Punkten $\mathfrak{x} \in S_1$ zu S_2. Aus der Definition (16) des Abstandes im elliptischen Raums folgt, dass die Betrachtungen dieses Beispiels sich unmittelbar auf die Abstände von Punkten einer k-Ebene zu einer m-Ebene des elliptischen Raums übertragen lassen. □

Übung 26. Man zeige: Sind $S_1, S_2 \subset S^n$ Hypersphären, so gibt es höchstens einen von eins verschiedenen Eigenwert, nämlich λ_{n-1}, und der entsprechende Winkel φ_{n-1} stimmt mit dem in (20) definiertem Winkel zwischen den Hypersphären überein.

Übung 27. Für die Dimensionen $n = 2$ und $n = 3$ betrachte man alle Lagemöglichkeiten für Groß-Teilsphären und diskutiere die auftretenden Winkel und Abstände. Ferner untersuche man, wie die vollständigen Invariantensysteme der Paare $(S_1, S_2), (S_1^\perp, S_2), (S_1, S_2^\perp), (S_1^\perp, S_2^\perp)$ zusammenhängen.

Übung 28. Wir betrachten die Wirkung der euklidischen Gruppe $\boldsymbol{E}(n)$ auf der Menge der Paare $(\boldsymbol{H}^k, \boldsymbol{M}^m)$ einer k- und einer m-Ebene des euklidischen Punktraums $\boldsymbol{E}^n$. Man finde ein vollständiges Invariantensystem für diese Wirkung.

2.6 Hyperbolische Geometrie

In diesem Abschnitt bezeichne $\boldsymbol{P}^n$ den reellen n-dimensionalen projektiven Raum. In dem zu Grunde liegendem reellen Vektorraum $\boldsymbol{V}^{n+1}$ sei eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform $\langle , \rangle$ vom Index 1 gegeben. Ein reeller Vektorraum $\boldsymbol{V}^N$, in dem eine derartige Bilinearform als Skalarprodukt ausgezeichnet ist, wird ein *N-dimensionaler Minkowski-Raum* genannt; der vierdimensionale Minkowski-Raum bildet als Raum-Zeit-Welt die Grundlage der speziellen Relativitätstheorie[1], welche die klassische Elektrodynamik beschreibt, vgl. H. Minkowski [59][2]. Nach Satz 1.9.4, siehe auch Beispiel 2.1.3 und Tabelle 2.1, hat das Skalarprodukt die Normalform

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = -x^0 y^0 + \sum_{j=1}^{n} x^j y^j. \tag{1}$$

Eine Basis $(\mathfrak{e}_i)$, $i = 0, \dots, n$, für die das Skalarprodukt die Normalform (1) hat, ist *pseudo-orthonormiert*, für sie gilt also

$$\langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_k \rangle = \epsilon_i \delta_{ik} \text{ mit } \epsilon_0 = -1 \text{ und } \epsilon_j = 1 \text{ für } j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Die entsprechenden homogenen oder inhomogenen, Punkt- oder Vektorkoordinaten werden *pseudo-orthogonal* genannt. Die Isotropiegruppe des Skalarprodukts ist die pseudo-orthogonale Gruppe $\boldsymbol{O}(1, n)$, sie transformiert die pseudo-orthonormierten Basen einfach transitiv. Die Orthogonalität bezüglich $\langle , \rangle$ definiert die Polarität $F := F_{n+1,1}$ des projektiven Raumes; ihre Isotropiegruppe ist die durch die pseudo-orthogonale Gruppe erzeugte projektive pseudo-orthogonale Gruppe $G_n := \boldsymbol{PO}(1, n)$, vgl. (1.24). Die Menge der isotropen Vektoren aus $\boldsymbol{V}^{n+1}$ bildet den *isotropen Kegel;* die Erzeugenden des Kegels repräsentieren die durch F bestimmte Quadrik Q, welche ein Hyperellipsoid ist:

$$\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in Q \Longleftrightarrow \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = 0 \qquad (\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}, \mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}). \tag{3}$$

Da alle Hyperellipsoide projektiv äquivalent sind, können wir auch von der Hypersphäre $Q = S^{n-1} \subset \boldsymbol{P}^n$ sprechen; in inhomogenen Koordinaten ist die Koordinatendarstellung von Q

$$\sum_{j=1}^{n} (x^j)^2 = 1;$$

für jede Lösung von (3) muss ja $x^0 \neq 0$ gelten, so dass wir $x^0 = 1$ setzen können. Der isotrope Kegel (3) teilt den Vektorraum $\boldsymbol{V}$ in zwei Gebiete: das der *raumartigen Vektoren*

$$\boldsymbol{V}_+ := \{\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} | \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle > 0\}, \tag{4}$$

[1] Eine sehr klare Darstellung der mathematischen Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie ist enthalten in P. K. Raschewski [66], Kapitel IV.

[2] Ein Nachdruck dieses Artikels und einen kommentierenden Anhang findet man in J. Böhm, H. Reichardt [23].

und das aus zwei zusammenhängenden Komponenten bestehende der *zeitartigen Vektoren*, vgl. Abbildung 2.12:

$$\boldsymbol{V}_- := \{\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} | \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle < 0\}, \tag{5}$$

Offenbar sind diese Gebiete unter der Wirkung von $\boldsymbol{O}(1, n)$ invariant. Projektiv entspricht dieser Einteilung von $\boldsymbol{V} \setminus \{\mathfrak{o}\}$ die Einteilung des projektiven Raumes

$$\boldsymbol{P}^n = A(Q) \cup Q \cup I(Q). \tag{6}$$

Dabei ist $A(Q) := \pi(\boldsymbol{V}_+)$ das Außengebiet und $I(Q) := \pi(\boldsymbol{V}_-)$ das Innengebiet der Quadrik Q, vgl. Beispiel 3.1. Nach Folgerung 3.1 ist die Gruppe G_n transitiv auf jeder der Mengen $Q, A(Q), I(Q)$.

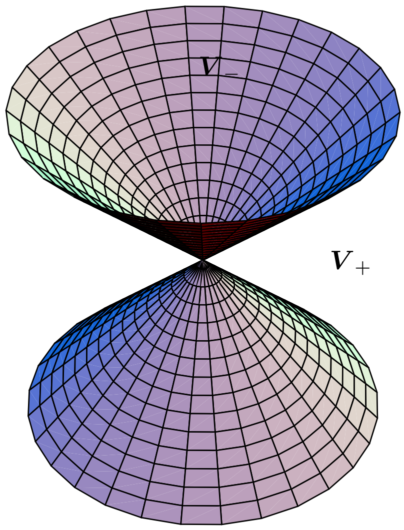

Abbildung 2.12: Der isotrope Kegel.

Definition 1. Der n-dimensionale *hyperbolische Raum* $\boldsymbol{H}^n := I(Q) = \pi(\boldsymbol{V}_+)$ ist das Innengebiet von Q; die *hyperbolische Geometrie* untersucht die geometrischen Eigenschaften von Objekten in $\boldsymbol{H}^n$, die unter der Wirkung der projektiven pseudo-orthogonalen Gruppe $G_n = \boldsymbol{PO}(1, n)$ invariant sind. □

Die Wirkung von G_n über der Hypersphäre Q definiert die weiter unten betrachtete *Möbius-Geometrie* auf der Hypersphäre, während die auf dem Außengebiet $A(Q)$

durch die Wirkung von G_n bestimmte Geometrie, wie wir in Beispiel 1 sehen werden, als Geometrie der Hyperebenen des hyperbolischen Raums gedeutet werden kann.

Dieser Abschnitt ist der hyperbolischen Geometrie gewidmet, die oft auch *nicht-euklidische Geometrie* genannt wird. Die hyperbolische Geometrie entstand historisch aus jahrhundertelangen vergeblichen Bemühungen, das im vorigen Abschnitt besprochene *Parallelenpostulat* aus den übrigen Axiomen der euklidischen Geometrie zu beweisen. In der hyperbolischen Ebene gibt es, wie wir weiter unten noch ausführen, durch jedem Punkt außerhalb einer Geraden unendlich viele Parallelen. Die hyperbolische Geometrie wurde etwa gleichzeitig von C. F. Gauß, J. Bolyai und N. I. Lobatschewski entdeckt. Die Geschichte dieser Entdeckung mit einigen der Originalarbeiten ist in H. Reichardt [68] dargestellt. Der Terminus „nicht-euklidisch“ ist auf den starken Gegensatz dieser Geometrie zur euklidischen zurückzuführen und vielleicht auch darauf, dass sie die erste nicht euklidische Geometrie war, die gefunden wurde. Die schon lange zuvor bekannte, im vorigen Abschnitt besprochene Geometrie auf der Sphäre ist ebenfalls nicht euklidisch, im Unterschied zur hyperbolischen ist sie aber als innere Geometrie einer Fläche des euklidischen Raums realisiert und somit gewissermaßen in die euklidische eingeordnet. Es ist ein tief liegender Satz der Differentialgeometrie, den D. Hilbert [41] im Jahre 1901 bewies, dass eine globale, singularitätenfreie Realisierung der hyperbolischen Ebene als Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raums nicht existiert. Die Entdeckung der hyperbolischen Geometrie stand im Widerspruch zu philosophischen Vorurteilen, welche die euklidische Geometrie, und die darauf sich gründende Mathematik überhaupt, zu einer a priori gegebenen Form unserer sinnlichen Anschauung verabsolutierte (I. Kant). Die hier nur angedeuteten „Grundlagen der Geometrie“ wurden in dem Buch von D. Hilbert [42] systematisch und in gewisser Weise abschließend dargestellt; eine interessante Beschreibung dieser Zusammenhänge findet man auch in dem Beitrag von W. Klingenberg [52]. Weil es inzwischen sehr viele nicht euklidische Geometrien gibt, ist es wohl besser, wie schon F. Klein [46] (s. auch [68]) vorschlug, von der hyperbolischen Geometrie zu sprechen.

2.6.1 Modelle des hyperbolischen Raumes

Wir betrachten nun den hyperbolischen Raum $\boldsymbol{H}^n, n > 0$, für $n = 2$ *hyperbolische Ebene* $\boldsymbol{H}^2$ und für $n = 1$ *hyperbolische Gerade* genannt. Zu jedem Punkt $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}^n$ gibt es genau zwei normierte Vertreter

$$\pm\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} \text{ mit } \langle\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle = -1, \tag{7}$$

die zur oberen bzw. unteren Schale des durch $\langle\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle = -1$ definierten n-Hyperboloids $H \subset \boldsymbol{V}^{n+1}$ gehören; sie sind bestimmt durch (7) und

$$x^0 = -\langle\mathfrak{e}_0,\mathfrak{x}\rangle > 0 \text{ bzw. } x^0 = -\langle\mathfrak{e}_0,\mathfrak{x}\rangle < 0.$$

Es bezeichne H_+ die durch $x^0 > 0$ bestimmte obere Schale des Hyperboloids H, vgl. Abb. 2.13, und $\boldsymbol{E}^n := \mathfrak{L}(\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n)$ die lineare Hülle der zu $\mathfrak{e}_0$ orthogonalen Basisvektoren. Da zu jedem Vektor $\mathfrak{x}_o \in \boldsymbol{E}^n$ genau ein darüber liegender Vektor $q(\mathfrak{x}_o) \in H_+$ existiert, nämlich

$$q:\ \mathfrak{x}_o \in \boldsymbol{E}^n \longmapsto q(\mathfrak{x}_o) := \mathfrak{e}_0\sqrt{1+\langle\mathfrak{x}_o,\mathfrak{x}_o\rangle} + \mathfrak{x}_o \in H_+, \tag{8}$$

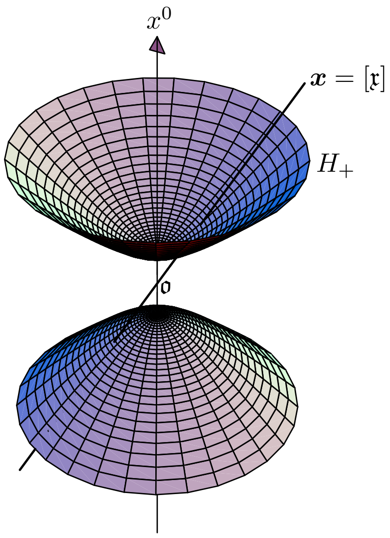

Abbildung 2.13: Das pseudo-euklidische Modell.

ist die Abbildung q bijektiv; sie ist eine Parameterdarstellung von H_+, die H_+ und $\boldsymbol{E}^n$ homöomorph aufeinander bezieht. Da andererseits jeder Punkt $\boldsymbol{x}$ des hyperbolischen Raumes $\boldsymbol{H}^n$ genau einen normierten Vertreter in H_+ hat, ist auch die Abbildung

$$p : \mathfrak{x} \in H_+ \longmapsto p(\mathfrak{x}) := [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{H}^n \tag{9}$$

bijektiv; übertragen wir mit ihrer Hilfe die durch die Parameterdarstellung (8) definierte Topologie auf $\boldsymbol{H}^n$, so folgt:

Lemma 1. *Der hyperbolische Raum $\boldsymbol{H}^n$ ist zum euklidischen Raum $\boldsymbol{E}^n$ homöomorph. Die vermöge* (8), (9) *definierte Abbildung $h := p \circ q : \boldsymbol{E}^n \to \boldsymbol{H}^n$ ist eine bijektive Parameterdarstellung von $\boldsymbol{H}^n$, welche diesen Homöomorphismus beschreibt.* □

Die durch (9) definierte Abbildung p entspricht der gleich bezeichneten Abbildung (5.4), die jedoch nur ein lokaler Homöomorphismus ist. Wie dort kann man einen dem Radius r analogen Parameter einführen, indem man das n-Hyperboloid $H(r)$ und seine obere Schale definiert:

$$H(r) := \{\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V} | \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = -r^2\},\ H_+(r) := \{\mathfrak{x} \in H(r) | -\langle \mathfrak{e}_0, \mathfrak{x} \rangle > 0\}. \tag{10}$$

Dadurch ändert sich nichts wesentlich. Ebenso wie die Sphären $S^n(r)$ Orbits der Gruppe $\boldsymbol{O}(n+1)$ sind, erweisen sich die n-Hyperboloide $H(r) \subset \boldsymbol{V}^{n+1}$ als Orbits der Wirkung der pseudo-orthogonalen Gruppe $\boldsymbol{O}(1,n)$. Man erkennt leicht, dass eine Transformation $g \in \boldsymbol{O}(1,n)$ genau dann $H_+(r)$ in sich überführt, wenn in der Matrix von g bezüglich einer orthonormierten Basis

$$\gamma_{00} := -\langle \mathfrak{e}_0, g\mathfrak{e}_0 \rangle > 0 \tag{11}$$

gilt. Weil stets genau eine der Transformationen $g, -g \in \boldsymbol{O}(1,n)$ diese Eigenschaft hat und die projektive pseudo-orthogonale Gruppe nach (1.24) die Faktorgruppe

$$G_n := \boldsymbol{O}(1,n)/\{\pm I_{n+1}\}$$

ist, ergibt sich, dass G_n zu der Isotropiegruppe $\boldsymbol{O}(1,n)^+$ von H_+ in $\boldsymbol{O}(1,n)$ isomorph ist; wir identifizieren diese Isotropiegruppe mit G_n. In der Relativitätstheorie bedeutet die Invarianz von H_+, dass die Zeitorientierung erhalten bleibt, man also Vergangenheit und Zukunft nicht vertauschen kann, was ja wohl der Realität entspricht; eine Transformation mit der Eigenschaft $g\mathfrak{e}_0 = -\mathfrak{e}_0$ lässt offenbar H_+ nicht invariant. Das Vorzeichen der Determinante $\det(g) \in G_n$ entscheidet dann darüber, ob g die Orientierung der Hyperfläche H_+ und damit auch des hyperbolischen Raumes $\boldsymbol{H}^n$ invariant lässt oder nicht[3].

Übung 1. a) Man beweise durch eine Rechnung: Sind $a, b \in \boldsymbol{O}(1,n)$, ist $c = a \circ b$ und gelten

$$-\langle \mathfrak{e}_0, a\mathfrak{e}_0 \rangle > 0, -\langle \mathfrak{e}_0, b\mathfrak{e}_0 \rangle > 0,$$

so ist auch $-\langle \mathfrak{e}_0, c\mathfrak{e}_0 \rangle > 0$. – b) Die Relation $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle < 0$ ist eine Äquivalenzrelation auf dem durch (7) definiertem n-Hyperboloid H; die Äquivalenzklassen sind H_+ und H_-.

Übung 2. Man beweise, dass die Isotropiegruppe eines Punktes $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}^n$ des hyperbolischen Raumes zur orthogonalen Gruppe $\boldsymbol{O}(n)$ isomorph ist. (Hinweis. Stellen wir die Transformationen $g \in G_n$ durch pseudo-orthogonale Matrizen bezüglich der eingangs gewählten Standardbasis $(\mathfrak{e}_i), i = 0, \ldots, n$, dar, so erscheint G_n als Untergruppe $\boldsymbol{O}(1,n)^+$ derjenigen Matrizen $(a_{ij}) \in \boldsymbol{O}(1,n)$, für die $a_{00} > 0$ gilt (Übung 1); die Isotropiegruppe von $\mathfrak{e}_0$ unter der betrachteten Wirkung von G_n ist dann die Untergruppe von $\boldsymbol{O}(1,n)^+$, für die $a_{00} = 1$ ist.) Wegen der Transitivität von G_n auf $\boldsymbol{H}^n$ (Folgerung 3.1) ist der hyperbolische Raum der Faktorraum

$$\boldsymbol{H}^n \cong \boldsymbol{O}(1,n)^+/\boldsymbol{O}(n).$$

Auf Grund der Bijektivität der Abbildung (9) identifizieren wir H_+ mit $\boldsymbol{H}^n$ und verwenden je nach Zweckmäßigkeit die vektorielle oder die projektive Schreibweise. Die auf H_+ durch das Skalarprodukt definierten Strukturen sind invariant, weil das Skalarprodukt es ist. Diese Strukturen gestatten es, in Analogie zur elliptischen Geometrie eine hyperbolische Metrik und Trigonometrie zu beschreiben, so dass sich H_+ als ein sehr geeignetes Modell des hyperbolischen Raums erweist; wir wollen es das *pseudo-euklidische Modell des hyperbolischen Raumes* nennen[4].

[3] Man kann beweisen, dass die Gruppe $\boldsymbol{O}(1,n)$ in vier zusammenhängende Komponenten zerfällt, die dadurch charakterisiert werden, dass eine Transformation g die Zeitorientierung oder die Raumorientierung erhält oder umkehrt, s. z. Bsp. P. K. Raschewski [66].

[4] Mit differentialgeometrischen Methoden läßt sich beweisen, dass das pseudo-euklidische Skalarprodukt auf $H_+(r)$ eine Riemannsche Metrik negativer konstanter Krümmung $-1/r^2$ induziert, vgl. P. K. Raschewski [66], § 118.

Der hier verwendete Terminus „Modell“ hat seinen Ursprung in der historischen Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrie. Der Ausgangspunkt war eine rein axiomatische Theorie, in der alle Axiome der euklidischen Geometrie mit Ausnahme des Parallelenpostulats als gültig angenommen wurden; das Parallelenpostulat wurde durch die folgende

Negation des Parallelenpostulats. *Durch jeden Punkt $\boldsymbol{x}$ der hyperbolischen Ebene $\boldsymbol{H}^2$ und jede $\boldsymbol{x}$ nicht enthaltende Gerade $\boldsymbol{h}$ gibt es wenigstens zwei Geraden dieser Ebene $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2 \subset \boldsymbol{H}^2$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}_1 \wedge \boldsymbol{g}_2$, die $\boldsymbol{h}$ nicht schneiden.*

ersetzt. Wie bei allen axiomatischen Theorien ergibt sich auch hier die Frage nach ihrer Widerspruchsfreiheit. Diese Frage kann durch die Angabe einer Struktur in einer widerspruchsfreien Theorie beantwortet werden, die den geforderten Axiomen genügt; eine solche Struktur nennt man ein *Modell* der axiomatischen Theorie. In diesem Sinne ist die in reellen Koordinaten konstruierte euklidische Geometrie ein Modell, das die Widerspruchsfreiheit des in den „Elementen des Euklid“ angegebenen Axiomensystems der euklidischen Geometrie beweist, wenn man annimmt, dass das Rechnen mit den reellen Zahlen widerspruchsfrei ist. Diese Annahme ist jedoch keineswegs innermathematisch, genauer: im Rahmen der mathematischen Logik und der Grundlagen der Mathematik, bewiesen. Wegen der fundamentalen Rolle der reellen Zahlen in der Mathematik wird jedoch kaum ein Mathematiker und erst recht kein Physiker die Widerspruchsfreiheit der reellen Zahlen anzweifeln. Der Verweis auf die durch Messungen mögliche Überprüfung ihrer Eigenschaften im Rahmen der mit ihrer Hilfe formulierten physikalischen Theorien lässt empirisch auf ihre Widerspruchsfreiheit schließen. In diesem Sinne werden wir, ohne auf die Axiome im Einzelnen einzugehen, den oben als Innengebiet einer Hypersphäre definierten hyperbolischen Raum $\boldsymbol{H}^n$ oder die entsprechende Vektormenge H_+ als Modell der hyperbolischen Geometrie entwickeln; dieses Modell geht auf F. Klein [46] zurück. Eine ausführlichere Darstellung der axiomatischen Bezüge findet man in dem Artikel von W. Klingenberg [52].

Übung 3. Man zeige: Das pseudo-euklidische Modell H_+ einer hyperbolischen Geraden ist der obere Ast einer Hyperbel in $\boldsymbol{V}^2$ mit den durch $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = 0$ definierten Asymptoten. Die Definition

$$t \in \mathbf{R} \longmapsto \mathfrak{x}(t) := \mathfrak{e}_0 \cosh(t) + \mathfrak{e}_1 \sinh(t) \in H_+ \tag{12}$$

ergibt eine bijektive Parameterdarstellung der hyperbolischen Geraden.

Definition 2. Unter einer *hyperbolischen k-Ebene $\boldsymbol{B}^k$, $0 \le k \le n$,* versteht man eine projektive k-Ebene, deren Durchschnitt mit dem Innengebiet $\boldsymbol{H}^n = I(Q)$ der Quadrik Q nicht leer ist. Formal wird auch die leere Menge als eine hyperbolische k-Ebene der Dimension $k = -1$ betrachtet. Wie üblich spricht man von Punkten ($k = 0$), Geraden ($k = 1$) und Hyperebenen ($k = n - 1$). Unter den Punkten oder Teilebenen einer hyperbolischen k-Ebene verstehen wir, wenn nichts anderes gesagt ist, stets die Elemente des Durchschnitts $\boldsymbol{B}^k \cap \boldsymbol{H}^n$; die Punkte aus $\boldsymbol{B}^k \cap Q$ werden *unendlich ferne Punkte* von $\boldsymbol{B}^k$ und die aus $\boldsymbol{B}^k \cap A(Q)$ ihre *äußeren Punkte* genannt. Die Menge der hyperbolischen k-Ebenen bezeichnen wir mit $H_{n,k}$. □

Aus Orthogonalitätsüberlegungen, den Ausführungen im Abschnitt 1.9.8 und den Transitivitätsaussagen in Beispiel 2.1 ergibt sich unmittelbar:

Lemma 2. *Eine projektive k-Ebene $\boldsymbol{M}^k$ ist genau dann eine hyperbolische k-Ebene, wenn der zugehörige Vektoraum $\boldsymbol{W}^{k+1}$ ein $(k+1)$-dimensionaler pseudo-euklidischer Unterraum des die Geometrie definierenden pseudo-euklidischen Vektorraums $\boldsymbol{V}^{n+1}$ ist, und das ist genau dann der Fall, wenn die Polare $F(\boldsymbol{M}^k)$ ganz im Außengebiet $A(Q)$ der Quadrik liegt. Die hyperbolischen k-Ebenen sind hyperbolische Räume der Dimension k. Die Gruppe G_n wirkt transitiv auf der Menge $H_{n,k}$ der hyperbolischen k-Ebenen.* □

Beispiel 1. Die hyperbolischen Punkte $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}^n$ entsprechen den eindimensionalen zeitartigen Unterräumen; ihre Polaren $\boldsymbol{x}^\perp$ sind folglich projektive Hyperebenen, die ganz in $A(Q)$ liegen, weil sie euklidischen Unterräumen $\boldsymbol{W}^n \subset \boldsymbol{V}^{n+1}$ entsprechen. Andererseits gehört zu jedem Punkt des Außengebiets $\boldsymbol{x} \in A(Q)$ ein eindimenionaler raumartiger Unterraum, dessen orthogonales Komplement pseudo-euklidisch ist und folglich eine hyperbolische Hyperebene bestimmt, und umgekehrt. Ist $\boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{X}) \in A(Q)$ der Pol einer hyperbolischen Hyperebene, so gilt für jeden seiner Repräsentanten $\mathfrak{x}, \boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]$, die Ungleichung $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle > 0$; es gibt jeweils zwei normierte Repräsentanten $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] = [-\mathfrak{x}]$, welche der Bedingung

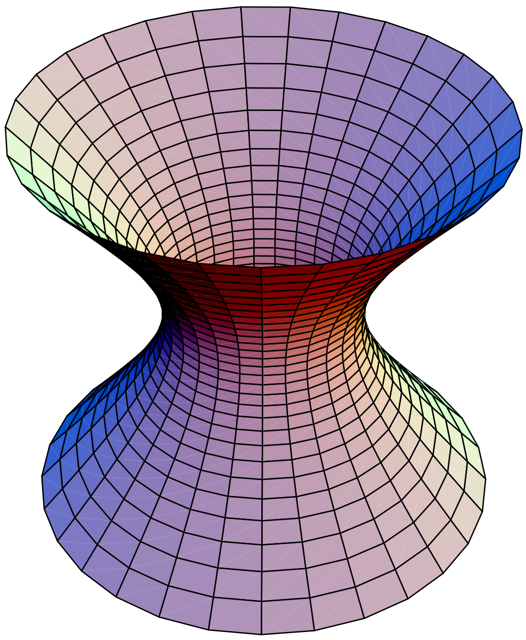

Abbildung 2.14: Das Hyperboloid $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = 1$.

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = -(x^0)^2 + \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 = 1 \qquad (13)$$

genügen, die ein einschaliges n-Hyperboloid Q_1 im Raum $\boldsymbol{V}^{n+1}$ beschreibt, vgl. Abbildung 2.14. Der Raum $A(Q)$ aller hyperbolischen Hyperebenen entsteht aus der Hyperfläche (13) durch Identifizierung diametral gegenüber liegender Vektoren $\mathfrak{x}, -\mathfrak{x}$. Tut man das nicht, so entspricht jedem Vektor $\mathfrak{x} \in Q_1$ eine *orientierte hyperbolische Hyperebene* wie folgt: Ein Punkt $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}^n$ liegt im *oberen Halbraum der Hyperebene* $\boldsymbol{X} = F(\boldsymbol{x})$, wenn für seinen eindeutig bestimmten Vertreter $\mathfrak{y} \in H_+$ die Ungleichung $\langle \mathfrak{y}, \mathfrak{x} \rangle > 0$ gilt; analog bestimmt man den unteren, durch die orientierte Hyperebene bestimmten Halbraum durch $\langle \mathfrak{y}, \mathfrak{x} \rangle < 0$. Bei einer Umorientierung, d.h. Vertauschung von $\mathfrak{x}$ und $-\mathfrak{x}$, werden oberer und unterer Halbraum vertauscht. Algebraisch kann man diese Orientierung auch durch die Orientierung der Basen der zugehörigen Vektorräume ausdrücken. Da die Hyperebene $\boldsymbol{X} = F(\boldsymbol{x})$ die Polare von $\boldsymbol{x}$ ist, gilt für ihre Punkte

$$\boldsymbol{y} = [\mathfrak{y}] \in \boldsymbol{X} \longleftrightarrow \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{x} \rangle = 0, \ \ (\boldsymbol{X} = F(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]).$$

Wie in der euklidischen und der sphärischen Geometrie zerlegt jede Hyperebene den Raum in zwei disjunkte, offene Gebiete, deren gemeinsamer Rand sie ist. Der Raum der orientierten hyperbolischen Hyperebenen entspricht bijektiv dem n-Hyperboloid (13). □

Übung 4. a) Man beweise, dass der Raum $A(Q)$ der hyperbolischen Hyperebenen unter der Wirkung von G_n zum Faktorraum

$$A(Q) \cong \boldsymbol{O}(1,n)^+/\boldsymbol{0}(1,n-1)^+$$

isomorph ist. (Man verfahre ähnlich wie in Übung 2). – b) Man stelle auch die Mengen der hyperbolischen k-Ebenen $H_{n,k}$ als Faktorräume der Gruppe G_n dar.

Ein zweites, ebenfalls auf F.Klein zurück gehendes Modell des hyperbolischen Raums $\boldsymbol{H}^n$ erhalten wir durch eine andere Normierung der Repräsentanten $[\mathfrak{x}]$ seiner Punkte $\boldsymbol{x}$. Zerlegen wir $\mathfrak{x}$ in seine zeit- und raumartigen Komponenten bezüglich der eingangs gewählten Standardbasis:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_0 x^0 + \mathfrak{x}_1 \text{ mit } \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{e}_0 \rangle = 0,$$

so ist nach Definition 1 und (5) wegen

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = -(x^0)^2 + \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_1 \rangle < 0$$

und $\langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_1 \rangle \geq 0$ stets $x^0 \neq 0$, und daher ist

$$h : \boldsymbol{x} = [\mathfrak{e}_0 x^0 + \mathfrak{x}_1] \in \boldsymbol{H}^n \longmapsto h(\boldsymbol{x}) := \mathfrak{x}_1/x^0 \in D^n \tag{14}$$

eine korrekte, d.h. von der Wahl des Repräsentanten unabhängige Definition; hier bezeichnet D^n die n-dimensionale offene Vollkugel vom Radius 1 im euklidischen Vektorraum $\boldsymbol{E}^n = \mathfrak{L}(\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n)$:

$$D^n := \{\mathfrak{y} \in E^n | \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle < 1\}. \tag{15}$$

Die Abbildung h ist offenbar bijektiv (auch ein Homöomorphismus bezüglich der üblichen Topologien); ihre Umkehrung ist

$$h^{-1} : \mathfrak{y} \in D^n \longmapsto \boldsymbol{x} = [\mathfrak{e}_0 + \mathfrak{y}] \in \boldsymbol{H}^n. \tag{16}$$

Damit ist das zweite Modell des hyperbolischen Raumes konstruiert, welches wir das *euklidische Modell* nennen wollen. Es hat den Vorteil, dass es die Unterraumstruktur der hyperbolischen Geometrie besonders deutlich wiedergibt: Denken wir uns D^n in die Hyperebene $x^0 = 1$ eingebettet, wie es die Darstellung des Repräsentanten in (16) nahe legt, so sind die hyperbolischen k-Ebenen einfach die Durchschnitte von D^n mit den sie definierenden $(k+1)$-dimensionalen Vektorunterräumen. Im euklidischen Raum $\boldsymbol{E}^n$ betrachtet erscheinen also die hyperbolischen k-Ebenen als Durchschnitte von euklidischen k-Ebenen mit der offenen Vollkugel D^n. Die Abbildung 2.15 zeigt den Zusammenhang der beiden Modelle der hyperbolischen Ebene.

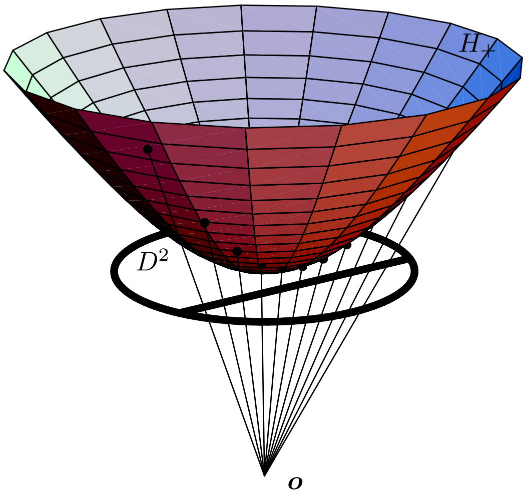

Abbildung 2.15: Euklidisches und pseudo-euklidisches Modell von $\boldsymbol{H}^2$.

Beispiel 2. Im euklidischen Modell der hyperbolischen Ebene $\boldsymbol{H}^2$ erscheinen die Geraden als Sehnen der offenen Einheitskreisscheibe. Die Gerade $\boldsymbol{B}$ mit der Parameterdarstellung (12) in $\boldsymbol{H}^2$ wird durch h auf den Durchmesser

$$h([\mathfrak{e}_0 \cosh(t) + \mathfrak{e}_1 \sinh(t)]) = \mathfrak{e}_1 \tanh(t) \in \boldsymbol{E}^2,\ -\infty < t < \infty, \tag{17}$$

abgebildet. Strebt t gegen $\pm\infty$, so werden die Punkte des Einheitskreises $\pm\mathfrak{e}_1$ erreicht. Ist $\boldsymbol{a} = [\mathfrak{a}], \mathfrak{a} \in D^2$, ein nicht auf $\boldsymbol{B}$ liegender Punkt, so treffen die beiden Sehnen durch $\mathfrak{a}$ und die Punkte $\pm\mathfrak{e}_1$ des Randkreises die Gerade $\boldsymbol{B}$ nicht; sie werden die *Randparallelen durch $\boldsymbol{a}$ zu $\boldsymbol{B}$* genannt; sie teilen das Büschel der Geraden in zwei Winkelbereiche ein, von denen der eine aus $\boldsymbol{B}$ schneidenden und der andere aus zu $\boldsymbol{B}$ *parallelen Geraden* besteht, vgl. Abb. 2.16. Im pseudo-euklidischen Modell von $\boldsymbol{H}^2$ entspricht der Geraden $\boldsymbol{B}$ der obere Hyperbelast von H_+, den man durch Zentralprojektion von $h(\boldsymbol{B})$ aus dem Ursprung $\mathfrak{o} \in \boldsymbol{V}^3$ auf H_+ erhält. Natürlich gibt es in einem hyperbolischen Raum $\boldsymbol{H}^n$ mit $n > 2$ auch *windschiefe Geraden*, das sind zwei Geraden, die nicht in einer Ebene liegen. In den Dimensionen $n > 2$ wendet man die Begriffe parallel und randparallel nur auf Geraden an, die nicht windschief sind. Also gibt es auch hier durch jeden Punkt $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{H}^n \setminus \boldsymbol{B}$ genau zwei Randparallelen zur Geraden $\boldsymbol{B}$, unendlich viele Parallelen und darüber hinaus unendlich viele zu $\boldsymbol{B}$ windschiefe Geraden.□

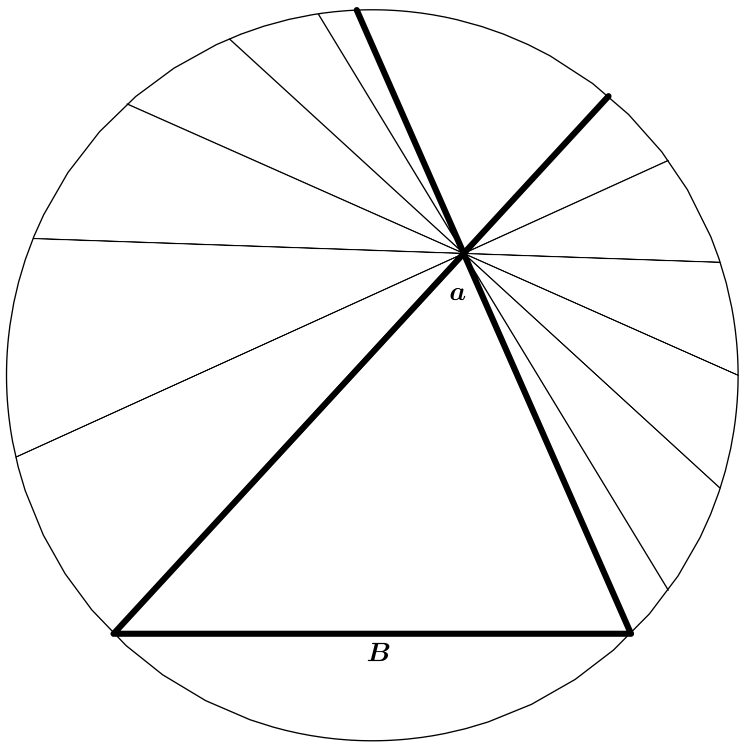

Abbildung 2.16: Parallelen im euklidischen Modell von $\boldsymbol{H}^2$.

Im Folgenden benötigen wir mehrfach die allgemeine *stereographische Projektion*, die systematisch zur euklidischen Geometrie gehört; für $n = 2$ haben wir sie bereits in Beispiel 5.4 benutzt. Zu ihrer Definition betrachten wir die Einheitshypersphäre im euklidischen $(n+1)$-dimensionalen Vektorraum $S^n \subset \boldsymbol{E}^{n+1}$ mit dem Zentrum im Ursprung $\mathfrak{o}$; das euklidische Skalarprodukt bezeichnen wir mit $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Wir wählen eine orthonormierte Standardbasis $(\mathfrak{e}_i)$, für die also

$$(\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j) = \delta_{ij}, \ i, j = 0, \ldots, n,$$

gilt. Den Punkt $\boldsymbol{s} := -\mathfrak{e}_0$ bezeichnen wir als *Südpol* und die Hyperebene $\boldsymbol{E}^n := \mathfrak{L}(\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n)$, definiert durch $x^0 = 0$, als *Äquatorialhyperebene*. Unter der stereographischen Projektion

$st : S^n \setminus \{\boldsymbol{s}\} \to \boldsymbol{E}^n$ verstehen wir die Abbildung (vgl. (5.42))

$$st : \boldsymbol{x} \in S^n \setminus \{\boldsymbol{s}\} \longmapsto \boldsymbol{y} = st(\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{s} \vee \boldsymbol{x}) \cap \boldsymbol{E}^n \in \boldsymbol{E}^n, \ (n \geq 2). \tag{18}$$

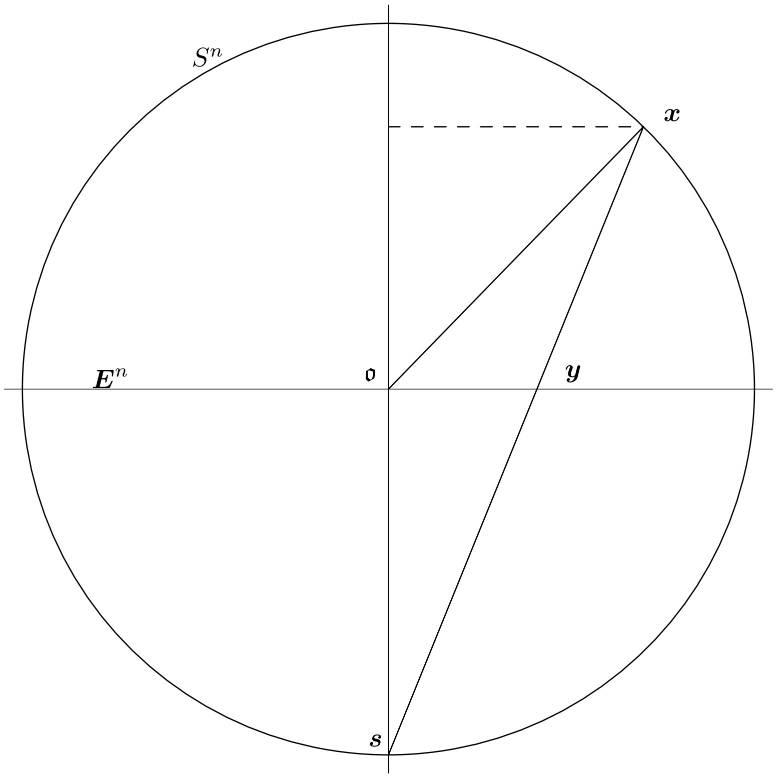

Abbildung 2.17: Zur stereographischen Projektion.

Das Bild $\boldsymbol{y}$ von $\boldsymbol{x}$ ist also der Schnitt der Verbindungsgeraden von $\boldsymbol{x}$ und dem Südpol mit der Äquatorialhyperebene, schematisch dargestellt in der Abbildung 2.17. Man erkennt sofort, dass der Bildpunkt $\boldsymbol{y}$ ins Unendliche wandert, wenn $\boldsymbol{x}$ gegen den Südpol $\boldsymbol{s}$ strebt. Denkt man sich den euklidischen Raum durch einen mit ∞ bezeichneten Punkt kompaktifiziert, dessen Umgebungen als Komplemente abgeschlossener Mengen des $\boldsymbol{E}^n$ definiert werden, und setzt $st(\boldsymbol{s}) = \infty$, so wird die stereographische Projektion zu einem Homöomorphismus von S^n auf diese *Einpunktkompaktifizierung* des $\boldsymbol{E}^n$ ausgedehnt. Es gilt

Lemma 3. *Die stereographische Projektion* (18) *ist ein Homöomorphismus. Sie führt k-Teilsphären $A^k \subset S^n \setminus \{\boldsymbol{s}\}$ in k-Sphären des $\boldsymbol{E}^n$ über; k-Teilsphären, die den Südpol $\boldsymbol{s}$ enthalten, werden auf k-Ebenen des $\boldsymbol{E}^n$ abgebildet. Die Abbildung ist konform.*

Es sei daran erinnert, dass man eine Abbildung *konform* nennt, wenn sie die Winkel invariant lässt. Aus einem klassischen, von C. F. Gauß bewiesenem Satz der Differentialgeometrie, dem „Theorema egregium“, folgt, dass es keine isometrische, also die Abstände invariant lassende Abbildungen zwischen Sphären und Ebenen gibt; die Konformität ist somit das Beste, was man erreichen kann. Daher wird die stereographische Projektion für $n = 2$ in der Kartographie und in der komplexen Funktionentheorie angewandt; in letzterer stellt sie den Zusammenhang zwischen der Riemannschen Zahlenkugel und der erweiterten Gaußschen Zahlenebene dar. Zum Beweis von Lemma 3 empfehlen wir dem Leser die Ausführung der folgenden Übung.

Übung 5. Es seien $x_i, i = 0, \ldots, n$, die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ und $y_j, j = 1, \ldots, n$ die Koordinaten von $\boldsymbol{y} = st(\boldsymbol{x})$ in Bezug auf die Standardbasis und den Ursprung $\mathfrak{o}$. a) Durch Ausrechnung von (18) zeige man

$$st: \quad y_j = \frac{x_j}{1 + x_0}, \; j = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

b) Für die Umkehrung $\boldsymbol{x} = st^{-1}(\boldsymbol{y})$ berechne man

$$st^{-1}: \quad x_0 = \frac{1 - (\mathfrak{y}, \mathfrak{y})}{1 + (\mathfrak{y}, \mathfrak{y})}, \; x_i = \frac{2y_i}{1 + (\mathfrak{y}, \mathfrak{y})}, \; i = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Hier bezeichnet $\mathfrak{y}$ den Ortsvektor von $\boldsymbol{y}$. – c) Man beweise die in Lemma 3 enthaltene Behauptung über die Bilder der k-Teilsphären. (Hinweis: Man betrachte zuerst den Fall $k = n-1$ und benutze, dass sich jede Hypersphäre als Durchschnitt von S^n mit einer Hyperebene darstellen lässt. Die Hyperebene sei durch ihre Hessesche Normalform $(\mathfrak{n}, \mathfrak{x}) = p$, vgl. I.(6.3.37), gegeben, wobei $\mathfrak{n} \in S^n$ ihr Normaleneinheitsvektor und $p, 0 \leq p < 1$, ihr Abstand vom Ursprung ist. Ferner beachte man, dass jede k-Teilsphäre als Durchschnitt von endlich vielen Hypersphären darstellbar ist.) – d) Man beweise, dass st eine konforme Abbildung ist. (Hinweis. Man betrachte zuerst den Fall n=2. In dem beliebigen Punkt $\boldsymbol{x} \in S^2$ seien $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$ Tangenteneinheitsvektoren an den Meridian bzw. den Breitenkreis durch diesen Punkt. Durch Einsetzen der Parameterdarstellungen dieser Kurven mit der Bogenlänge s als Parameter in st und nachfolgende Differentiation nach s berechnet man die Bilder dieser Vektoren und zeigt, dass sie orthogonal sind und sich mit demselben, nur vom Punkt $\boldsymbol{x}$ abhängenden Faktor multiplizieren: das bedeutet die Konformität im Fall $n = 2$. Für $n > 2$ denke sich man eine beliebige orthonormierte Basis $\mathfrak{s}_j, j = 1, \ldots, n$, des Tangentialraums $T_{\boldsymbol{x}}S^n$ gegeben. Weil $\boldsymbol{x}$ und zwei der Basisvektoren $\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}_j, i \neq j$, eine 2-Großsphäre $S^2 \subset S^n$ bestimmen, folgt die Konformität in diesem Fall aus der für $n = 2$.)

Beispiel 3. Wir wollen noch drei weitere Modelle des hyperbolischen Raums beschreiben und gehen dazu von dem euklidischen Modell aus. Den offenen Einheitsball D^n denken wir uns in die Hyperebene $\boldsymbol{E}^n = \mathfrak{L}(\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n) \subset \boldsymbol{E}^{n+1}$ mit dem Normalenvektor $\mathfrak{e}_0$ eingebettet und betrachten den oberen Teil $S^n_+, x_0 > 0$, der Einheitshypersphäre, in deren Äqutorialhyperebene D^n liegt. Zu jedem Punkt $\boldsymbol{x} \in D^n$ gehört dann genau ein darüber liegender Punkt $\boldsymbol{x}_+ \in S^n_+$, der orthogonal auf $\boldsymbol{x}$ projiziert wird. Den hyperbolischen Geraden entsprechen hierbei Halbkreise, die den Rand S^{n-1} von D^n orthogonal schneiden. Jede hyperbolische k-Ebene, wird von einer euklidischen k-Ebene $\boldsymbol{M}^k \subset \boldsymbol{E}^n$ erzeugt, welche den Rand S^{n-1} in einer $k-1$-Sphäre schneidet; ihre Hebung in S^n_+ hat dann mit $\boldsymbol{E}^n$ als einzigen von Null verschiedenen Winkel wieder nur $\pi/2$. Die Halbhypersphäre S^n_+ mit der beschriebenen Struktur der zum Rand orthogonalen Halb-k-Sphären als hyperbolische k-Ebenen ist wiederum ein Modell der hyperbolischen Geometrie, welches wir ihr *sphärisches Modell* nennen wollen. Wendet man auf die Halbhypersphäre S^n_+ die stereographische Projektion an, so erhält man ein neues Modell des hyperbolischen Raums in dem offenen Ball D^n, in dem die hyperbolischen Geraden durch Halbkreise oder Durchmesser repräsentiert werden, welche den Rand S^{n-1} orthogonal schneiden, analog für hyperbolische k-Ebenen: sie gehen in zu S^{n-1} orthogonale k-Halbsphären über. Dieses ebenfalls von F. Klein angegebene Modell wollen wir das *Kleinsche Modell des hyperbolischen Raumes* nennen. Ein viertes Modell geht auf H. Poincaré zurück: Denkt man sich D^n in die Hyperebene des durch $x_1 = 0$ bestimmten Meridians gelegt, betrachtet die durch $x_1 > 0$ definierte Halbsphäre mit der eben beschriebenen hyperbolischen Struktur und wendet darauf die stereographische Projektion *st* an, so erhält man als *Poincarésches Modell* den offenen, durch $x_1 > 0$ bestimmten Halbraum des $\boldsymbol{E}^n$. Die hyperbolischen Geraden erscheinen wegen der Konformität und Kreis-Invarianz als auf dem Rand, also der Hyperebene $x_1 = 0$ des $\boldsymbol{E}^n$ senkrecht stehende Halbkreise oder Halbgeraden, und die hyperbolischen k-Ebenen als zu ihm im beschriebenen Sinn orthogonale k-Halbsphären oder k-Halbräume. Die Abbildung 2.18 ist eine Transformation der Abbildung 2.16 in das Poincarésche Modell der hyperbolischen Ebene.

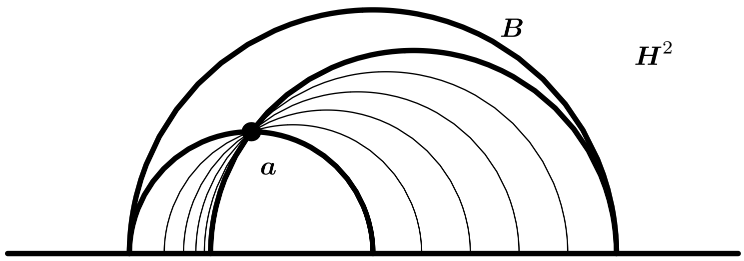

Abbildung 2.18: Parallelen im Poincaréschen Modell von $\boldsymbol{H}^2$.

Die Abbildung 2.19 zeigt eine Schar von Kreistangenten im Kleinschen Modell der hyperbolischen Ebene. Bemerkenswert ist, dass jede der Tangenten zu einem Viereck aus Tangenten der Schar gehört, dessen Ecken zu Q gehören, also unendlich ferne Punkte sind. In jedem dieser Vierecke sind je zwei benachbarte Seiten randparallel, während die gegenüberliegenden Seiten parallel sind. Zu jeder Geraden der Schar gibt es in ihr mehrere Parallelen. Dieses Bild zeigt besonders deutlich die gravierenden Unterschiede zur euklidischen und zur elliptischen Geometrie: In der euklidischen Geometrie gibt es zu jeder Tangente an einen Kreis genau eine andere parallele Tangente, während es in der elliptischen Geometrie überhaupt keine Parallelen gibt. □

2.6.2 Abstand und Winkel

Wir kehren nun wieder zur ursprünglichen Definition des hyperbolischen Raums als Innengebiet der Quadrik Q zurück; die Punkte $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}^n$ repräsentieren wir durch ihre eindeutig bestimmten normierten Vertreter $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}], \mathfrak{x} \in H^n_+, \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = -1$. Die grundlegende Invariante der hyperbolischen Geometrie vom Radius r ist der *Abstand zweier Punkte*, der in Analogie zum elliptischen Abstand (5.16) durch

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := r \operatorname{arcosh}(|\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle|), \ \boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}], \boldsymbol{y} = [\mathfrak{y}], \ \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in H^n_+ \tag{21}$$

definiert wird. Man beweist leicht, dass h folgende Eigenschaften einer Metrik besitzt:

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = h(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}), h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0, h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}. \tag{22}$$

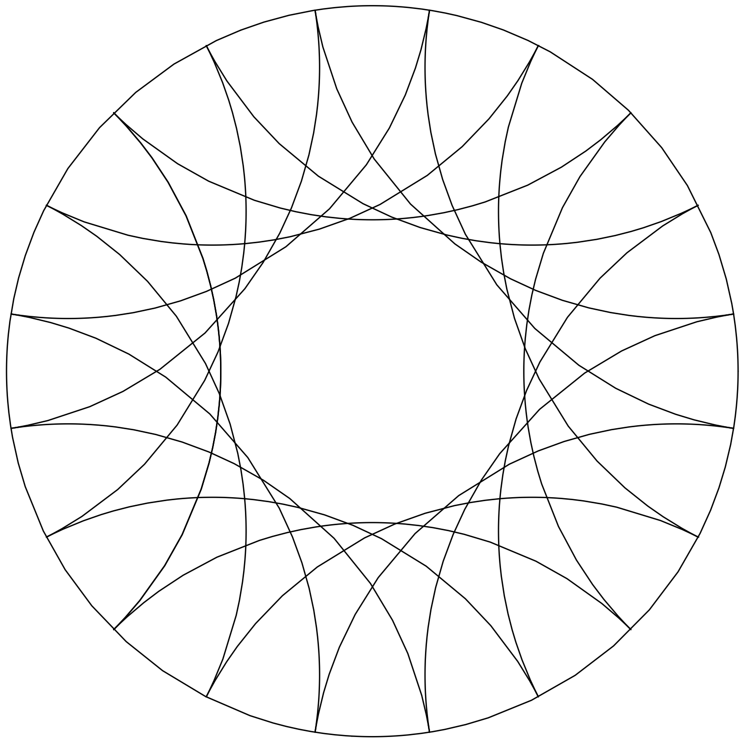

Abbildung 2.19: Kreistangenten im Kleinschen Modell von $\boldsymbol{H}^2$.

Die Dreiecksungleichung für h wird sich weiter unten aus dem hyperbolischen Kosinussatz ergeben. Im Folgenden werden wir der Einfachheit halber den Radius $r = 1$ setzen.

Übung 6. Man beweise (22). Hinweis. Man benutze, dass es zu jedem Vektor $\mathfrak{x} \in H_+^n$ eine Transformation $g \in G_n$ gibt mit $g\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_0$.

Ebenso wie Satz 5.2 der elliptischen Geometrie ergibt sich

Satz 4. *Zwei endliche Punktfolgen* $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$, $(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_k)$ *des* n*-dimensionalen hyperbolischen Raumes* $\boldsymbol{H}^n$ *sind genau dann* G_n*-kongruent, wenn ihre Abstände entsprechend gleich sind:*

$$h(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = h(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j) \text{ für } i, j = 1, \ldots, k.$$

Beweis. Aus der Gleichheit der Abstände ergibt sich die Gleichheit für die Skalarprodukte der Repräsentanten. Wir haben die Voraussetzungen von Satz 2.4 zu überprüfen. Da in dem pseudo-euklidischen Vektorraum vom Index 1 ein Unterraum, der einen zeitartigen Vektor enthält, stets nicht isotrop ist, gilt die Bedingung c) von Satz 2.4. Aus demselben Grund können wir die Formel (2.33) für die Gramsche Determinante anwenden, woraus die Voraussetzung a) (von Satz 2.1) resultiert. Wegen $\kappa = 1$ ist schließlich die Bedingung d) trivial, und es ergibt sich die Behauptung. □

Beispiel 4. Wir betrachten nun zwei hyperbolische Hyperebenen $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{X} \cap I(Q) \neq \emptyset$, $\boldsymbol{Y} \cap I(Q) \neq \emptyset$; wenn keine Verwechselungen zu befürchten sind, schreiben wir die letzten beiden Bedingungen oft nicht aus und sprechen von hyperbolischen Hyperebenen $\boldsymbol{X}, \ldots$, bzw. allgemeiner hyperbolischen k-Ebenen, wenn diese Bedingungen erfüllt sind. Die Polaren dieser Hyperebenen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}^{\perp}, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}^{\perp}$ sind stets Punkte des Außengebiets, deren bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmte normierte Vertreter $\pm\mathfrak{x}, \pm\mathfrak{y}$ auf dem einschaligen Hyperboloid Q_1 liegen, vgl. (13), Beispiel 1; sind die hyperbolischen Hyperebenen orientiert, so sind ihre normierten Vertreter eindeutig bestimmt, und wir haben eine eindeutig definierte Invariante:

$$I(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) := \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle,\ [\mathfrak{x}] = \boldsymbol{X}^{\perp},\ [\mathfrak{y}] = \boldsymbol{Y}^{\perp}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in Q_1,\ \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \text{ orientiert.} \tag{23}$$

Für nicht orientierte Hyperebenen müssen wir auf das Vorzeichen verzichten und erhalten die Invariante

$$|I|(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) := |\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle|,\ [\mathfrak{x}] = \boldsymbol{X}^{\perp},\ [\mathfrak{y}] = \boldsymbol{Y}^{\perp}, \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in Q_1,\ \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \text{ nicht orientiert.} \tag{24}$$

Für nicht normierte repräsentierende Vektoren gelten die allgemeineren Formel

$$I(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \frac{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle}},\ |I|(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \frac{|\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle|}{\sqrt{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle}}. \tag{25}$$

Wir setzen $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{Y}$ voraus und unterscheiden drei Fälle:

1. $|I|(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) < 1$. Das ist genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ einen euklidischen Unterraum aufspannen, und das gilt genau dann, wenn $\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y})^{\perp}$ ein pseudo-euklidischer Unterraum ist, also die Hyperebenen sich in einer hyperbolischen $(n-2)$-Ebene $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y}$ schneiden. Der *Winkel* α *der sich schneidenden Hyperebenen* wird dann durch

   $$\begin{aligned} \cos\alpha &= I(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}),\ 0 < \alpha \leq \pi, (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \text{ orientiert}), \\ \cos\alpha &= |I|(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}),\ 0 < \alpha \leq \pi/2, (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \text{ nicht orientiert}), \end{aligned}$$

   eindeutig bestimmt.

2. $|I|(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = 1$. Das ist genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ einen isotropen Unterraum aufspannen, und das gilt genau dann, wenn $\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y})^{\perp}$ ein isotroper Unterraum ist, also die Hyperebenen sich in einer zu Q tangentiellen $(n-2)$-Ebene $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y}$ schneiden; $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ werden *randparallel* zueinander genannt.

3. $|I|(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) > 1$. Das ist genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ einen pseudo-euklidischen Unterraum aufspannen, und das gilt genau dann, wenn $\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y})^{\perp}$ ein euklidischer Unterraum ist, also $\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y}$ eine ganz im Außengebiet liegende $(n-2)$-Ebene ist; $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ werden zueinander *parallele Hyperebenen* genannt.

Offenbar ist für die G_n-Kongruenz zweier Paare $(\boldsymbol{X}_\alpha, \boldsymbol{Y}_\alpha), \boldsymbol{X}_\alpha \neq \boldsymbol{Y}_\alpha, \alpha = 1, 2$, verschiedener Hyperebenen die Übereinsimmung der Invarianten $|I|$ notwendig; indem man aus der entsprechenden Übereinstimmung der Skalarprodukte der normierten Vertreter der Pole einen Isomorphismus der von ihnen aufgespannten 2-dimensionalen Unterräume findet und den Satz von E. Witt oder eine elementare Konstruktion angepasster pseudo-orthonormierter Basen anwendet, zeigt man, dass die Gleichheit der Invarianten $|I|(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{Y}_1) = |I|(\boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{Y}_2)$ auch hinreichend für die G_n-Kongruenz der Paare ist. Speziell gilt also, dass zwei randparallele Paare stets G_n-kongruent sind, während zwei parallele Hyperebenen wie in der euklidischen Geometrie eine Invariante besitzen. □

Übung 7. a) Man gebe für jeden der in Beispiel 4 genannten Fälle und jedes $n > 0$ Paare hyperbolischer Hyperebenen an, welche die entsprechenden Bedingungen erfüllen. – b) Man führe die im letzten Absatz von Beispiel 4 angedeuteten elementaren Konstruktionen aus. – c) Man zeige durch Anpassung der Repéres, dass zwei Paare randparalleler Hyperebenen (Fall 2 von Beispiel 4) stets G_n-kongruent sind.

Beispiel 5. Es seien zwei hyperbolische Halbgeraden $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ gegeben, die von ihrem Schnittpunkt $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{H}^n$ ausgehen. Nach Gleichung (12) seien diese Halbgeraden im Modell H_+^n durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(t) &= \mathfrak{a}\cosh(t) + \mathfrak{b}_1 \sinh(t),\ t > 0, \\ \mathfrak{c}(s) &= \mathfrak{a}\cosh(s) + \mathfrak{c}_1 \sinh(s),\ s > 0, \end{aligned}$$

gegeben, dabei gelten

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}(t), \mathfrak{c}(s) \in H_+^n, \langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_1 \rangle = \langle \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_1 \rangle = 1, \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1 \rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c}_1 \rangle = 0.$$

Weil $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ zu dem zeitartigen Einheitsvektor $\mathfrak{a}$ orthogonal sind, spannen sie einen euklidischen Unterraum auf; sie sind überdies wegen der Bijektivität der Gleichung (8) eindeutig bestimmte raumartige Einheitsvektoren. Unter dem *Winkel der Halbgeraden* mit dem Schnittpunkt $\boldsymbol{a}$ verstehen wir die durch

$$\cos\alpha = \langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1 \rangle, 0 \leq \alpha \leq \pi,$$

eindeutig bestimmte Zahl. Wir zeigen, dass diese Definition mit der in Beispiel 4, Fall 1, gegebenen verträglich ist. Dazu betrachten wir die von $\boldsymbol{a}$ und den beiden Halbgeraden aufgespannte hyperbolische Ebene. Ihr entspricht der von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ aufgespannte pseudoeuklidische Unterraum $\boldsymbol{W}^3$, den wir uns orientiert denken, so dass in ihm ein Vektorprodukt definiert ist. Aus den Orthogonalitätsbeziehungen folgt, dass $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}_1$ normierte raumartige Einheitsvektoren sind, welche die Pole der durch die angegebenen Parameterdarstellungen orientierten Geraden $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ repräsentieren. Nach der Formel (2.37), in der

$$a = \det(\langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j \rangle) = -1$$

zu setzen ist, erhalten wir

$$I(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \langle \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a} \times \mathfrak{c}_1 \rangle = -\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle \langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1 \rangle = \langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1 \rangle;$$

denn es gilt nach Konstruktion $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b}_1 \rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{c}_1 \rangle = 0$. □

Beispiel 6. Wir wollen nun noch die Konformität des sphärischen und damit auch des Kleinschen und des Poincaréschen Modells des hyperbolischen Raums beweisen. Da ein rein auf der linearen Algebra beruhender Beweis einerseits recht umständlich wäre und andererseits nur spezielle Resultate ergäbe, benutzen wir hier differentialgeometrische Hilfsmittel. Wir betrachten die durch (7) und $x^0 > 0$ definierte obere Schale H_+ des

$\boldsymbol{H}^n$ darstellenden Hyperboloids mit den Koordinaten x^i, $i = 1, \ldots, n$, als Parameter. Die Parameterdarstellung dieser Hyperfläche ist dann

$$\mathfrak{x} : (x^i) \in D^n \longmapsto \mathfrak{x}(x^i) := (\sqrt{1 + \sum_1^n (x^i)^2}, x^1, \ldots, x^n) \in H_+,$$

wobei wir die aus (7) folgende Gleichung

$$x^0 = \sqrt{1 + \sum_1^n (x^i)^2}$$

einsetzten. Die durch das Differential $d\mathfrak{x}$ aus dem pseudo-euklidischen Skalarprodukt in den Tangentialräumen von H_+ induzierte Metrik ist dann wegen

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = -1, \ \langle \mathfrak{x}, d\mathfrak{x} \rangle = 0$$

positiv definit; die durch sie bestimmte Riemannsche Metrik wird durch das G_n-invariante Bogenelement

$$\langle d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x} \rangle = \frac{1}{(x^0)^2}((x^0)^2 \sum_1^n (dx^j)^2 - (\sum_1^n x^j dx^j)^2)$$

beschrieben. So erhält man für den Winkel der in Beispiel 5 betrachteten Geraden in diesem Bogenelement wegen

$$\frac{d\mathfrak{b}}{dt} = \mathfrak{a} \sinh t + \mathfrak{b}_1 \cosh t$$

und der entsprechenden Gleichung für die Ableitung von $\mathfrak{c}(s)$ in ihrem Schnittpunkt $\mathfrak{a}$, also für $s = t = 0$, die durch das Bogenelement ausgedrückte Gleichung

$$\langle \frac{d\mathfrak{b}}{dt}(0), \frac{d\mathfrak{c}}{ds}(0) \rangle = \langle \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1 \rangle = \cos \alpha,$$

wie schon dort berechnet. Wir betrachten nun das in Beispiel 3 beschriebene sphärische Modell S_+^n von H_+^n; führt man die der Konstruktion entsprechenden Rechnungen aus, so wird das Bild von $\mathfrak{x}(x^i)$ in dieser Parameterdarstellung gegeben durch

$$\mathfrak{x}_S(x^i) = \frac{1}{x^0}(1, x^1, \ldots, x^n), \ ((x^i) \in D^n).$$

Das Bogenelement der Hypersphäre $S^n \subset \boldsymbol{E}^{n+1}$ ist nun durch das euklidische Skalarprodukt $(,)$ zu berechnen. Differenziert man die letzte Gleichung und berechnet das Skalarprodukt, so folgt

$$(d\mathfrak{x}_S, d\mathfrak{x}_S) = \frac{1}{(x^0)^2} \langle d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x} \rangle,$$

und das bedeutet die Konformität der Abbildung $\mathfrak{x} \in H_+^n \longmapsto \mathfrak{x}_S \in S_+^n$. Weil nach Lemma 3 die stereographische Projektion ebenfalls konform ist, ergibt sich durch Verknüpfung der konformen Abbildungen unmittelbar: *Die Kleinschen und die Poincaréschen Modelle der hyperbolischen Räume sind winkeltreue Bilder der hyperbolischen Geometrie.*$\square$

Beispiel 7. Wir betrachten die *Polarkoordinaten* u, v der hyperbolischen Ebene; sie sind die Parameter der Darstellung

$$\mathfrak{x}(u,v) := \mathfrak{e}_0 \cosh u + (\mathfrak{e}_1 \sin v + \mathfrak{e}_2 \cos v) \sinh u$$

des pseudo-euklidischen Modells H^2_+. Die Abbildung 2.20 zeigt die Bilder der zueinander orthogonalen Koordinatenlinien im Poincaréschen Modell. Die kartesischen Koordinaten x, y bestimmen in dem euklidischen Modell ein im hyperbolischen Sinn nicht orthogonales, aus hyperbolischen Geraden bestehendes Netz; die Abbildungen 2.21 und 2.22 zeigen dieses Netz im Kleinschen bzw. Poincaréschen Modell. □

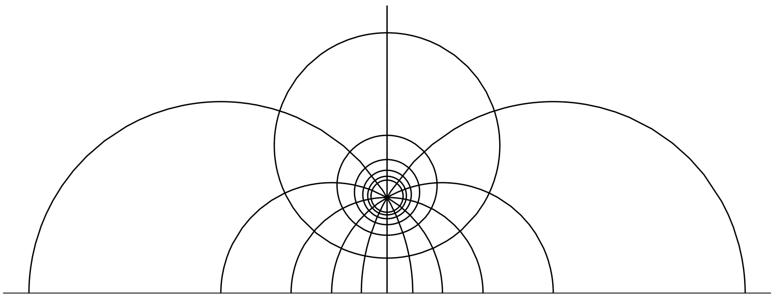

Abbildung 2.20: Polarkoordinaten im Poincaréschen Modell von $\boldsymbol{H}^2$.

2.6.3 Abstand und Winkel als Doppelverhältnisse

Im vorigen Abschnitt wurde bewiesen, dass der hyperbolische Raum *zweipunkthomogen* ist, das heißt, das es zu zwei Punktepaaren in $\boldsymbol{H}^n$ genau dann eine Transformation $g \in G_n$ gibt, die sie ineinander überführt, wenn sie denselben Abstand haben; allein der Abstand bestimmt sie bis auf Kongruenz. Andererseits ist zwei verschiedenen Punkten des hyperbolischen Raumes in natürlicher Weise eine projektive Invariante zugeordnet: Sind nämlich $\boldsymbol{x}_Q, \boldsymbol{y}_Q$ die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$ mit der Quadrik Q, so können wir das Doppelverhältnis (DV) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{x}_Q, \boldsymbol{y}_Q)$ bilden, das noch von der Reihenfolge der Punkte abhängt. Weil es generell eine projektive Invariante ist, ergibt sich die Frage nach dem Zusammenhang dieses DV mit dem Abstand der Punkte. Diese Frage wurde schon im Jahr 1859 von A. Cayley [26] sehr allgemein behandelt und später von F. Klein [46] wieder aufgenommen.

Satz 5. *Es seien $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ zwei Punkte des hyperbolischen Raumes $\boldsymbol{H}^n(r)$ und $\boldsymbol{x}_Q, \boldsymbol{y}_Q$ die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$ mit dem Absolut Q. Dann gilt für den Abstand der Punkte*

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{r}{2} |\ln(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{x}_Q, \boldsymbol{y}_Q)|. \tag{26}$$

B e w e i s. Bei einer Vertauschung von $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{y}$ oder $\boldsymbol{x}_Q$ mit $\boldsymbol{y}_Q$ ändert sich die rechte Seite von (26) nicht, da das DV dabei nach (1.4.7) in sein Inverses übergeht. Für den Beweis gehen wir zur komplexen Erweiterung des Vektorraums $\boldsymbol{V}^{n+1}$ und des Skalarprodukts $\langle , \rangle$ über und beweisen zuerst ein allgemeineres Lemma, das weitere Anwendungen gestattet.

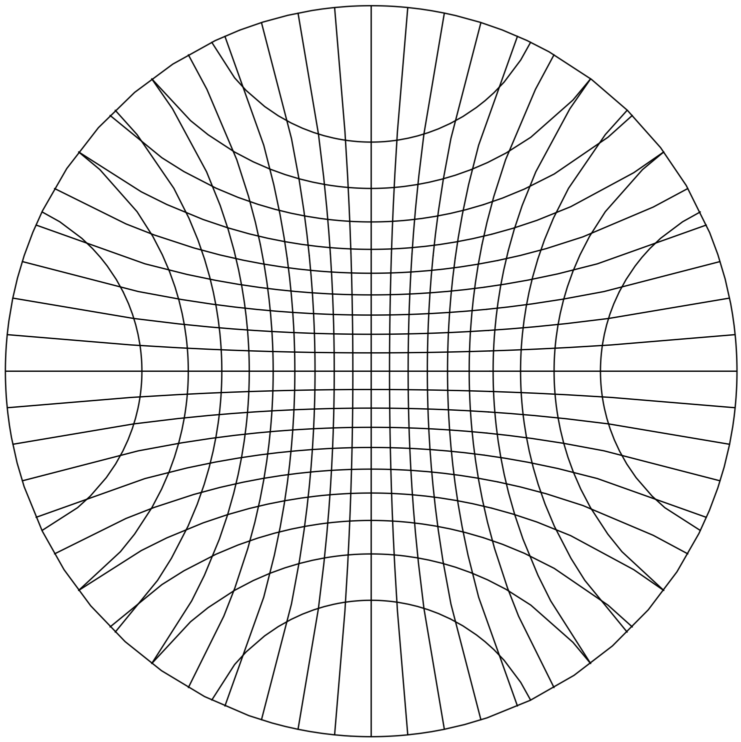

Abbildung 2.21: Kartesische Koordinatenlinien x, y im Kleinschen Modell von $\boldsymbol{H}^2$.

Lemma 6. *Es sei $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}}$ der komplex-orthogonale Raum mit der nicht ausgearteten Quadrik $Q_{\mathbf{C}}$ (Beispiel 3.2). Die Verbindungsgerade $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$ der zwei Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}} \setminus Q_{\mathbf{C}}$ sei eine Sekante mit den Schnittpunkten $\{\boldsymbol{x}_Q, \boldsymbol{y}_Q\} = (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \cap Q_{\mathbf{C}}$ (Beispiel 1.9.8). Dann ist die Invariante $Sq(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{C}$ nach (4.17) definiert; die Lösungsmenge der Gleichung*

$$Sq(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \cos^2 \varphi, \ \varphi \in \mathbf{C}, \tag{27}$$

ist dann $\Omega = \{\pm\varphi_0 + k\pi | \ k \in \mathbf{Z}\}$, wobei $\varphi_0 \in \mathbf{C}$ die durch (27) und die Bedingung $0 \le \mathrm{Re}(\varphi_0) < \pi$ bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmte Lösung ist. Die Zahl

$$k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := |\operatorname{Im}(\varphi)| \tag{28}$$

hängt nicht von der Wahl von $\varphi \in \Omega$ ab, und es gilt

$$k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2} |\ln |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{x}_Q, \boldsymbol{y}_Q)||. \tag{29}$$

Der Realteil von φ und das Argument α des DV *erfüllen*

$$\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \arg(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{x}_Q, \boldsymbol{y}_Q) = 2 \operatorname{Re}(\varphi) \bmod 2\pi. \tag{30}$$

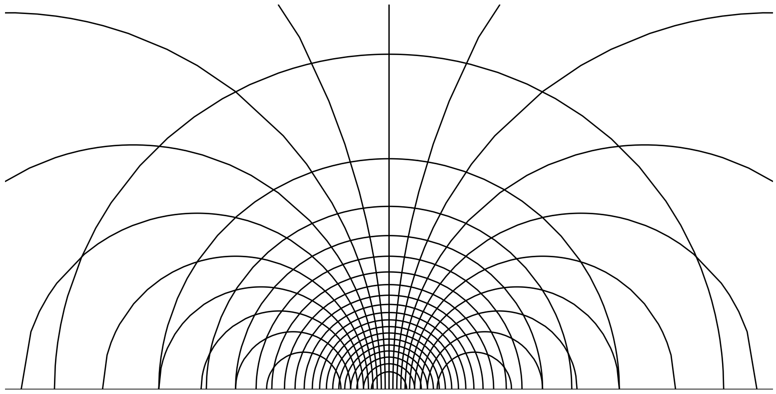

Abbildung 2.22: Kartesische Koordinatenlinien x, y im Poincaréschen Modell von $\boldsymbol{H}^2$.

B e w e i s. Die Lösungsmenge Ω und die sich auf (28) beziehende Aussage folgen aus den Eigenschaften der komplexen Funktion $\cos z$. Zum Beweis von (29) berechnen wir zuerst die Parameter der Schnittpunkte $\boldsymbol{x}_Q, \boldsymbol{y}_Q$ auf der Geraden $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$. Da $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ nicht zu $Q_{\mathbf{C}}$ gehören, finden wir normierte Vertreter $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}], \boldsymbol{y} = [\mathfrak{y}]$, $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle = 1$. Der Ansatz $\mathfrak{z}(t) := \mathfrak{x}t + \mathfrak{y} \in Q_{\mathbf{C}}$ führt auf die quadratische Gleichung $\langle \mathfrak{z}(t), \mathfrak{z}(t) \rangle = 0$, welche die Lösungen

$$t_{1,2} = -\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle \pm \sqrt{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle^2 - 1} \tag{31}$$

hat. Wir bemerken, dass hier $t_1 \neq t_2$ gilt. Wäre das nicht der Fall, so wäre $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = \pm 1$; die Gerade $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$ entspräche einem isotropen Vektorraum und wäre somit eine Tangente an $Q_{\mathbf{C}}$ mit dem durch $t_1 = t_2$ bestimmten Berührungspunkt. Aus der Formel (1.4.16) ergibt sich für das DV

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z}(t_1), \boldsymbol{z}(t_2)) = t_2/t_1. \tag{32}$$

Wählt man eine beliebige komplexe Lösung φ von $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = \cos\varphi$, setzt diese in (31) und das Ergebnis in (32) ein, so folgt nach einer leichten Rechnung

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \boldsymbol{x}_Q, \boldsymbol{y}_Q) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\varphi}. \tag{33}$$

Bei einer Vertauschung von $\boldsymbol{x}_Q, \boldsymbol{y}_Q$ geht das DV nach (1.4.7) in sein Inverses über, also φ in $-\varphi$. Daher ist φ nur bis auf das Vorzeichen durch $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bestimmt. Die trigonometrische Darstellung des DV in der Form $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$ und die Zerlegung

$$\varphi = \xi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \mathrm{i}\,\eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

von φ in Real- und Imaginärteil ergeben nach Einsetzen in (33) die Formeln (29) und (30) der Behauptung des Lemmas. □

Wir beenden nun den Beweis von Satz 5. Da es sich bei der Verbindungsgeraden $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} \subset \boldsymbol{H}^n$ um eine Sekante der reellen Quadrik Q handelt, sind die Lösungen t_1, t_2 (31) reell und voneinander verschieden, und daher gilt

$$\cos^2(\varphi) = Sq(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle^2 > 1$$

Daher ist $\varphi_0 = \mathrm{i}\,\psi$ rein imaginär, und nach (33) ist das DV positiv. Aus (33) folgt dann unter Berücksichtigung von (21), (28), (29) mit $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = r\,k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ die Behauptung von Satz 5. □

Wir kehren nun noch einmal zur elliptischen Geometrie zurück und denken uns den elliptischen Raum durch bilineare Ausdehnung des Skalarprodukts wieder zu dem komplex-orthogonalen projektiven Raum $\boldsymbol{P}^n_{\mathbf{C}}$ erweitert. Wegen $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ ist dann für die normierten Vertreter $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle^2 < 1$, und daher sind die Lösungen (31) konjugiert komplex. In der Gleichung (33) für das DV ist somit φ reell, und aus der Definition (5.16) (mit r=1) des Abstandes in der elliptischen Geometrie ergibt sich

Folgerung 7. *Für den Abstand zweier Punkte $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ des elliptischen Raumes mit dem Parameter r gilt*

$$e(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{r}{2}|\ln(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\boldsymbol{x}_Q,\boldsymbol{y}_Q)| = r|\varphi|. \tag{34}$$

Hierbei bezeichnen $\boldsymbol{x}_Q,\boldsymbol{y}_Q$ die Schnittpunkte der komplexen Erweiterung $(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y})_{\mathbf{C}}$ der Verbindungsgeraden mit dem Absolut $Q_{\mathbf{C}}$ der komplexen Erweiterung des elliptischen Raumes. Unter dem Logarithmus ist der Hauptwert des komplexen Logarithmus zu verstehen. □

Weil nach der Definition (5.20) der Winkel zwischen zwei elliptischen Hyperebenen auf den Abstand ihrer Pole zurückgeführt ist, gibt es eine entsprechende Formel auch für diesen. Die Dualität von Punkten und Hyperebenen, Geraden und Hyperebenenbüschel mit einer $(n-2)$-Ebene als Träger, autopolaren Punkten $\boldsymbol{x}_Q \in Q_{\mathbf{C}}$ und tangentiellen Hyperebenen ergibt

Folgerung 8. *Für den Winkel zweier Hyperebenen $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ des elliptischen Raumes gilt*

$$\angle(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{2}|\ln(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{X}_Q,\boldsymbol{Y}_Q)| = |\varphi|. \tag{35}$$

Hierbei bezeichnen $\boldsymbol{X}_Q,\boldsymbol{Y}_Q$ die Tangentialhyperebenen der komplexen Erweiterung des Hyperebenenbüschels mit dem Träger $(\boldsymbol{X}\wedge\boldsymbol{Y})_{\mathbf{C}}$ an das Absolut $Q_{\mathbf{C}}$ der komplexen Erweiterung des elliptischen Raumes. Unter dem Logarithmus ist der Hauptwert des komplexen Logarithmus zu verstehen. □

Beispiel 8. Folgerung 8 gilt entsprechend auch für den Winkel zweier sich schneidender Hyperebenen $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ des hyperbolischen Raumes; nach Beispiel 4, 1. Fall, spannen nämlich die Pole dieser Ebenen eine im Außengebiet der Quadrik liegende Gerade auf, deren komplexe Erweiterung die komplexe Quadrik $Q_{\mathbf{C}}$ wieder in zwei konjugiert komplexen Punkten schneidet, deren Polaren (komplexe) Tangentialhyperebenen an $Q_{\mathbf{C}}$ sind. Sind die beiden Hyperebenen parallel, aber nicht randparallel (Fall 3 von Beispiel 4) so liegt ihr Schnitt $\boldsymbol{X}\wedge\boldsymbol{Y}$ im Außengebiet $A(Q)$ der Quadrik; seine Polare $(\boldsymbol{X}\wedge\boldsymbol{Y})^\perp = \boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{X}^\perp, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}^\perp$ ist daher eine Sekante der Quadrik, wobei jetzt $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ äußere Punkte sind. Weil das DV wieder reell ist, muss der Winkel $\varphi = \mathrm{i}\,\psi, \psi \in \mathbf{R}$ in (33) rein imaginär sein. Daher ist das DV positiv und bestimmt durch

$$|\psi| = \frac{1}{2}|\ln(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{X}_Q,\boldsymbol{Y}_Q)| = \operatorname{arcosh}|I|(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \tag{36}$$

eine Art *Abstand* der parallelen hyperbolischen Hyperebenen. □

Beispiel 9. In der pseudo-orthonormierten Standardbasis betrachten wir die Vektoren $\mathfrak{n}(t) := \mathfrak{e}_0 \cos(t) + \mathfrak{e}_1 \sin(t)$. Die entsprechenden Punkte $\boldsymbol{n}(t) = [\mathfrak{n}(t)]$ schwingen auf der Strecke vom inneren Punkt $[\mathfrak{e}_0]$ zum äußeren Punkt $[\mathfrak{e}_1]$ der Quadrik Q hin und her. Für die zu ihnen polaren Hyperebenen $\boldsymbol{N}(t) = \boldsymbol{n}(t)^\perp$ gilt:

1. Für $0 \le t < \pi/4$ ist $\mathfrak{n}(t)$ zeitartig, also ist die Polare eine äußere Hyperebene; das auf ihren Vektorraum eingeschränkte Skalarprodukt ist positiv definit und bestimmt auf der entsprechenden projektiven Hyperebene eine elliptische Geometrie.

2. Für $\pi/4 < t < \pi/2$ ist $\mathfrak{n}(t)$ raumartig, also ist die Polare eine hyperbolische Hyperebene; das auf ihren Vektorraum eingeschränkte Skalarprodukt ist pseudo-orthogonal vom Index 1 und bestimmt auf der entsprechenden projektiven Hyperebene eine hyperbolische Geometrie.

3. Der Punkt $\boldsymbol{p} := \boldsymbol{n}(\pi/4)$ liegt auf der Quadrik Q, und seine Polare $\boldsymbol{T} := \boldsymbol{N}(\pi/4)$ ist die Tangentialhyperebene an Q in diesem Punkt. Die Polare wird aufgespannt nach
$$\boldsymbol{T} = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n] \text{ mit } \mathfrak{a}_1 := \mathfrak{e}_0 + \mathfrak{e}_1, \mathfrak{a}_i = \mathfrak{e}_i \text{ für } i = 2, \ldots, n.$$
Die auf dem zugehörigen n-dimensionalen Vektorraum $\boldsymbol{W}^n$ induzierte Bilinearform ist *positiv semidefinit* vom Rang $n-1$ und natürlich symmetrisch. Bezüglich der angegebenen Basis $(\mathfrak{a}_j), j = 1 \ldots, n$ hat sie die Koordinatendarstellung
$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle = x^2 y^2 + \ldots + x^n y^n.$$

Einige Eigenschaften der auf einer Tangentialhyperebene induzierten Geometrie werden in der nächsten Übung angegeben.□

Übung 8. Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Beispiel 9, 3. zeige man: a) Die Isotropiegruppe $G_{\boldsymbol{T}}$ von $\boldsymbol{T}$ unter der Wirkung von G_n stimmt mit der Untergruppe der projektiven Gruppe überein, welche die durch das Skalarprodukt $\langle , \rangle | \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{T}$ bestimmte polare Abbildung invariant lässt. – b) Der Berührungspunkt $\{\boldsymbol{p}\} = Q \cap \boldsymbol{T}$ ist Fixpunkt der Wirkung von $G_{\boldsymbol{T}}$, und $G_{\boldsymbol{T}}$ wirkt transitiv auf dem Komplement $\boldsymbol{T} \setminus \{\boldsymbol{p}\}$. – c) Die Gruppe $G_{\boldsymbol{T}}$ wirkt transitiv auf dem Bündel
$$\tau_k(\boldsymbol{p}) := \{\boldsymbol{B}^k \subset \boldsymbol{T} | \, \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{B}^k\}$$
und auf der Menge
$$M_k(\boldsymbol{p}) := \{\boldsymbol{B}^k \subset \boldsymbol{T} | \, \boldsymbol{p} \notin \boldsymbol{B}^k\}$$
der $\boldsymbol{p}$ nicht enthaltenden k-Ebenen. – d) Es seien $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ zwei von $\boldsymbol{p}$ verschiedene Punkte von $\boldsymbol{T}$. Dann ist ihre Invariante $\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ nach (4.17) wohl definiert; zwei derartige Punktepaare stnd genau dann $G_{\boldsymbol{T}}$-kongruent, wenn diese ihre Invarianten übereinstimmen. Die Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ liegen genau dann auf einer Geraden durch $\boldsymbol{p}$, wenn $\mathrm{Sq}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$ gilt. – Die in dieser Übung behandelte Geometrie ist ein elementares Beispiel einer *isotropen Geometrie*. Die isotrope Geometrie wurde von Karl Strubecker vielfach bearbeitet und angewandt. Ein vollständiges Schriftenverzeichnis und eine Würdigung seiner Arbeiten findet man in dem Nachruf von K. Leichtweiß [57].

Beispiel 10. Wir wollen noch zeigen, wie sich die euklidische Geometrie in das hier betrachtete Schema einordnen lässt. Dazu beginnen wir mit der elliptischen Geometrie, betrachten also einen reellen Vektorraum $\boldsymbol{V}^{n+1}$ mit dem positiv definiten Skalarprodukt $\langle , \rangle$, der orthonormierten Standardbasis $(\mathfrak{e}_j), j = 0, \ldots, n$, und den zugehörigen elliptischen

Raum $\boldsymbol{P}^n$. Es bezeichne $\boldsymbol{W}^n := [\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n]$ den von den letzten n Basisvektoren aufgespannten Unterraum und $\mathfrak{x}_o \in \boldsymbol{W}^n$ die orthogonale Projektion von $\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_0 x^0 + \mathfrak{x}_o \in \boldsymbol{V}^{n+1}$ auf diesen Unterraum. Wir definieren nun das vom Parameter $t \in \mathbf{R}$ abhängende Skalarprodukt über $\boldsymbol{V}$:

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y} \rangle_t := -(x^0 y^0 \cos t + \langle \mathfrak{x}_o, \mathfrak{y}_o \rangle \sin t). \tag{37}$$

Die zugehörige Quadrik Q_t : $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle_t = 0$ ist für $0 < t < \pi/2$ imaginär; die Geometrie also elliptisch, und für $-\pi/2 < t < 0$ ein reelles Ellipsoid, in dessen Innengebiet wir ein Modell der hyperbolischen Geometrie haben. Für $t = 0$ entartet die Quadrik in die „doppeltzählende Hyperebene" $(x^0)^2 = 0$ mit dem Vektorraum $\boldsymbol{W}^n$. Wir wählen diese als unendlich ferne (uneigentliche) Hyperebene eines affinen Raums $\boldsymbol{A}^n \subset \boldsymbol{P}^n$. Da sich beim Grenzübergang $t \to 0, t > 0$, für die Punkte dieser Hyperebene der Faktor $\sin t$ wegkürzt, hängt die Invariante

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathfrak{x}_o, \mathfrak{y}_o \rangle_t}{\sqrt{\langle \mathfrak{x}_o, \mathfrak{x}_o \rangle_t \langle \mathfrak{y}_o, \mathfrak{y}_o \rangle_t}}$$

in Wirklichkeit nicht von t ab und definiert wie üblich den Winkel φ zwischen den Vektoren; die uneigentliche Hyperebene trägt damit die Struktur einer elliptischen Geometrie. Deren Gruppe ist die auf $\boldsymbol{W}^n$ wirkende orthogonale Gruppe $\boldsymbol{O}(n)$, und diese lässt den für die eigentlichen Punkte wie üblich definierten Abstand invariant: Betrachten wir für sie die durch $x^0 = y^0 = 1$ normierten Vertreter $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}^{n+1}$, so gilt $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} \in \boldsymbol{W}^n$, und $\boldsymbol{O}(n)$ und die Gruppe der Translationen lassen in der Tat

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \sqrt{\langle \mathfrak{x} - \mathfrak{y}, \mathfrak{x} - \mathfrak{y} \rangle}$$

invariant; wir haben damit das analytische Modell der euklidischen Geometrie, die in diesem Zusammenhang wegen der Grenzlage zwischen hyperbolischer und elliptischer Geometrie auch *parabolische Geometrie* genannt wird. Nach O. Giering [35] besteht das Absolut des euklidischen Raumes aus der ausgearteten Quadrik $(x^0)^2 = 0$ und einer in ihrem Scheitelraum (ihrer „Spitze") gegebenen nullteiligen Quadrik $Q_{\mathbf{C}}$, die also in dem komplexen, zur komplexen Erweiterung $\boldsymbol{W}^n_{\mathbf{C}}$ gehörendem projektiven Raum liegt. Indem er gleichzeitig reelle projektive Räume und ihre komplexen Erweiterungen betrachtet, verallgemeinert er dieses Schema weitgehend zu einem Begriff *Cayley-Kleinscher Geometrien*, die er in niedrigen Dimensionen klassifiziert, wobei er sich auf die Klassifikation der reellen und komplexen Polaritäten stützt.□

2.6.4 Hyperbolischer Kosinussatz und hyperbolische Metrik

Es seien $A, B, C \in \boldsymbol{H}^n$ drei hyperbolische Punkte in allgemeiner Lage. Für die Trigonometrie können wir wieder annehmen, dass $n = 2$ ist. Die von der Ecke A ausgehenden Seiten des Dreiecks stellen wir wie in Beispiel 5 dar, wobei wir das pseudo-orthonormierte 3-Bein geeignet anpassen: Es seien

$$A = [\mathfrak{a}] = [\mathfrak{e}_0], \tag{38}$$

$$B = [\mathfrak{b}] = [\mathfrak{e}_0 \cosh c + \mathfrak{e}_1 \sinh c], \tag{39}$$

$$C = [\mathfrak{c}] = [\mathfrak{e}_0 \cosh b + \mathfrak{d}_1 \sinh b], \tag{40}$$

$$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{e}_1 \cos \alpha + \mathfrak{e}_2 \sin \alpha. \tag{41}$$

Die Gleichung (41) ergibt sich daraus, dass $\mathfrak{d}_1$ zu $\mathfrak{e}_0$ orthogonal ist; nach Beispiel 5 ist $\alpha, 0 < \alpha < \pi$, aus $\cos\alpha = \langle \mathfrak{e}_1, \mathfrak{d}_1 \rangle$, der Winkel des Dreiecks an der Ecke A, und $\mathfrak{e}_2$ ist durch (41), allgemeiner, das 3-Bein durch das Dreieck nach (38)-(41), eindeutig bestimmt. Die Zahlen b, c sind dabei nach (21) die Seitenlängen der wie üblich gleich bezeichneten Seiten des Dreiecks:

$$h(A,B) = c,\ h(A,C) = b,\ h(B,C) = a.$$

Man beachte, dass das Skalarprodukt von zwei Vektoren aus H_+^n stets negativ ist, genauer gilt

$$\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle < -1 \text{ für alle } \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in H_+^n,\ \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b} \tag{42}$$

wir können ja die orthonormierten Vektoren $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1$ stets so wählen, dass (38) und (39) für $A = [\mathfrak{a}], B = [\mathfrak{b}]$ gelten, woraus $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = -\cosh c < -1$ folgt. Nun lässt sich die Seitenlänge a leicht aus (21), (40) und (41) berechnen:

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle = -\cosh a = -\cosh c \cosh b + \langle \mathfrak{e}_1, \mathfrak{d}_1 \rangle \sinh c \sinh b,$$

und aus (41) folgt der *hyperbolische Kosinussatz*

Satz 9. *Mit den in der Elementargeometrie für ein Dreieck üblichen Bezeichnungen gilt in der hyperbolischen Ebene vom Radius $r = 1$ für die Seitenlänge a der der Ecke A gegenüberliegenden Seite*

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos\alpha.\ \square \tag{43}$$

Übung 9. Man beweise, dass die Formel (43) auch für ausgeartete Dreiecke ($\alpha = 0, \pi$) gültig ist.

Folgerung 10. *Für drei Punkte $A, B, C \in \boldsymbol{H}^n$ gilt stets die Dreiecksungleichung des hyperbolischen Abstandes*

$$h(B,C) \leq h(B,A) + h(A,C); \tag{44}$$

das Gleichheitszeichen gilt in (44) genau dann, wenn A auf der hyperbolischen Geraden $B \vee C$ zwischen[5] *B und C liegt. Nach (22) ist also h eine G_n-invariante Metrik auf $\boldsymbol{H}^n$. Die Isometriegruppe dieser Metrik ist die Gruppe G_n.*

Beweis. Wegen $-\cos\alpha \leq 1$ erhält man aus (43) und dem Additionstheorem des cosh sofort

$$\cosh a \leq \cosh(b+c);\ \cosh a = \cosh(b+c) \Longleftrightarrow \alpha = \pi.$$

Die letzte Bedingung bedeutet aber gerade die in der Folgerung angegebene Lage der Punkte. Wir beweisen die letzte Behauptung. Ist g eine projektive Transformation, welche die Metrik invariant lässt, so muss eine sie erzeugende lineare Abbildung konform pseudo-orthogonal sein; nach Definition von G_n können wir annehmen, dass diese lineare Transformation in G_n liegt. Zum Beweis dafür, dass jede Isometrie von $\boldsymbol{H}^n$ durch eine

[5]Wir haben darauf verzichtet, die Zwischenrelation begrifflich zu fassen. Sie ist stets auf Kurvendarstellungen mit einem reellen Parameter t (in diesem Fall (12)) im Sinne der durch t übertragenen Ordnung von $\mathbf{R}$ zu verstehen.

Abbildung $g \in G_n$ erzeugt wird, führen wir folgendermaßen ein orthogonales Koordinatensimplex ein: Es seien

$$\mathfrak{a}_0 := \mathfrak{e}_0, \mathfrak{a}_i := \mathfrak{e}_0\sqrt{2} + \mathfrak{e}_i \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Offenbar sind die von $\boldsymbol{a}_0 = [\mathfrak{a}_0]$ ausgehenden Kanten des Simplex paarweise orthogonal, die $\mathfrak{a}_i$ sind normierte Vertreter seiner Ecken $\boldsymbol{a}_i = [\mathfrak{a}_i] \in \boldsymbol{H}^n$, und die Abstände der Ecken lassen sich nach (21) aus

$$\langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_i \rangle = -\sqrt{2} \text{ für } i > 0, \ \langle \mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j \rangle = -2 \text{ für } i, j > 0, i \neq j,$$

berechnen. Sind umgekehrt $\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ $n+1$ Punkte, deren normierte Vertreter $\mathfrak{a}_i$ diese Gleichungen erfüllen, so wird durch

$$\mathfrak{e}_0 := \mathfrak{a}_0; \ \mathfrak{e}_i := \mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_0\sqrt{2} \text{ für } i = 1, \ldots, n,$$

ein pseudo-orthonormiertes Repère $(\mathfrak{e}_i)$, $i = 0, \ldots, n$, eindeutig bestimmt. Wir nennen derartige Punktfolgen *orthogonale Koordinatensimplexe* und schließen: *Zu je zwei orthogonalen Koordinatensimplexen $(\boldsymbol{a}_i)$, $(\boldsymbol{b}_i)$ gibt es genau eine Transformation $g \in G_n$, welche sie nach $g(\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{b}_i$ ineinander überführt; sie wird durch die Zuordnung der den Punktfolgen entsprechenden pseudo-orthonormierten Basen bestimmt.* Es sei nun $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{H}^n$ ein beliebiger Punkt; mit ξ^i bezeichnen wir die Koordinaten seines normierten Vertreters bezüglich der Basis $(\mathfrak{a}_i)$. Dann gilt für die Abstände $h_i := h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i)$:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a}_0 \rangle &= -\cosh h_0 = & -\xi^0 - \sqrt{2}\sum_{i=1}^{n} \xi^i \\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{a}_j \rangle &= -\cosh h_j = & -\sqrt{2}\xi^0 - \xi^j - 2 \sum_{i=1, i\neq j}^{n} \xi^i. \end{aligned}$$

Die Determinante der Matrix dieses Gleichungssystem ist gleich -1. Folglich sind die Koordinaten (ξ^i) umkehrbar eindeutig durch die Abstände (h_i) ausdrückbar. Es sei nun $f : \boldsymbol{H}^n \to \boldsymbol{H}^n$ eine beliebige Isometrie. Dann ist $(\boldsymbol{b}_i) := (f(\boldsymbol{a}_i))$ ebenfalls ein orthogonales Koordinatensimplex. Es bezeichne $g \in G_n$ die entsprechende Abbildung, die natürlich eine Isometrie ist. Daher gilt für die Abstände von

$$h(g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{b}_i) = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_i) = h(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{b}_i).$$

Da die Abstände von $f(\boldsymbol{x})$ und $g(\boldsymbol{x})$ zu den Ecken $\boldsymbol{b}_i$ des orthogonalen Koordinatensimplex übereinstimmem, muss das auch für die Koordinaten dieser Punkte gelten, und es folgt $f = g \in G_n$. □

Zu je zwei hyperbolischen Punkten $A \neq B, A, B \in \boldsymbol{H}^n$ gibt es genau eine hyperbolische Verbindungsgerade $A \vee B \cap I(Q)$ und auf ihr (mit den Bezeichnungen (38), (39)) die eindeutig bestimmte Verbindungsstrecke mit der Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{e}_0 \cosh t + \mathfrak{e}_1 \sinh t, \ 0 \leq t \leq c = h(A, B). \tag{45}$$

Für $t \to \pm\infty$ strebt der Punkt der Geraden gegen ihre Schnittpunkte mit der Quadrik Q, die also in der hyperbolischen Geometrie als das „Unendliche“ des hyperbolischen

Raumes anzusehen ist. Aus der Dreiecksungleichung folgt wieder, dass die Verbindungsstrecke die hier eindeutig bestimmte kürzeste Verbindung der beiden Punkte ist. In der hyperbolischen Geometrie ist also der Schnittort jedes Punktes leer. Im folgenden Satz finden wir den Abstand zwischen einem Punkt und einer k-Ebene und erhalten den aus der euklidischen Geometrie bekannten Begriff des *Lotes*.

Satz 11. *Es seien $\boldsymbol{A}^k \subset \boldsymbol{H}^n, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{H}^n$ eine k-Ebene und ein Punkt des hyperbolischen Raumes. Dann gibt es genau einen Punkt $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}^k$, für den*

$$h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \min\{h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) |\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}^k\}$$

gilt. Ist $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}^k$, so ist jede Gerade $\boldsymbol{c} \subset \boldsymbol{A}^k$ durch den Punkt $\boldsymbol{b}$ orthogonal zu $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$.

Beweis. Die pseudo-orthonormierte Basis $(\mathfrak{e}_i)$ des Vektorraums $\boldsymbol{V}^{n+1}$ sei so gewählt, dass der die k-Ebene $\boldsymbol{A}^k$ bestimmende Unterraum $\boldsymbol{W}^{k+1}$ von den Vektoren $\mathfrak{e}_0, \ldots, \mathfrak{e}_k$ aufgespannt wird (Transitivität von G_n auf der Menge der hyperbolischen k-Ebenen). Den Repräsentanten $\mathfrak{a} \in H^n_+$ des Punktes $\boldsymbol{a}$ zerlegen wir in seine orthogonalen Komponenten

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_0 \in \boldsymbol{W}, \mathfrak{a}_1 \in \boldsymbol{W}^\perp.$$

Wegen $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle = -1$ finden wir ein eindeutig bestimmte Zahl $c \geq 0$, die $\langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0 \rangle = -\cosh^2 c$ erfüllt; der Vektor $\mathfrak{b} := \mathfrak{a}_0 / \cosh c \in H^n_+$ ist der normierte Repräsentant des Punktes $\boldsymbol{b} = [\mathfrak{a}_0] \in \boldsymbol{A}^k$. Wir zeigen, dass der Punkt $\boldsymbol{b}$ die Behauptung des Satzes erfüllt. In der Tat gilt für $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{A}^k, \mathfrak{x} \in H^n_+$, nach (21) und (42)

$$\cosh h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = -\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{x} \rangle = -\langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{x} \rangle = -\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{x} \rangle \cosh c = \cosh h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) \cosh c \geq \cosh c;$$

Das Gleichheitszeichen tritt genau dann ein, wenn $\cosh h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = 1$, also $h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) = 0$ und somit $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist (vgl. (22)). Andererseits ist

$$\cosh h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \rangle = -\langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{b} \rangle = \cosh c,$$

woraus die erste Behauptung folgt. Zum Beweis der zweiten Behauptung können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\boldsymbol{b} = [\mathfrak{e}_0]$ gilt. Zur Berechnung des Winkels bestimmen wir den Vektor $\mathfrak{d}_1$ eindeutig aus

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{e}_0 \cosh c + \mathfrak{d}_1 \sinh c, \boldsymbol{a} = [\mathfrak{a}],\ \langle \mathfrak{e}_0, \mathfrak{d}_1 \rangle = 0,\ \langle \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_1 \rangle = 1,\ c > 0.$$

Der Fall $c = h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ tritt nur für $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}^k$ ein, und da ist nichts zu beweisen. Eine beliebige Gerade durch $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}^k$ hat die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{e}_0 \cosh(t) + \mathfrak{x}_1 \sinh(t) \text{ mit } \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})), \langle \mathfrak{e}_0, \mathfrak{x}_1 \rangle = 0, \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_1 \rangle = 1.$$

Nach Beispiel 5 gilt dann für den Winkel $\cos\alpha = \langle \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x}_1 \rangle$. Der Abstand $h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}(t))$ wird nach (21) bestimmt durch

$$\begin{aligned} f(t) &:= \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{x}(t) \rangle \\ &= \langle \mathfrak{e}_0 \cosh c + \mathfrak{d}_1 \sinh c, \mathfrak{e}_0 \cosh(t) + \mathfrak{x}_1 \sinh t \rangle \\ &= -\cosh c \cosh t + \langle \mathfrak{d}_1, \mathfrak{x}_1 \rangle \sinh c \sinh t \\ &= -\cosh c \cosh t + \cos\alpha \sinh c \sinh t. \end{aligned}$$

Diese Funktion muss an der Stelle $t = 0$ stationär sein, und daraus folgt wegen

$$f'|_{t=0} = \cos\alpha \sinh c = 0$$

und $c > 0$ unmittelbar $\alpha = \pi/2$.□

Wie in metrischen Räumen üblich nennen wir die Zahl $h(\boldsymbol{A}^k, \boldsymbol{a}) := h(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ den *Abstand von $\boldsymbol{a}$ zur k-Ebene $\boldsymbol{A}^k$*, die Strecke von $\boldsymbol{a}$ nach $\boldsymbol{b}$ das *Lot* von $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}^k$ auf $\boldsymbol{A}^k$ und $\boldsymbol{b}$ den *Fußpunkt* des Lotes. Mit Hilfe geeigneter Basisanpassung zeigt man leicht

Folgerung 12. *Zwei Paare $(\boldsymbol{A}^k, \boldsymbol{a})$, $(\boldsymbol{B}^k, \boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{A}^k, \boldsymbol{B}^k$ hyperbolische k-Ebenen, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{H}^n$, sind genau dann G_n-kongruent, wenn für die Abstände $h(\boldsymbol{A}^k, \boldsymbol{a}) = h(\boldsymbol{B}^k, \boldsymbol{b})$ gilt.* □

Übung 10. In der hyperbolischen Ebene sei eine Gerade $\boldsymbol{A}^1$ gegeben. Man beweise, dass die Menge

$$M(\boldsymbol{A}^1, c) := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{H}^2 |\ h(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{x}) = c\}, \quad (c > 0),$$

in zwei G_n-kongruente Bögen zerfällt, welche die Gerade $\boldsymbol{A}^1$ in ihren unendlich fernen Punkten $\boldsymbol{A}^1 \cap Q$ treffen. Diese Bögen sind im Unterschied zur euklidischen Geometrie keine Geraden (vgl. Abbildung 2.23). Sie heißen die *Äquidistanten zur Geraden $\boldsymbol{A}^1$*. Man finde Parameterdarstellungen dieser Bögen. Wie sehen die genau so definierten Äquidistanten in der sphärischen und der elliptischen Geometrie aus? Nach Übung 5.23 ist die ϵ-Umgebung der Geraden $\boldsymbol{A}^1$ der elliptischen Ebene $\boldsymbol{P}^2(r)$:

$$U(\boldsymbol{A}^1, \epsilon) := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^2(r) |\ e(\boldsymbol{A}^1, x) < \epsilon\}, \quad (0 < \epsilon < r\pi/2),$$

ein Möbius-Band.

Übung 11. Es seien $\boldsymbol{A}^k$ eine hyperbolische k-Ebene, $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}^k, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}^k$ zwei Punkte derart, dass die Gerade $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$ zu jeder Geraden $\boldsymbol{B}^1 \subset \boldsymbol{A}^k$ mit $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}^1$ orthogonal ist. Man zeige: Die Strecke von $\boldsymbol{a}$ nach $\boldsymbol{b}$ ist das Lot von $\boldsymbol{a}$ auf $\boldsymbol{A}^k$.

Übung 12. Man beweise: a) Zu zwei Geraden $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$ der hyperbolischen Ebene $\boldsymbol{H}^2$ existiert genau dann eine zu beiden orthogonale Gerade $\boldsymbol{C}$, wenn sie parallel (und nicht randparallel) sind. (Hinweis. Man wende die Winkeldefinition aus Beispiel 4.1 an und betrachte die Polare des im Außengebiet $A(Q)$ liegenden Schnittpunktes $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$.) – b) Die *gemeinsame Senkrechte $\boldsymbol{C}$* zweier paralleler Geraden ist eindeutig bestimmt. – c) Sind $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{C}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C}$ die Schnittpunkte der Geraden mit der gemeinsamen Senkrechten, so nennt man $h(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) := h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ den *Abstand der parallelen Geraden $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$*. Man beweise, dass dies auch ihr metrischer Abstand ist:

$$h(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \min\{h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) |\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}\}.$$

d) Zwei Paare paralleler Geraden $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}), (\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_1)$ sind genau dann G_n-kongruent, wenn sie denselben Abstand haben. – e) Es gilt $h(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = |I|(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ (siehe Bsp. 4).

Übung 13. Allgemeiner als Satz 11 beweise man: Es sei $\boldsymbol{V}^{n+1}$ ein beliebiger Vektorraum mit Skalarprodukt, $\boldsymbol{P}^n$ der zugehörige projektive Raum und F die durch das Skalarprodukt bestimmte Autokorrelation. Ist $\boldsymbol{A}^k$ ein nicht isotroper Unterraum, so gibt es zu jedem Punkt $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{A}^k \cup F(\boldsymbol{A}^k)$ eindeutig bestimmte Punkte $\boldsymbol{b}_0 \in \boldsymbol{A}^k, \boldsymbol{b}_1 \in F(\boldsymbol{A}^k)$ derart, dass die Gerade $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}_0$ (bzw. $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}_1$) zu $\boldsymbol{A}^k$ (bzw. zu $F(\boldsymbol{A}^k)$) in dem in Satz 11 beschriebenen Sinn orthogonal ist. (Hinweis. Ist $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ der zu $\boldsymbol{A}^k$ gehörende Unterraum, so betrachte man die Zerlegung eines Repräsentanten $\mathfrak{a}$ von $\boldsymbol{a}$ in seine orthogonalen Komponenten $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_0 + \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_0 \in \boldsymbol{W}, \mathfrak{b}_1 \in \boldsymbol{W}^{\perp}$.)

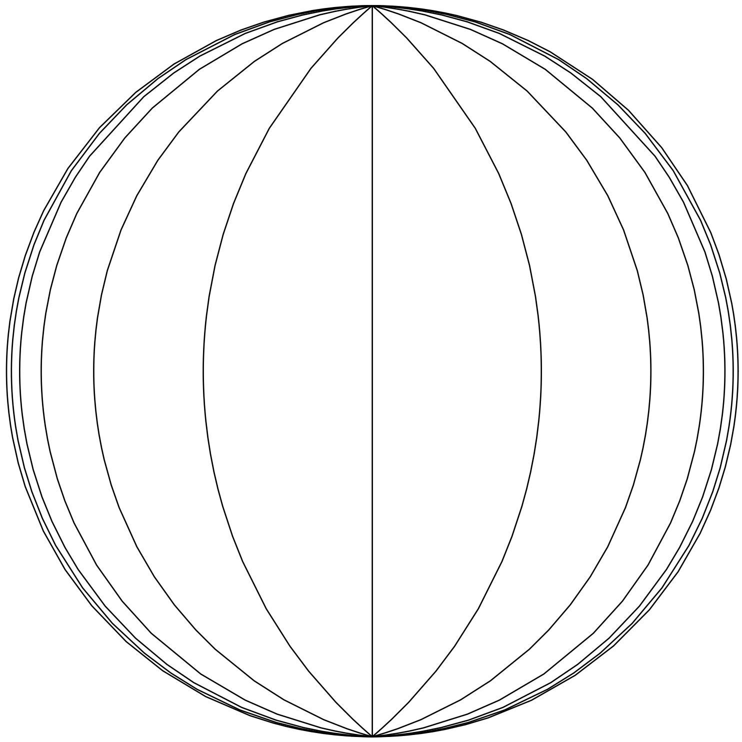

Abbildung 2.23: Äquidistanten einer Geraden im Kleinschen Modell.

Übung 14. Aus Übung 13 folgere man: Sind in der hyperbolischen Geometrie $\boldsymbol{a} \in Q$ und $\boldsymbol{A}^k \subset \boldsymbol{H}^n$ eine hyperbolische k-Ebene, so gibt es genau eine Punkt $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}^k$, so dass die Gerade $\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{b}$ in dem in Satz 11 beschriebenen Sinn zu $\boldsymbol{A}^k$ orthogonal ist.

Übung 15. Man beweise: In der hyperbolischen Ebene $\boldsymbol{H}^2$ gibt es zu zwei Geraden $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$ stets genau eine *Symmetrieachse* $\boldsymbol{S}$, das ist eine hyperbolische Gerade, für die eine Isometrie $g \in G_2$ existiert, welche folgende Bedingungen erfüllt:

$$g(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}, g(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{s} \text{ für alle } \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{S}, g^2 = \mathrm{id}_{\boldsymbol{H}^2}\,.$$

2.6.5 Hyperbolische Trigonometrie

In diesem Abschnitt betrachten wir wieder Dreiecke der hyperbolischen Ebene und verwenden die traditionellen Bezeichnungen. Mit Hilfe der schon beim Beweis des Kosinussatzes (Satz 9) an das Dreieck angepassten Basis $(\mathfrak{e}_i), i = 0, 1, 2,$, vgl. (38)–(41), beweist man leicht den *hyperbolischen Sinussatz*:

Satz 13. *Für die Seitenlängen a, b, c und die Winkel α, β, γ eines nicht ausgearteten Dreiecks A, B, C der hyperbolischen Ebene $\boldsymbol{H}^2$ gilt*

$$\frac{\sin\alpha}{\sinh a} = \frac{\sin\beta}{\sinh b} = \frac{\sin\gamma}{\sinh c}. \tag{46}$$

Beweis. Unter Verwendung der Gleichungen (38)–(41) erhält man für das Volumen des von den Repräsentanten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ aufgespannten Quaders

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}] = \sin\alpha \sinh b \sinh c = \sin\beta \sinh a \sinh c = \sin\gamma \sinh a \sinh b,$$

wobei sich die letzten beiden Gleichung durch Reihumvertauschung der Ecken A, B, C des Dreiecks ergeben. Durch Division mit $\sinh a \sinh b \sinh c$ folgt die Behauptung. □

Übung 16. Es sei (A, B, C) ein rechtwinkliges Dreieck in der hyperbolischen Ebene mit dem Winkel $\gamma = \pi/2$. Man beweise:

$$\sin\alpha = \frac{\sinh a}{\sinh c}, \ \cosh a = \frac{\cosh c}{\cosh b}, \ \cos\alpha = \frac{\tanh b}{\tanh c}. \tag{47}$$

Der zum Kosinussatz duale *hyperbolische Winkelkosinussatz* lässt sich nicht so einfach wie in der elliptischen Geometrie durch Berufung auf die Dualität beweisen. Die projektive Dualität ist ja in der hyperbolischen Geometrie gestört, da die Polare eines hyperbolischen Punktes eine äußere Gerade, also etwas nicht hyperbolisches, ist; das hyperbolische Objekt einer äußeren Geraden ist das Büschel der Geraden durch ihren Pol $(n = 2)$. Wir geben hier einen Beweis wieder, dem wir dem interessanten und recht klar geschriebenem Buch [60] von A. P. Norden[6] entnahmen.

Satz 14. *Mit den traditionellen Bezeichnungen gilt für ein nicht ausgeartetes Dreieck der hyperbolischen Ebene (Parameter $r = 1$) der* Winkelkosinussatz

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh a. \tag{48}$$

Beweis. Nach dem hyperbolischen Kosinussatz (43) ist auch

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos\gamma.$$

Ersetzen wir in (43) $\cosh c$ nach dieser Gleichung, so ergibt sich

$$\cosh a = \cosh^2 b \cosh a - \cosh b \sinh b \sinh a \cos\gamma - \sinh b \sinh c \cos\alpha.$$

Auf den letzten Term dieser Gleichung wenden wir den hyperbolischen Sinussatz an:

$$\sinh b \sinh c \cos\alpha = \sinh b \sinh a \sin\gamma \cot\alpha,$$

setzen das Ergebnis ein und erhalten nach einer einfachen Umformung

$$\cosh a \sinh^2 b = \sinh a \sinh b(\cosh b \cos\gamma + \cot\alpha \sin\gamma).$$

Division mit $\sinh a \sinh b$ führt auf

$$\coth a \sinh b = \cosh b \cos\gamma + \cot\alpha \sin\gamma.$$

[6] A. P. Norden hatte lange Jahre den Lehrstuhl für Geometrie an der Universität in Kasan inne, der Universität, an der N. I. Lobatschewski wirkte, der als erster (im Kasanschen Boten 1829) seine Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie veröffentlichte. Die Arbeit des ungarischen Mathematikers J. Bolyai erschien erst im Jahre 1832. C. F. Gauß hat sich über seine Gedanken zur nicht-euklidischen Geometrie nur brieflich geäußert. Es gilt als sicher, dass die nicht-euklidische Geometrie von diesen drei Geometern unabhängig voneinander entwickelt wurde.

Auf die linke Seite dieser Gleichung wenden wir wieder den hyperbolischen Sinussatz an:

$$\coth a \sinh b = \cosh a \sin\beta / \sin\alpha.$$

Einsetzen und Multiplikation mit $\sin\alpha$ ergibt

$$\cosh a \sin\beta = \cos\alpha \sin\gamma + \sin\alpha \cos\gamma \cosh b.$$

Ebenso gilt

$$\cosh b \sin\alpha = \cos\beta \sin\gamma + \sin\beta \cos\gamma \cosh a.$$

Setzen wir diese Gleichung in die vorletzte ein, so erhalten wir

$$\cosh a \sin\beta = \cos\alpha \sin\gamma + \cos\gamma \cos\beta \sin\gamma + \sin\beta(1 - \sin^2\gamma) \cosh a.$$

Eine einfache Rechnung führt nun auf (48). □

Übung 17. Man beweise: Zwei Dreiecke des hyperbolischen Raumes $\boldsymbol{H}^n$, die entsprechend gleiche Seitenlängen oder entsprechend gleiche Winkel haben, sind G_n-kongruent. Man formuliere und beweise weitere Kongruenzsätze.

Wir kommen nun zu einem wesentlichen Charakteristikum der hyperbolischen Geometrie, dass diese von der elliptischen und euklidischen unterscheidet. In der Differentialgeometrie wird gezeigt, dass diese Eigenschaft für Riemannsche Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung charakteristisch ist:

Satz 15. *Es seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte des hyperbolischen Raumes $\boldsymbol{H}^n$. Dann gilt für die Summe der Winkel des von ihnen aufgespannten Dreiecks*

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

B e w e i s. Offenbar können wir $n = 2$ annehmen. Wir betrachten zuerst ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel $\gamma = \pi/2$. Nach dem Winkelkosinussatz (48) gilt

$$\cos\beta = \sin\alpha \cosh b > 0, \text{ also } \beta < \pi/2.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta, \\ &= \sin\alpha(\cos\alpha \cosh b - \sin\beta), \\ &= \sin\alpha(\cos\alpha \cosh b - \sqrt{1 - \sin^2\alpha \cosh^2 b}). \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\sqrt{1 - \sin^2\alpha \cosh^2 b} < \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \cos\alpha,$$

und hieraus folgt

$$\cos(\alpha + \beta) > \sin\alpha(\cos\alpha(\cosh b - 1)) > 0,$$

also $\alpha + \beta < \pi/2$. Damit gilt die Behauptung für rechtwinklige Dreiecke. Es sei nun A, B, C nicht rechtwinklig. Dann kann der Fußpunkt D des Lotes von C auf die Gerade $A \vee B$ entweder zwischen A und B oder links von A oder rechts von B liegen. Im ersten

Fall wird das Dreieck A, B, C in zwei rechtwinklige A, D, C und D, B, C zerlegt, und sein Winkel γ ist die Summe der Winkel γ_1, γ_2 der rechtwinkligen Dreiecke an der Ecke C. Es folgt

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \gamma_1 + \beta + \gamma_2 < \pi.$$

Sei nun etwa D links von A gelegen. Das rechtwinklige Dreieck D, A, C hat dann die Winkel $\pi/2, \pi - \alpha, \gamma_1$, und aus $\pi - \alpha < \pi/2$ folgt $\alpha > \pi/2$. Man macht sich leicht klar – indem man etwa das Strahlenbüschel durch A über die Schnittpunkte mit der Seite $B \vee C$ auf einen Parameter dieser Geraden bezieht – dass dann der Fußpunkt des Lotes von A auf die Seite $B \vee C$ zwischen B und C liegen muss. Wieder wird das Dreieck in zwei Rechte zerlegt, woraus die Behauptung wie oben gezeigt folgt. Analog erledigt man den Fall, dass D rechts von B liegt. □

Übung 18. Schon in Beispiel 3 haben wir gezeigt, dass hyperbolische Geraden im Kleinschen Modell die Quadrik Q orthogonal schneiden. Daraus lässt sich schließen, das zwei randparallele Geraden stets miteinander den Winkel Null bilden. Es sei $\boldsymbol{x}(t) = [\mathfrak{e}_0 \cosh t + \mathfrak{e}_1 \sinh t] \in \boldsymbol{A}^1$ eine Parameterdarstellung der Geraden $\boldsymbol{A}^1$ und $\boldsymbol{b} \notin \boldsymbol{A}^1$ ein nicht auf ihr liegender Punkt. Man berechne den Winkel $\alpha(t)$ zwischen den Geraden $\boldsymbol{A}^1$ und $\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{x}(t)$ und zeige, dass der Grenzwert von $\alpha(t)$ für $t \to \infty$ gleich Null ist.

In der hyperbolischen Ebene werden *Polygone* und *konvexe Polygone* genauso wie in der sphärischen oder elliptischen Geometrie definiert, vgl. Übung 5.12. Dabei wird jetzt zugelassen, dass Eckpunkte auch im Unendlichen, d.h. auf der berandenden Quadrik Q, liegen können. Ein Polygon heißt *k-fach asymptotisch*, wenn k seiner Eckpunkte zu Q gehören. Da die einer *asymptotischen Ecke* $\boldsymbol{a} \in Q$ des Polygons benachbarten Seiten randparallel sind, ist der Winkel an dieser Ecke gleich Null (Übung 18).

Übung 19. Wir betrachten nicht ausgeartete Dreiecke der hyperbolischen Ebene. Man beweise: a) Zwei dreifach asymptotische Dreiecke sind stets G_2-kongruent. – b) Zwei zweifach asymptotische Dreiecke sind genau dann G_2-kongruent, wenn sie in ihrer nicht asymptotischen Ecke denselben Winkel einschließen. – c) Für einfach asymptotische Dreiecke sei etwa die Ecke $C \in Q$ asymptotisch. Da die Seiten a, b Halbgeraden sind, also unendliche Länge haben, hat ein einfach asymptotisches Dreieck dieser Art als wesentliche Invarianten nur die Winkel α, β und die Seitenlänge c. Man beweise, dass zwei derartige einfach asymptotische Dreiecke genau dann G_2-kongruent sind, wenn sie in zwei einander entsprechenden dieser Invarianten übereinstimmen. (Hinweis zu c): Man beweise zuerst: Ist $C = [\mathfrak{e}_0 + \mathfrak{e}_2] \in Q$ und

$$\boldsymbol{A}^1 : \boldsymbol{x}(t) = [\mathfrak{e}_0 \cosh t + \mathfrak{e}_1 \sinh t]$$

eine hyperbolische Gerade, so gilt für den orientierten Winkel $\alpha(t)$ von $\boldsymbol{A}^1$ zu $\boldsymbol{x}(t) \vee C$ die Gleichung

$$\cos \alpha(t) = -\tanh(t), \; -\infty < t < \infty, \; 0 < \alpha < \pi. \tag{49}$$

Diese Aussage gilt für jede beliebige hyperbolische Gerade $\boldsymbol{A}^1$ und jeden unendlichen Punkt $C \in Q, C \notin \boldsymbol{A}^1$.)

Die Definition des Flächeninhalts elementarer Mengen aus Abschnitt 5 kann man fast wortwörtlich aus der sphärischen oder elliptischen Geometrie auf die ebene hyperbolische Geometrie übertragen. Der einzige Unterschied ist, dass nun der Exzess $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ jedes hyperbolischen Dreiecks Δ negativ ist; man definiert also als Flächeninhalt eines hyperbolischen Dreiecks der hyperbolischen Ebene mit dem Parameter r die Größe

$$F(\Delta) := (\pi - (\alpha + \beta + \gamma))r^2. \tag{50}$$

Ebenso wie Lemma 5.8 und Folgerung 5.9 zeigt man

Satz 16. *Ist M eine elementare Menge und $(\Delta_i), i = 1, \ldots, k$, eine Triangulation von M, so ist die Definition des* Flächeninhalts *von M*

$$F(M) := \sum_{i=1}^{k} F(\Delta_i) \tag{51}$$

unabhängig von der Wahl der Triangulation. □

Offenbar ist der Flächeninhalt eine additive, monotone und G_2-invariante Funktion auf dem System der elementaren Mengen. Mit Hilfe von maßtheoretischen Methoden lässt sich der Flächeninhalt ähnlich wie in der Lebesgueschen Maßtheorie auf eine große Klasse messbarer Mengen zu einem G_2-invariantem Maß ausdehnen. Man macht sich leicht klar, dass die hyperbolische Ebene $\boldsymbol{H}^2$ selbst keine elementare Menge ist. Aus der Übung 20 folgt, dass ihr Maß unendlich ist:

Übung 20. Man beweise: a) Die Formel (50) ist auch für asymptotische Dreiecke sinnvoll. Jedes dreifach asymptotische Dreieck hat den Flächeninhalt πr^2. – b) In der hyperbolischen Ebene gibt es elementare Mengen beliebig großen Flächeninhalts.

Übung 21. Man zeige: a) In der hyperbolischen Ebene gibt es keine Rechtecke. – b) Es gibt nicht G_2-kongruente, vierfach asymptotische Vierecke.

Übung 22. In Analogie zu (5.40) beweise man: Für den Flächeninhalt eines hyperbolischen konvexen Polygons $P_n, n \geq 3$, mit den Winkeln α_i an den Ecken A_i, $i = 1, \ldots, n$, gilt

$$F(P_n) = ((n-2)\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i) r^2. \tag{52}$$

Speziell hat jedes n-fach asymptotische konvexe n-Eck den Flächeninhalt $(n-2)\pi r^2$.

Übung 23. Im Komplement $\boldsymbol{H}^2 \setminus M$ jeder elementaren Menge M gibt es elementare Mengen beliebig großen Flächeninhalts. Man gebe dafür Beispiele an.

2.6.6 Hypersphären, Äquidistanten, Orysphären

Da die hyperbolischen Räume $\boldsymbol{H}^n$ eine Metrik besitzen, sind die *metrischen Hypersphären* $S^{n-1}(\boldsymbol{z}, r)$ vom *Radius* r mit dem *Zentrum* $\boldsymbol{z} = [\mathfrak{z}]$ wohldefiniert; ihre Punkte $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]$ genügen der Gleichung

$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z} \rangle = -\cosh r, \ (\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = -1, \langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z} \rangle = -1). \tag{53}$$

Damit sind die Begriffe Kreise ($n = 2$), Sphären ($n = 3$) und Hypersphären wie in der euklidischen Elementargeometrie definiert; und ebenso wie dort gilt

Satz 17. *Die Isotropiegruppe $G_{\boldsymbol{z}} \subset G_n$ des Zentrums $\boldsymbol{z}$ der Hypersphäre $S^{n-1} = S(\boldsymbol{z}, r)$ wirkt transitiv auf S^{n-1}; sie ist isomorph zur orthogonalen Gruppe $\boldsymbol{O}(n)$. Daher ist die Isotropiegruppe eines Punktes $\boldsymbol{x}_0 \in S^{n-1}$ isomorph zu $\boldsymbol{O}(n-1)$, und die hyperbolischen*

Hypersphären sind als homogene Räume zu den euklidischen Hypersphären äquivariant isomorph: $S^{n-1} \cong \boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{O}(n-1)$. *Die Hypersphären sind projektive Hyperellipsoide, deren Tangentialhyperebenen die Geraden des Büschels durch das Zentrum* $\boldsymbol{z}$ *zu ihren Berührungspunkten orthogonal schneiden.*

Beweis. Da G_n transitiv auf den hyperbolischen Punkten wirkt, können wir annehmen, dass $\mathfrak{z} = \mathfrak{e}_0$ gilt. Die Isotropiegruppe von $[\mathfrak{e}_0]$ in G_n ist die orthogonale Gruppe des euklidischen Vektorraums $[\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n]$, die transitiv auf der Einheitssphäre S_1^{n-1} dieses Vektorraums in der üblichen Weise linear wirkt. Da sie den Abstand invariant lässt, und da sich die Punkte $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}$ bijektiv und äquivariant in der Gestalt

$$\mathfrak{e}_1 \in S_1^{n-1} \longmapsto \boldsymbol{x} = [\mathfrak{e}_0 \cosh r + \mathfrak{e}_1 \sinh r] \in S^{n-1} \tag{54}$$

darstellen lassen, folgen die ersten vier Aussagen des Satzes unmittelbar. Geht man in der Gleichung (53) zu homogenen Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ über und beachtet $\mathfrak{z} = \mathfrak{e}_0$, so folgt

$$(x^0)^2 = (\cosh r)^2(-(x^0)^2 + \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2),$$

und das ist die Gleichung einer Hyperquadrik vom Index 1. Die Spiegelung an einer radialen Geraden $\boldsymbol{z} \vee \boldsymbol{x}$ lässt jeden Punkt dieser Geraden, also auch $\boldsymbol{z}$, fest. Da sie eine Isometrie ist, geht die Hypersphäre S^{n-1} in sich über. Weil $\boldsymbol{x}$ ebenfalls fest bleibt, muss die Tangentialhyperebene an der Stelle $\boldsymbol{x}$ ebenfalls in sich übergehen und daher orthogonal zum Radius $\boldsymbol{z} \vee \boldsymbol{x}$ sein. □

Die Hypersphären sind also wie in der euklidischen Geometrie Orbits der Isotropiegruppe ihres Zentrums. Es ist sicher ein Erfolg versprechendes Prinzip, die Objekte der Elementargeometrie einer Transformationsgruppe unter den Orbits geeigneter Untergruppen zu suchen. Wie wir gleich sehen werden, ergeben sich in der hyperbolischen Geometrie hierbei mehr Möglichkeiten als in der euklidischen oder elliptischen, weil die pseudo-orthogonale Gruppen eine reichere Untergruppenstruktur haben als die orthogonalen derselben Dimension. Betrachten wir nun eine hyperbolische Hyperebene $\boldsymbol{B}^{n-1} \subset \boldsymbol{H}^n$. Ihr Pol $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}^{\perp}$ ist dann ein äußerer Punkt. Dessen Isotropiegruppe in G_n und gleichzeitig die Isotropiegruppe von $\boldsymbol{B}$ ist die Gruppe $G_{n-1} \subset G_n$, die wieder aus zwei Komponenten von $\boldsymbol{O}(1, n-1)$ besteht; wählen wir $\boldsymbol{b} = [\mathfrak{e}_n]$, so ist der zu $\boldsymbol{B}$ gehörende Vektorraum $\boldsymbol{W}^n = [\mathfrak{e}_0, \ldots, \mathfrak{e}_{n-1}]$. Die Gerade $\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_n]$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}$, ist orthogonal zu allen in $\boldsymbol{B}$ liegenden Geraden $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} = [\mathfrak{x}, \mathfrak{v}]$ durch $\boldsymbol{x}$, die wir ja stets mit Hilfe eines zu $\mathfrak{x}$ orthogonalen Einheitsvektors $\mathfrak{v} \in \boldsymbol{W} = [\mathfrak{e}_n]^{\perp}$ aufspannen können. Daher besteht die Familie der hyperbolischen Geraden $\{\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{x}\}_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}}$ aus den *Normalen* der Hyperebene $\boldsymbol{B}$; sie sind paarweise parallel und schneiden sich in demselben äußeren Punkt $\boldsymbol{b}$. Je zwei dieser Normalen haben eine gemeinsame Senkrechte, nämlich die Verbindungsgerade ihrer Schnittpunkte mit $\boldsymbol{B}$. Offenbar ist $\boldsymbol{B}$ der Orbit von $\boldsymbol{x}_0 = [\mathfrak{e}_0]$ unter der Wirkung von G_{n-1}. Den Orbit des Punktes

$$\boldsymbol{x}_r := [\mathfrak{e}_0 \cosh r + \mathfrak{e}_n \sinh r] \in \boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{x}_0$$

können wir uns durch die Parameterdarstellung

$$\boldsymbol{y}_r(\boldsymbol{x}) := g[\mathfrak{e}_0 \cosh r + \mathfrak{e}_n \sinh r] = [\mathfrak{x} \cosh r + \mathfrak{e}_n \sinh r] \text{ mit } \mathfrak{x} \in \boldsymbol{W}, \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = -1, \tag{55}$$

gegeben denken. Da G_{n-1} aus Isometrien besteht, ist der hyperbolische Abstand

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_r(\boldsymbol{x})) = h(g(\boldsymbol{x}_0), g(\boldsymbol{x}_r)) = r$$

konstant; die durch (55) beschriebene Hyperfläche wird daher die *Äquidistante* $A(r; \boldsymbol{B})$ der Hyperebene $\boldsymbol{B}$ mit dem Abstand r genannt. Man beachte, dass auch negative Werte r zugelassen sind, welche die *entgegengesetzten Äquidistanten* definieren. Bereits in Übung 10 haben wir die Äquidistanten einer Geraden in der hyperbolischen Ebene eingeführt und gesehen, dass sie selbst keine Geraden sind. Natürlich sind auch die Äquidistanten einer Hyperebene in der hyperbolischen Geometrie nicht selbst Hyperebenen. Wir wollen nun zeigen, dass die Tangentialhyperebenen $T_{\boldsymbol{y}}A(r, \boldsymbol{B})$ der Äquidistanten im Punkt $\boldsymbol{y}$ zur Geraden $\boldsymbol{b} \vee \boldsymbol{y}$ orthogonal sind. Dazu setzen wir die Parameterdarstellung der normierten Repräsentanten der Punkte der Hyperebene $\boldsymbol{B}$

$$\mathfrak{x}(t, \mathfrak{x}_S) = \mathfrak{e}_0 \cosh t + \mathfrak{x}_S \sinh t \text{ mit } \mathfrak{x}_S \in [\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_{n-1}],\ \langle \mathfrak{x}_S, \mathfrak{x}_S \rangle = 1 \tag{56}$$

in die Darstellung (55) ein: $\mathfrak{y}_r(t, \mathfrak{x}_S) = \mathfrak{x}(t, \mathfrak{x}_S) \cosh r + \mathfrak{e}_n \sinh r$, und bilden das Differential:

$$d\mathfrak{y}_r(t, \mathfrak{x}_S) = d\mathfrak{x}(t, \mathfrak{x}_S) \cosh r = ((\mathfrak{e}_0 \sinh t + \mathfrak{x}_S \cosh t)dt + \sinh t d\mathfrak{x}_S) \cosh r.$$

Weil der Vektor $\mathfrak{x}_S$ die Einheitshypersphäre eines euklidischen Vektorraums durchläuft, gilt $\langle \mathfrak{x}_S, d\mathfrak{x}_S \rangle = 0$, und man erhält durch eine leichte Rechnung $\langle \mathfrak{y}_r(t, \mathfrak{x}_S), d\mathfrak{y}_r(t, \mathfrak{x}_S) \rangle = 0$, also die behauptete Orthogonalität. Das Bogenelement der Äquidistanten

$$\langle d\mathfrak{y}_r, d\mathfrak{y}_r \rangle = \langle d\mathfrak{x}, d\mathfrak{x} \rangle \cosh^2 r \tag{57}$$

unterscheidet sich vom Bogenelement der hyperbolischen Hyperebene nur um den konstanten Faktor $\cosh^2 r$, so dass ihre innere (metrische) Geometrie selbst hyperbolisch ist. Wie man leicht nachweist, ist die Isotropiegruppe des Punktes $\boldsymbol{x}_r \in A(r, \boldsymbol{B})$ bei der Wirkung von G_{n-1} konjugiert zur orthogonalen Gruppe $\boldsymbol{O}(n-1)$. Wir fassen das über die Äquidistanten Bewiesene in dem folgenden Satz zusammen:

Satz 18. *Die Normalen einer hyperbolischen Hyperebene $\boldsymbol{B}$ sind paarweise parallel; sie schneiden sich in demselben äußeren Punkt, dem Pol $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B}^\perp$ der Hyperebene. Die orthogonalen Trajektorien der Normalenschar sind die Hyperebene und ihre Äquidistanten. Jede Äquidistante ist Orbit der Isotropiegruppe der Hyperebene, sie ist als homogener Raum zur hyperbolischen Hyperebene äquivariant: $A(r, \boldsymbol{B}^{n-1}) \cong G_{n-1}/\boldsymbol{O}(n-1)$, und ihre innere Geometrie ist hyperbolisch.*

Übung 24. Man beweise, dass alle Äquidistanten beliebiger hyperbolischer Hyperebenen mit demselben Abstandsparameter r G_n-kongruent sind.

Es sei nun $\boldsymbol{x} \in Q$ ein beliebiger Punkt der Hyperquadrik Q; aus Transitivitätsgründen können wir $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{e}_0 - \mathfrak{e}_n]$ annehmen. Um die Isotropiegruppe dieses Punktes zu bestimmen, ist es zweckmäßig, einen anderen Typ von Bezugssystemen einzuführen, den wir auch für spätere Anwendungen benötigen. Zu jeder pseudo-orthonormierten Basis $(\mathfrak{e}_i)$, $i = 0, \ldots, n$, bestimmen wir durch

$$\mathfrak{a}_0 := (\mathfrak{e}_0 - \mathfrak{e}_n)/\sqrt{2},\ \mathfrak{a}_i := \mathfrak{e}_i, i = 1, \ldots, n-1,\ \mathfrak{a}_n := (\mathfrak{e}_n + \mathfrak{e}_0)/\sqrt{2}, \tag{58}$$

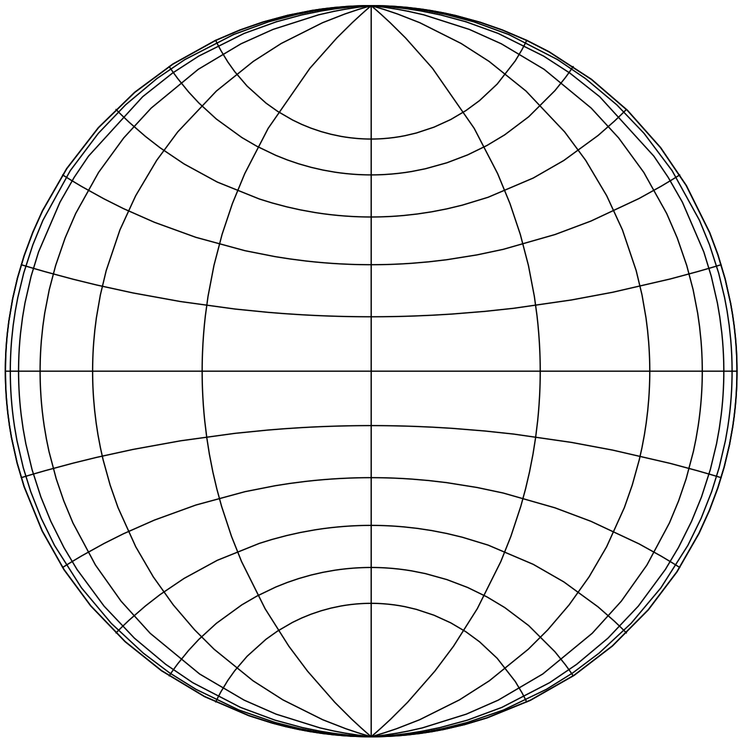

Abbildung 2.24: Äquidistanten als orthogonale Trajektorien der Normalen einer Geraden im Kleinschen Modell. (Vgl. Abbildung 2.23)

eine neue Basis, die wir *isotrop-orthogonal* nennen. Eine Basis $(\mathfrak{a}_j)$ ist genau dann isotrop-orthogonal, wenn die Matrix der Skalarprodukte die Gestalt

$$(\langle \mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_k \rangle) = B := \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{o}' & -1 \\ \mathfrak{o} & E & \mathfrak{o} \\ -1 & \mathfrak{o}' & 0 \end{pmatrix} \tag{59}$$

hat; hier bezeichnet E die Einheitsmatrix und $\mathfrak{o}$ den Null-Spaltenvektor der Ordnung $n-1$, $\mathfrak{o}'$ ist somit der entsprechende Null-Zeilenvektor. Umgekehrt wird jeder isotrop-orthogonalen Basis durch

$$\mathfrak{e}_0 := (\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_n)/\sqrt{2},\ \mathfrak{e}_i := \mathfrak{a}_i, i = 1, \ldots, n-1,\ \mathfrak{e}_n := (\mathfrak{a}_n - \mathfrak{a}_0)/\sqrt{2}, \tag{60}$$

wieder eine pseudo-orthonormierte zugeordnet. Die Elemente a der Isotropiegruppe $H_{\boldsymbol{x}}$ des Punktes $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{a}_0]$ müssen der Bedingung $a(\mathfrak{a}_0) = \mathfrak{a}_0 \lambda^{-1}$, $\lambda \in \mathbf{R}^*$, genügen. Setzt man folglich für ihre Blockmatrizen die Gestalt

$$a = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & \mathfrak{a}' & c \\ \mathfrak{o} & A & \mathfrak{d} \\ 0 & \mathfrak{b}' & \mu \end{pmatrix}$$

an und berücksichtigt, dass sie wegen $a \in G_n$ das Skalarprodukt invariant lassen, also

$$a'Ba = B$$

erfüllen müssen, so folgt nach einer Rechnung mit Blockmatrizen

Lemma 19. *Bezüglich einer isotrop-orthogonalen Basis* $(\mathfrak{a}_i)$ *besteht die Isotropiegruppe* $H_{\boldsymbol{x}}$ *des Punktes* $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{a}_0]$ *aus allen den Transformationen der Gruppe* G_n*, welche in dieser Basis eine Matrix der folgenden Gestalt besitzen:*

$$a(A, \mathfrak{a}, \lambda) := \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & \lambda^{-1}\mathfrak{a}'A & \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle/2\lambda \\ \mathfrak{o} & A & \mathfrak{a} \\ 0 & \mathfrak{o}' & \lambda \end{pmatrix} \quad \textit{mit } A \in \boldsymbol{O}(n-1), \mathfrak{a} \in \mathbf{R}^{n-1}, \lambda > 0. \quad (61)$$

Man macht sich nun leicht klar, dass die Isotropiegruppe $H_{\boldsymbol{x}}$ im Unterschied zu den Isotropiegruppen der hyperbolischen und der äußeren Punkte transitiv auf dem hyperbolischen Raum wirkt; es gilt

$$H_{\boldsymbol{x}}[\mathfrak{e}_0] = \boldsymbol{H}^n. \quad (62)$$

Das kann man durch eine Rechnung verifizieren, oder man argumentiert wie folgt: Die einparametriesche Untergruppe $\boldsymbol{O}(1,1) = \{a(E, \mathfrak{o}, \mathrm{e}^t)\}$ wirkt transitiv auf der hyperbolischen Geraden $[\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_n]$:

$$a(E, \mathfrak{o}, \mathrm{e}^t)\mathfrak{e}_0 = a(E, \mathfrak{o}, \mathrm{e}^t)(\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_n)/\sqrt{2} = (\mathfrak{a}_0\,\mathrm{e}^{-t} + \mathfrak{a}_n\,\mathrm{e}^t) = \mathfrak{e}_0 \cosh t + \mathfrak{e}_n \sinh t,$$

und die Isotropiegruppe $H_{\boldsymbol{x}}$ wirkt transitiv über dem Teilbüschel aller hyperbolischen Geraden durch $\boldsymbol{x}$, so dass $[\mathfrak{e}_0]$ in jeden anderen Punkt $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}^n$ übergeführt werden kann. Um zu interessanten Orbits zu kommen, betrachten wir die Untergruppe

$$E(n-1) := \{a(A, \mathfrak{a}, 1) |\ A \in \boldsymbol{O}(n-1), \mathfrak{a} \in \mathbf{R}^{n-1}\}.$$

Man überprüft durch eine Rechnung mit den Blockmatrizen der Gestalt (61) die Gültigkeit der Formel

$$a(A, \mathfrak{a}, \lambda)a(B, \mathfrak{b}, \mu) = a(AB, A\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mu, \lambda\mu). \quad (63)$$

Hieraus folgt, dass $E(n-1)$ als Kern des Homomorphismus $a(A, \mathfrak{a}, \lambda) \in H_{\boldsymbol{x}} \mapsto \lambda \in \mathbf{R}^*$ ein Normalteiler in $H_{\boldsymbol{x}}$ ist. Durch Vergleich mit der Darstellung (I.6.2.42) der euklidischen Gruppen erkennt man unmittelbar, dass $E(n-1)$ zur euklidischen Gruppe des $(n-1)$-dimensionalen euklidischen Raums isomorph ist. Aus den Formeln (58), (60), (61) erhält man für die Elemente $\boldsymbol{z} = E(n-1)\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} := [\mathfrak{e}_0]$ des Orbits

$$\boldsymbol{z} = a(A, \mathfrak{a}, 1)\boldsymbol{y} = [\mathfrak{e}_0(1 + \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle/4) + \mathfrak{a}/\sqrt{2} - \mathfrak{e}_n\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}\rangle/4],\ \mathfrak{a} \in \mathbf{R}^{n-1}. \quad (64)$$

Daher gilt $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ genau dann, wenn $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ ist; die Isotropiegruppe von $\boldsymbol{y}$ unter der Wirkung von $E(n-1)$ ist also die orthogonale Gruppe $\boldsymbol{O}(n-1)$. Man nennt das Orbit $E(n-1)\boldsymbol{y}$ eine *Horosphäre* oder *Grenzsphäre*, *Horozyklus* oder *Grenzkreis* im Falle $n = 2$. Weil G_n auf Q transitiv ist, können wir für $\boldsymbol{x}$ einen beliebigen Punkt aus Q wählen und wie oben die zu $E(n-1)$ isomorphe eingeschränkte Isotropiegruppe $H_{1,\boldsymbol{x}} \subset H_{\boldsymbol{x}}$ durch $\lambda = 1$ definieren. Da das Teilbüschel der hyperbolischen Geraden durch den beliebigen Punkt $\boldsymbol{x} \in Q$ den hyperbolischen Raum $\boldsymbol{H}^n$ schlicht überdeckt, gibt es zu jedem Punktepaare $\boldsymbol{x} \in Q, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}^n$ eine Horosphäre $H_{1,\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y}$. Aus den bisherigen Betrachtungen folgt

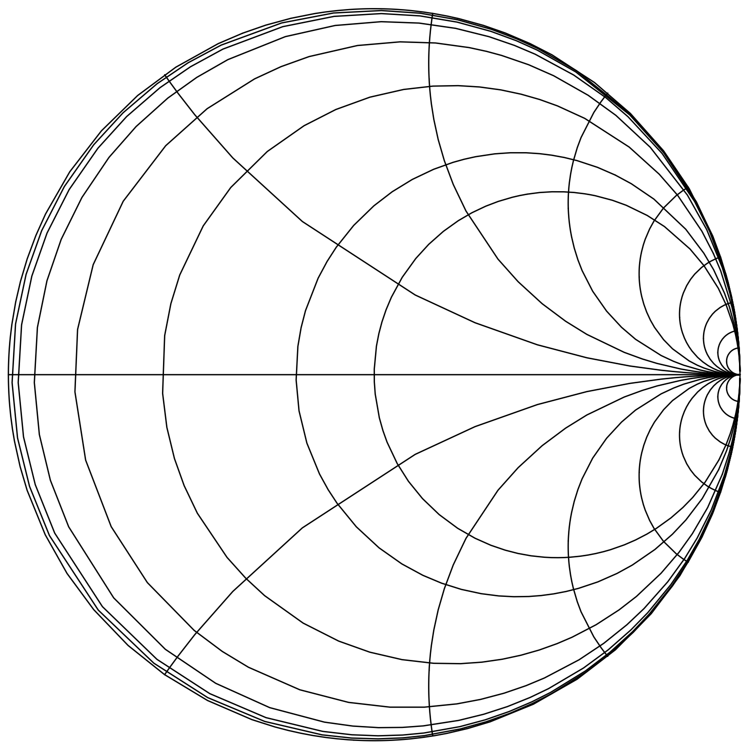

Abbildung 2.25: Grenzkreise (Horozyklen) im Kleinschen Modell.

Satz 20. *Alle Horosphären des hyperbolischen Raums sind G_n-kongruent. Ist $H_{1,\boldsymbol{xy}}$ eine Horosphäre, so ergibt* (64) *bei Wahl von $\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_n$ mit $\boldsymbol{y} = [\mathfrak{e}_0]$, $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{e}_0 - \mathfrak{e}_n]$ eine Parameterdarstellung dieser Hyperfläche. Die Horosphären sind zum $(n-1)$-dimensionalen euklidischen Raum $\boldsymbol{E}^{n-1} \cong E(n-1)/\boldsymbol{O}(n-1)$ äquivariant.* □

Es ist bemerkenswert, dass die euklidische Gruppe als Untergruppe der Isometriegruppe des hyperbolischen Raumes und ihre Orbits als euklidische Räume der Kodimension 1 erscheinen: die euklidische Geometrie ist so in die nicht-euklidische eingebettet. Das gilt auch für die durch die hyperbolische Metrik auf den Orbits erzeugte Riemannsche (innere) Metrik. Aus (64) folgen durch Ableitung des normierten Repräsentanten $\mathfrak{z}$ von $\boldsymbol{z}$ nach den Komponenten a^i von

$$\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{n-1} \mathfrak{e}_i a^i$$

die Gleichungen

$$\partial\mathfrak{z}/\partial a^i = (\mathfrak{e}_0 - \mathfrak{e}_n)a^i/2 + \mathfrak{e}_i/\sqrt{2}, \tag{65}$$

$$\langle \partial\mathfrak{z}/\partial a^i, \partial\mathfrak{z}/\partial a^j \rangle = \delta_{ij}/2,$$

woraus sich die Behauptung ergibt. Außerdem erkennt man aus (65), dass

$$\langle \mathfrak{z}, \partial\mathfrak{z}/\partial a^i \rangle = 0 \text{ und} \langle \mathfrak{e}_0 - \mathfrak{e}_n, \partial\mathfrak{z}/\partial a^i \rangle = 0$$

gelten. Hieraus ergibt sich (vgl. Abbildung 2.25)

Folgerung 21. *Die Horosphären $H_{1,\boldsymbol{xy}}$ sind die orthogonalen Trajektorien des Büschels der randparallelen hyperbolischen Geraden durch den unendlich fernen Punkt $\boldsymbol{x} \in Q$.* □

2.6.7 Stationäre Winkel

Es seien $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m \subset \boldsymbol{H}^n$ eine l-Ebene und eine m-Ebene des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes. Wir wollen vollständige Invariantensysteme der Paare $(\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m)$ mit $0 \le l \le m < n$ bestimmen. Für Punkte $l = m = 0$, s. Satz 4, und Hyperebenen $l = m = n-1$, vgl. Beispiel 4, wurde das bereits erledigt. Um unnötige Fallunterscheidungen zu vermeiden, setzen wir voraus:

Bedingung A. *Es gibt keine Hyperebene $\boldsymbol{L}^{n-1} \subset \boldsymbol{H}^n$, die $\boldsymbol{A}^l \cup \boldsymbol{B}^m$ enthält.*

Die Unterräume $\boldsymbol{A}^l \cup \boldsymbol{B}^m$ sollen also den ganzen Raum erzeugen. Wir betrachten nun alle Paare von Hyperebenen $\boldsymbol{L}^{n-1}, \boldsymbol{M}^{n-1} \subset \boldsymbol{H}^n$ mit $\boldsymbol{A}^l \subset \boldsymbol{L}^{n-1}, \boldsymbol{B}^m \subset \boldsymbol{M}^{n-1}$ und bestimmen die relativen Extrema der Invarianten $I(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M})$, die uns auf die *stationären Winkel* führen, welche ähnlich wie in der euklidischen oder elliptischen Geometrie das gewünschte vollständige Invariantensystem bilden.

Es seien $\boldsymbol{U}^{l+1}, \boldsymbol{W}^{m+1}$ die pseudo-euklidischen Unterräume, welche $\boldsymbol{A}^l$ bzw. $\boldsymbol{B}^m$ entsprechen. Die orientierten Hyperebenen, die $\boldsymbol{A}^l$ enthalten, werden durch die Einheitsvektoren des orthogonalen Komplements $\boldsymbol{U}^\perp$ bestimmt, und analog die $\boldsymbol{B}^m$ enthaltenden Hyperebenen:

$$\mathfrak{u} \in \boldsymbol{U}^\perp, \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{u} \rangle = 1, \ \mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}^\perp, \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle = 1. \tag{66}$$

Nach (23) sind also die relativen Extrema des Skalarprodukts $\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{w} \rangle$ unter der Nebenbedingung (66) zu finden. Weil die Argumente $\mathfrak{u}, \mathfrak{w}$ auf Einheitssphären euklidischer Vektorräume variieren, ist die Existenz der Minima und Maxima gesichert. Wir betrachten die Funktion

$$f(\mathfrak{u}, \mathfrak{w}, \lambda, \mu) = \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{w} \rangle - \lambda(\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{u} \rangle - 1) - \mu(\langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle - 1), \ \mathfrak{u} \in \boldsymbol{U}^\perp, \ \mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}^\perp \tag{67}$$

mit den Lagrangeschen Multiplikatoren λ, μ. Durch Differentiation nach $\mathfrak{u}, \mathfrak{w}$ erhalten wir die notwendigen Bedingungen für die relativen Extrema:

$$\begin{aligned} \langle d\mathfrak{u}, \mathfrak{w} \rangle - 2\lambda \langle d\mathfrak{u}, \mathfrak{u} \rangle &= \langle d\mathfrak{u}, \mathfrak{w} - 2\mathfrak{u}\lambda \rangle = 0, \\ \langle d\mathfrak{w}, \mathfrak{u} \rangle - 2\mu \langle d\mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle &= \langle d\mathfrak{w}, \mathfrak{u} - 2\mathfrak{w}\mu \rangle = 0. \end{aligned}$$

Weil $d\mathfrak{u} \in \boldsymbol{U}^\perp, d\mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}^\perp$ frei variieren, sind diese Bedingungen genau dann erfüllt, wenn

$$\mathfrak{w} - 2\mathfrak{u}\lambda \in \boldsymbol{U} \text{ und } \mathfrak{u} - 2\mathfrak{w}\mu \in \boldsymbol{W} \tag{68}$$

gelten. Bezeichnen $pr_{\boldsymbol{U}}, pr_{\boldsymbol{U}^\perp}$ die aus der direkten Zerlegung

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{U}^\perp$$

resultierenden Projektionen, so ist (68) mit

$$pr_{\boldsymbol{U}^\perp}\mathfrak{w} = 2\mathfrak{u}\lambda \text{ und } pr_{\boldsymbol{W}^\perp}\mathfrak{u} = 2\mathfrak{w}\mu \tag{69}$$

äquivalent. Wir definieren nun den Operator A wie folgt:

$$p := pr_{\boldsymbol{U}^\perp}|\boldsymbol{W}^\perp,\ q := pr_{\boldsymbol{W}^\perp}|\boldsymbol{U}^\perp,\ A := q \circ p \in \operatorname{End}(\boldsymbol{W}^\perp). \tag{70}$$

Aus (69) ergibt sich: *Ist* $\mathfrak{u}, \mathfrak{w}$ *eine Lösung des Extremalproblems für die Funktion* (66), *so ist* $\mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}^\perp$ *ein Eigenvektor des Operators* A*:*

$$A\mathfrak{w} = \mathfrak{w}4\lambda\mu. \tag{71}$$

Damit ist der analytische Teil der Überlegungen abgeschlossen, der im Grunde nur der Motivierung der Definition des Operators A dient; dieser Operator ist offensichtlich dem Paar $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m$ in invarianter, genauer, äquivarianter Weise zugeordnet. Weil A ein Endomorphismus des euklidischen Vektorraums $\boldsymbol{W}^\perp$ ist, ergibt sich seine Diagonalisierbarkeit sofort aus dem

Lemma 22. *Der durch* (70) *definierte Operator* A *ist selbstadjungiert, genauer, es gelten*

$$p' = q,\ q' = p,\ A' = A. \tag{72}$$

Die Eigenwerte von A *sind nicht negativ. Der Eigenunterraum von* A *zum Eigenwert* 0 *ist der Kern von* p*.*

B e w e i s. Die Formeln (72) ergeben sich unmittelbar aus der Definition der adjungierten Abbildungen und der Gültigkeit von

$$\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{w} \rangle = \langle q\mathfrak{u}, \mathfrak{w} \rangle = \langle \mathfrak{u}, p\mathfrak{w} \rangle$$

für alle $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{U}^\perp, \mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}^\perp$. Daher ist A ein selbstadjungierter Operator eines euklidischen Vektorraums, also diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten. Ist $\mathfrak{w}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert α, so gilt nach (72)

$$\langle \mathfrak{w}, A\mathfrak{w} \rangle = \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle \alpha = \langle p\mathfrak{w}, p\mathfrak{w} \rangle,$$

woraus die letzten beiden Behauptungen unmittelbar folgen. □

Nach $\dim \boldsymbol{W}^\perp = n - m$ existieren also $n - m$ nicht notwendig verschiedene Eigenwerte α_i von A, die wir der Größe nach nummerieren:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_{n-m} \geq 0. \tag{73}$$

Es sei r_A der Rang des Operators A, also (falls $r_a < n - m$)

$$\alpha_{r_A+1} = \ldots = \alpha_{n-m} = 0.$$

Wir fixieren eine orthonormierte Eigenbasis $(\mathfrak{a}_i)$ von A mit $A\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i\alpha_i$. Es folgt aus (72)

$$\langle \mathfrak{a}_i, A\mathfrak{a}_j \rangle = \langle p\,\mathfrak{a}_i, p\,\mathfrak{a}_j \rangle \alpha_j = \delta_{ij}\alpha_j.$$

Daher sind

$$\mathfrak{b}_i := p\,\mathfrak{a}_i/\sqrt{\alpha_i} \text{ für } i = 1, \ldots, r_A \tag{74}$$

r_A orthonormierte Vektoren aus $\boldsymbol{U}^\perp$, die wir zu einer orthonormierten Basis $(\mathfrak{b}_j), j = 1, \ldots, n-l$, von $\boldsymbol{U}^\perp$ ergänzen. Es gelten

$$\langle \mathfrak{b}_i, \mathfrak{a}_j \rangle = \delta_{ij}\sqrt{\alpha_j} \text{ für } i = 1, \ldots, n-l,\ j = 1, \ldots, n-m. \tag{75}$$

In der Tat ist ja wegen $\mathfrak{b}_i \in \boldsymbol{U}^\perp$

$$\langle \mathfrak{b}_i, \mathfrak{a}_j \rangle = \langle \mathfrak{b}_i, p\,\mathfrak{a}_j \rangle = \delta_{ij}\sqrt{\alpha_i}$$

für $i = 1, \ldots, r_A$ nach Definition der $\mathfrak{b}_i$. Da die übrigen Vektoren $\mathfrak{b}_\rho$ zum Bild von p und natürlich auch zu $\boldsymbol{U}$ orthogonal sind, gilt auch

$$\langle \mathfrak{b}_\rho, \mathfrak{a}_j \rangle = \langle \mathfrak{b}_\rho, p\,\mathfrak{a}_j \rangle = 0 = \delta_{\rho,j}\sqrt{\alpha_j}$$

für $\rho = r_A + 1, \ldots, n-m$. Aus (75) und der allgemein für adjungierte Abbildungen gültigen Regel

$$(\operatorname{Im} p)^\perp = \operatorname{Ker} p'$$

schließt man leicht

$$\operatorname{Im} p = [\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{r_A}], \quad \operatorname{Ker} p = [\mathfrak{a}_{r_A+1}, \ldots, \mathfrak{a}_{n-m}] = \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}^\perp \tag{76}$$

$$\operatorname{Im} q = [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r_A}], \quad \operatorname{Ker} q = [\mathfrak{b}_{r_A+1}, \ldots, \mathfrak{b}_{n-l}] = \boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{U}^\perp, \tag{77}$$

und

$$q(\mathfrak{b}_i) = \mathfrak{a}_i\sqrt{\alpha_i} \text{ für } i = 1, \ldots, n-m. \tag{78}$$

Die qualitativen Eigenschaften des Paares $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m$ werden durch die Größe von α_1 entschieden. Aus den Extremaleigenschaften des Eigenwertes, vgl. (73) und (75), folgt

$$\sqrt{\alpha_1} = \max\{\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{w} \rangle | \mathfrak{u} \in \boldsymbol{U}^\perp, \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{u} \rangle = 1, \mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}^\perp, \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle = 1\}. \tag{79}$$

Übung 25. Man beweise (79) durch eine direkte Abschätzung.

Lemma 23. *Unter der Bedingung* A *tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein:*

1. $\alpha_1 > 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^l \cap \boldsymbol{B}^m$ *ist ein im Außengebiet $A(Q)$ liegender projektiver Unterraum oder der Unpunkt;*
2. $\alpha_1 = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^l \cap \boldsymbol{B}^m$ *ist ein zu Q tangentieller projektiver Unterraum;*
3. $\alpha_1 < 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^l \cap \boldsymbol{B}^m$ *ist ein hyperbolischer projektiver Unterraum und nicht der Unpunkt.*

Beweis. Es sei $\alpha_1 > 1$. Nach (75) ist dann die lineare Hülle $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1]$ ein pseudo-euklidischer Unterraum von $\boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp$, und daher ist auch $\boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp$ pseudo-euklidisch. Folglich ist der Durchschnitt $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} = (\boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp)^\perp$ euklidisch oder gleich $\{\mathfrak{o}\}$, also liegt der entsprechende projektive Unterraum $\boldsymbol{A}^l \cap \boldsymbol{B}^m$ in $A(Q)$ oder ist der Unpunkt. Umgekehrt, ist das der Fall, so gibt es einen zeitartigen Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{u} + \mathfrak{w}, \mathfrak{u} \in \boldsymbol{U}^\perp, \mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}^\perp$.

Es seien $\mathfrak{u}_0, \mathfrak{w}_0$ die entsprechenden normierten Vektoren. Weil die lineare Hülle $[\mathfrak{u}, \mathfrak{w}] = [\mathfrak{u}_0, \mathfrak{w}_0]$ pseudo-euklidisch ist, muss die Determinamte der Skalarprodukte $1 - \langle \mathfrak{u}_0, \mathfrak{w}_0 \rangle^2$ negativ sein. Aus der Maximum-Eigenschaft von α_1 folgt

$$1 < \langle \mathfrak{u}_0, \mathfrak{w}_0 \rangle^2 \leq \alpha_1,$$

und damit ist Fall 1 bewiesen. Es sei nun $\alpha_1 = 1$. Nach (75) gilt dann $\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 \rangle = 1$. Dann ist der Vektor $\mathfrak{z} := \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{b}_1 \in \boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp$ isotrop. Wäre nämlich $\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$, so wäre $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1 \in \boldsymbol{U}^\perp \cap \boldsymbol{W}^\perp$, was der Bedingung A widerspricht; diese Bedingung ist ja äquivalent zu jeder der Aussagen

$$\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{V},\ \boldsymbol{U}^\perp \cap \boldsymbol{W}^\perp = \{\mathfrak{o}\}. \tag{80}$$

Weiter folgt aus (75), dass $\mathfrak{z}$ zu allen erzeugenden Vektoren $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_j$ von $\boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp$ orthogonal ist; dieser Unterraum ist also isotrop. Das gilt dann auch für sein orthogonales Komplement $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$, und somit ist $\boldsymbol{A}^l \cap \boldsymbol{B}^m$ tangentiell zu Q, vgl. Folgerung 1.9.19. Umgekehrt, ist das der Fall, so muss $\boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp$ isotrop sein. Wir finden also einen isotropen Vektor $\mathfrak{y} = \mathfrak{u} + \mathfrak{w} \in \boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp$, $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{U}^\perp, \mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}^\perp$, der zu $\boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp$ orthogonal ist. Speziell gelten

$$\langle \mathfrak{y}, \mathfrak{u} \rangle = \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{u} \rangle + \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{u} \rangle = 0,\ \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{w} \rangle = \langle \mathfrak{u}, \mathfrak{w} \rangle + \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle = 0,$$

woraus

$$\frac{\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{w} \rangle^2}{\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{u} \rangle \langle \mathfrak{w}, \mathfrak{w} \rangle} = 1$$

folgt. Nach der Maximum-Eigenschaft von α_1 muss daher $\alpha_1 \geq 1$ gelten. Weil nach dem für Fall 1 Bewiesenem sich aus $\alpha_1 > 1$ ergibt, dass der Raum $\boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp$ pseudo-euklidisch ist, muss $\alpha_1 = 1$ sein. Somit gilt die Behauptung 2. Da beide Seiten der im Lemma angegebenen Äquivalenzen vollständige Disjunktionen sind, ergibt sich die dritte Behauptung aus den ersten beiden, womit das Lemma bewiesen ist. □

Das Ergebnis dieses Lemmas gibt Anlass zu der folgenden Definition:

Definition 3. Zwei hyperbolische Unterräume $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m$ werden *parallel* genannt, wenn der Durchschnitt $\boldsymbol{A}^l \wedge \boldsymbol{B}^m$ der entsprechenden projektiven Unterräume im Außengebiet $A(Q)$ liegt und nicht nur aus dem Unpunkt besteht; sie heißen *randparallel*, wenn dieser Durchschnitt tangentiell ist, und *sich schneidend*, wenn er ein hyperbolischer Unterraum ist. Schließlich sei daran erinnert, dass zwei projektive Unterräume $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m \subset \boldsymbol{P}^n$ *windschief* sind, wenn ihr Durchschnitt der Unpunkt ist.□

Offensichtlich sind die Eigenwerte $\alpha_i, i = 1, \ldots, n-m$ Invarianten des Paares $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m$, da der Operator A diesem Paar äquivariant zugeordnet ist. Um zu beweisen, dass dieses Invariantensystem vollständig ist, konstruieren wir eine Basis von $\boldsymbol{V}$ derart, dass folgendes gilt:

1. Die Basis $(\mathfrak{b}_j), j = 0, \ldots, n$, ist pseudo-orthonormiert.

2. $(\mathfrak{b}_j), j = 1, \ldots, n-l$, ist eine Basis von $\boldsymbol{U}^\perp$.

3. Für die Eigenwerte α_i und Eigenvektoren $\mathfrak{a}_i$ von A gelten die Relationen (73), (74) und (75).

4. Die Koordinatendarstellung der Eigenvektoren in der Basis $(\mathfrak{b}_j)$ ist kanonisch in dem Sinne, dass die Koordinaten von $\mathfrak{a}_i$ durch den Eigenwert α_i eindeutig festgelegt sind.

Eine derartige Basis nennen wir an das Paar $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m$ *adaptiert* oder *angepasst.* Mit dem Beweis der Existenz von adaptierten Basen ist die Vollständigkeit des Invariantensystems bewiesen: Ist $\boldsymbol{A}'^l, \boldsymbol{B}'^m$ ein Paar hyperbolischer Unterräume mit denselben Invarianten (73), und bezeichnet $(\mathfrak{b}'_j)$ eine diesem Paar adaptierte Basis, so erzeugt die durch $g(\mathfrak{b}_i) = \mathfrak{b}'_i, i = 1, \ldots, n+1$, bestimmte pseudo-orthogonale Transformation von $\boldsymbol{V}$ eine gleich bezeichnete hyperbolische Isometrie mit $g\boldsymbol{A}^l = \boldsymbol{A}'^l$, $g\boldsymbol{B}^m = \boldsymbol{B}'^m$.

Bevor wir mit der Konstruktion einer adaptierten Basis beginnen, führen wir noch folgende Redeweisen ein: Es bezeichne $\boldsymbol{M}(\mathfrak{m}), \langle \mathfrak{m}, \mathfrak{m} \rangle > 0$, die zu dem Pol $[\mathfrak{m}] \in A(Q)$ gehörende hyperbolische Hyperebene. Die Größen (vgl. (75))

$$\sqrt{\alpha_i} = \langle \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i \rangle = |I|(\boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_i), \boldsymbol{M}(\mathfrak{b}_i))$$

nennen wir die *stationären Invarianten* des Paares $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m$. Ist $\alpha_1 > 1$, so setzen wir

$$\sqrt{\alpha_1} = \cosh \beta_1 \tag{81}$$

und nennen β_1 den *maximalen Abstand* von $\boldsymbol{A}^l$ und $\boldsymbol{B}^l$ enthaltenden Hyperebenen (vgl. 36). Ist schließlich $\alpha_i \leq 1$, so setzen wir

$$\sqrt{\alpha_i} = \cos \beta_i, \ (0 \leq \beta_i \leq \pi/2) \tag{82}$$

und nennen die β_i die *stationären Winkel* des Paares $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m$ (vgl. Beispiel 4).

Die Vektoren $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{n-l} \in \boldsymbol{U}^\perp$ der adaptierten Basis wurden bereits angegeben; sie erfüllen die Bedingungen 2. und 3. Um die restlichen Vektoren, also eine pseudo-orthonormierte Basis $(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_j), j = n-l+1, \ldots, n$, von $\boldsymbol{U}^{l+1}$ an die Situation anzupassen, betrachten wir die Projektionen der Eigenvektoren (man beachte (74))

$$pr_{\boldsymbol{U}} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_i - \mathfrak{b}_i \sqrt{\alpha_i}, \ i = 1, \ldots, n-m,$$

auf den Raum $\boldsymbol{U}$. Aus (74) und (75) ergibt sich

$$\langle pr_{\boldsymbol{U}} \mathfrak{a}_i, pr_{\boldsymbol{U}} \mathfrak{a}_j \rangle = \delta_{ij}(1 - \alpha_j) \text{ für } i, j = 1, \ldots, n-m. \tag{83}$$

Diese Projektionen sind also paarweise orthogonal; wir normieren die von $\mathfrak{o}$ verschiedenen in geeigneter Weise in Abhängigkeit von den in Lemma 23 betrachteten Fällen und ergänzen sie orthogonal zu der gesuchten adaptierten Basis.

1. Fall. *Ist $\alpha_1 > 1$, so hat dieser Eigenwert die Vielfachheit 1, und für alle übrigen Eigenwerte gilt $\alpha_i < 1, i = 2, n-m$. Es gibt eine adaptierte Basis $\mathfrak{b}_i$ von $\boldsymbol{V}$ mit*

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1 \cosh \beta_1 + \mathfrak{b}_0 \sinh \beta_1, \tag{84}$$

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_i \cos \beta_i + \mathfrak{b}_{n-l+i-1} \sin \beta_i, \ i = 2, \ldots, n-m. \tag{85}$$

B e w e i s. Nach (83) ist die Projektion $pr_{\boldsymbol{U}} \mathfrak{a}_1$ zeitartig; die Normierung gibt uns den Basisvektor $\mathfrak{b}_0$ und die Gültigkeit von (84). Weil es in $\boldsymbol{V}$ nicht zwei zueinander orthogonale zeitartige Vektoren geben kann, muss $\alpha_2 \leq 1$ gelten. Wäre nun $\alpha_2 = 1$, so folgte aus (83), dass die Projektion $pr_{\boldsymbol{U}}\mathfrak{a}_2$ isotrop und orthogonal zu $\mathfrak{b}_0$ oder der Nullvektor sein müsste. Weil der zu $\mathfrak{b}_0$ orthogonale Unterraum euklidisch ist, müsste diese Projektion gleich dem Nullvektor sein. Dann wäre aber $\mathfrak{a}_2 \in \boldsymbol{U}^\perp \cap \boldsymbol{W}^\perp$, im Widerspruch zu Bedingung A, vgl. (80). Die Normierung der Projektionen $pr_{\boldsymbol{U}}\mathfrak{a}_i, i \geq 2$, ergeben orthonormierte Vektoren $\mathfrak{b}_{n-l+i-1},\ i \geq 2$, wobei der höchste Index

$$2n - (m + l + 1) = n - d,\ d := \dim \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W},$$

ist. Wir ergänzen die bisher definierten Vektoren $\mathfrak{b}_i$, falls $d > 0$, durch d weitere Vektoren zu einer pseudo-orthonormierten Basis von $\boldsymbol{V}$, welche alle Bedingungen 1. - 4. erfüllt.

2. Fall. *Ist $\alpha_1 = 1$, so hat dieser Eigenwert die Vielfachheit 1. Es gibt eine adaptierte Basis $\mathfrak{b}_i$ von $\boldsymbol{V}$ mit*

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_0 + \mathfrak{b}_{n-l+1}, \tag{86}$$

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_i \cos\beta_i + \mathfrak{b}_{n-l+i} \sin\beta_i,\ i = 2, \ldots, n-m. \tag{87}$$

Beweis. Nach (83) ist in diesem Fall $pr_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{W}^\perp)$ isotrop. Wäre auch noch $\alpha_2 = 1$, so hätten wir in dieser Projektion zwei isotrope Vektoren $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_2 - \mathfrak{b}_2$, die linear abhängig sein müssten, weil $\boldsymbol{V}$ pseudo-euklidisch vom Index 1 ist, vgl. Definition 2.2.3 und die Bemerkung danach. Daraus folgte

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1\lambda - \mathfrak{a}_2\mu = \mathfrak{b}_1\lambda - \mathfrak{b}_2\mu$$

mit $\lambda\mu \neq 0$, also $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{c} \in \boldsymbol{U}^\perp \cap \boldsymbol{W}^\perp$, im Widerspruch zu (80). Nach (83) bestimmen wir durch Normierung der Projektionen von $\mathfrak{a}_i, i \geq 2$, die Vektoren $\mathfrak{b}_i$ so, dass (87) gilt. Das orthogonale Komplement der linearen Hülle $[\mathfrak{b}_{n-l+2}, \ldots, \mathfrak{b}_{2n-l-m}]$ in $\boldsymbol{U}$ ist pseudo-euklidisch; wir können daher den isotropen Vektor $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{b}_1 \in \boldsymbol{U}$ durch Wahl von $\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}_{n-l+1} \in \boldsymbol{U}$ so darstellen, dass (86) gilt.

3. Fall. *Ist $\alpha_1 < 1$, so gibt es eine adaptierte Basis $\mathfrak{b}_i$ von $\boldsymbol{V}$ mit*

$$\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}_i \cos\beta_i + \mathfrak{b}_{n-l+i} \sin\beta_i,\ i = 1, \ldots, n-m. \tag{88}$$

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus (83) durch Normierung der Projektionen der Vektoren $\mathfrak{a}_i$ auf $\boldsymbol{U}$.

Abschließend betrachten wir noch den Fall, dass die Bedingung A nicht erfüllt ist. Es sei $k + 1 = \dim \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$ und $k < n$ die Dimension des hyperbolischen Unterraums $\boldsymbol{A}^l \vee \boldsymbol{B}^m$. Dann gilt

$$df(\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m) := \dim \boldsymbol{U}^\perp \cap \boldsymbol{W}^\perp = n - k > 0.$$

Wir nennen $d = df(\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m)$ das *Defizit* der Unterräume $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m$. Offenbar ist das Defizit eine Invariante dieser Unterräume; für das Paar $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m$, betrachtet als Unterräume von $\boldsymbol{A}^l \vee \boldsymbol{B}^m$, ist die Bedingung A erfüllt, und wir erhalten $k - m = n - m - d(\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m)$ Eigenwerte als wesentliche Invarianten dieses Paares. Es sei bemerkt, dass alle Vektoren aus $\boldsymbol{U}^\perp \cap \boldsymbol{W}^\perp$ Eigenvektoren von A zum Eigenwert 1 sind, der für $d > 0$ stets auftritt. Zusammenfassend formulieren wir:

Satz 24. *Die Bedingung A sei erfüllt. Dann gibt es zu jedem Paar hyperbolischer Unterräume $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m \subset \boldsymbol{H}^n$, $0 \leq l \leq m < n$, eine adaptierte Basis von $\boldsymbol{V}$ mit den in den Fällen 1–3 angegebenen Eigenschaften. Zwei Paare mit denselben Eigenwerten α_i (73)und demselben Defizit sind kongruent; diese Größen bilden ein vollständiges Invariantensystem für die Wirkung der Isometriegruppe G_n auf den Produktmengen $H_{n,l} \times H_{n,m}$ dieser Paare. Ist $\mathfrak{a}_i$ ein Eigenvektor zu einem Eigenwert $\alpha_i > 0$, so realisieren die Hyperebenen $\boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_i) \supset \boldsymbol{B}^m$, $\boldsymbol{M}(p(\mathfrak{a}_i)) \supset \boldsymbol{A}^l$ die stationäre Invariante*

$$|I|(\boldsymbol{M}(\mathfrak{a}_i), \boldsymbol{M}(p(\mathfrak{a}_i))) = \sqrt{\alpha_i}, \quad (\alpha_i > 0).$$

Für jeden Eigenvektor $\mathfrak{w}$ zum Eigenwert $\alpha_\kappa = 0$ gilt $\mathfrak{w} \in \boldsymbol{U}$; die Hyperebene $\boldsymbol{M}(\mathfrak{w})$ ist orthogonal zu allen Hyperebenen $\hat{\boldsymbol{M}}$, die $\boldsymbol{A}^l$ enthalten. [7] □

Als eine Anwendung dieses Klassifikationsresultats wollen wir nun die folgende Verallgemeinerung von Satz 11 beweisen:

Satz 25. *Es seien $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m \subset \boldsymbol{H}^n$, $0 \leq l \leq m < n$, zwei Unterräume des hyperbolischen Raums. Genau dann existiert eine gemeinsame Senkrechte $\boldsymbol{x}_0 \vee \boldsymbol{y}_0$, $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{A}^l \setminus \boldsymbol{B}^m, \boldsymbol{y}_0 \in \boldsymbol{B}^m \setminus \boldsymbol{A}^l$, zu $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m$, wenn ihre größte Invariante $\alpha_1 > 1$ ist, wenn also die Unterräume windschief oder parallel sind. In diesem Fall gilt für die hyperbolischen Abstände*

$$h(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \min\{h(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) |\ \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}^m\} = \beta_1 \ \mathit{mit}\ \alpha_1 = \cosh \beta_1.$$

Das Senkrechtstehen ist dabei wie in Satz 11 für das Lot formuliert zu verstehen. Die Punkte $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0$, für die das Minimum der Abstände eintritt, sind eindeutig bestimmt.

B e w e i s. Beschränken wir uns auf den Unterraum $\boldsymbol{A}^l \vee \boldsymbol{B}^m$, so ist die Bedingung A erfüllt. Schneiden sich die Unterräume, und ist $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{A}^l \cap \boldsymbol{B}^m$ ein hyperbolischer Punkt, so ergäbe bei Existenz einer gemeinsamen Senkrechten das Tripel $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z})$ ein hyperbolisches Dreieck, dessen Winkelsumme größer als π wäre, was Satz 15 widerspricht. Aus Übung 12 ergibt sich, dass auch randparallele Unterräume ($\alpha_1 = 1$) keine gemeinsame Senkrechte besitzen. Wir betrachten nun den Fall $\alpha_1 > 1$ paralleler oder windschiefer Unterräume; für $l = 0, \boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{a}$, bedeutet windschief einfach $\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{B}^m$, und wir sind in der Situation von Satz 11. Um nun den allgemeinen Fall zu erledigen, benötigen wir eine geeignete, an die Situation angepasste Basis auch von $\boldsymbol{W}$, die wir durch Projektion der Vektoren $\mathfrak{b}_i \in \boldsymbol{U}^\perp, i = 1, \ldots, n-l$, gewinnen. Es gilt

$$pr_{\boldsymbol{W}} \mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_i - pr_{\boldsymbol{W}^\perp} \mathfrak{b}_i,\ i = 1, \ldots, n-l.$$

Nach (75) ist

$$pr_{\boldsymbol{W}^\perp} \mathfrak{b}_i = \mathfrak{a}_i \sqrt{\alpha_i}, \alpha_i = 0 \text{ für } i = r_A + 1, \ldots, n-l;$$

Diese letzte Festsetzung trägt der Tatsache $\mathfrak{b}_i \in \boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{U}^\perp, i = r_A + 1, \ldots, n-l$, Rechnung, vgl. (77). Es folgt

$$pr_{\boldsymbol{W}} \mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_i - \mathfrak{a}_i \sqrt{\alpha_i} \text{ für } i = 1, \ldots, n-l. \tag{89}$$

[7] Im wesentlichen dieselbe Klassifikation wurde ursprünglich im Rahmen der Möbius-Geometrie bewiesen, vgl. R. Sulanke [76].

Für die Skalarprodukte dieser Projektionen ergibt sich nach einer leichten Rechnung

$$\langle \mathfrak{b}_i - \mathfrak{a}_i\sqrt{\alpha_i}, \mathfrak{b}_j - \mathfrak{a}_j\sqrt{\alpha_j}\rangle = \delta_{ij}(1-\alpha_i),\ i,j = 1,\ldots,n-l. \tag{90}$$

Speziell ist die Projektion von $\mathfrak{b}_1$ zeitartig; wir definieren daher

$$\mathfrak{a}_0 := -(\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{a}_1\cosh\beta_1)/\sinh\beta_1 = \mathfrak{b}_0\cosh\beta_1 - \mathfrak{b}_1\sinh\beta_1, \tag{91}$$

wobei die letzte Gleichung aus (81) und (84) folgt. Die Normierung der übrigen Projektionen liefert unter Berücksichtigung von (82) und (85) für $i = 1,\ldots,n-l-1$

$$\mathfrak{a}_{n-m+i} := (\mathfrak{b}_{i+1} - \mathfrak{a}_{i+1}\sqrt{\alpha_{i+1}})/\sqrt{1-\alpha_{i+1}} = \mathfrak{b}_{i+1}\sin\beta_{i+1} - \mathfrak{b}_{n-l+i}\cos\beta_{i+1}. \tag{92}$$

Wenn nötig, ergänzen wir diese Basis noch zu einer pseudo-orthonormierten Basis von $\boldsymbol{W}$. Wir definieren nun $\boldsymbol{x}_0 := [\mathfrak{b}_0] \in \boldsymbol{A}^l$, $\boldsymbol{y}_0 := [\mathfrak{a}_0] \in \boldsymbol{B}^m$. Wegen $\langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0\rangle = -\cosh\beta_1$ erhalten wir für den Abstand dieser Punkte $h(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \beta_1$. Wir zeigen, dass die Gerade $\boldsymbol{x}_0 \vee \boldsymbol{y}_0$ auf jeder Geraden durch $\boldsymbol{y}_0$ in $\boldsymbol{B}^m$ orthogonal ist. Vom Aufpunkt $\boldsymbol{y}_0$ aus hat $\boldsymbol{x}_0 \vee \boldsymbol{y}_0$ die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{x}(t) = \mathfrak{a}_0\cosh t + \frac{\mathfrak{b}_0 - \mathfrak{a}_0\cosh\beta_1}{\sinh\beta_1}\sinh t.$$

Eine beliebige Gerade durch $\boldsymbol{y}_0$ in $\boldsymbol{B}^m$ hat die Darstellung

$$\mathfrak{z}(s) = \mathfrak{a}_0\cosh s + \mathfrak{a}^\perp\sinh s,\ \mathfrak{a}^\perp \in \boldsymbol{W}, \langle\mathfrak{a}^\perp, \mathfrak{a}^\perp\rangle = 1, \langle\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}^\perp\rangle = 0. \tag{93}$$

Aus (91) und (92) erhält man leicht

$$\langle \mathfrak{b}_0 - \mathfrak{a}_0\cosh\beta_1, \mathfrak{a}^\perp\rangle = 0.$$

Aus der Winkeldefinition sich schneidender Geraden (Beispiel 5) folgt die Orthogonalität. Analog beweist man die Orthogonalität von $\boldsymbol{x}_0 \vee \boldsymbol{y}_0$ zu jeder Geraden durch $\boldsymbol{x}_0$ in $\boldsymbol{A}^l$. Um die behauptete Abstandseigenschaft zu zeigen, betrachten wir analog (93) noch die Parameterdarstellung

$$\mathfrak{y}(t) = \mathfrak{b}_0\cosh t + \mathfrak{b}^\perp\sinh t,\ \mathfrak{b}^\perp \in \boldsymbol{U}, \langle\mathfrak{b}^\perp, \mathfrak{b}^\perp\rangle = 1, \langle\mathfrak{b}_0, \mathfrak{b}^\perp\rangle = 0.$$

und untersuchen die Funktion

$$f(s,t) := -\langle\mathfrak{y}(t), \mathfrak{z}(s)\rangle = \cosh\beta_1\cosh s\cosh t - \cos\gamma\sinh s\sinh t = \cosh h([\mathfrak{y}(t)], [\mathfrak{z}(s)]),$$

die den Abstand der (im wesentlichen beliebigen) Punkte $[\mathfrak{y}(t)] \in \boldsymbol{A}^l, [\mathfrak{z}(s)] \in \boldsymbol{B}^m$ beschreibt. Dabei konnte

$$\cos\gamma = \langle\mathfrak{a}^\perp, \mathfrak{b}^\perp\rangle$$

gesetzt werden, weil diese beiden Einheitsvektoren zu $\mathfrak{a}_0$ und $\mathfrak{b}_0$ orthogonal sind und folglich einen euklidischen Unterraum aufspannen. Eine elementare Extremalbetrachtung zeigt, dass diese Funktion nur für $s = t = 0$ ein Extremum hat, welches die behauptete Minimaleigenschaft besitzt. Überdies folgt, dass die *Fußpunkte* $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0$ eindeutig bestimmt sind. □

Auf Grund von Satz 25 definieren wir den *Abstand der parallelen oder windschiefen hyperbolischen Unterräume* $h(\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m) := h(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \beta_1$. Für sich schneidende Unterräume ist ihr Abstand natürlich gleich Null, wenn man allgemein für zwei MengenA, B eines metrischen Raumes mit der Metrik ρ ihren Abstand wie folgt definiert:

$$\rho(A, B) := \inf\{\rho(a, b)|\ a \in A, b \in B\}. \tag{94}$$

Für *randparallele Unterräume* $\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m$ *ist in diesem Sinne der Abstand* $h(\boldsymbol{A}^l, \boldsymbol{B}^m) = 0$. (Beweis als Übung; es genügt, randparallele Geraden in der Ebene zu betrachten.)

2.7 Möbius-Geometrie

Wie bereits in der Einleitung zum vorigen Abschnitt bemerkt, ist die *Möbius-Geometrie* aus projektiver Sicht die Geometrie auf der Hypersphäre des projektiven Raumes, die durch die Isotropiegruppe der Hypersphäre auf ihr selbst bestimmt wird. Diese im Kontext mit der Möbius-Geometrie *Möbius-Gruppe* genannte Gruppe wirkt nach Folgerung 3.1 transitiv auf der Hypersphäre und lässt, wie wir gleich zeigen werden, die Winkel zwischen sich schneidenden Kreisen invariant; in der Differentialgeometrie wird bewiesen, dass sie die konforme Gruppe der Hypersphäre mit der durch die Standardeinbettung der Sphären in den euklidischen Raum induzierten Riemannschen Metrik ist. Historisch erschien die Möbius-Gruppe daher zuerst als Gruppe der global definierten konformen Abbildungen der Riemannschen Sphäre S^2 in der Theorie der komplexen Funktionen. Andererseits ist die Möbius-Gruppe die Isometriegruppe der auf dem Innengebiet der Hypersphäre definierten hyperbolischen Metrik, vgl. Folgerung 6.10. Hieraus ergibt sich im Rahmen der projektiven Geometrie ein sehr natürlicher Zusammenhang mit der hyperbolischen Geometrie, den wir im nächsten Abschnitt 7.1 anwenden, um die Winkelinvarianten der hyperbolischen Geometrie in die Möbius-Geometrie zu übertragen.

2.7.1 Sphären im Möbius-Raum

In enger Anlehnung an Abschnitt 2.6 verabreden wir folgende Bezeichnungen: Es sei $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^{n+2}$ der $n+2$-dimensionale pseudo-euklidische Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle , \rangle$ vom Index 1, $\boldsymbol{P}^{n+1}$ der zugehörige projektive Raum. Unter dem *n-dimensionalen Möbius-Raum* S^n verstehen wir die dem Skalarprodukt $\langle , \rangle$ entsprechende Hypersphäre Q (vgl. (6.3)) des $n+1$-dimensionalen reellen projektiven Raumes $\boldsymbol{P}^{n+1}$. Wir behalten also im wesentlichen die Bezeichnungen des Abschnitts 2.6 bei, wobei wir die Dimension um 1 erhöhen, damit, wie gewohnt, die Dimension des Raums der jetzt zu beschreibenden Geometrie wieder die Bezeichnung n erhält. Schon in Lemma 6.19 haben wir die Isotropiegruppe eines Punktes $\boldsymbol{x} \in S^n$ in Bezug auf eine isotrop-orthogonale Basis durch Blockmatrizen beschrieben; es folgt

Satz 1. *Der Möbius-Raum S^n ist ein homogener Raum mit der durch die projektive Wirkung von $G_{n+1} = \boldsymbol{O}(1, n+1)^+ \subset \boldsymbol{O}(1, n+1)$ induzierten Wirkung. Als Faktorraum ist er isomorph zu*

$$S^n \cong G_{n+1}/CE(n), \tag{1}$$

wobei $CE(n)$ die konform-euklidische Gruppe *bezeichnet, welche durch die Matrixdarstellung* (6.61) *(mit $n-1$ ersetzt durch n) in G_{n+1} eingebettet ist.* □

Zur Rechtfertigung dieser Bezeichnung definieren wir zunächst die *Gruppe der Ähnlichkeiten* des euklidischen Raumes $\boldsymbol{E}^n$: eine *Ähnlichkeit* ist ein Produkt einer euklidischen Transformationen mit einer Dehnung. Diese Transformationen bilden eine Untergruppe der affinen Gruppe des euklidischen Raumes $\boldsymbol{E}^n$; mit differentialgeometrischen und für $n = 2$ mit funktionentheoretischen Methoden kann man beweisen, dass sie die Gruppe aller konformen (d.h. winkeltreuen) Transformationen von $\boldsymbol{E}^n$, $n \geq 2$, ist. Die in Satz 1 definierte Gruppe $CE(n)$ ist zur Gruppe der Ähnlichkeiten isomorph:

Übung 1. Man beweise, dass die durch die Matrizen (6.61) beschriebene Gruppe zur Gruppe der Ähnlichkeiten des euklidischen Raumes $\boldsymbol{E}^n$ isomorph ist. (Hinweis. Als Modell des Möbius-Raumes S^n nehme man die von der euklidischen Hyperebene

$$\boldsymbol{E}^{n+1}: \; -\langle \mathfrak{e}_0, \mathfrak{x} \rangle = -\langle \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_{n+1}, \mathfrak{x} \rangle / \sqrt{2} = 1$$

des pseudo-orthogonalen Vektorraums $\boldsymbol{V}$ aus dem isotropen Kegel $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = 0$ ausgeschnittene Einheitshypersphäre. Hier und im Folgenden bezeichnet $(\mathfrak{e}_i)$ eine pseudo-orthonormierte Basis und $(\mathfrak{a}_i)$, $i = 0, \ldots, n+1$, die mit ihr durch (6.58) verknüpfte isotrop-orthogonale Basis. Der Fixpunkt $\boldsymbol{s} := [\mathfrak{a}_0] = [\mathfrak{e}_0 - \mathfrak{e}_{n+1}] \in S^n$ sei der Südpol der stereographischen Projektion $st : S^n \setminus \{\boldsymbol{s}\} \to \boldsymbol{E}^n$ von S^n auf die durch $\langle \mathfrak{e}_{n+1}, \mathfrak{x} \rangle = 0$ bestimmte Äquatorebene $\boldsymbol{E}^n \subset \boldsymbol{E}^{n+1}$ von S^n (vgl. (6.18) und die Übung 6.5). Die Zuordnung $g \in CE(n) \longmapsto st \circ g \circ st^{-1}$ beschreibt die gesuchte Isomorphie. Hierbei entsprechen die Bestandteile $A, \mathfrak{a}, \lambda$ des Elements $g = a(A, \mathfrak{a}, \lambda)$ jeweils den Drehungen oder Drehspiegelungen, Translationen bzw. Dehnungen in der Gruppe der Ähnlichkeiten von $\boldsymbol{E}^n$.)

Wir können also die Gruppe der Ähnlichkeiten mit der konform-euklidischen Gruppe identifizieren. Offenbar erhalten alle Ähnlichkeiten die Winkel sich schneidender Geraden und sind daher konform. Geometrische Charakterisierungen der konform-euklidischen Gruppe enthalten die beiden folgenden Übungen.

Übung 2. Man beweise, dass die konform-euklidische Gruppe $CE(n)$ für $n \geq 2$ mit der Gruppe derjenigen bijektiven Abbildungen des $\boldsymbol{E}^n$ übereinstimmt, die Paare sich schneidender orthogonaler Geraden wieder in ebensolche Paare überführt. (Hinweis. Man wende Satz 1.5.6 an und betrachte die Bilder sich orthogonal im Ursprung schneidender Geraden mit den Richtungsvektoren $\mathfrak{e}_i + \mathfrak{e}_j, \mathfrak{e}_i - \mathfrak{e}_j$ für $i \neq j$.) Daraus ergibt sich natürlich unmittelbar, dass die konform-euklidische Gruppe $CE(n)$ für $n \geq 2$ mit der Gruppe derjenigen bijektiven Abbildungen des $\boldsymbol{E}^n$ übereinstimmt, welche Geraden in Geraden überführen und die Winkel von sich schneidenden Geraden invariant lassen.

Übung 3. Man zeige, dass die konform-euklidische Gruppe $CE(n)$ für $n \geq 2$ die Gruppe derjenigen bijektiven Abbildungen des $\boldsymbol{E}^n$ ist, welche Geraden in Geraden und Kreise in Kreise überführen. (Hinweis. Man beachte den Satz des Thales und wende die vorige Übung an.)

Die Verwendung von isotrop-orthogonalen Koordinaten ist oft zweckmäßig, wenn man sich auf die Punkte von S^n als einfachste Grundobjekte konzentriert. Die neben den Punkten wichtigsten elementaren Objekte der Möbius-Geometrie sind die m-Sphären, für deren Untersuchung wir wegen der engen Beziehung zu den hyperbolischen $m+1$-Ebenen wieder pseudo-orthonormierte Koordinaten benutzen. Unter einer *m-dimensionalen Teilsphäre* $S^m \subset S^n$, kurz *m-Sphäre*, verstehen wir den Durchschnitt einer hyperbolischen

$m+1$-Ebene $\boldsymbol{B}^{m+1}$ mit S^n. Genauer: Ist $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$ ein $m+2$-dimensionaler pseudo-euklidischer Unterraum und $\boldsymbol{B}^{m+1}(\boldsymbol{W})$ der entsprechende projektive Unterraum, so sei die zugehörige m-Sphäre definiert durch

$$S^m = S^m(\boldsymbol{W}) := \boldsymbol{B}^{m+1}(\boldsymbol{W}) \cap S^n, \; m = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Dabei sind 0-Sphären beliebige Zweiermengen $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, 1-Sphären sind *Kreise* und $n-1$-Sphären *Hypersphären* von S^n. Die m-Sphären selbst sind als nicht ausgeartete Quadriken vom Index 1 in $m+1$-dimensionalen projektiven Räumen wieder m-dimensionale Möbius-Räume. Wir bezeichnen mit $S_{n,m}, m = 0, \ldots, n$, die Menge der m-Sphären des Möbius-Raumes S^n. Offenbar ist die Abbildung

$$F : \; \boldsymbol{B}^{m+1} \; \in H_{n+1,m+1} \longmapsto S^m = \boldsymbol{B}^{m+1} \cap S^n \in S_{n,m} \tag{3}$$

bijektiv und ein äquivarianter Isomorphismus der Transformationsgruppe $H_{n+1,m+1}$ der hyperbolischen $m+1$-Ebenen auf $S_{n,m}$, d.h. es gilt

$$F(g\boldsymbol{B}^{m+1}) = gF(\boldsymbol{B}^{m+1}) \text{ für alle } g \in G_{n+1}, \boldsymbol{B}^{m+1} \in H_{n+1,m+1},$$

und das gilt entsprechend auch für die in Potenzmengen, Produktmengen u.s.w. durch Fortsetzung der Wirkungen erzeugten Transformationsgruppen von G_{n+1}. Aus den Transitivitätseigenschaften der Wirkungen von G_{n+1} in der hyperbolischen Geometrie ergibt sich unmittelbar:

Folgerung 2. *Die Möbius-Gruppe G_{n+1} wirkt transitiv auf den Mengen $S_{n,m}$ der m-Sphären des Möbius-Raumes S^n, $m = 0, 1, \ldots, n$.* $\square$

Die Möbius-Gruppe wurde durch Einschränkung der Isometriegruppe G_{n+1} des hyperbolischen Raumes auf die berandende Quadrik $Q = S^n$ definiert. Der folgende Satz enthält geometrische Charakterisierungen dieser Gruppe.

Satz 3. *Die Möbius-Gruppe G_{n+1}, $n \geq 2$, ist die Gruppe derjenigen bijektiven Abbildungen von S^n auf sich, die Kreise wieder in Kreise überführen. Sie ist auch die Gruppe derjenigen bijektiven Abbildungen von S^n auf sich, die Hypersphären wieder in Hypersphären überführen.*

B e w e i s. Nach Folgerung 2 transformieren die Möbius-Transformationen $g \in G_{n+1}$ die Kreise unter sich. Sei nun umgekehrt $F : S^n \to S^n$ eine bijektive Abbildung, die Kreise wieder in Kreise überführt. Wir betrachten das in Übung 1 beschriebene Modell von S^n und die stereographische Projektion st. Weil nach Satz 1 die Gruppe G_{n+1} transitiv auf S^n wirkt, finden wir eine Möbius-Transformation $g \in G_{n+1}$ mit $g(F(\boldsymbol{s})) = \boldsymbol{s}$. Wenn wir zeigen können, dass die Abbildung $F_o = g \circ F$ eine Möbius-Transformation ist, so ist auch $F = g^{-1} \circ F_o$ eine Möbius-Transformation; wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass F den Südpol fest lässt: $F(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{s}$. Wir betrachten nun die Abbildung $f := st \circ F \circ st^{-1}$, die eine Bijektion des euklidischen Raumes $\boldsymbol{E}^n$ auf sich ist. Weil F die Kreise durch $\boldsymbol{s}$ wieder in Kreise durch $\boldsymbol{s}$ überführt, die ja durch st mit den Geraden von $\boldsymbol{E}^n$ bijektiv verknüpft sind, bildet f die Menge der Geraden von $\boldsymbol{E}^n$ bijektiv auf sich ab und ist daher nach Satz 1.5.6 eine affine Abbildung. Nach Lemma 6.3 gehen die Kreise des euklidischen Raumes bei st^{-1} in die Kreise von S^n über, welche nicht durch $\boldsymbol{s}$ gehen. Weil diese Menge durch F ebenfalls bijektiv auf sich transformiert wird, bildet f die Menge der Kreise von $\boldsymbol{E}^n$ bijektiv auf sich ab; nach Übung 3 ist f also eine Ähnlichkeit. Nach Übung 1 gehört daher F zur konform-euklidischen Untergruppe $CE(n) \subset G_{n+1}$. Der ähnliche Beweis der zweiten Behauptung sei dem Leser überlassen. □

Beispiel 1. Nicht zur konform-euklidischen Gruppe gehörende Beispiele von Möbius-Transformationen sind die *Spiegelungen an Hypersphären*, die auch *Inversionen* genannt werden. Oft verwendet man den Terminus *Inversionsgeometrie* an Stelle von Möbius-Geometrie, man vergleiche etwa die sehr anschauliche einführende Darstellung mit dem Titel „Inversive Geometry“ von J. B. Wilker [81]. In dem durch den Punkt ∞ zur n-Sphäre S^n kompaktifizierten euklidischen Raum wird die Spiegelung s an der Hypersphäre Σ^{n-1} mit dem Zentrum $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{o} + \mathfrak{m}$ und dem Radius r wie folgt definiert:

$$s(\boldsymbol{x}) = s(\boldsymbol{m} + \mathfrak{x}) := \boldsymbol{m} + \frac{\mathfrak{x} r^2}{\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle} \text{ für } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{m}, \infty;\ s(\boldsymbol{m}) := \infty,\ s(\infty) := \boldsymbol{m}. \tag{4}$$

Die Abstand vom Bild $\boldsymbol{y} = s(\boldsymbol{x})$ zum Zentrum ist also umgekehrt proportional zum Abstand des Urbildes vom Zentrum:

$$|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{m}||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}| = r^2,$$

und der Bildpunkt $\boldsymbol{y}$ liegt auf dem radialen Strahl durch $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{m}, \infty$, wobei die letzten beiden Punkte miteinander vertauscht werden. Man prüft leicht nach, dass s involutiv ist, und dass die Menge der Fixpunkte von s gleich der Hypersphäre Σ ist. Wir zeigen, dass s einer Möbius-Transformation von S^n entspricht. Durch eine Ähnlichkeit kann man stets erreichen, dass die s definierende Hypersphäre die Einheitshypersphäre des euklidischen Raums $\boldsymbol{E}^n$ mit dem Zentrum im Ursprung $\boldsymbol{o}$ ist. $\mathfrak{x}$ ist dann der Ortsvektor des Punktes $\boldsymbol{x}$, und der Ortsvektor $\mathfrak{y}$ des Bildpunktes $\boldsymbol{y}$ ist gegeben durch $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}/|\mathfrak{x}|^2$. Im pseudo-euklidischen Vektorraum $\boldsymbol{V}$ seien in Bezug auf eine gegebene pseudo-orthonormierte Basis die Spiegelungen F_i an den Koordinatenhyperebenen $x^i = 0$ wie üblich definiert durch

$$F_i(\mathfrak{e}_i) = -\mathfrak{e}_i,\ F_i(\mathfrak{e}_j) = \mathfrak{e}_j \text{ für } j \neq i;\ i, j = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Offenbar ist jede derartige Spiegelung pseudo-orthogonal, erzeugt also eine Möbius-Transformation. Mit der in Übung 1 verwendeten stereographischen Projektion kann man nachrechnen, dass $s = st \circ F_{n+1} \circ st^{-1}$ gilt. Umgekehrt erzeugt natürlich auch jede Spiegelung an einem pseudo-euklidischen $n+1$-dimensionalen Unterraum $\boldsymbol{W}^{n+1} \subset \boldsymbol{V}$ eine Spiegelung an einer Hypersphäre oder Hyperebene des $\boldsymbol{E}^n$; im Sinne der Möbius-Geometrie unterscheiden sich diese Spiegelungen nicht. Man erkennt leicht, dass diese Abbildungen als diejenigen von der Identität verschiedenen Möbius-Transformationen definiert werden können, deren Fixpunktmenge eine Hypersphäre ist. Der nächste Satz rechtfertigt die Bezeichnung Inversionsgeometrie. □

Satz 4. *Jede Möbius-Transformation ist als Produkt von endlich vielen Inversionen darstellbar.*[1]

[1] J. B. Wilker [81] beweist, dass jede Möbius-Transformation $g \in G_{n+1}$ als Produkt von höchstens $n+2$ Inversionen darstellbar ist.

Beweis. Nach Satz 2.3.5 ist jede Transformation $g \in G_{n+1}$ als Produkt von höchstens $n+2$ Spiegelungen an nicht isotropen, $n+1$-dimensionalen Unterräumen darstellbar. Die Spiegelungen an den pseudo-euklidischen Unterräumen sind gerade die im vorigen Beispiel betrachteten Inversionen. Ist der Unterraum der Fixvektoren euklidisch, so können wir die Basis $(\mathfrak{e}_i)$ von $\boldsymbol{V}$ so wählen, dass diese Spiegelung mit der in Beispiel 1 definierten Abbildung F_0 übereinstimmt, also die Koordinatendarstellung

$$y^0 = -x^0,\ y^j = x^j \text{ für } j = 1, \ldots, n+1$$

hat. Da nun F_0 und $-F_0$ dieselbe Möbius-Transformation ergeben, können wir statt F_0 auch $-F_0$ in die Darstellung von g einsetzen. Diese Abbildung ist nun wieder ein Produkt von endlich vielen Inversionen:

$$-F_0 = F_1 \circ \ldots \circ F_{n+1}.\ \square$$

Dieser Satz wird oft als Ausgangspunkt einer Definition der Möbius-Geometrie benutzt: Die Möbius-Geometrie ist danach die Gesamtheit der geometrischen Begriffe und Eigenschaften, die bei beliebigen Inversionen invariant sind. Wir bemerken noch, dass wir den Möbius-Raum mit einer *Orientierung* versehen können. Jedem pseudo-orthonormierten Repère $(\mathfrak{e}_i)$, $i = 0, \ldots, n+1$, ordnen wir den *Südpol* $\boldsymbol{s} := [\mathfrak{e}_0 - \mathfrak{e}_{n+1}]$ und das *Koordinatensimplex* $(\boldsymbol{a}_i) := ([\mathfrak{e}_i + \mathfrak{e}_0])$, $i = 1, \ldots, n+1$, zu. Die in der Definition benutzten normierten Vertreter liegen in der Hyperebene $x_0 = -\langle \mathfrak{e}_0, \mathfrak{x} \rangle = 1$ und haben die positive Determinante 2. Jedes orientierte n-Simplex $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n+1})$ können wir in diesem Repère mit normierten Vertretern

$$\mathfrak{x}_i = \mathfrak{e}_0 + \sum_{j=1}^{n+1} \mathfrak{e}_j \xi_i^j$$

darstellen und erhalten für die Determinanten

$$D := [\mathfrak{e}_0, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n+1}] = \det(\xi_i^j).$$

Ist $D > 0$, so ist das n-Simplex *positiv orientiert* in Bezug auf die Basis $(\mathfrak{e}_i)$. Offenbar gibt es zwei Klassen pseudo-orthonormierter Repères: diejenigen, deren Koordinatensimplex in Bezug auf ein festes Repère positiv bzw. negativ orientiert sind. Ist in dem S^n definierendem Vektorraum $\boldsymbol{V}$ eine dieser Klassen ausgezeichnet, so sprechen wir von einem *orientierten Möbius-Raum*; in diesem können wir von positiv bzw. negativ orientierten n-Simplices sprechen. Wie schon bei der Betrachtung orientierter hyperbolischer Räume erhält eine Abbildung $g \in G_{n+1}$ die Orientierung, wenn ihre Determinante gleich eins ist, also g zur speziellen pseudo-orthogonalen Gruppe $\boldsymbol{SO}(1, n+1)$ gehört. Da auch diese transitiv auf S^n wirkt, erscheint der orientierte Möbius-Raum als Faktorraum

$$S^n \cong \boldsymbol{SO}(1, n+1)/SCE(n),$$

wobei $SCE(n)$ die Gruppe der Ähnlichkeiten mit positiver Determinante, also der orientierungserhaltenden Ähnlichkeiten des euklidischen Raums bezeichnet.

2.7.2 Paare von Teilsphären

Die Definition des Möbius-Raums S^n und die im vorigen Abschnitt beschriebene Äquivarianz der Wirkung von G_{n+1} über den hyperbolischen $(m+1)$-Ebenen und den m-Sphären gestattet es, unmittelbar und rein formal von den in Satz 6.24 beschriebenen Invarianten der Paare hyperbolischer Unterräume auf die Invarianten von Teilsphärenpaaren zu schließen:

Satz 5. *Es sei F der in* (3) *beschriebene äquivariante Isomorphismus. Bezeichnen*

$$\boldsymbol{A}^{l+1} = F^{-1}(S(\boldsymbol{U})), \boldsymbol{B}^{m+1} = F^{-1}(S(\boldsymbol{W}))$$

die den Teilsphären $S(\boldsymbol{U}) \in S_{n,l}, S(\boldsymbol{W}) \in S_{n,m}$ mit $0 \leq l \leq m < n$ entsprechenden hyperbolischen Unterräume, so sind die stationären Invarianten und das Defizit dieser Unterräume auch Möbius-Invarianten der Sphärenpaare; dieses Defizit und die Eigenwerte (6.73) *des dem Unterraumpaar zugeordneten Operators $A \in \mathrm{End}(\boldsymbol{W}^{\perp})$ sind ein vollständiges Invariantensystem für die Wirkung der Möbius-Gruppe auf $S_{n,l} \times S_{n,m}$.* □

Man beachte, dass für die Dimensionen der Unterräume jetzt

$$\dim \boldsymbol{U} = l+2, \dim \boldsymbol{U}^{\perp} = n-l, \dim \boldsymbol{W} = m+2, \dim \boldsymbol{W}^{\perp} = n-m$$

gelten, so dass natürlich die Anzahl der Invarianten trotz des Unterschieds der Dimensionen der Räume $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{V}$ übereinstimmt.

Wir wollen nun diese Invarianten im Sinne der Möbius-Geometrie geometrisch deuten und nach Möglichkeit durch euklidische Invarianten der Sphärenpaare ausdrücken; die Möbius-Invarianten sind ja erst recht bei der Untergruppe der euklidischen Transformationen invariant, sie sind also Funktionen der Invarianten eines vollständigen euklidischen Invariantensystems der Paare. Bevor wir speziell einzelne Dimensionen diskutieren, betrachten wir die in Lemma 6.23 beschriebenen Fälle 1. - 3. allgemein, wobei zuerst wieder die Bedingung A aus Abschnitt 6 als erfüllt angenommen sei. Diese Bedingung bedeutet in der Möbius-Geometrie:

Bedingung A. *Für das betrachtete Paar $S_1, S_2 \subset S^n$ von Teilsphären gibt es keine Hypersphäre $\Sigma \subset S^n$ mit $S_1 \cup S_2 \subset \Sigma$.*

Wie für projektive Räume üblich bezeichnen wir die von einer Menge $M \subset S^n$ erzeugte Teilsphäre mit $[M]$; das ist der Durchschnitt aller Teilsphären, die M enthalten. Schließlich sei

$$S_1 \vee S_2 := [S_1 \cup S_2]$$

Gilt für die Dimension $\dim S_1 \vee S_2 = n - d$, so heißt d wieder das *Defizit* des Teilsphärenpaares $df(S_1, S_2) = d$.

Beispiel 2. Die Hypersphären entsprechen bijektiv den hyperbolischen Hyperebenen, also den $n+1$-dimensionalen pseudo-euklidischen Unterräumen $\boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{V}$. Diese sind wiederum durch ihre eindimensionalen orthogonalen Komplemente $\boldsymbol{W}^{\perp} = [\mathfrak{u}]$, $\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{u} \rangle > 0$, bijektiv bestimmt. Die zu $\mathfrak{u}$ gehörende Hypersphäre bezeichnen wir mit $\Sigma(\mathfrak{u})$. Es gilt also

$$\Sigma(\mathfrak{u}) := \pi([\mathfrak{u}]^{\perp}) \cap S^n. \tag{5}$$

Der Raum $S_{n,n-1}$ der Hypersphären wird wie der Raum der hyperbolischen Hyperebenen durch das einschalige Hyperboloid $\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{u} \rangle = 1$ der raumartigen Einheitsvektoren zweifach überlagert, vgl. Beispiel 6.1, Abbildung 2.14. Führt man mit Hilfe der Orientierung der

Hyperebenen *orientierte Hypersphären* ein, so wird die Menge der orientierten Hyperebenen bijektiv durch die raumartigen Einheitsvektoren repräsentiert. Zwei Hypersphären $\Sigma_1 = \Sigma(\mathfrak{u}), \Sigma_2 = \Sigma(\mathfrak{w})$ haben genau eine Invariante:

$$|I|(\Sigma_1, \Sigma_2) := \frac{|\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{w} \rangle|}{|\mathfrak{u}||\mathfrak{w}|}, \tag{6}$$

vgl. Beispiel 6.4. Für orientierte Hypersphären ist das Vorzeichen des Skalarprodukts zu berücksichtigen:

$$I(\Sigma_1, \Sigma_2) := \frac{\langle \mathfrak{u}, \mathfrak{w} \rangle}{|\mathfrak{u}||\mathfrak{w}|}.$$

Gilt $|I|(\Sigma_1, \Sigma_2) < 1$, so ist der Durchschnitt $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$ der sie bestimmenden Vektorräume pseudo-euklidisch und bestimmt daher eine $(n-2)$-Sphäre. Der *Winkel β der sich schneidenden Hypersphären* ist nach Definition gleich dem Winkel der sie bestimmenden hyperbolischen Hyperebenen: $\cos\beta := I(\Sigma_1, \Sigma_2)$, $0 < \beta \leq \pi$, für orientierte Hypersphären, bzw. $\cos\beta := |I|(\Sigma_1, \Sigma_2)$, $0 < \beta \leq \pi/2$, für nicht orientierte. Gilt die Bedingung A, so ist $|I|(\Sigma_1, \Sigma_2) = 1$ genau dann, wenn die Hypersphären sich berühren; der Durchschnitt $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$ ist dann isotrop und definiert daher genau einen Punkt des Möbius-Raums S^n. Die Bedingung A ist genau dann nicht erfüllt, wenn $\Sigma_1 = \Sigma_2$ ist. In diesem Fall gilt ebenfalls $|I|(\Sigma_1, \Sigma_2) = 1$; im Unterschied zu den sich berührenden, aber verschiedenen Hypersphären ist das Defizit jetzt gleich 1. Im Fall $|I|(\Sigma_1, \Sigma_2) > 1$ ist der Durchschnitt $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$ euklidisch, die Hypersphären schneiden sich nicht. Weiter unten geben wir eine geometrische Deutung der Invariante $|I|(\Sigma_1, \Sigma_2)$ auch in diesem Fall an.□

Wir kehren nun zu der in Satz 5 beschriebenen allgemeinen Situation zurück. Dieser Satz bezieht sich auf Satz 6.24 und die Eigenwerte (6.73); wir behalten die dort benutzten Bezeichnungen bei. Das Extremalproblem mit Nebenbedingungen für die Funktion (6.67) hat jetzt folgende geometrische Interpretation: *Man finde die relativen Extrema der Invariante $I(\Sigma_1, \Sigma_2)$ aller derjenigen Hypersphärenpaare (Σ_1, Σ_2), welche die Teilsphären enthalten, d.h. $S_1 \subset \Sigma_1$ und $S_2 \subset \Sigma_2$ erfüllen.* Wir diskutieren die Fälle im Einzelnen.

Fall 1. $\alpha_1 > 1$. In diesem Fall ist $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} = (\boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp)^\perp$ euklidisch oder gleich $\{\mathfrak{o}\}$, die projektiven Unterräume schneiden sich im Außengebiet $A(S^n)$, und die Teilsphären sind disjunkt. Zusätzlich können wir etwas genauer zeigen:

Lemma 6. *Ist die maximale Invariante α_1 der Teilsphären $S_1^l = S(\boldsymbol{U}), S_2^m = S(\boldsymbol{W})$ größer als 1, so sind diese Teilsphären disjunkt, und es gibt Hypersphären Σ_1, Σ_2, die S_1^l, S_2^m trennen, d.h. für die*

$$S_1^l \subset \Sigma_1,\ S_2^m \subset \Sigma_2 \text{ und } \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset \tag{7}$$

erfüllt ist.

B e w e i s. Die Dimension des pseudo-euklidischen Unterraums $\boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp$ ist mindestens gleich 2. Daher können wir einen zeitartigen Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{u} + \mathfrak{w} \in \boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp$ mit $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{U}^\perp$, $\mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}^\perp$ finden. Für den Durchschnitt der den raumartigen Vektoren $\mathfrak{u}, \mathfrak{w}$ entsprechenden Hyperebenen gilt folglich: Der Unterraum

$$[\mathfrak{u}]^\perp \cap [\mathfrak{w}]^\perp = ([\mathfrak{u}] + [\mathfrak{w}])^\perp$$

ist euklidisch; die Hyperebenen schneiden sich also im Außengebiet von S^n, und die entsprechenden Hypersphären Σ_1, Σ_2 erfüllen (7). □

Fall 2. $\alpha_1 = 1$. Unter der Bedingung A ist dann der Unterraum $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$ isotrop, vgl. Lemma 6.23; *daher ist der Durchschnitt $S_1 \cap S_2$ einpunktig; dieser Punkt ist der Berührungspunkt des tangentiellen Unterraums $\boldsymbol{A}^{l+1} \cap \boldsymbol{B}^{m+1}$ mit der n-Sphäre.*

Fall 3. $\alpha_1 < 1$. In diesem Fall ist der Unterraum $\boldsymbol{A}^{l+1} \cap \boldsymbol{B}^{m+1}$ hyperbolisch. Wir haben jedoch nun zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

Fall 3.a. $\alpha_1 < 1$, und es gilt $\operatorname{Dim} \boldsymbol{A}^{l+1} \cap \boldsymbol{B}^{m+1} = 0$.

Lemma 7. *Es seien $S_1^l, S_2^m \subset S^n$ zwei Teilsphären mit dem maximalen Eigenwert $\alpha_1 < 1$; für die Dimensionen gelte $l + m = n - 1$. Dann sind die Teilsphären S_1^l, S_2^m disjunkt und* verkettet, *d.h. es gilt $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, und für beliebige Hypersphären Σ_1, Σ_2 mit $S_1^l \subset \Sigma_1,\ S_2^m \subset \Sigma_2$, gilt $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$.*

Beweis. Die Anwendung der Dimensionsformel zeigt, dass die Voraussetzungen zum Eintreten von Fall 3.a äquivalent sind. Da der Durchschnitt $\boldsymbol{A}^{l+1} \cap \boldsymbol{B}^{m+1}$ in diesem Fall ein hyperbolischer Punkt ist, sind die entsprechenden Teilsphären disjunkt. Der dem Punkt entsprechende eindimensionale Vektorraum ist zeitartig. Folglich ist der Unterraum $\boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp = (\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W})^\perp$ euklidisch. Damit ist auch der von zwei Einheitsvektoren $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{U}^\perp$, $\mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}^\perp$ erzeugte Unterraum euklidisch, also sein orthogonales Komplement ein n-dimensionaler pseudo-euklidischer Unterraum $[\mathfrak{u}, \mathfrak{w}]^\perp = [\mathfrak{u}]^\perp \cap [\mathfrak{w}]^\perp$, welcher den Durchschnitt der Hypersphären $\Sigma_1(\mathfrak{u}) \cap \Sigma_2(\mathfrak{w})$ bestimmt, der folglich eine $(n-2)$-Sphäre ist. Da $\mathfrak{u} \in \boldsymbol{U}^\perp$, $\mathfrak{w} \in \boldsymbol{W}^\perp$ beliebige Einheitsvektoren sind, gilt das für beliebige Hypersphären mit $S_1^l \subset \Sigma_1,\ S_2^m \subset \Sigma_2$. □

Fall 3.b. $\alpha_1 < 1$, und es gilt $k := \operatorname{Dim} \boldsymbol{A}^{l+1} \cap \boldsymbol{B}^{m+1} > 0$. *In diesem Fall schneiden sich die Teilsphären S_1^l, S_2^m in einer $k-1$-Sphäre.*

In jedem der betrachteten Fälle bestimmen per definitionem

$$\sqrt{\alpha_i} = \cos \beta_i, \text{ falls } \alpha_i < 1, \tag{8}$$

die stationären Werte β_i, $0 < \beta_i \leq \pi/2$, des Winkels, unter dem sich Hypersphären Σ_1, Σ_2 mit $S_1^l \subset \Sigma_1, S_2^m \subset \Sigma_2$ schneiden.

Beispiel 3. Schon in Beispiel 2 haben wir die Bedingung A und die Fälle 1,2 und 3.b für zwei Hypersphären $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset S^n$ besprochen. Die Dimensionsbedingung des Falls 3.a kann nur auf dem Kreis, also für n=1, erfüllt sein; diesen Fall betrachten wir in Übung 6 und im nächsten Beispiel besonders. Für $n > 1$ und $I(\Sigma_1, \Sigma_2) < 1$ schneiden sich die Hypersphären; ihr Winkel β wurde in Beispiel 2 mit Hilfe der Invariante I definiert. Um die Invariante I auch im Fall sich nicht schneidender Hypersphären geometrisch zu deuten, wollen wir sie durch die euklidischen Invarianten der Hypersphären ausdrücken. Da die Möbius-Invarianten natürlich auch euklidisch invariant sind – die euklidische Gruppe ist ja eine Untergruppe der Möbius-Gruppe – muss das möglich sein. Offenbar bilden die Radien r, R der Hypersphären und die Distanz $d = d(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ ihrer Zentren $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$ ein vollständiges euklidisches Invariantensystem der Hypersphärenpaare. Wie schon in (6.2) bezeichne $(\mathfrak{e}_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$ (mit Erhöhung der Dimension um 1) eine pseudo-orthonormierte Basis des Vektorraums $\boldsymbol{V}^{n+2}$. In ihm definiert die Gleichung

$$-\langle \mathfrak{e}_0, \mathfrak{x} \rangle = x^0 = 1 \tag{9}$$

einen linearen Unterraum, den wir mit dem auf dem zugehörigen Vektorraum induzierten Skalarprodukt als Punktraum $\boldsymbol{E}^{n+1}$ einer $n+1$-dimensionalen euklidischen Geometrie deuten können. Der Möbius-Raum S^n wird dann durch die vermöge (9) normierten Vertreter als Einheitshypersphäre mit dem Zentrum $\mathfrak{e}_0$ dargestellt:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_0 + \mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{x}_1 = \sum_{i=1}^{n+1} \mathfrak{e}_i x^i \text{ mit } \langle \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_1 \rangle = 1. \tag{10}$$

Wir identifizieren S^n mit dieser Einheitshypersphäre und projizieren sie stereographisch aus dem Südpol $\mathfrak{e}_0 - \mathfrak{e}_{n+1}$ auf ihre durch die Vektoren $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ aufgespannte Äquatorialhyperebene $\boldsymbol{E}^n \subset \boldsymbol{E}^{n+1}$, vgl. Übung 1, Lemma 6.3 und Übung 6.5. Es bezeichne $S(\mathfrak{z}, r) \subset \boldsymbol{E}^n$ die Hypersphäre des euklidischen Raums $\boldsymbol{E}^n$ mit dem Zentrum $\mathfrak{z}$ und dem Radius r, und $\Sigma(\mathfrak{z}, r) := st^{-1}(S(\mathfrak{z}, r))$ ihr Urbild bei der stereographischen Projektion. Nach Lemma 6.3 ist das eine Hypersphäre in S^n. Wir zeigen:

Lemma 8. *Mit den eben eingeführten Bezeichnungen entspricht die Hypersphäre $\Sigma(\mathfrak{z}, r) := st^{-1}(S(\mathfrak{z}, r))$ nach* (5) *dem raumartigen Einheitsvektor*

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{z}, r) = (\mathfrak{e}_0(1 - r^2 + \langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z} \rangle) + 2\mathfrak{z} + \mathfrak{e}_{n+1}(1 + r^2 - \langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z} \rangle))/2r. \tag{11}$$

Es gilt also $\Sigma(\mathfrak{z}, r) = \Sigma(\mathfrak{u}(\mathfrak{z}, r))$.

Zum Beweis bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes $\mathfrak{y} \in S(\mathfrak{z}, r)$ mit (y^i) und die Koordinaten des Zentrums $\mathfrak{z} \in \boldsymbol{E}^n$ mit (z^i), $i = 1, \ldots, n$. Für sie gilt

$$\langle \mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{y} - \mathfrak{z} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (y^i - z^i)^2 = r^2. \tag{12}$$

Aus der Formel (6.20) für die Umkehrung der stereographischen Projektion, bei der jetzt der Index $n+1$ dem Südpol $-\mathfrak{e}_{n+1}$ entspricht, ergibt sich aus (10) für die normierten Vertreter der Punkte $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \Sigma(\mathfrak{z}, r)$ die Darstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_0 + \frac{2\mathfrak{y}}{1 + \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle} + \mathfrak{e}_{n+1} \frac{1 - \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle}{1 + \langle \mathfrak{y}, \mathfrak{y} \rangle}. \tag{13}$$

Das Skalarprodukt der Vektoren (11) und (13) ergibt unter Berücksichtigung von (12), dass diese Vektoren zueinander orthogonal sind, woraus die Behauptung folgt. □

Aus diesem Lemma erhält man durch eine elementare Rechnung

Folgerung 9. *Die Möbius-Invariante von zwei orientierten Hypersphären $S_1(\mathfrak{z}_1, r_1)$, $S_2(\mathfrak{z}_2, r_2)$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes ist gleich*

$$I(S_1(\mathfrak{z}_1, r_1), S_2(\mathfrak{z}_2, r_2)) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}. \tag{14}$$

Hierbei bezeichnet $d = |\mathfrak{z}_1 - \mathfrak{z}_2|$ die Distanz der Zentren.

Der Ausdruck (14) wird oft die Coxeter-Distanz der Hypersphären genannt, obwohl er natürlich nicht die üblichen Eigenschaften einer Metrik besitzt; wir wollen daher besser von der *Coxeter-Invarianten* der Hypersphären sprechen. Eine elemtargeometrische Betrachtung zeigt, dass die Coxeter-Invariante im Falle sich schneidender Hypersphären wieder den Kosinus des Schnittwinkels ergibt. □

Übung 4. Man leite die Formel (11) für $\mathfrak{u}(\mathfrak{z}, r)$ her, indem man im pseudo-euklidischen Vektorraum $\boldsymbol{V}^{n+2}$ das Vektorprodukt von $n+1$ isotropen Vektoren bildet, die Punkte in allgemeiner Lage auf der betrachteten Hypersphäre $\Sigma^{n-1} \subset S^n$ repräsentieren.

Übung 5. Es sei $\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{y} \rangle = p$ die Gleichung einer Hyperebene $\boldsymbol{H}^{n-1}$ des euklidischen Raums $\boldsymbol{E}^n, n > 1$. Nach Lemma 6.3 ist ihr Urbild bei der stereographischen Projektion eine Hypersphäre durch den Südpol. Man beweise, dass diese Hypersphäre die nach (5) definierte Hypersphäre

$$\Sigma(\mathfrak{v}) \text{ mit } \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{b} + (\mathfrak{e}_0 - \mathfrak{e}_{n+1})p}{|\mathfrak{b}|} \tag{15}$$

ist. Hieraus leite man ab, dass die Invariante $|I|(st^{-1}(\boldsymbol{H}_1), st^{-1}(\boldsymbol{H}_2))$ für zwei sich schneidende Hyperebenen gleich dem Kosinus ihres Schnittwinkels ist; für parallele Hyperebenen ist sie gleich eins. Eine analoger Sachverhalt ergibt sich für ein Paar aus Hyperebene $\boldsymbol{H}^{n-1}$ und Hypersphäre $S^{n-1}(\boldsymbol{z}, r)$; in diesem Fall ist die Invariante $|I| = z/r$, wobei z den Abstand des Zentrums $\mathfrak{z}$ von der Hyperebene bezeichnet.

Übung 6. Man zeige durch Angabe von Beispielen, dass die Fälle 1, 2, 3.a für zwei 0-Sphären auf S^1 eintreten können; Fall 3.b kann natürlich nicht vorkommen. Im Fall 3.a ist die Invariante der Punktepaare gleich dem Kosinus des Schnittwinkels der sie erzeugenden hyperbolischen Geraden. Die Abbildung 2.26 zeigt zwei zueinander orthogonale Punktepaare auf einem in den euklidischen Raum $\boldsymbol{E}^3$ eingebettetem Kreis.

Übung 7. Man gebe ein rechnerisches Beispiel für die Konfiguration der Abbildung 2.26 an, also zwei zueinander orthogonale 0-Sphären auf einem Kreis, der in der dreidimensionalen Sphäre S^3 liegt. (Man beachte, dass der euklidische Anschauungsraum $\boldsymbol{E}^3$ der Abbildung hier als Sphäre S^3 aufzufassen ist.) Für diese Konfiguration ist das Defizit gleich 2; der maximale Eigenwert ist $\alpha_1 = 1$, er hat die Vielfachheit 2; die *Eigensphären* zum Eigenwert 1 bilden das Büschel der Sphären durch den Kreis S^1 (vgl. Abbildung 2.27), während die Eigensphäre zum Eigenwert 0 alle Sphären dieses Büschels orthogonal schneidet. (Hinweis: Eigenwerte beziehen sich auf den in (6.70) definierten Operator A, der in dem hier betrachteten Fall in einem dreidimensionalen euklidischen Vektorraum wirkt; die Eigensphären sind durch $\Sigma(\mathfrak{u})$, $\mathfrak{u}$ Eigenvektor von A, definiert.)

Allgemein nennen wir die Hypersphären $\Sigma(\mathfrak{w})$, die zu den Eigenvektoren $\mathfrak{w}$ des in Satz 4 definierten Operators A gehören, die *Eigenhypersphären* des Sphärenpaares (S_1, S_2). Jede Eigenhypersphäre $\Sigma_2 := \Sigma(\mathfrak{w})$ enthält S_2; ist der zugehörige Eigenwert $\alpha > 0$, so definiert die Projektion $\mathfrak{u} := p(\mathfrak{w}) \in \boldsymbol{U}^\perp$ eine Hypersphäre $\Sigma_1 := \Sigma(\mathfrak{u}) \supset S_1$ derart, dass die stationäre Invariante $\sqrt{\alpha} = |I|(\Sigma_1, \Sigma_2)$ realisiert wird. Ist dagegen $\alpha = 0$, so ist Σ_2 zu allen Hypersphären Σ, die S_1 enthalten, orthogonal (vgl. Satz 6.24).

Beispiel 4. Wir betrachten wieder den eindimensionalen Möbius-Raum, also den Kreis S^1. Die Hypersphären sind hier die 0-Sphären, d.h. Punktepaare $S_1 = \{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}\} \subset S^1$ mit $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{n}$. Nach Satz 4.7 ist auf dem Kreis die projektive Struktur einer Geraden definiert;

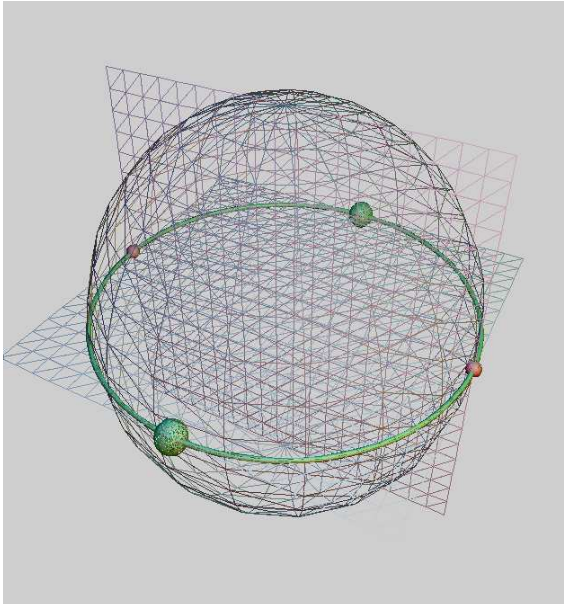

Abbildung 2.26: Eigensphären orthogonaler Punktepaare auf $S^1 \subset S^3$.

jedem Wurf aus Punkten von S^1 ist also das *Doppelverhältnis* DV seiner Punkte invariant zugeordnet. Da die Möbius-Gruppe $G_1 \subset \boldsymbol{PL}_2(\mathbf{R})$ aus allen Projektivitäten der Ebene besteht, die S^1 invariant lassen, ist auch das DV unter der Wirkung der Möbius-Gruppe invariant. Weil die Punkte zweier verschiedener 0-Sphären einen Wurf bestimmen, ergibt sich die Frage, wie das DV dieses Wurfes mit ihrer Möbius-Invariante $|I|$ zusammenhängt. Zur Beschreibung dieses Zusammenhanges verwenden wir die Bezeichnungen und Konstruktionen wie beim Beweis von Satz 4.7. Wir repräsentieren also die Punkte $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}$ durch isotrope Vektoren $\mathfrak{s}, \mathfrak{n}$ und passen die pseudo-orthonormierte Basis $(\mathfrak{c}_i)$, $i = 0, 1, 2$, dem Punktepaar so an, dass

$$\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{n} \rangle = -1/2, \tag{16}$$

$$\mathfrak{c}_0 = \mathfrak{s} + \mathfrak{n}, \ \mathfrak{c}_1 = \mathfrak{s} - \mathfrak{n}, \ \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_0 \times \mathfrak{c}_1 \tag{17}$$

gelten. Wegen

$$\langle \mathfrak{s}, \mathfrak{c}_2 \rangle = \langle \mathfrak{n}, \mathfrak{c}_2 \rangle = 0$$

schneiden sich die Tangenten $\boldsymbol{T_s}, \boldsymbol{T_n}$ in dem durch $\mathfrak{c}_2$ definierten äußeren Punkt

$$\boldsymbol{T_s} \cap \boldsymbol{T_n} = \boldsymbol{b} := [\mathfrak{c}_2].$$

Wir betrachten die durch die Vektoren $\mathfrak{s}, \mathfrak{c}_2$ definierte projektive Skala ξ auf der Tangente $\boldsymbol{T_s}$ und übertragen sie durch stereographische Projektion auf S^1. Nach (4.57) erhalten wir so eine Parameterdarstellung von S^1, die jeden Punkt auf seinen Skalenwert bezieht:

$$f : \xi \in \hat{\mathbf{R}} \longmapsto f(\xi) = [\mathfrak{x}(\xi)] := [\mathfrak{s} + \mathfrak{c}_2\xi + \mathfrak{n}\xi^2]. \tag{18}$$

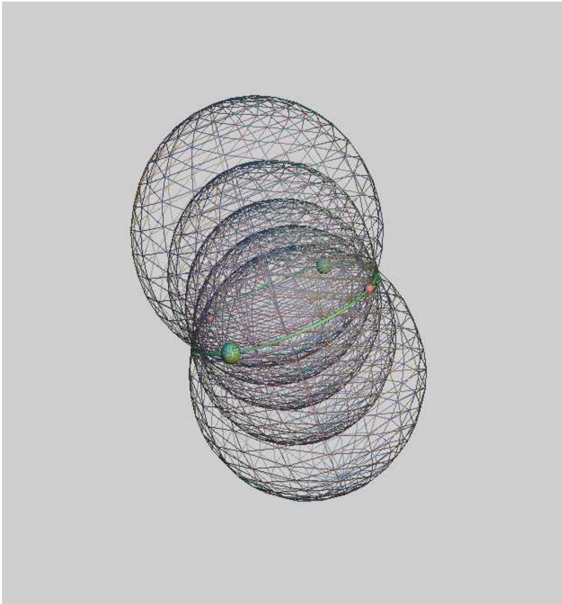

Abbildung 2.27: Sphärenbüschel eines Kreises.

Es sei nun eine zweite 0-Sphäre gegeben:

$$S_2 = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}, \boldsymbol{x}_i = [\mathfrak{x}(\xi_i)], i = 1, 2.$$

Wir berechnen nach der Formel (1.4.16) das DV

$$\eta := (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{b}; \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \frac{\xi_1}{\xi_2}. \tag{19}$$

Andererseits erhält man für den die 0-Sphäre S_2 bestimmenden raumartigen Einheitsvektor

$$\mathfrak{w} = \frac{\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2}{|\mathfrak{x}_1 \times \mathfrak{x}_2|} = \frac{2\mathfrak{s} + 2\mathfrak{n}\xi_1\xi_2 + \mathfrak{c}_2(\xi_1 + \xi_2)}{\xi_1 - \xi_2}. \tag{20}$$

Hieraus und aus (19) ergibt sich für die Invariante $|I|$ und ihren Ausdruck durch das DV die gesuchte Beziehung

$$|I|(S_1, S_2) = |\langle \mathfrak{c}_2, \mathfrak{w}\rangle| = |\frac{\eta + 1}{\eta - 1}|. \tag{21}$$

Man beachte, dass das DV von der gewählten Reihenfolge der Punkte $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ abhängt; eine Änderung der Reihenfolge ändert jedoch den Wert von $|I|$ nicht. Bei Betrachtung orientierter 0-Sphären, also von geordneten Punktepaaren, würde bei einer Umorientierung sowohl I als auch η das Vorzeichen ändern, so dass wir auch

$$I(S_1, S_2) = \langle \mathfrak{c}_2, \mathfrak{w}\rangle = \frac{\eta + 1}{\eta - 1} \tag{22}$$

schreiben können. Für die umgekehrte Beziehung erhält man hieraus für $I = I(S_1, S_2)$ unter Beachtung von (19) dieselbe funktionale Abhängigkeit

$$\eta = \frac{I+1}{I-1}. \tag{23}$$

Wir wenden diese Formeln an um zu zeigen, dass die reelle projektive Gruppe $\boldsymbol{PL}_1$ mit der Möbius-Gruppe übereinstimmt. □

Satz 10. *Die projektive Gruppe $\boldsymbol{PL}_1(\mathbf{R})$ der nach Satz 4.7 auf dem Kreis S^1 definierten projektiven Struktur ist gleich der Möbius-Gruppe G_2.*

Beweis. Es sei $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$ ein harmonischer Wurf auf S^1; das DV η dieses Wurfes ist also gleich -1. Nach (22) ist dann die Invariante I der orientierten 0-Sphären $S_1 = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$, $S_2 = (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$ gleich null. Dasselbe gilt dann auch für die Bilder dieser 0-Sphären bei einer beliebigen Möbius-Transformation $g \in G_1$. Aus (23) folgt, dass dann auch die Bilder einen harmonischen Wurf bilden. Nach dem Staudtschen Hauptsatz 1.4.7 ist daher g eine Projektivität. Umgekehrt, sei $g \in \boldsymbol{PL}_1$ eine Projektivität,und seien $\boldsymbol{x}_i \in S^1$, $i = 0, 1, 2$, Punkte in allgemeiner Lage, also ein projektives Repère von S^1. Mit $\boldsymbol{y}_i := g(\boldsymbol{x}_i)$ bezeichnen wir ihre Bilder bei der Projektivität g. Wir beweisen:

Lemma 11. *Sind $(\boldsymbol{x}_i)$, $(\boldsymbol{y}_i)$, $i = 0, 1, 2$, zwei Tripel von Punkten in allgemeiner Lage des Möbius-Raumes S^n, so gibt es stets eine Möbius-Transformation $h \in G_{n+1}$ mit $h\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i$. Im Falle $n = 1$ ist h eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die Punkttripel bestimmen jeweils eindeutig einen Kreis. Da G_{n+1} nach Folgerung 2 auf der Menge der Kreise transitiv wirkt, genügt es den Fall $n = 1$ zu betrachten. Es seien $\mathfrak{s}, \mathfrak{n}, \mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}^3$ isotrope Vektoren, welche die Punkte des Tripels $(\boldsymbol{x}_i)$ repräsentieren:

$$\boldsymbol{x}_0 = [\mathfrak{s}], \boldsymbol{x}_1 = [\mathfrak{n}], \boldsymbol{x}_2 = [\mathfrak{x}],$$

und $(\mathfrak{c}_i)$ eine pseudo-orthonormierte Basis von $\boldsymbol{V}$ derart, dass (16) und (17) gelten. Offenbar sind die Vertreter der Punkte und die Basis durch diese Bedingungen noch nicht eindeutig bestimmt. Lediglich der Vektor $\mathfrak{c}_2$ ist, wenn wir das Punktepaar $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1)$ als orientiert annehmen, wegen

$$\mathfrak{s} = (\mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}_1)/2, \mathfrak{n} = (\mathfrak{c}_0 - \mathfrak{c}_1)/2, \mathfrak{s} \times \mathfrak{n} = -\mathfrak{c}_2/2 \tag{24}$$

bereits eindeutig bestimmt. Wir betrachten nun die Basisdarstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{s}\xi_1 + \mathfrak{n}\xi_2 + \mathfrak{c}_2\xi_3.$$

Da $\mathfrak{x}$ isotrop ist und die drei Punkte in allgemeiner Lage sind, müssen alle drei Komponenten ξ_i von Null verschieden sein. Indem wir $\mathfrak{x}$ durch ξ_3 teilen, erhalten wir den durch $\xi_3 = 1$ eindeutig bestimmten Repräsentanten von $\boldsymbol{x}_3$. Weil dieser isotrop ist, ergibt sich

$$\xi_1\xi_2 = 1.$$

Führen wir die einzigen, ohne Verletzung der bisherigen Bedingungen noch möglichen Transformationen

$$\hat{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s}\lambda, \hat{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}/\lambda, (\lambda \neq 0)$$

mit $\lambda = \xi_1$ aus, so folgt wegen der vorigen Gleichung, dass durch die zusätzliche Bedingung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{s} + \mathfrak{n} + \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_0 + \mathfrak{c}_2 \tag{25}$$

die Repräsentanten $\mathfrak{s}, \mathfrak{n}, \mathfrak{x}$ der Punkte des Tripels und daher nach (24) auch die Basis $(\mathfrak{c}_i)$ durch das Punktetripel eindeutig bestimmt sind. Analog gehört zu dem Punktetripel $(\boldsymbol{y}_i)$ die eindeutig bestimmte pseudo-orthonormierte Basis $(\mathfrak{b}_i)$; die Transformation $h \in G_1$, welche durch die pseudo-orthogonale Transformation $\gamma \in \mathbf{O}(1,2)$ mit

$$\gamma(\mathfrak{c}_i) = \mathfrak{b}_i,\ i = 0, 1, 2,$$

bestimmt ist, erfüllt offenbar $h\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i$. Da ferner bei jeder derartigen Transformation die eindeutig zugeordneten Basen ineinander übergehen müssen, ist γ und damit auch h eindeutig bestimmt. □

Nun beenden wir den Beweis von Satz 10. Es sei $h \in G_2$ die nach Lemma 11 durch $h(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{y}_i$ eindeutig bestimmte Möbius-Transformation. Nach dem schon Bewiesenem ist dann h und somit auch h^{-1} eine Projektivität von S^1. Daher ist auch die Abbildung $f := h^{-1} \circ g$ eine Projektivität. Weil diese die Punkte $\boldsymbol{x}_i$ fest lässt, also $f(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{x}_i$ für $i = 0, 1, 2$ gilt, muss nach Satz 1.3.14 f die identische Abbildung sein; es genügt, diese Punkte als Grundpunkte und Einheitspunkt einer projektiven Skala auf S^1 zu wählen. Somit ist $g = h$ eine Möbius-Transformation. □

Übung 8. Es seien $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4 \in S^1$ vier verschiedene Punkte. a) Man leite die folgenden Identitäten für die Möbius-Invarianten der durch sie bestimmten orientierten 0-Sphären her: Mit

$$I((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2), (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)) = \lambda$$

gelten

$$\begin{aligned}
I((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2), (\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_3)) &= -\lambda, \\
I((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3), (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4)) &= \frac{3-\lambda}{\lambda+1}, \\
I((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3), (\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_2)) &= \frac{\lambda-3}{\lambda+1}, \\
I((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4), (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_2)) &= \frac{\lambda+3}{\lambda-1}, \\
I((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4), (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)) &= \frac{\lambda+3}{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

Daraus folgen

$$I((\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2), (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)) = I((\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4), (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)) = I((\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1), (\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_3)) = I((\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{x}_3), (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)).$$

Man vergleiche diese Gleichungen mit den in Abschnitt 1.4 für das DV $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ bewiesenen Identitäten. – b) Unter den genannten Voraussetzungen kann keine der rechten Seiten dieser Gleichungen gleich eins sein. – c) Der Wurf $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ ist harmonisch genau dann, wenn $\lambda = 0$ gilt, also die Punktepaare zueinander orthogonal sind.

Beispiel 5. Wir betrachten nun den Fall $n = 2$, also die Sphäre S^2 unter der Wirkung der Möbius-Gruppe G_3. Schon in Beispiel 1.1.3 haben wir die komplexe Gerade $\boldsymbol{P}^1_{\mathbf{C}}$ mit der *Riemannschen Sphäre* S^2 identifiziert. Nach Beispiel 1.4.3 induzieren die stetigen

Projektivitäten und Antiprojektivitäten auf $\boldsymbol{P}^1_{\mathbf{C}}$ die Automorphismengruppe Aut $\boldsymbol{P}^1_{\mathbf{C}}$, die in einer projektiven Skala durch die gebrochen linearen und die gebrochen konjugiert linearen Transformationen dargestellt werden können. Diese Gruppe ist gleichzeitig die Möbius-Gruppe G_3 der Sphäre S^2, wie wir gleich durch die geometrische Interpretation des Rechnens mit komplexen Zahlen zeigen werden. In dieser Gestalt trat historisch gesehen zum ersten Mal eine Möbius-Gruppe auf. Eine sehr anschauliche Darstellung dieser komplexen Gestalt der Möbius-Gruppe G_3 findet man im zweiten Kapitel des einführenden Lehrbuchs [24] von C. Carathéodory. □

Satz 12. *Die Möbius-Gruppe G_3 der mit der projektiven Geraden identifizierten Riemannschen Sphäre $S^2 = \boldsymbol{P}^1_{\mathbf{C}}$ ist die Gruppe der stetigen Automorphismen* Aut $\boldsymbol{P}^1_{\mathbf{C}}$.

Beweis. Wir stellen wie in Bespiel 1.4.3 die Gruppe Aut $\boldsymbol{P}^1_{\mathbf{C}}$ durch die *gebrochenen Transformationen* dar:

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ bzw.} \tag{26}$$

$$w = f(\bar{z}) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \tag{27}$$

mit $ad - cb \neq 0$, wobei

$$f(-d/c) = \infty \text{ und } f(\infty) = a/c \text{ falls } c \neq 0,\ f(\infty) = \infty \text{ sonst,} \tag{28}$$

zu setzen ist. Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet eine Gruppe, die wir für den Beweis der Kürze halber mit G bezeichnen. Es ist also $G = G_3$ zu zeigen. Die Transformationen (26) bilden eine Untergruppe, welche uns schon bei der Betrachtung der Transformationen der projektiven Skalen auf einer Geraden begegnete (vgl. Beispiel 1.2.2 und Übung 1.2.4); sie ist als homomorphes Bild der linearen Gruppe $\boldsymbol{GL}(2, \mathbf{C})$ zur Gruppe $\boldsymbol{PL}_1(\mathbf{C})$ der Projektivitäten der komplexen projektiven Geraden isomorph: Die Koeffizienten a, b, c, d in (26) sind dabei gerade die Elemente der Matrix $A \in \boldsymbol{GL}(2, \mathbf{C})$, vgl. (1.2.10). Daher ist ihre Determinante $ad-cb$ stets von Null verschieden. Multipliziert man Zähler und Nenner mit derselben Zahl $k \in \mathbf{C}^*$, so ändert sich die Abbildung f in (26) bzw. (27) nicht; wir können also bei Bedarf stets

$$ad - cb = 1, \text{ also } A \in \boldsymbol{SL}(2, \mathbf{C}),$$

voraussetzen. Nach Beispiel 1.4.5 oder (1.7) ergibt sich, dass die Gesamtheit der in der Form (26) darstellbaren Transformationen $f : S^2 \to S^2$ die Gruppe der Projektivitäten $\boldsymbol{PL}_1(\mathbf{C}) \cong \boldsymbol{SL}(2, \mathbf{C})/\{\pm I_2\}$ ist. Die Hinzufügung der Konjugation erzeugt dann mit (27) die Gruppe Aut $\boldsymbol{P}_1(\mathbf{C})$. Offenbar gilt für die Abbildungen (26), (27) $f(\infty) = \infty$ genau dann, wenn $c = 0$ ist; wir können sie dann in der Gestalt

$$w = az + b \text{ bzw. } w = a\bar{z} + b \text{ mit } a \neq 0$$

darstellen, und das ist die konform-euklidischen Gruppe der komplexen Ebene, die mit der euklidischen Ebene identifiziert werden kann, vgl. Abschnitt I.2.3. Danach ist die Multiplikation mit einer von Null verschiedenen komplexen Zahl eine Drehung verknüpft mit einer Dehnung, die Addition läuft auf eine Translation hinaus, und die Zuordnung

$z \to \bar{z}$ ist die Spiegelung an der reellen Achse. Offenbar ist jede Ähnlichkeit $g \in CE(2)$ durch eine dieser Transformationen f darstellbar. Im Fall $c \neq 0$ ist die Abbildung $s : z \in S^2 \to 1/\bar{z}$ die Inversion am Einheitskreis mit dem Zentrum 0:

Übung 9. a) Man verifiziere die letzte Behauptung. – b) Man zeige, dass sich jede Transformation $f \in G$ als Verknüpfung von Ähnlichkeiten und Spiegelungen s am Einheitskreis darstellen läßt. (Man beachte, dass s dabei auch mehrfach auftreten kann.) – c) Man beweise, dass die Abbildung

$$h(z) := \frac{m\bar{z} - m\bar{m} + r^2}{\bar{z} - \bar{m}} = m + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{m}} \text{ mit } r > 0 \tag{29}$$

die Spiegelung am Kreis mit dem Mittelpunkt $m \in \mathbf{C}$ und dem Radius $r > 0$ der komplexen Zahlenebene ist. – d) Man gebe eine analoge Formel für die Spiegelung an einer reellen Geraden $y = at + b$, $a \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$ der komplexen Zahlenebene an.

Nach diesen Rechnungen können wir den Beweis des Satzes abschließen: Aus a) und b) folgt nach Übung 1 und Beispiel 1 die Beziehung $G \subset G_3$. Umgekehrt ist nach Satz 4 jede Möbius-Transformation $g \in G_3$ als endliches Produkt von Inversionen darstellbar, die nach Übung 9, c), d) Elemente von G sind. Weil G eine Gruppe ist, folgt $G_3 \subset G$.□

Übung 10. Es seien $\boldsymbol{x}_i, i = 1, \ldots, 4$, vier verschiedene Punkte in $S^2 = \boldsymbol{P}^1_{\mathbf{C}}$. Man beweise: Die vier Punkte liegen genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden in $\mathbf{C}$, wenn ihr Doppelverhältnis $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ reell ist.

Folgerung 13. *Die Gruppe der gebrochen linearen Transformationen f nach* (26) *besteht aus allen orientierungserhaltenden Möbius-Transformationen der Riemannschen Sphäre S^2. Hieraus ergibt sich die Isomorphie*

$$\boldsymbol{SL}(2, \mathbf{C})/\{\pm I_2\} \cong \boldsymbol{SO}(1, 3).$$

Beweis. Man kann unschwer zeigen, dass sich jede Transformation der Gestalt (26) als Komposition von Abbildungen der folgenden Arten darstellen lässt:

1. Translation: $t_b : z \longmapsto z + b$.
2. Drehung mit nachfolgender Dehnung: $d_a : z \longmapsto za$, $a \in \mathbf{C}^*$.
3. Bildung des Inversen: $h : z \longmapsto 1/z$.

Alle diese Abbildungen sind orientierungserhaltend. Für die Translationen ist das klar; im zweiten Fall gilt mit $a = |a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$, $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$:

$$d_a(z) = |a||z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\alpha)},$$

und das ist die Drehung um den Winkel α und nachfolgender Dehnung um den Betrag |a|. Schließlich ist die Bildung des Inversen ein Produkt von zwei Spiegelungen: $h(z) = \overline{1/\bar{z}}$, der Spiegelung am Einheitskreis $s(z) = 1/\bar{z}$ mit nachfolgender Spiegelung an der reellen Achse. Da jede Spiegelung die Determinante -1 hat (vgl. Beispiel 1), folgt unsere Behauptung. Somit ist, vgl. Satz 4, jede Möbius-Transformation der Gestalt (26) als Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen darstellbar.[2] Da die Transformationen der Gestalt

[2] In dem Lehrbuch [24] beweist C. Caratheodory, dass sich jede Transformation der Gestalt (26) als ein Produkt von zwei oder von vier Inversionen darstellen lässt.

(27) aus denen von (26) mit Vorschaltung einer Spiegelung an der reellen Achse entstehen, erscheinen sie stets als Verknüpfung einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen und kehren daher die Orientierung um. Damit entsprechen die Abbildungen der Gestalt (26) und (27) jeweils einer der Komponenten der Gruppe G_3. Nach den Beispielen 1.4.3 und 1.4.5 folgt, dass die durch (26) beschriebene Gruppe gerade die Gruppe $\boldsymbol{SL}(2,\mathbf{C})/\{\pm I_2\}$ ist; andererseits ist sie nach Satz 12 und dem am Ende von Abschnitt 1 Gesagtem gleich $\boldsymbol{SO}(1,3)$. Eine explizite Form des Homomorphismus $F : \boldsymbol{SL}(2,\mathbf{C}) \to \boldsymbol{SO}(1,3)$ in Gestalt einer pseudo-orthogonalen Matrix, deren Elemente Funktionen der komplexen Parameter a, b, c, d sind, findet man in J. B. Wilker [81], Theorem 10. Man beachte, dass in dieser Arbeit stets die letzten Vektoren eines pseudo-orthonormierten Repéres zeitartig sind, also das Normquadrat -1 haben. □

2.7.3 Doppelverhältnisse und Riemannsche Sphäre

Im vorigen Abschnitt haben wir die Möbius-Gruppen des Kreises S^1 und der Sphäre S^2 mit den projektiven Gruppen $\boldsymbol{PL}_1(\mathbf{R})$ bzw. Aut $\boldsymbol{P}^1_{\mathbf{C}}$ identifiziert. Hieraus folgt (vgl. die Beispiele 4, 5 und die Sätze 10, 12):

Folgerung 14. *Das Doppelverhältnis von vier Punkten des Kreises S^1 ist eine Möbius-Invariante. Das Doppelverhältnis von vier Punkten der Riemannschen Sphäre $S^2 = \boldsymbol{P}^1_{\mathbf{C}}$ ist bei einer orientierungserhaltenden Möbius-Transformation invariant und geht bei einer die Orientierung umkehrenden Möbius-Transformation in sein konjugiertes über.*□

Für höhere Dimensionen $n > 2$ unterscheiden sich die projektiven und die Möbius-Gruppen wesentlich. Es ist bemerkenswert, dass man die Möbius-Gruppen als Invarianzgruppen eines auch im n-dimensionalen Raum definierten DV charakterisieren kann. Diese Methode stammt von J. B. Wilker, der im Abschnitt 6 seiner Arbeit [81] diese Größe die fundamentale Invariante der Möbius-Geometrie nennt. Sie wird folgendermaßen definiert: Es seien $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ vier verschiedene Punkte des n-dimensionalen euklidischen Raumes. Unter ihrem *absoluten Doppelverhältnis* verstehen wir den Ausdruck

$$|\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4| := \frac{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3|}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_4|} : \frac{|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3|}{|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_4|}, \tag{30}$$

wobei $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ die Norm des Ortsvektors $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$, also den euklidischen Abstand der Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bezeichnet. Nimmt man in der Formel (1.4.15) den absoluten Betrag, so erkennt man, dass die Definition (30) gerade mit dem Betrag des dort berechneten DV's übereinstimmt. Offenbar hängt das DV stetig von seinen Argumenten ab; lässt man in (30) einen der Punkte, zum Beispiel $\boldsymbol{x}_4$, gegen ∞ gehen, so folgt

$$|\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{x}_3, \infty| := \lim_{\boldsymbol{x}_4 \to \infty} \frac{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3|}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_4|} : \frac{|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3|}{|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_4|} = \frac{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3|}{|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3|}. \tag{31}$$

Damit ist unter Berücksichtigung der Symmetrie der Definition das absolute DV auch definiert, wenn einer der Punkte gleich ∞ ist. Es gilt

Satz 15. *Eine injektive Abbildung f des durch den Punkt ∞ zur n-Sphäre S^n erweiterten n-dimensionalen euklidischen Raumes ist genau dann eine Möbius-Transformation, wenn sie das absolute* DV *beliebiger Quadrupel verschiedener Punkte invariant lässt.*

B e w e i s. Wir zeigen zuerst die Invarianz des absoluten DV. Nach Satz 10 ist im Falle $n = 1$ sogar das DV selbst invariant. Da nach Satz 4 jede Möbius-Transformation als ein Produkt von endlich vielen Inversionen darstellbar ist und Spiegelungen an Hyperebenen sogar Isometrien sind, genügt es zu zeigen, dass das absolute DV bei Inversionen s an beliebigen Hypersphären invariant bleibt. Aus der Formel (4) ergibt sich für den Abstand der Bildpunkte von zwei Punkten $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$:

$$|s(\mathfrak{x}) - s(\mathfrak{y})| = \frac{r^2}{|\mathfrak{x}||\mathfrak{y}|}|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|.$$

Hierbei bezeichnen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ die Ortsvektoren der Punkte $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bezüglich des Zentrums der die Inversion definierenden Hypersphäre. Durch eine einfache Rechnung folgt aus (30) die Invarianz des absoluten DV für von ∞ verschiedene Punkte. Durch den oben beschriebenen Grenzübergang $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_4 \to \infty$ überzeugt man sich davon, dass die Behauptung auch gilt, wenn einer der Punkte ∞ ist. Es sei nun umgekehrt $f : S^2 \to S^2$ eine injektive Abbildung, die das absolute DV invariant lässt, und sei $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$. Da die Möbius-Gruppe auf S^n transitiv wirkt, finden wir Möbius-Transformationen $s, t \in G_{n+1}$ mit $s(\infty) = \boldsymbol{x}$, $t(\boldsymbol{y}) = \infty$. Weil nach dem schon Bewiesenem die Möbius-Transformationen das absolute DV invariant lassen, gilt dasselbe auch für die Abbildung $f_1 := t \circ f \circ s$. Diese Abbildung hat die Eigenschaft $f_1(\infty) = \infty$, bildet also den euklidischen Raum in sich ab. Wir betrachten nun eine beliebiges Dreieck $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ und sein Bild bei f_1. Wegen der Invarianz des absoluten DVs gilt nach (31) für die Bildpunkte $\boldsymbol{y}_i = f_1(\boldsymbol{x}_i)$, $i = 1, 2, 3$:

$$|\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2; \boldsymbol{y}_3, \infty| = \frac{|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_3|}{|\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_3|} = |\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{x}_3, \infty| = \frac{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3|}{|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3|}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_3|}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_3|} = \frac{|\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_3|}{|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3|}.$$

Das Bilddreieck $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ ist also zum Urbilddreieck $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ ähnlich, und da das für jedes beliebige Dreieck der Fall ist, muss f_1 eine Ähnlichkeit sein, ist also eine Möbius-Transformation. Dann ist aber auch $f = t^{-1} \circ f_1 \circ s^{-1}$ eine Möbius-Transformation. □

B e m e r k u n g. Die Surjektivität der Abbildung f wurde zum Beweis des Satzes 15 nicht benötigt; sie ergibt sich also aus der Injektivität und der Invarianz des absoluten DV. Im Fall $n = 1$ beweist man durch eine direkte Rechnung mit Hilfe der letzten Formel, dass f_1 eine affine Abbildung der euklidischen Geraden ist. Als Übungsaufgabe sei empfohlen, den Beweis der nächsten Folgerung auszuführen, die man ebenfalls in der Arbeit [81] von J. B. Wilker findet:

Folgerung 16. *Sind $M_1 = (\boldsymbol{x}_i)_{i \in I}$, $M_2 = (\boldsymbol{y}_i)_{i \in I}$ zwei Familien von Punkten des Möbius-Raumes S^n, so gibt es genau dann eine Möbius-Transformation $g \in G_{n+1}$ mit der Eigenschaft $g(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{y}_i$ für alle $i \in I$, wenn die absoluten DVs von je vier Punkten entsprechend übereinstimmen, also*

$$|\boldsymbol{y}_{i_1}, \boldsymbol{y}_{i_2}; \boldsymbol{y}_{i_3}, \boldsymbol{y}_{i_4}| = |\boldsymbol{x}_{i_1}, \boldsymbol{x}_{i_2}; \boldsymbol{x}_{i_3}, \boldsymbol{x}_{i_4}|$$

für alle Indexquadrupel gilt, zu denen vier verschiedene Punkte aus M_1 gehören. Existiert eine solche Abbildung g, so ist sie genau dann eindeutig bestimmt, wenn $[M_1] = S^n$ gilt, die Familie M_1 also nicht in einer Hypersphäre oder Hyperebene liegt. □

Zum Beweis der Eindeutigkeit lassen sich Satz 4.1 und Folgerung 4.3 anwenden. Im nächsten Beispiel verfeinern wir das Kriterium der Folgerung in den Dimensionen $n = 1, 2$.

Beispiel 6. Es sei ξ eine projektive Skala auf $S^1 = \boldsymbol{P}^1(\mathbf{R})$ oder $S^2 = \boldsymbol{P}^1(\mathbf{C})$. Dann gilt nach Definition 1.4.1 für das DV $\xi = (\xi, 1; 0, \infty)$, wobei wir die Punkte durch ihre Parameterwerte angeben. Für das absolute DV ergeben sich hieraus die Identitäten

$$|\xi, 1; 0, \infty| = |-\xi, 1; 0, \infty| = |\bar{\xi}, 1; 0, \infty| = |-\bar{\xi}, 1; 0, \infty| = |\xi|,$$

wobei natürlich die letzten beiden absoluten DVs nur für nicht reelle Parameter ξ relevant sind. Aus der ersten Identität schließen wir, dass die Kenntnis des absoluten DVs nur einer der Permutationen der vier als verschieden angenommenen Punkte nicht ausreicht, um die Möbius-Äquivalenz der Quadrupel festzustellen, wie das für das zuerst definierte DV der Fall ist. Das Quadrupel $(\xi, 1, 0, \infty)$ ist nämlich nicht zum Quadrupel $(-\xi, 1, 0, \infty)$ äquivalent, da die DVs sich unterscheiden und, im Fall $K = \mathbf{C}$, auch nicht zueinander konjugiert sind, falls $\mathrm{Re}(\xi) \neq 0$ gilt. Aus Satz 1.4.1, (1.4.12) und (1.4.14) ergibt sich, dass das DV aller Permutationen der Punkte des Quadrupels $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ bestimmt ist, wenn man das DV einer Anordnung dieser Punkte kennt. Das gilt für das absolute DV nicht; man macht sich leicht anhand von Beispielen klar, dass aus $|\xi| = |\eta|$ nicht $|1 - \xi| = |1 - \eta|$ folgt. Hat man sich indessen davon überzeugt, dass beide Gleichungen

$$|\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2; \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4| = |\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4| \tag{32}$$

$$|\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_3; \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_4| = |\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3; \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4| \tag{33}$$

gelten, so ergibt sich aus Satz 1.4.1, dass die entsprechenden Gleichungen auch für die absoluten DVs aller jeweils einander entsprechenden Permutationen der Quadrupel erfüllt sind. Aus Folgerung 16 erhält man dann die Möbius-Äquivalenz der Quadrupel $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ und $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4)$. Daher genügt es, für eine einzige Anordnung von jeweils vier verschiedenen Punkten von M_1 die Bedingungen (32) und (33) zu überprüfen. Man beachte auch die folgende Übung. Der erste Fall, $\xi = \eta$, tritt ein, wenn die beiden Quadrupel durch eine projektive, d.h. das DV und die Orientierung erhaltende Möbius-Transformation (26) ineinander transformiert werden können, während der zweite Fall $\xi = \bar{\eta}$ besagt, dass sie nur durch eine die Orientierung von S^2 umkehrende Möbius-Transformation der Gestalt (27) ineinander übergehen; bei dieser Betrachtung ist $ad - bc = 1$ vorauszusetzen. □

Übung 11. Es seien $\xi, \eta \in \mathbf{C}$. Man zeige: Es gelten $|\xi| = |\eta|$ und $|1 - \xi| = |1 - \eta|$ genau dann, wenn $\xi = \eta$ oder $\xi = \bar{\eta}$ ist.

Übung 12. Es seien $\boldsymbol{x}_i \in S^2, i = 1, \ldots, 4$, vier verschiedene Punkte der Sphäre. a) Man zeige: Es gibt eine Möbius-Transformation $g \in G_3$ mit den Fixpunkten $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_4$, welche die beiden anderen Punkte vertauscht: $g(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{x}_3, g(\boldsymbol{x}_3) = \boldsymbol{x}_2$ genau dann, wenn

$$|\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4| = |\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3; \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4| \tag{34}$$

gilt. - b) Die vier Punkte seien in allgemeiner Lage. Es bezeichne $s : S^2 \to S^2$ die Inversion am Kreis durch $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ und $\bar{\boldsymbol{x}}_1 = s(\boldsymbol{x}_1)$. Gilt (34), so schneiden sich die Kreise Σ_1 durch $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ und Σ_2 durch $\boldsymbol{x}_1, \bar{\boldsymbol{x}}_1, \boldsymbol{x}_4$ orthogonal. Die Punkte $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ gehen durch Inversion am Kreis Σ_2 ineinander über.

Die Beziehungen zwischen dem DV von vier Punkten der Riemannschen Sphäre und den in Abschnitt 2 definierten stationären Invarianten des das DV bestimmenden 0-Sphärenpaares wird durch den folgenden Satz beschrieben:

Satz 17. *Es seien $S_1 = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$, $S_2 = (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) \subset S^2$ zwei verschiedene 0-Sphären der Riemannschen Sphäre und $\eta = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ das durch sie bestimmte Doppelverhältnis. Die in Abschnitt 2 definierten stationären Invarianten des Sphärenpaares sind dann*

$$\alpha_1(S_1, S_2) = \frac{(|\eta| + 1)^2}{|\eta - 1|^2} \geq \alpha_2(S_1, S_2) = \frac{(|\eta| - 1)^2}{|\eta - 1|^2}. \tag{35}$$

Hierbei gelten:

1. *Die Invarianten α_1, α_2 hängen nicht von der Orientierung der 0-Sphären ab.*
2. *Es ist $\alpha_1 = \alpha_2$ genau dann, wenn $S_1 \cap S_2$ einpunktig ist; in diesem Fall ist $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.*
3. *Es ist $\alpha_1 = 1 > \alpha_2$ genau dann, wenn S_1, S_2 auf einem Kreis S^1 liegen und sich trennende Punktepaare sind.*
4. *Es ist $\alpha_1 > \alpha_2 = 1$ genau dann, wenn S_1, S_2 auf einem Kreis S^1 liegen und sich nicht trennende Punktepaare sind.*
5. *Es gilt $\alpha_1 > 1 > \alpha_2$ genau dann, wenn S_1, S_2 in allgemeiner Lage sind.*

Beweis. Für den Beweis von (35) ist die Riemannsche Sphäre mit der durch die komplexen Zahlen gegebenen Parameterdarstellung in das eingangs beschriebene pseudo-euklidische Modell des Möbius-Raumes, also in die Menge der Erzeugenden des isotropen Kegels des vierdimensionalen pseudo-euklidischen Raumes, zu transformieren. Jeder 0-Sphäre entspricht dabei ein zweidimensionaler pseudo-euklidischer Unterraum, dessen orthogonales Komplement also ein zweidimensionaler euklidischer Unterraum ist. Nun drückt man den in Satz 5 erwähnten Operator in den komplexen Parametern aus und berechnet dessen Eigenwerte, wobei (35) resultiert[3]. Bei einer Umkehrung der Reihenfolge der Punkte von S_1 oder S_2 geht nach (1.4.7) das DV η in η^{-1} über; dabei ändern die Ausdrücke (35) für α_1, α_2 ihre Werte nicht, und es gilt 1. Weil die 0-Sphären verschieden sind, sind wenigstens drei der Punkte $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ verschieden. Nach Lemma 11 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Punkte

$$\boldsymbol{x}_2 = 1, \boldsymbol{x}_3 = 0, \boldsymbol{x}_4 = \infty$$

sind, wobei wir sie wie üblich mit den entsprechenden Zahlen der Riemannschen Zahlenkugel identifizieren. Wegen

$$\eta = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) = (\eta, 1; 0, \infty)$$

gilt dann $\boldsymbol{x}_1 = \eta$. Die Bedingungen 2.– 4. treten genau dann ein, wenn wenigstens einer der Eigenwerte gleich 1 ist, und das ist genau dann der Fall, wenn das Defizit gleich 1

[3] Die Berechnungen wurden mit Hilfe des Programms Mathematica von Stephen Wolfram [83] ausgeführt. Sie sind ein interessantes Beispiel für die weitgehenden Fähigkeiten dieses Programms, auch umfangreiche symbolische Rechnungen zu bewältigen. Ein entsprechendes Notebook riemsph.nb: „The Riemannian Sphere", kann von der Homepage von R. Sulanke heruntergeladen werden.

ist, wenn also die vier Punkte zu einem Kreis gehören. Bei der von uns angenommenen speziellen Lage bedeutet das, dass η reell ist, wie man auch leicht nachrechnet. Damit ist 5. bewiesen; denn die vier Punkte sind genau dann in allgemeiner Lage, wenn η nicht auf der reellen Achse liegt (vgl. auch Übung 10); das ist Fall 1. in Abschnitt 2. Zum Beweis von 2. bemerkt man, dass $\alpha_1 = \alpha_2$ genau dann gilt, wenn $\eta = 0$ oder $\eta = \infty$ ist; wegen $S_1 \neq S_2$ sind das die einzigen Möglichkeiten für einen nicht leeren Durchschnitt $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ oder $S_1 \cap S_2 = \{\infty\}$. In beiden Fällen ist $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$; das entspricht Fall 2. in Abschnitt 2. Die Aussagen 3. und 4. ergeben sich durch die Auswertung der Bedingungen: Es gelten 3. genau dann, wenn $\eta < 0$ und 4. genau dann, wenn $\eta > 0$ ist. Gilt 3., so entspricht $\alpha_1 = 1$ dem Defizit 1; wir haben den Fall 3.a aus Abschnitt 2; der Eigenwert α_1 aus Lemma 7 ist jetzt mit unserem α_2 zu identifizieren, da ja die Bedingung A. nur für den Kreis erfüllt ist. Die Aussage 4. schließlich entspricht wieder dem Fall 1. aus Abschnitt 2, dieses Mal bezogen auf den Kreis (die reelle Achse). □

Folgerung 18. *Die vier verschiedenen Punkte $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ der Riemannschen Sphäre S^2 liegen genau dann auf einen Kreis, wenn ihr* DV $\eta = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2; \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ *reell ist.* □

Beispiel 7. Wir stellen uns nun die folgende Frage: Es seien α_1, α_2 zwei nicht negative reelle Zahlen. Gibt es dann ein Nullsphärenpaar der Riemannschen Sphäre S^2, das diese Zahlen als ihre stationären Invarianten besitzt? Nach Satz 17 müssen diese Zahlen, wenn wir den trivialen Fall 2 beiseite lassen, notwendig die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\alpha_1 > \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 \geq 1 \geq \alpha_2. \tag{36}$$

Dazu bestimmen wir zuerst die Lösungen für das DV η der Gleichungen (35) bei gegebenen α_1, α_2. Setzen wir

$$\eta_\pm := \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - 2}{(\sqrt{\alpha_1} \pm \sqrt{\alpha_2})^2} + \frac{2\sqrt{(\alpha_1 - 1)(1 - \alpha_2)}}{(\sqrt{\alpha_1} \pm \sqrt{\alpha_2})^2}\,\mathrm{i}, \tag{37}$$

so sind η_+, η_- und deren Konjugierte $\bar{\eta}_+, \bar{\eta}_-$ alle im allgemeinen verschiedene Lösungen von (35); man vgl. das in Fußnote 3 erwähnte Mathematica Notebook. Weil das DV für vier verschiedene Punkte alle komplexen Werte $\eta \neq 0, 1, \infty$ annehmen kann, gibt es also stets derartige Nullsphärenpaare. Zur Geometrie der Situation nehmen wir wieder an, dass $\boldsymbol{x}_2 = 1, \boldsymbol{x}_3 = 0$ und $\boldsymbol{x}_4 = \infty$ gelten. Der Einheitskreis mit dem Zentrum 0 kann dann Möbius-invariant folgendermaßen charakterisiert werden: Man betrachte den vierten harmonischen Punkt $\boldsymbol{y}$ zu $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ auf dem durch diese Punkte bestimmten Kreis Σ_1, der in der gewählten speziellen Lage der Punkt -1 auf der reellen Achse ist, und bestimme den Kreis Σ_2 durch $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2$, der zu Σ_1 orthogonal ist. Man kann folgendes zeigen: Der Punkt $\boldsymbol{x}_1 = \eta_+$ geht durch die Inversion an Σ_2 in den Punkt η_- über. Die Konjugation ist die Involution an der reellen Achse. Da bei diesen Involutionen die Nullsphäre $(\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4) = (0, \infty)$ in sich übergeht und der Punkt $\boldsymbol{x}_2 = 1$ fest bleibt, ist klar, dass die mit den vier Lösungen $\eta = \eta_+, \eta_-, \bar{\eta}_+, \bar{\eta}_-$ aus diesen drei Punkten gebildeten 0-Sphärenpaare $(\eta, 1), (0, \infty)$ Möbius-äquivalent sind und somit dieselben stationären Invarianten haben. □

Übung 13. Man beweise die in Folgerung 18 und Beispiel 7 formulierten Behauptungen. Ferner zeige man: a) Es gibt weniger als vier Lösungen η von (35) genau dann, wenn $\alpha_1 = 1$ oder $\alpha_2 = 1$

oder $\alpha_2 = 0$ gilt, und das ist genau dann der Fall, wenn $\boldsymbol{x}_1$ zu $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ gehört. Genau dann, wenn $\alpha_1 = 1$ und $\alpha_2 = 0$ gelten, gibt es nur die einzige Lösung $\eta = -1$, wenn also der Wurf $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4)$ harmonisch ist. – b) Die komplexen Zahlen $\eta_+, \eta_-, \bar{\eta}_+, \bar{\eta}_-$ liegen auf einem Kreis.

Die Hypersphären der Riemannschen Sphäre sind die Kreise; für sie gilt das oben allgemein für Hypersphären Gesagte. Zwei Kreise haben als einzige Möbius-Invariante ihre Coxeter-Invariante (14). Der raumartige Einheitsvektors eines Kreises mit dem Mittelpunkt $m \in \mathbf{C}$ und dem Radius r ist nach (11)

$$\mathfrak{u}(m, r) = (\mathfrak{e}_0(1 - r^2 + |m|^2) + \mathfrak{e}_1 \operatorname{Re}(m) + \mathfrak{e}_2 \operatorname{Im}(m) + \mathfrak{e}_3(1 + r^2 - |m|^2))/2r. \qquad (38)$$

Entsprechend gelten die in Übung 5 formulierten Resultate nun für Paare von Geraden bzw. von Kreis und Gerade. Dass ein Paar bestehend aus einem Punkt und einem Kreis keine Möbius-Invariante hat, ergibt sich aus der folgenden Übung:

Übung 14. Man beweise: Die Möbius-Gruppe G_{n+1} wirkt transitiv auf der Menge der Paare

$$\{(\Sigma, \boldsymbol{a}) | \boldsymbol{a} \in S^n, \Sigma \subset S^n \text{ Hypersphäre}, \boldsymbol{a} \notin \Sigma\}$$

und auf der Menge der Paare

$$\{(\Sigma, \boldsymbol{a}) | \boldsymbol{a} \in S^n, \Sigma \subset S^n \text{ Hypersphäre}, \boldsymbol{a} \in \Sigma\}.$$

Hinweis. Man betrachte Σ als Absolut einer n-dimensionalen hyperbolischen Geometrie.

Für die Sphäre S^2 bleiben schließlich noch die Paare (Σ, S^0) zu betrachten, wobei Σ einen Kreis und $S^0 = (z_1, z_2)$, $z_1 \neq z_2$, eine Nullsphäre bezeichnet. Auf der Menge der Paare (Σ, S^0) mit $S^0 \subset \Sigma$ wirkt die Möbius-Gruppe G_3 transitiv, weil die Isotropiegruppe von Σ die Möbiusgruppe G_2 enthält, und weil G_3 auf der Menge der Kreise transitiv wirkt. Wir können uns also auf den Fall beschränken, dass S^0 nicht in Σ enthalten ist; diese Voraussetzung ist gleichbedeutend mit dem Erfülltsein der Bedingung A. Aus der allgemeinen Theorie in Abschnitt 2 folgt, dass wir eine einzige stationäre Invariante zu bestimmen haben, die folgendermaßen zu berechnen ist: In dem vierdimensionalen pseudo-euklidischen Vektorraum, welcher der Möbiusgeometrie der Sphäre S^2 zugrunde liegt, bezeichne $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(\Sigma)$ einen der beiden bis auf das Vorzeichen bestimmten raumartigen Einheitsvektoren, der die Punkte von Σ durch

$$\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \Sigma \Longleftrightarrow \langle \mathfrak{n}(\Sigma), \mathfrak{x} \rangle = 0 \text{ und } \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x} \rangle = 0$$

bestimmt, etwa den durch (38) definierten. Weiter seien $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ zwei zueinander orthogonale raumartige Einheitsvektoren, deren zugeordnete Kreise beide die 0-Sphäre S^0 enthalten; wir sprechen kurz von einer orthonormalen Basis des durch S^0 bestimmten *Kreisbüschels*, das ist die Schar aller Kreise der S^2, die S^0 enthalten. Dann ist

$$\operatorname{invcpp}(\Sigma, S^0). = \langle \mathfrak{n}, \mathfrak{b}_1 \rangle^2 + \langle \mathfrak{n}, \mathfrak{b}_2 \rangle^2 \qquad (39)$$

von der gerade beschriebenen Wahl von $\mathfrak{n}$ und der orthonormalen Basis unabhängig; es ist die gesuchte einzige stationäre Invariante des Paares (Σ, S^0). Die Matrix der in Abschnitt 2 beschriebenen Doppelprojektion reduziert sich nämlich gerade auf die einzige Komponente (39).

Übung 15. Man beweise: a) Alle Paare der Form (Σ, S^0), für die $\Sigma \cap S^0$ einpunktig ist, sind Möbius-äquivalent. – b) Die stationäre Invariante eines solchen Paares ist gleich 1 und sein Defizit ist gleich Null. (Hinweis. Wie in Übung 14 kann man zeigen, dass jede Konfiguration mit der angegebenen Eigenschaft Möbius-äquivalent zu $(\Sigma_0, \{0,1\})$ ist, wobei Σ_0 den Einheitskreis mit dem Zentrum 0 bezeichnet.) – c) Gilt $S^0 \subset \Sigma$, so sind die stationäre Invariante und das Defizit gleich 1.

Wir wollen nun die Möbius-Invariante $\mathrm{invcpp}(\Sigma, S^0)$ durch die euklidischen Invarianten des Paares (Σ, S^0) ausdrücken, also auch für diesen Fall eine zur Formel (14) für die Coxeter-Invariante analoge Formel herleiten. Es gilt

Satz 19. *Es seien $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, $z_1 \neq z_2$, zwei Punkte der komplexen Zahlenebene und $\Sigma(m,r) \subset \mathbf{C}$ der Kreis mit dem Mittelpunkt $m \in \mathbf{C}$ und dem Radius $r > 0$. Wir betrachten das Dreieck (m, z_1, z_2) und bezeichnen seine Seitenlängen wie folgt:*

$$a = |z_1 - z_2|,\ b = |z_2 - m|,\ c = |z_1 - m|. \tag{40}$$

Ferner bezeichne α den Winkel dieses Dreiecks an der Ecke m. Dann lässt sich die stationäre Möbius-Invariante des betrachteten Paares nach jeder der beiden folgenden Formeln berechnen:

$$\mathrm{invcpp}(\Sigma(m,r), (z_1, z_2)) = \frac{r^4 - 2r^2 bc\cos\alpha + b^2c^2}{r^2a^2}, \tag{41}$$

$$\mathrm{invcpp}(\Sigma(m,r), (z_1, z_2)) = \frac{(r^2 - bc)^2}{r^2a^2} + \frac{2bc(1-\cos\alpha)}{a^2}. \tag{42}$$

Offenbar geht (42) durch quadratische Ergänzung aus (41) hervor. Zum Beweis betrachtet man den Vektor (11) des Kreises $\Sigma(m,r)$ und verschafft sich eine orthonormale Basis des zu dem Punktepaar (z_1, z_2) gehörenden euklidischen Unterraumes von $\boldsymbol{V}^4$, der zu den die Punkte repräsentierenden isotropen Vektoren orthogonal ist. Damit berechnet man die Invariante nach der Formel (39) und interpretiert die in dem so erhaltenem Ausdruck auftretenden Größen. Die Einzelheiten findet man in dem in Fußnote 3 erwähntem Mathematica Notebook. □

Wir wollen nun noch einen dritten Ausdruck für die Invariante invcpp herleiten, welche die Beziehung zur Coxeter-Invariante deutlich hervortreten lässt. Dazu stellen wir die 0-Sphäre $S^0 = (z_1, z_2)$ ebenso wie die höher dimensionalen Sphären in der Mittelpunkt-Radius-Gestalt dar:

$$S^0(mz, rz, u) = (mz + rz\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,u}, mz - rz\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,u}),\ mz \in \mathbf{C}, u \in \mathbf{R}, rz > 0; \tag{43}$$

mz ist der Mittelpunkt, rz der Radius und u ein Winkelparameter, der die Richtung von S^0 in der komplexen Ebene bestimmt. Es gilt

Satz 20. *Für die stationäre Möbius-Invariante eines Kreises und einer 0-Sphäre ist*

$$\mathrm{invcpp}(\Sigma(m,r), S^0(mz, rz, u)) = (\frac{r^2 + rz^2 - d^2}{2r\,rz})^2 + (\frac{d\cos\beta}{r})^2; \tag{44}$$

hierbei bezeichnen $d = |m - mz|$ den Abstand der Mittelpunkte und β den Winkel des Vektors $m - mz$ mit der Normalen der Verbindungsgeraden $z1 \vee z2$. □

An der Formel (44) ist bemerkenswert, dass der erste Term auf der rechten Seite gerade das Quadrat der Coxeter-Invariante der Kreise $\Sigma(m,r)$ und $\Sigma(mz,rz)$ ist, während der zweite Term das Quadrat der Projektion von $m-mz$ auf die Normale von $S^0(mz,rz,u)$ bedeutet. Diese Formel werden wir im nächsten Abschnitt weitgehend verallgemeinern und daher hier nicht beweisen. Natürlich sind die Formeln sinngemäß auf die entsprechenden Konfigurationen einer euklidischen Ebene anwendbar.

Den Beweis von Satz 20 findet man auch in dem in Fußnote 3 erwähnten Notebook. Dieses Notebook enthält nützliche Hilfsmittel zur Lösung der folgenden Übungsaufgaben und zur Herstellung oder Variation der sie begleitenden Grafiken.

Übung 16. Wir betrachten das *Kreisbüschel* aller der Kreise, die eine gegebene Nullsphäre enthalten. Offenbar wirkt die Möbiusgruppe transitiv auf der Menge aller dieser Kreisbüschel. Wir können also annehmen, dass das Büschel die Menge der Kreise durch die Nullsphäre $S^0=(-1,1)$ ist. Die Mittelpunkte m dieser Kreise liegen auf der imaginären Achse; es sei $t := \mathrm{Im}(m)$ als Parameter des Kreisbüschels gewählt. Der Radius der Kreise ist dann $\sqrt{1+t^2}$. Wir bezeichnen den von dem Parameter t abhängenden Kreis des Büschels mit

$$bc(t) = circle(t, \sqrt{1+t^2}).$$

Man zeige: a) Der raumartige Vektor

$$\mathfrak{bc}(t) := \{0, 0, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\},\ t \neq 0,$$

bestimmt den Kreis $bc(t)$ des Büschels als Menge aller der Punkte $\boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}]$, deren Koordinatenvektor $\mathfrak{x}$ den Gleichungen

$$\langle \mathfrak{bc}(t), \mathfrak{x}\rangle = 0,\ \langle \mathfrak{x}, \mathfrak{x}\rangle = 0$$

genügen. – b) Die reelle Achse gehört ebenfalls zu dem betrachteten Kreisbüschel. Sie hat jedoch keine Darstellung der in a) angegebenen Gestalt. Durch welchen raumartigen Einheitsvektor ist sie bestimmt? – c) Durch jeden Punkt $z \neq \pm 1$ der Riemannschen Sphäre geht genau ein Kreis des betrachteten Kreisbüschels. Falls $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ ist, bestimme man den entsprechenden Parameterwert t dieses Kreises und damit seinen Mittelpunkt und Radius. Für die reellen Punkte und den Punkt ∞ ist die reelle Achse der eindeutig bestimmte Bündelkreis. – d) Zu jedem Kreis $ca = circle(a, ra)$ der komplexen Zahlenebene mit dem Mittelpunkt a und dem Radius ra, $0 < ra < \infty$, gibt es einen Kreis $bc(t)$ des Kreisbüschels, der ca orthogonal schneidet. Man bestimme einen derartigen Kreis. – e) Ist $ca = bc(s)$ selbst ein Kreis des Büschels, so bestimmt die Zuordnung des zu ihm eindeutig bestimmten orthogonalen Kreises $bc(t) = bc(s)^\perp$ eine fixpunktfreie Involution des Kreisbüschels. Man bestimme diese Involution als Ausdruck $t = F(s)$. Offenbar ist der Einheitskreis mit dem Zentrum 0 in Involution mit der reellen Achse; man zeige das auch rechnerisch.

Übung 17. Man beweise: a) Zu jedem Kreisbüschel der Riemannschen Sphäre gibt es eine einparametrische Schar von Kreisen, die alle Kreise des Büschels orthogonal schneiden.Man nennt diese Kreise die *orthogonalen Trajektorien* des Büschels. Man bestimme die orthogonalen Trajektorien des in Übung 16 betrachteten Kreisbüschels. – b) Man bestimme die Isotropiegruppe H einer 0-Sphäre. – c) Es bezeichne $M(S^0)$ das Büschel der Kreise durch S^0 und $M^\perp(S^0)$ die Menge seiner orthogonalen Trajektorioen. Man beweise, dass H transitiv auf der Produktmenge $M(S^0) \times M^\perp(S^0)$ wirkt.

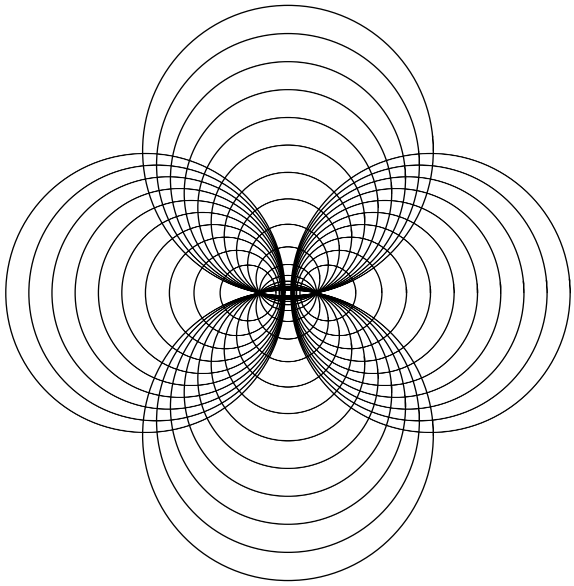

Abbildung 2.28: Ein Kreisbüschel und seine orthogonalen Trajektorien

Übung 18. Es sei $M(S^0)$ das Kreisbüschel von $S^0 = (-1, 1)$ (vgl. Übung 16) und $S^1(m, r)$ ein Testkreis mit dem Mittelpunkt m und dem Radius r, der S^0 nicht enthält. Wir bezeichnen mit $\alpha = \text{invcpp}(S^1(m, r), S^0)$ die stationäre Invariante (39) des betrachteten Paares. Man beweise: Es gibt genau dann einen Kreis $bc(t) \in M(S^0)$, der den Testkreis $S^1(m, r)$ berührt, wenn $\alpha \geq 1$ ist; gilt $\alpha = 1$, so gibt es genau einen derartigen Kreis, und für $\alpha > 1$ existieren zwei derartige Kreise. Im Falle $\alpha \geq 1$ berechne man die Parameterwerte t dieser Kreise.

Die Abbildung 2.29 zeigt die in Übung 18 beschriebene Situation. Die Testkreise sind blau und die berührenden Kreise des Büschels sind, falls existent, violett gezeichnet. Der rote Kreis ist derjenige Kreis des Büschels, welcher den Testkreis orthogonal schneidet; die Testkreise gehören nicht zu den orthogonalen Trajektorien des Büschels. Der grüne Kreis ist derjenige Kreis des Büschels, für den die Coxeter-Invariante (14) zum Testkreis extremal ist. Da die stationäre Invariante zweier Kreise I^2 das Quadrat ihrer Coxeter-Invariante ist, ist sie für den grünen Kreis maximal. Gilt wie im linken Bild $\alpha > 1$, so trennt der Testkreis die Punkte von S^0 nicht und es existieren zwei berührende Kreise des Büschels. Im mittleren Bild ist $\alpha = 1$; der Testkreis enthält einen Punkt von S^0, und es existiert genau ein berührender Kreis des Büschels, der gleichzeitig den extremalen Wert $\alpha = 1$ der stationären Invariante realisiert. Im rechten Bild schließlich ist $\alpha < 1$; der Testkreis trennt die Punkte von S^0, jeder Kreis des Büschels schneidet den Testkreis, und der grüne Kreis realisiert den kleinsten auftretenden Schnittwinkel.

Übung 19. Man betrachte ein Paar (L, S^0) einer beliebigen (reellen) Geraden L und einer Nullsphäre S^0 der komplexen Ebene und beweise ein zu Satz 20 analoges Resultat.

Übung 20. In den Übungen 16,17,18 ersetze man die 0-Sphäre $S^0 = \{-1, 1\}$ durch die 0-Sphäre $S^0 = \{0, \infty\}$. Das Kreisbüschel geht dann in das Büschel aller Geraden durch 0 über. Man löse die Übungen auch für diesen Fall und skizziere die entstehenden Konfigurationen.

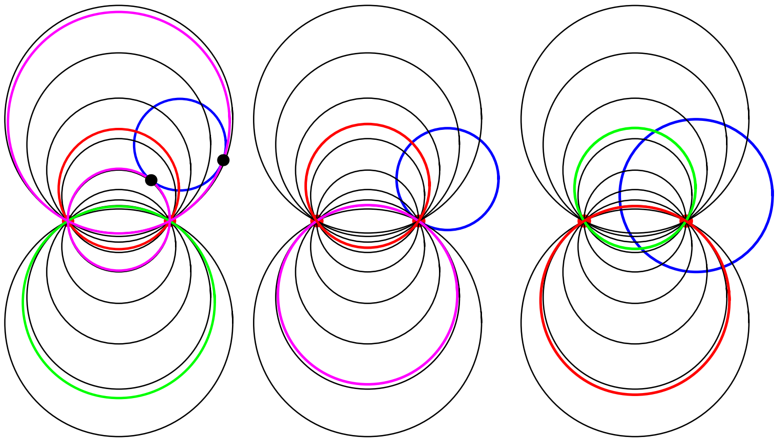

Abbildung 2.29: Existenz von Kreisen eines Büschels, die einen Testkreis berühren.

2.7.4 Möbius-Invarianten und euklidische Invarianten

In den Formeln (14) und (44) haben wir die Möbius-Invariante eines Hypersphärenpaares bzw. eines Paares (Σ^1, S^0) eines Kreises und einer 0-Sphäre durch ihre euklidischen Invarianten ausgedrückt und gelangten so zur Coxeter-Invariante. Wir wollen nun einen entsprechenden Ausdruck für Paare (Σ^{n-1}, S^l) einer Hypersphäre und einer l-Sphäre, $0 \leq l < n$, des n-dimensionalen euklidischen Raumes$\boldsymbol{E}^n$ herleiten. Nach Satz 5 werden ja diese Paare bis auf Möbius-Äquivalenz ebenfalls durch eine einzige Möbius-Invariante beschrieben. Euklidische Invarianten eines derartigen Paares sind die Radien r, R der Sphäre S^l und der Hypersphäre sowie der Abstand d ihrer Mittelpunkte. Im Fall $l = n-1$ bilden diese bereits ein vollständiges euklidisches Invariantensystem. Ist $l < n-1$, so haben wir noch eine vierte Größe einzuführen, um ein vollständiges Invariantensystem zu erhalten, etwa den Winkel, den die Verbindungsgerade der Mittelpunkte mit der durch die l-Sphäre bestimmten $l+1$-Ebene bildet, oder, was auf dasselbe hinausläuft, den Abstand p des Mittelpunktes $\boldsymbol{m}$ der Hypersphäre $\Sigma = \Sigma(\boldsymbol{m}, R)$ von dieser $l+1$-Ebene. Die pseudo-orthonormierte Basis $(\mathfrak{e}_j)$ des zu Grunde liegenden $n+2$-dimensionalen Vektorraums wählen wir so, dass die l-Sphäre als Durchschnitt der Hypersphäre $\Sigma(\boldsymbol{o}, r)$ vom Radius $r > 0$ mit dem Ursprung $\boldsymbol{o}$ als Zentrum mit den durch die Basisvektoren $\mathfrak{e}_\kappa$, $\kappa = l+2, \ldots, n$ als Normalvektoren bestimmten Koordinatenhyperebenen durch den Ursprung erscheint. Euklidisch bedeutet das also, dass S^l die l-Sphäre vom Radius r mit dem Zentrum im Ursprung ist, die in der von den ersten $l+1$ Koordinaten x^α, $\alpha = 1, \ldots, l+1$, bestimmten Koordinaten-$(l+1)$-Ebene liegt. Die Vektoren

$$\mathfrak{u}_1 := (\mathfrak{e}_0(1-r^2) + \mathfrak{e}_{n+1}(1+r^2))/2r,\ \mathfrak{u}_2 = \mathfrak{e}_{l+2}, \ldots, \mathfrak{u}_{n-l} = \mathfrak{e}_n \tag{45}$$

sind dann eine orthonormierte Basis des die l-Sphäre S^l bestimmenden euklidischen Unterraums $\boldsymbol{U}^\perp \subset \boldsymbol{V}$; der Vektor $\mathfrak{u}_1$ ist nach (11) der zur genannten Hypersphäre gehörende raumartige Einheitsvektor. Ebenfalls nach (11) bestimmt der Vektor

$$\mathfrak{w} = (\mathfrak{e}_0(1 - R^2 + d^2) + 2\mathfrak{m} + \mathfrak{e}_{n+1}(1 + R^2 - d^2))/2R$$

die Hypersphäre $\Sigma(\boldsymbol{m}, R)$; dabei ist $\mathfrak{m}$ der Ortsvektor des Mittelpunkts $\boldsymbol{m}$ bezüglich $\boldsymbol{o}$ und $d = |\mathfrak{m}|$ der Abstand der Mittelpunkte. Wir wenden nun Satz 5 an. Der zur Hypersphäre $\Sigma(\boldsymbol{m}, R)$ gehörende Unterraum $\boldsymbol{W}^{\perp}$ ist eindimensional. Daher reduziert sich der Operator A auf eine einzige Komponente, die damit die zu berechnende Invariante

$$\alpha(\Sigma(\boldsymbol{m}, R), S^l) := \alpha_1$$

ist. Aus der Definition (6.70) des Operators A folgt nach einer einfachen Rechnung die Formel

$$\alpha(\Sigma(\boldsymbol{m}, R), S^l) = \Sigma_{\kappa=1}^{n-l}\langle \mathfrak{w}, \mathfrak{u}_\kappa\rangle^2 = (\frac{r^2 + R^2 - d^2}{2rR})^2 + (\frac{p}{R})^2, \tag{46}$$

die (44) als Spezialfall enthält; man beachte $p = d\cos\beta$. Damit ist bewiesen:

Satz 21. *Die einzige stationäre Möbius-Invariante von Paaren* (Σ^{n-1}, S^l) *einer Hypersphäre* Σ^{n-1} *und einer* l*-Sphäre* S^l, $0 \leq l < n$, *des* n*-dimensionalen euklidischen Raumes* $\boldsymbol{E}^n$ *ist durch* (46) *bestimmt; hierbei bezeichnen* R *den Radius von* Σ^{n-1}, r *den Radius von* S^l, d *den Abstand der Mittelpunkte und* p *die Länge der Projektion des Verbindungsvektors der Mittelpunkte auf den zur* $l+1$*-Ebene von* S^l *orthogonalen Unterraum,* $p = 0$ *im Fall* $l = n-1$. □

Wir wollen nun die Möbius-Invarianten eines Kreispaares (C_0, C_1) des dreidimensionalen euklidischen Raumes $\boldsymbol{E}^3$ durch ihre euklidischen Invarianten ausdrücken. Es seien $\boldsymbol{m}_i$ die Mittelpunkte, $\boldsymbol{r}_i$ die Radien und $\mathfrak{n}_i$ die *Positionsvektoren* der Kreise C_i, $i = 0, 1$, das sind Normaleneinheitsvektoren der Ebenen, in denen die Kreise liegen. Wir betrachten die Kreise als nicht orientiert; daher sind die Positionsvektoren nur bis auf Multiplikation mit ± 1 eindeutig bestimmt. Ferner bezeichne $\mathfrak{d} = \boldsymbol{m}_1 - \boldsymbol{m}_0$ den Verbindungsvektor ihrer Mittelpunkte. Man macht sich leicht klar, dass die folgenden sechs Größen ein vollständiges euklidisches Invariantensystem der Kreispaare (C_0, C_1) bilden:

1. Die Radien r_0, r_1 der Kreise.
2. Der Winkel α zwischen den Ebenen der Kreise: $\cos\alpha = |\langle \mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_1\rangle|,\ 0 \leq \alpha \leq \pi/2$.
3. Der Abstand $d = |\mathfrak{d}|$ der Zentren.
4. Die Winkel β, γ zwischen den Positionsvektoren der Kreise und dem Verbindungsvektor $\mathfrak{d}$ ihrer Mittelpunkte; diese Winkel bleiben undefiniert, wenn $d = 0$ gilt.

Nach Satz 5 hat ein Kreispaar zwei stationäre Invarianten $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq 0$, welche die Eigenwerte der Matrix der Doppelprojektion A sind. Anstelle der Eigenwerte betrachten wir die Determinante und die Spur dieser Matrix, die ja ein zu den Eigenwerten äquivalentes vollständiges Invariantensystem in der Möbius-Geometrie sind. Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ orthonormierte Basen der die Kreise C_0, C_1 bestimmenden euklidischen Unterräume $\boldsymbol{W}^{\perp}, \boldsymbol{U}^{\perp}$ des pseudo-euklidischen Vektorraums $\boldsymbol{V}^5$, so sind die Koordinaten von A

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n-l}\langle \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_k\rangle\langle \mathfrak{a}_j, \mathfrak{b}_k\rangle,\ i, j = 1, \ldots, n-m, \tag{47}$$

wobei in dem hier betrachteten Fall $n = 3$ und $l = m = 1$ zu setzen ist. Offenbar gelten

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \alpha_1\alpha_2, \operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} = \alpha_1 + \alpha_2, \tag{48}$$

woraus sich umgekehrt die Eigenwerte leicht berechnen lassen. Wir beweisen

Satz 22. *Die Möbius-Invarianten* (48) *eines Kreispaares* C_0, C_1 *des euklidischen Raumes* $\boldsymbol{E}^3$ *ergeben sich aus den euklidischen Invarianten des Paares nach den folgenden Formeln:*

$$\det A = \frac{((r_0^2 + r_1^2 - d^2)\cos\alpha + 2d^2\cos\beta\cos\gamma)^2}{4r_0^2r_1^2}, \tag{49}$$

$$\operatorname{tr} A = \frac{d^4 + r_0^4 + r_1^4 + 4r_0^2r_1^2 + 2r_0^2r_1^2\cos 2\alpha + 2d^2(r_0^2\cos 2\beta + r_1^2\cos 2\gamma)}{4r_0^2r_1^2}. \tag{50}$$

Für den Beweis dieses Satzes können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Kreis C_0 in der x, y-Ebene eines euklidischen Koordinatensystems mit dem Zentrum im Ursprung liegt. Dann sind nach (11) und (15) die Vektoren

$$\mathfrak{v}_1 = (\mathfrak{e}_0(1 - r_0^2) + \mathfrak{e}_4(1 + r_0^2))/2r_0, \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{e}_3$$

eine orthonormierte Basis des Vektorraums $\boldsymbol{W}^\perp$ des Kreises C_0; dabei definiert der erste Vektor die Sphäre vom Radius r_0 mit dem Zentrum im Ursprung und der zweite die x, y-Ebene. Der Positionsvektor von C_0 ist $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{e}_3$. Der Positionsvektor des zweiten Kreises C_1 ist der beliebige Einheitsvektor des euklidischen Raums

$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{e}_1\cos u\cos v + \mathfrak{e}_2\sin u\cos v + \mathfrak{e}_3\sin v.$$

Wir können die Koordinaten in der x, y-Ebene so wählen, dass das Zentrum $\boldsymbol{m}_1$ von C_1 den Ortsvektor

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{e}_1 x + \mathfrak{e}_3 z$$

hat. Stellen wir den Kreis C_1 ebenfalls als Durchschnitt der Sphäre vom Radius r_1 um das Zentrum $\boldsymbol{m}_1$ mit der Ebene des Kreises, also der zu $\mathfrak{n}_1$ orthogonalen Ebene durch $\boldsymbol{m}_1$ dar, so ergeben sich nach (11) und (15) die Vektoren

$$\mathfrak{b}_1 = (\mathfrak{e}_0(1 - r_1^2 + d^2) + 2\mathfrak{d} + 4(1 + r_1^2 - d^2))/2r_1,$$
$$\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{n}_1 + (\mathfrak{e}_0 - \mathfrak{e}_4)\langle\mathfrak{d}, \mathfrak{n}_1\rangle,$$

die eine orthonormierte Basis des Vektorraumes $\boldsymbol{U}^\perp$ von C_1 bilden. Mit diesen Ausdrücken berechnet man die Matrix A und deren Determinante und Spur. Nach Berechnung der euklidischen Invarianten

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \langle\mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_1\rangle = \sin v,\\
d\cos\beta &= \langle\mathfrak{n}_0, \mathfrak{d}\rangle = z,\\
d\cos\gamma &= \langle\mathfrak{n}_1, \mathfrak{d}\rangle = x\cos u\cos v + z\sin v
\end{aligned}$$

lassen sich die Koordinaten x, z, u, v aus $\det A$ und $\operatorname{tr} A$ eliminieren, und man erhält die angegebenen Formeln (49) und (50). Da die Winkelfunktionen von β und γ nur mit dem Faktor d vorkommen, schadet es nicht, dass sie im Fall $d = 0$ undefiniert sind; die Formeln gelten auch in diesem Fall. Für die Berechnungen der Details haben wir wiederum Stephen Wolframs Mathematica [83] benutzt, vgl. das Notebook mcircles.nb auf der Homepage von R. Sulanke. □

2.7.5 Dreidimensionale Möbius-Geometrie

In diesem Abschnitt wollen wir die Geometrie des Möbius-Raumes S^3 durch Überlegungen zur Kreisgeometrie ergänzen. Wenn es uns im Dreidimensionalen lebenden Wesen auch nicht gelingt, uns eine dreidimensionale Sphäre unmittelbar vorzustellen, denken wir uns eine n-Sphäre doch immer als Hyperfläche in einem $(n+1)$-dimensionalen Raum, so hat diese Dimension doch den Vorteil, durch stereographische Projektion in den uns wohl bekannten dreidimensionalen euklidischen Raum übergehen zu können (siehe den Hinweis in Übung 1). Da diese Transformation konform ist, erhält sie zumindest lokal alle Möbius-geometrischen Eigenschaften und macht diese so der unmittelbaren Vorstellung und der graphischen Darstellung zugänglich. Die Geometrie der Sphären $\Sigma^2 \subset S^3$ und der Paare (Σ^2, S^l), $l = 0, 1$, ist als Spezialfall $n = 3$ der in den vorigen Abschnitten immer wieder betrachteten Hypersphären enthalten, vgl. insbesondere Satz 21. Für Kreise in der S^3 haben wir bisher nur den gerade bewiesenen Satz 22 erhalten, der einerseits die Möglichkeit ergibt, die Möbius-Invarianten als Funktion der euklidischen Konfiguration der Kreise zu berechnen, andererseits jedoch die stationären Invarianten des Kreispaares nicht direkt liefert. Die Ausdrücke, die man für diese aus den in Satz 22 bewiesenen Formeln erhält, sind recht unhandlich. Die stationären Invarianten, speziell die maximale α_1, geben aber gerade die wichtigen Informationen über die Lageeigenschaften des Kreispaares. Eine Anwendung des Vektorprodukts ermöglicht einen alternativen Zugang zu diesen Lageeigenschaften. In der Serie Spheres von Mathematica Notebooks wurden rechnerische Hilfsmittel zur Bearbeitung und Visualisierung der dreidimensionalen Möbius-Geometrie bereit gestellt. Man findet diese Notebooks unter dem Titel Spheres in MathSource, oder auf der Homepage von R. Sulanke.

Mit den Bezeichnungen von Satz 5 seien $C_0 = S(\boldsymbol{U})$, $C_1 = S(\boldsymbol{W})$ zwei Kreise in S^3 und $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\}$, $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}$ orthonormierte Basen der entsprechenden euklidischen Unterräume $\boldsymbol{W}^\perp$, $\boldsymbol{U}^\perp$. Wir betrachten unter diesen Voraussetzungen das nach Satz 2.2.17 definierte Vektorprodukt in dem orientiertem pseudo-euklidischen Vektorraum $\boldsymbol{V}^5$

$$\mathfrak{n}(C_0, C_1) := \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2, \tag{51}$$

das wir den *Indikator* des Kreispaares nennen. Offenbar gilt

Lemma 23. *Der durch* (51) *definierte Indikator ist bis auf den Faktor* ± 1 *durch die Kreise eindeutig bestimmt. Sind die Kreise orientiert, so multipliziert sich der Indikator bei einer Umorientierung eines der Kreise mit dem Faktor* -1. *Der Indikator ist dem Kreispaar äquivariant zugeordnet; ist* $g \in G_4$, *so gilt*

$$\mathfrak{n}(gC_0, gC_1) = \pm g\mathfrak{n}(C_0, C_1).$$

Der Faktor -1 *tritt auf, wenn* g *die Orientierung von* S^3 *umkehrt.*□

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 2.2.18. Aus diesem Lemma erhält man leicht

Satz 24. *Das Skalarquadrat des Indikators ist eine Möbius-Invariante des Paares der nicht orientierten Kreise* C_0, C_1. *Dabei gilt*

$$w(C_0, C_1) := \langle \mathfrak{n}(C_0, C_1), \mathfrak{n}(C_0, C_1) \rangle = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2 - 1, \tag{52}$$

wobei α_1, α_2 *die stationären Invarianten des Paares* C_0, C_1 *bezeichnen.*

B e w e i s. Zum Beweis benutzen wir die Formel (2.37), wobei $a = -1$ zu beachten ist. Nach Lemma 23 können wir annehmen, dass die Basen gerade die bei der Herleitung von Satz 6.24 definierten kanonischen Basen sind. Für sie gelten

$$\langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 \rangle = \sqrt{\alpha_1},\ \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2 \rangle = \sqrt{\alpha_2},\ \langle \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_2 \rangle = \langle \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1 \rangle = 0.$$

Einsetzen in die zu berechnende Determinante ergibt die Behauptung.□

Folgerung 25. *Es sei $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(C_0, C_1)$ der Indikator der Kreise C_0, C_1. Dann gilt die folgende Disjunktion:*

1. *Es gilt $\mathfrak{n} = \mathfrak{o}$. Dann sind die Kreise nicht in allgemeiner Lage, d.h. es gibt eine Sphäre $\Sigma^2 \subset S^3$, welche beide Kreise enthält (Bedingung A ist nicht erfüllt).*
2. *Der Indikator $\mathfrak{n}$ ist raumartig: $w(C_0, C_1) > 0$. Dann tritt Fall 1 ein; die Kreise sind in allgemeiner Lage, disjunkt, und lassen sich durch Sphären voneinander trennen.*
3. *Der Indikator ist isotrop $w(C_0, C_1) = 0$, $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{o}$: Dann tritt Fall 2 ein; die Kreise sind in allgemeiner Lage und schneiden sich in einem einzigen Punkt.*
4. *Der Indikator $\mathfrak{n}$ ist zeitartig: $w(C_0, C_1) < 0$. Dann tritt Fall 3 ein; die Kreise sind disjunkt und miteinander verkettet.*

B e w e i s. Nach Satz 2.18, 3., gilt 1 genau dann, wenn die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ linear abhängig sind. Ist der Indikator $\mathfrak{n}$ raumartig, so ist $\boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp = [\mathfrak{n}]^\perp$ pseudo-euklidisch und hat die Dimension 4; wie in Lemma 6 folgt die Behauptung 2. Ist $\mathfrak{n}$ isotrop, so ist es auch $\boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp = (\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W})^\perp$, und daher auch $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} = [\mathfrak{n}]$; der Indikator repräsentiert den einzigen Schittpunkt der Kreise, und es gilt 3. Der Beweis der Aussage 4 ergibt sich aus dem Beweis von Lemma 7. □

Beispiel 8. Es sei C_0, C_1 ein Kreispaar mit der maximalen stationären Invariante $\alpha_1 = 0$. Dann ist wegen $0 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1$ auch $\alpha_2 = 0$, und die Matrix A der Doppelprojektion ist die Nullmatrix. Derartige Kreispaare nennen wir *orthogonal*. Ein konkretes Beispiel hierfür ist das Paar bestehend aus der z-Achse, dargestellt als Schnitt der Koordinatenebenen, also mit dem Raum $\boldsymbol{U}^\perp = [\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2]$, und dem Einheitskreis in der x, y-Ebene mit dem Zentrum im Ursprung, dargestellt als Schnitt dieser Ebene mit der Einheitssphäre um den Ursprung, also $\boldsymbol{W}^\perp = [\mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4]$. Jede Sphäre, die den Einheitskreis enthält, schneidet jede Sphäre, d.h. Ebene, welche die z-Achse enthält, orthogonal. Das ist anschaulich klar und lässt sich leicht nachrechnen: Die raumartigen Einheitsvektoren, welche diese Sphären bestimmen, liegen in $\boldsymbol{U}^\perp$ bzw.$\boldsymbol{W}^\perp$, und diese Räume sind zueinander orthogonal. Für das Skalarquadrat des Indikators gilt $w = -1$; die Kreise sind miteinander verkettet. Jedes Paar zueinander orthogonaler Kreise ist zu dem beschriebenen konkretem Paar Möbius-äquivalent. □

Übung 21. Man verwechsle den in Beispiel 8 definierten Begriff nicht mit dem zweier sich senkrecht schneidender Kreise! Man beweise: Zwei Paare sich senkrecht schneidender Kreise in allgemeiner Lage haben dieselben stationären Invarianten $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ und sind daher Möbius-äquivalent. Zwei Sphären, die je einen dieser Kreise enthalten, können sich unter einem beliebigen Winkel schneiden. Man gebe ein konkretes Beispiel für diese Situation an und führe die entsprechenden Berechnungen auf Grund der zugehörigen euklidischen Unterräume durch.

Weiter berechne man die stationären Invarianten zweier sich senkrecht schneidender Kreise, welche die Bedingung A nicht erfüllen; diese sind ebenfalls $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$. Da hier die Rangbedingung verletzt ist, sind derartige Kreispaare natürlich nicht mit den zuvor betrachteten Möbius-äquivalent.

Beispiel 9. In dem Mathematica Notebook mcircles.nb der Serie Spheres wurden Normalformen für Kreispaare beschrieben. Zu jedem Paar stationärer Möbius-Invarianten ist ein Kreispaar angegeben, das gerade diese Invarianten besitzt. Ausgehend von den Eigenvektoren des Operators A wird dem Kreispaar ein orthonormiertes Repère des pseudoeuklidischen Vektorraums $\boldsymbol{V}^5$ angepasst, in dem die definierenden Unterräume der Kreise durch Vektoren aufgespannt werden, deren Koeffizienten nur von den Invarianten abhängen, wie im Abschnitt 6 für Paare von hyperbolischen Unterräumen beschrieben. Wir betrachten nun den Fall *verketteter Kreise*. Da die Möbius-Gruppe transitiv über den Kreisen wirkt, können wir annehmen, dass der Kreis $C_0 = S(\boldsymbol{U})$ des Paares der Einheitskreis in der x,y-Ebene mit dem Zentrum im Ursprung ist; Die Vektoren $\mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4$ spannen dann den definierenden Raum $\boldsymbol{U}^\perp$ von C_0 auf. Der zweite Kreis $C_1 = C(a,b)$ des Paares werde durch den euklidischen Unterraum

$$\boldsymbol{W}^\perp := [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2],\ \mathfrak{a}_1(a) := \mathfrak{e}_1 \sin a + \mathfrak{e}_3 \cos a,\ \mathfrak{a}_2(b) := \mathfrak{e}_2 \sin b + \mathfrak{e}_4 \cos b \qquad (53)$$

bestimmt. Offenbar ist $C_1(0,0) = C_0$, so dass wir diesen Fall ausschließen müssen. Aus der Formel (47) berechnet man leicht, dass die Matrix A der Doppelprojektion in den angegebenen Basen Diagonalgestalt hat; ihre Diagonalelemente sind die Eigenwerte

$$\alpha_1 = \cos^2 a, \alpha_2 = \cos^2 b,\ 0 \le a \le b \le \pi/2,\ b \ne 0.$$

Mit den angegebenen Schranken erhalten wir für alle möglichen stationären Invarianten verketteter Kreise einen eindeutig bestimmten Repräsentanten. Der Indikator des Kreispaares ist der zeitartige Vektor

$$\mathfrak{n}(C_0, C(a,b)) = \mathfrak{e}_0 \sin^2[a] \sin^2[b],\ a \ne 0,$$

Für $a = 0$ liegen die Kreise $C(0,b)$ in der x,y-Ebene, die Bedingung A ist verletzt, der Indikator ist der Nullvektor. Die euklidischen Daten des Kreises $C(a,b)$ sind

Das Zentrum: $\mathfrak{m}((a,b) = -\mathfrak{e}_2 \sin b$,

Der Radius: $r(a,b) = 1/\cos b$,

Der Positionsvektor: $\mathfrak{p}(a,b) = \mathfrak{e}_1 \sin a + \mathfrak{e}_3 \cos a$.

Für $b = \pi/2$ ergeben sich Geraden in der x,z-Ebene durch den Ursprung, die mit der x-Achse den Winkel a bilden. Der Kosinus des Schnittwinkels zweier Sphären, die jeweils einen der Kreise des Kreispaares enthalten, ist

$$\begin{aligned} F(a,b,s,t) &= \langle \mathfrak{e}_3 \cos t + \mathfrak{e}_4 \sin t, \mathfrak{a}_1(a) \cos s + \mathfrak{a}_2(b) \sin s\rangle \\ &= \cos a \cos s \cos t + \cos b \sin s \sin t. \end{aligned}$$

Im Fall gleicher Eigenwerte, also für $a = b$, erhalten wir eine Schar phasenverschobener Kosinusfunktionen,

$$F(a,a,s,t) = \cos a \cos(s-t),$$

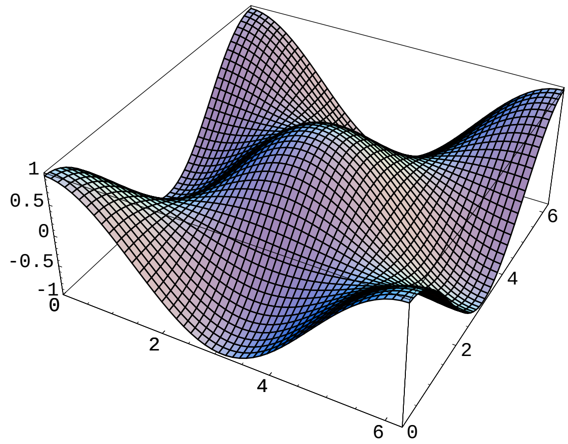

Abbildung 2.30: Die Funktion $F(0.3, 1.5, s, t)$.

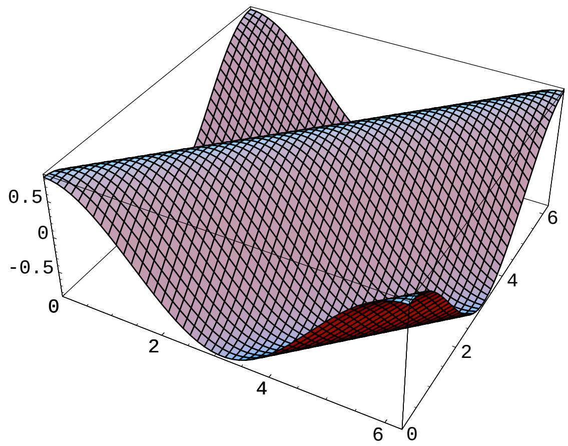

Abbildung 2.31: Die Funktion $F(0.6, 0.6, s, t)$.

während für $a \neq b$ auch die Amplitude eine periodische Funktion ist. Die Abbildung 2.32 zeigt ein Stück einer Fläche, die von den Kreisen $C(a, a)$, $0 \leq a \leq \pi/3$, erzeugt wird. Kreispaare mit gleichen Eigenwerten haben wir *isogonal* genannt, was aber nicht heißen soll, dass die Kreise enthaltenden Sphärenpaare sich unter konstantem Winkel schneiden, vgl. Abbildung 2.31. □

Übung 22. Man beweise, dass das Kreispaar $C(a, a), C(b, b)$ für $a \neq b$ ebenfalls isogonal ist, und berechne seine stationäre Invariante. Die erzeugenden Kreise der Fläche aus Abbildung 2.32 sind also paarweise isogonal verkettet.

In der dreidimensionalen Möbius-Geometrie sind noch die Paare (C, S^0) von Kreis und 0-Sphäre zu betrachten. Hier benötigt man wieder zwei stationäre Möbius-Invarianten, um diese Paare bis auf Möbius-Äquivalenz zu charakterisieren. In dem Mathematica

Notebook pairs.nb der Serie Spheres werden Formeln für diese Invarianten hergeleitet und einige einfache Beispiele betrachtet. Man beachte noch die folgende

Übung 23. In der n-Sphäre S^n, $n \geq 2$, betrachten wir die Mengen

$$\begin{aligned} M_0 &:= \{(C, \boldsymbol{b}) | \boldsymbol{b} \in C, C \subset S^n \text{ Kreis}\}, \\ M_1 &:= \{(C, \boldsymbol{b}) | \boldsymbol{b} \in S^n \setminus C, C \subset S^n \text{ Kreis}\}. \end{aligned}$$

Man beweise, dass die Möbius-Gruppe auf jeder dieser Mengen transitiv wirkt, und stelle diese Mengen als Faktorräume dar (vgl. Abschnitt I.1.4).

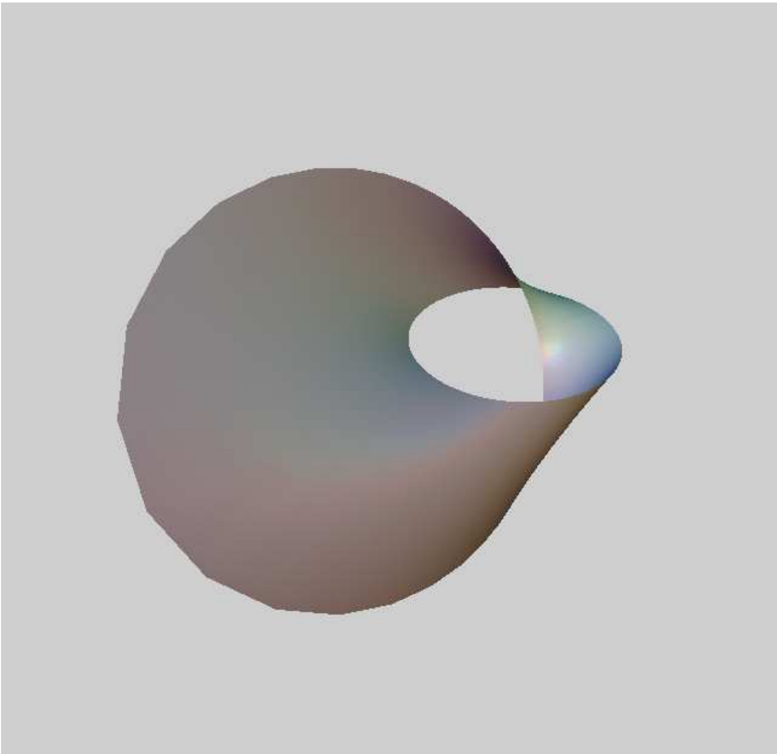

Abbildung 2.32: Die Fläche $\{C(a, a) | 0 \leq a \leq \pi/3\}$.

2.7.6 Orbits. Dupinsche Zykliden. Loxodromen

In diesem Abschnitt wollen wir mit einigen Bemerkungen auf das *Erlanger Programm* von Felix Klein [51] eingehen, das die Entwicklung der Geometrie seit seiner Formulierung stark beeinflusst. Der grundlegende Begriff des Erlanger Programms ist der einer *Transformationsgruppe*. Neuere Entwicklungen der Theorie der Transformationsgruppen findet man in der Monographie von A. L. Onishchik [61]. Natürlich bildet das Erlanger Programm nur ein allgemeines Schema, das Probleme anregt, aber selbst keine Mittel zu ihrer Lösung bereit stellt. Seine Wirkung konnte es erst auf der Grundlage der von Sophus

Lie geschaffenen Theorie der Lieschen Gruppen, der Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen und die darauf fußende Klassifikation der symmetrischen Riemannschen Räume durch Elie Cartan, für die die oben betrachteten elliptischen und hyperbolischen Räume einfachste Beispiele sind, und die damit zusammenhängende Entstehung algebraischer und analytischer Methoden entfalten. Eine hervorragende Darstellung dieser Entwicklung findet man in den Monographien von S. Helgason [38], [39], [40]. Die in diesem Gebiet anzuwendenden Methoden gehen allerdings weit über den Rahmen unseres Buches, allgemeiner, über den Rahmen der durch die lineare Algebra beherrschten elementaren projektiven Geometrie, hinaus. Die algebraische Komponente stellt hier die Theorie der Lie-Algebren dar (vgl. II.8.4), während die analytische Seite von dem Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit beherrscht wird. Eine *Liesche Gruppe* ist eine Gruppe, die gleichzeitig die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit besitzt, deren Elemente also durch Koordinaten beschrieben werden können, wobei die Gruppenoperationen in diesen Koordinaten ausgedrückt stetige Funktionen sind. Alle in diesem Buch besprochenen Gruppen von Matrizen mit reellen oder komplexen Komponenten sind solche Liesche Gruppen. Da sie als Gruppen linearer Transformationen endlich dimensionaler Vektorräume dargestellt sind, nennt man sie auch *lineare Liesche Gruppen.* Einen Einstieg in die Theorie von diesem Gesichtspunkt aus findet man bei H. Freudenthal, H. De Vries [34]. In R. Sulanke, P. Wintgen [77] werden die Elemente der Theorie der Lieschen Gruppen als begleitendes Beispiel zur Differentialgeometrie differenzierbarer Mannigfaltigkeiten behandelt. Eine Einführung in die mit der algebraischen Geometrie zusammenhängenden Aspekte der Theorie der Lieschen Gruppen findet man in A. L. Onishchik, E. B. Vinberg [62]. Die in diesem Abschnitt zitierten Bücher sind natürlich nur eine subjektive Auswahl von Empfehlungen für das weitere Studium; in ihnen findet man präzise Begriffsbildungen, weiterführende Hinweise und zum Teil sehr umfangreiche Literaturverzeichnisse.

In den abschließenden Bemerkungen des Abschnittes I.6.6 haben wir bereits die Grundsätze des Kleinschen Erlanger Programms dargelegt. In diesen Erörterungen kam der sehr allgemeine Begriff eines Objektes, oder eines geometrischen Gebildes, vor, den wir als Element des transformierten Raumes X einer Transformationsgruppe $[G, X]$ interpretierten. In der Geometrie liegt oft die folgende Situation vor: Es ist eine den Betrachtungen zu Grunde liegender homogener Raum $[G, X]$ gegeben, für den also G transitiv über X wirkt. Eine interessante und wichtige Frage ist die nach der Klassifikation der homogenen Räume, also der möglichen transitiven Transformationsgruppen, einer gegebenen Gruppe G. Diese Frage ist selbst im Fall konkret gegebener, kompakter Liescher Gruppen sehr schwer, vielleicht auch überhaupt nicht, zu beantworten. Mit dieser Problematik beschäftigt sich die oben schon zitierte Monographie [61]. Wir erinnern noch an den Begriff eines *Orbits*: Ist $[G, X]$ eine beliebige Transformationsgruppe, so ist *der Orbit von $\boldsymbol{x} \in X$ unter der Wirkung der Gruppe G* definiert als die Menge

$$G\boldsymbol{x} := \{g\boldsymbol{x} | g \in G\}.$$

Nach dieser Definition sind die Orbits G-invariante Teilmengen von X, und G wirkt auf jedem Orbit transitiv. Damit sind die Orbits selbst homogene Räume. Die homogenen Räume und die Orbits haben einige einfache, ständig angewandte Eigenschaften, die rein algebraisch schon in den Abschnitten I.1.4 und I.3.1 behandelt wurden. In der angegebenen Literatur findet man die ergänzenden, die topologischen bzw. differenzierbaren Strukturen betreffenden Aussagen. Wir formulieren diese Eigenschaften als eine Folge von Übungen.

Übung 24. Es seien G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Man beweiseů a) Es definiert

$$(h, g) \in H \times G \longmapsto t_h(g) := gh^{-1} \in G$$

eine effektive, im allgemeinen nicht transitive Wirkung von H über G (Definition I.1.4.1), deren Orbits die *Linksnebenklassen von* G *nach* H (Definition I.3.1.1)

$$gH := \{gh\}_{h\in H}, \; G/H := \{gH | g \in G\}$$

sind; ihre Gesamtheit heißt der *Faktorraum* oder die *Faktormenge von* G *nach* H . –
b) Die Abbildung

$$(g, aH) \in G \times G/H \longmapsto l_g(aH) := gaH \in G/H$$

definiert eine transitive, im allgemeinen jedoch nicht effektive Wirkung von G über G/H. (Bekanntlich heißt eine Wirkung von G über X *effektiv*, wenn $l_g = \mathrm{id}_X$ nur für das Einselement $g = e \in G$ eintritt.)

Übung 25. Man zeige: Es sei $[G, X]$ eine Transformationsgruppe. Dann definiert

$$\boldsymbol{x} \equiv_G \boldsymbol{y} :\Longleftrightarrow \text{ es gibt ein } g \in G \text{ mit } g\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

eine Äquivalenzrelation über X. Die Äquivalenzklassen sind die Orbits $G\boldsymbol{x} = \{g\boldsymbol{x}\}_{g\in G}$ der Wirkung von G über X. Der Raum X einer Transformationsgruppe ist also stets eine disjunkte Vereinigung der Orbits $G\boldsymbol{x}$. Die Orbits sind die Niveaumengen der *kanonischen Abbildung*

$$p : \boldsymbol{x} \in X \longmapsto G\boldsymbol{x} \in X/ \equiv_G .$$

Eine Abbildung $f : X \to M$ von X in eine beliebige Menge M ist genau dann eine G-*Invariante*, wenn sie auf den Orbits konstant ist. Jede G-invariante Teilmenge von X ist Vereinigung von Orbits, und umgekehrt.

Übung 26. Es sei $[G, X]$ eine Transformationsgruppe und $\boldsymbol{x} \in X$ ein beliebiger Punkt. Mit $G_{\boldsymbol{x}} := \{h \in G | h\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\}$ bezeichnen wir die Isotropiegruppe von $\boldsymbol{x}$. Man beweise: Die Abbildung

$$F : aG_{\boldsymbol{x}} \in G/G_{\boldsymbol{x}} \longmapsto F(a) := a\boldsymbol{x} \in G\boldsymbol{x}$$

ist wohldefiniert, d.h., sie hängt nicht von der Wahl des Elements $a \in aG_{\boldsymbol{x}}$ der Linksnebenklasse ab. Die Abbildung ist bijektiv und erfüllt

$$F \circ l_g = l_g \circ F \text{ für alle } g \in G,$$

sie ist also ein G-äquivarianter Isomorphismus des Faktorraums $G/G_{\boldsymbol{x}}$ auf den Orbit $G\boldsymbol{x}$.

Beispiel 10. In den n-dimensionalen euklidischen, hyperbolischen oder elliptischen Räumen sind die Isotropiegruppen beliebiger Punkte zur orthogonalen Gruppe $\boldsymbol{O}(n)$ isomorph; für den Ursprung $\boldsymbol{o}$ des Raumes sei $G_{\boldsymbol{o}} = \boldsymbol{O}(n)$. Die Orbits der Isotropiegruppe $G_{\boldsymbol{o}}$ sind die Hypersphären $S^{n-1}(r)$ vom Radius $r \geq 0$, wobei sich für $r = 0$ der Orbit auf den Ursprung $\boldsymbol{o}$ reduziert. Für $r > 0$ ist die Isotropiegruppe $H_{\boldsymbol{x}} \subset G_{\boldsymbol{o}}$ eines beliebigen Punktes $\boldsymbol{x} \in S^{n-1}(r))$ zur orthogonalen Gruppe $\boldsymbol{O}(n-1)$ isomorph; im Fall des elliptischen Raums muss außerdem $r < d$ gelten, wobei $d = R\pi$ den Durchmesser des betrachteten elliptischen Raumes bezeichnet. Daher gilt für alle Hypersphären der betrachteten Räume die äqivariante Isomorphie

$$S^{n-1}(r) \cong \boldsymbol{O}(n)/\boldsymbol{O}(n-1) \quad (r > 0).$$

Als Faktorräume unterscheiden sie sich also nicht wesentlich; der Radius r bestimmt nur die metrischen Eigenschaften der Hypersphäre, die außerdem vom Einbettungsraum abhängen. Die Distanz $F(\boldsymbol{x}) = d(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{x})$ ist eine $G_{\boldsymbol{O}}$-Invariante, deren Niveauflächen die Orbits unseres Beispiels sind. Für den Möbius-Raum S^n ist der Orbit $H\boldsymbol{x} \subset G_{n+1}$ jedes vom Ursprung verschiedenen Punktes $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ unter der Isotropiegruppe H von $\boldsymbol{o}$ das Komplement von $\boldsymbol{o}$ (vgl. Satz 1). □

Ist $\boldsymbol{x} = g\boldsymbol{o} \in G/G_{\boldsymbol{O}}$ ein beliebiger Punkt eines homogenen Raumes, so gilt für die Isotropiegruppe von $\boldsymbol{x}$ bei der Wirkung von G:

$$G_{\boldsymbol{x}} = gG_{\boldsymbol{O}}g^{-1},$$

die Isotropiegruppen der Punkte eines homogenen Raumes bilden eine Äquivalenzklasse konjugierte Untergruppen bei der Wirkung von G auf sich mit den inneren Automorphismen (vgl. Beispiel I.4.5, Satz I.4.1). Die Klassifikation der homogenen Räume mit gegebener Gruppe G läuft also auf die Klassifikation ihrer Untergruppen bezüglich der inneren Automorphismen hinaus. Hierfür gibt es kein Standardverfahren; jede Gruppe muss individuell behandelt werden, allgemeine Resultate liegen nur für Untergruppen mit speziellen Eigenschaften vor. Im Fall der Lieschen Gruppen nutzt man in der Regel den Zusammenhang von Untergruppen mit Lieschen Unteralgebren sowie von inneren Automorphismen mit der adjungierten Darstellung. Jedoch gibt es auch hier keine allgemeine Methode zur Klassifikation der Lieschen Unteralgebren bezüglich dieser Darstellung. Soweit also ein Ausblick auf einen weiterführenden Problemkreis, in dem es trotz sehr vieler, tief liegender und schöner Resultate immer noch offene, allerdings meist recht schwierige Aufgaben zu lösen gibt. Eine dieser Aufgaben ist es, bei gegebenem homogenen Raum $G/G_{\boldsymbol{O}}$, dessen Geometrie zu entwickeln ist, die Orbits von Untergruppen $H \subset G$ zu bestimmen und zu klassifizieren. Sind doch in den klassischen Geometrien die Elemente der betrachteten Konfigurationen, etwa Punkte, Geraden, k-Ebenen, Sphären, Gitter, oft Orbits von Untergruppen. In der Differentialgeometrie werden unendliche Familien von solchen Elementen betrachtet, die von einer endlichen Anzahl von Parametern differenzierbar abhängen, zum Beisiel Kurven, Flächen, Regelflächen. Die Kenntnis der Invarianten der elementaren Konfigurationen kann man oft benutzen, um die Differentialinvarianten, also die Invarianten der Kurven, Flächen u.s.w., die oft durch formale analytische Verfahren bestimmt werden, geometrisch zu deuten. So hängen in der euklidischen Geometrie etwa Abstand und Bogenlänge zusammen; Krümmung oder Windung einer Kurve lassen sich mit dem Abstand ihrer Punkte und den Winkeln ihrere Tangenten bzw. Schmiegebenen interpretieren. Wir wenden uns nun wieder der dreidimensionalen Möbius-Geometrie zu und beschreiben in den nächsten Beispielen einige Orbits von Untegruppen der Möbiusgruppe G_4.

Beispiel 11. **Tori.** Wir betrachten den dreidimensionalen Möbius-Raum $S^3 \cong G_4/CE(3)$, vgl. (1), den wir uns. wie im Hinweis in Übung 1 beschrieben, als Einheitshypersphäre in der vierdimensionalen euklidischen, durch die Gleichung $-\langle \mathfrak{e}_0, \mathfrak{x} \rangle = 1$ gegebenen Hyperebene $\boldsymbol{E}^4$ modelliert denken. Die orientierungserhaltenden Elemente der Möbiusgruppe sind die pseudo-orthogonalen Transformationen, welche sowohl die Raum- als auch die Zeitorientierung invariant lassen; sie bilden die spezielle pseudo-orthogonale Gruppe $\boldsymbol{SO}(1,4)$. Diese enthält die Gruppe $\boldsymbol{SO}(4)$ der orientierungserhaltenden Isometrien der S^3 als Isotropiegruppe des Vektors $\mathfrak{e}_0 \in \boldsymbol{V}^5$. Wir zerlegen den zu $\mathfrak{e}_0$ orthogonalen,

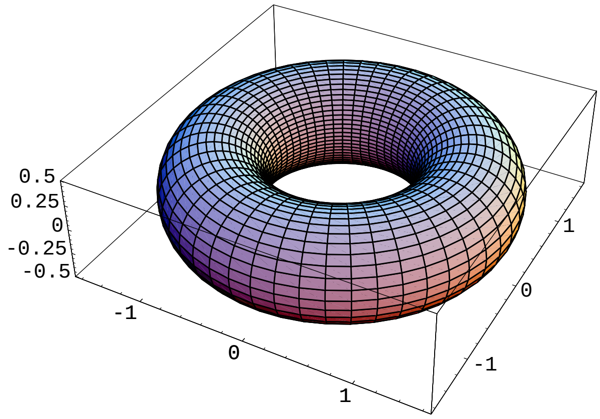

Abbildung 2.33: Der Torus $\mathfrak{y}(s, t, \pi/7)$.

vierdimensionalen euklidischen Vektorraum $\boldsymbol{W}^4$ von $\boldsymbol{E}^4$ in die beiden zweidimensionalen orthogonalen Komponenten

$$\boldsymbol{U}_1 = [\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2],\ \boldsymbol{U}_2 = [\mathfrak{e}_3, \mathfrak{e}_4],\ \boldsymbol{W}^4 = \boldsymbol{U}_1 \oplus \boldsymbol{U}_2.$$

In jeder dieser Komponenten betrachten wir die zu $\boldsymbol{SO}(2)$ isomorphe Drehgruppe. Die Matrizen der von diesen Drehungen erzeugten Untergruppe von G_4 haben in der fixierten pseudo-orthonormierten Basis die Blockgestalt

$$dd(s,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & d(s) & 0 \\ 0 & 0 & d(t) \end{pmatrix} \text{ mit } d(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Diese offenbar abelsche Gruppe nennt man die *Torusgruppe* T^2. Die Orbits $T^2\mathfrak{x}$ in S^3 sind Kreise, wenn $\mathfrak{x} \in \mathfrak{e}_0 + \boldsymbol{U}_1$ oder $\mathfrak{x} \in \mathfrak{e}_0 + \boldsymbol{U}_2$ gilt, und Flächen, die *Tori* genannt werden, für alle anderen Einheitsvektoren; der Orbit des Punktes $\boldsymbol{x}(a)$ mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{x}(a) = \mathfrak{e}_0 + \mathfrak{e}_1 \cos a + \mathfrak{e}_3 \sin a$$

wird durch den Punkt mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{x}(s,t;a). = \mathfrak{e}_0 + (\mathfrak{e}_1 \cos s + \mathfrak{e}_2 \sin s)\cos a + (\mathfrak{e}_3 \cos t + \mathfrak{e}_4 \sin t)\sin a \tag{55}$$

beschrieben. Durch stereographische Projektion der S^3 auf den Äquatorialraum erhält man für $0 < a < \pi/2$ Rotationsflächen

$$\mathfrak{y}(s,t,a) = ((\mathfrak{e}_1 \cos s + \mathfrak{e}_2 \sin s)\cos a + \mathfrak{e}_3 \cos t \sin a)/(1 - \sin t \sin a), \tag{56}$$

welche durch Rotation eines Kreises der x, z-Ebene mit dem Mittelpunkt $(1/\cos a, 0, 0)$ und dem Radius $\tan a$ um die z-Achse erzeugt werden, die man ebenfalls *Tori* nennt. Die Abbildung 2.33 zeigt einen solchen Torus. Man beachte, dass dieser ein Orbit einer Untergruppe der Möbiusgruppe, nicht aber einer Untergruppe der euklidischen Gruppe des

$\boldsymbol{E}^3$ ist. Mit Hilfe der Inversionen an beliebigen Sphären erhält man Möbius-äquivalente Flächen, die ebenfalls *Tori* genannt werden. Die Abbildung 2.34 zeigt einen solchen Torus. □

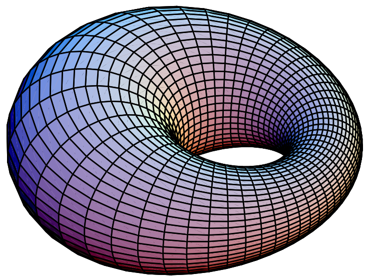

Abbildung 2.34: Ein durch Inversion erzeugter Torus.

Beispiel 12. Kreiszylinder. Im euklidischen Raum $\boldsymbol{E}^3$ betrachten wir die Kreiszylinder als Orbits der abelschen Gruppe $A^2 = \boldsymbol{SO}(2) \times \mathbf{R}$; dabei wirke $\boldsymbol{SO}(2)$ als Gruppe der Drehungen in der x, y-Ebene und $\mathbf{R}$ als Gruppe der Translationen in Richtung der z-Achse. Als Untergruppe der euklidischen Gruppe ist A^2 natürlich auch Untergruppe der Möbius-Gruppe, so dass die als Orbits von Punkten mit dem Ortsvektor $\mathfrak{e}_1 r$, $r > 0$, entstehenden Flächen des euklidischen Raumes $\boldsymbol{E}^3$ mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{z}(s,t,r) = (\mathfrak{e}_1 \cos s + \mathfrak{e}_2 \sin s)r + \mathfrak{e}_3 t$$

auch Orbits im Sinne der Möbius-Geometrie sind. Durch die inverse stereographische Projektion erhält man entsprechende Orbits im Möbius-Raum S^3. Für $r = 0$ reduziert sich der Orbit auf die z-Achse. Man beweist leicht, dass alle Kreiszylinder Möbius-äquivalent sind. Die erzeugenden Geraden des Kreiszylinders sind alle zueinander parallel; Möbius-geometrisch sind sie also als Kreise zu betrachten, die sich im Punkt ∞ des zum Möbius-Raum S^3 ergänzten euklidischen Raumes berühren. Dieser Punkt ist der einzige Fixpunkt aller Möbius-Transformationen aus A^2. Führt man nun eine Inversion an einer Sphäre aus, deren Zentrum nicht auf dem Kreiszylinder liegt, so entseht aus dem Kreiszylinder eine von Kreisen, nämlich den Bildern der erzeugenden Geraden, erzeugte Fläche, deren erzeugende Kreise sich im Zentrum der die Inversion definierenden Sphäre berühren. Die Abbildung 2.35 zeigt eine solche Fläche. □

Beispiel 13. Kreiskegel. Analog zum vorigen Beispiel gehen wir wieder vom euklidischen Raum $\boldsymbol{E}^3$ aus. In der konformen Gruppe $CE(3)$ betrachten wir die abelsche Untergruppe $B^2 = \boldsymbol{SO}(2) \times \mathbf{R}^*$; dabei wirke $\boldsymbol{SO}(2)$ wieder als Gruppe der Drehungen in

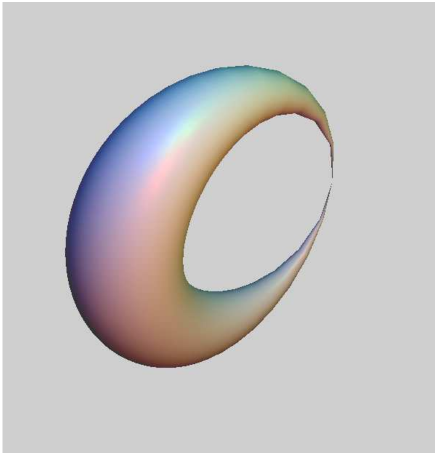

Abbildung 2.35: Durch Inversion erzeugtes Bild eines Kreiszylinders.

der x, y-Ebene, während die multiplikative Gruppe $\mathbf{R}^*$ der reellen Zahlen als Gruppe der Dehnungen des E^3 wirkt; man beachte, dass hier auch negative Werte von $t \in \mathbf{R}$ zugelassen sind. Der Ursprung $\boldsymbol{o}$ und der unendlich ferne Punkt ∞ sind die einzigen Fixpunkte aller Transformationen von B^2, die eine Untergruppe der Isotropiegruppe des Möbius-Raumes S^3 ist, vgl. (1). Der Orbit eines Punktes des Einheitskreises der x, z-Ebene hat den Ortsvektor

$$\mathfrak{c}(s, t, a) = ((\mathfrak{e}_1 \cos s + \mathfrak{e}_2 \sin s) \cos a + \mathfrak{e}_3 \sin a)t \tag{57}$$

Für $a = 0$ ist der Orbit die x, y-Ebene, für $a = \pi/2$ die z-Achse, und für die übrigen Werte von a erhalten wir den vollen Kreiskegel, der durch alle Geraden mit dem Neigungswinkel a durch den Ursprung erzeugt wird. Führen wir nun wieder eine Inversion an einer Sphäre aus, deren Mittelpunkt nicht auf dem Kreiskegel liegt und vom Ursprung $\boldsymbol{o}$ verschieden ist, so gehen die erzeugenden Geraden in Kreise über, welche sich im Zentrum der die Inversion definierenden Sphäre und im Bild des Ursprungs bei dieser Spiegelung schneiden. Die Abbildung 2.36 zeigt eine solche Fläche. □

Die in den letzten drei Beispielen betrachteten Flächen haben viele Gemeinsamkeiten. Da auch die Geraden Moebius-geometrisch Kreise sind, sind die betrachteten Flächen Möbius-äquivalent zu von Kreisen erzeugten Rotationsflächen. Auf jeder von ihnen gibt es zwei Kreisscharen, die die Fläche erzeugen, von denen eine aus den Erzeugenden der Rotationsfläche und die andere aus deren orthogonalen Trajektorien besteht. Differentialgeometrisch wurden sie bereits im Jahre 1822 von C. Dupin untersucht und werden nach ihm *Dupinsche Zykliden* genannt. Je nach dem, zu welchen der betrachteten euklidischen Fläche eine Dupinsche Zyklide Möbius-äquivalent ist, sprechen wir von *Dupinschen Zykliden vom toroidalen, zylindrischem oder konischem Typ*. In den letzten beiden Fällen betrachtet man die Fixpunkte oft als Singularitäten der Fläche; man beachte jedoch, dass sie nicht zu der als Orbit definierten Fläche gehören. Es ist klar, dass Dupinsche Zykliden verschiedenen Typs nicht Möbius-äquivalent sein können. Die euklidisch definierten Zykliden vom toroidalen und konischen Typ hängen jeweils von einem Parameter ab: im ersten Fall vom Verhältnis des Radius des erzeugenden Kreises zum Abstand des Zen-

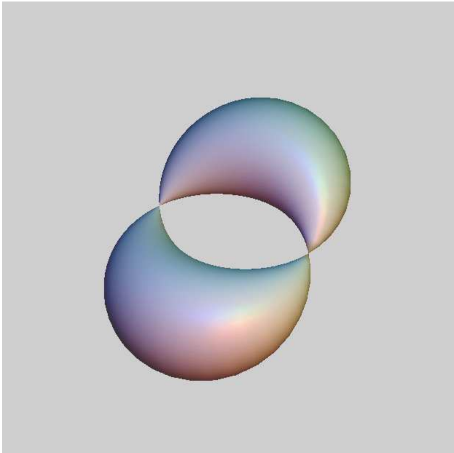

Abbildung 2.36: Durch Inversion erzeugtes Bild eines Kreiskegels.

trums zur Rotationsachse, im zweiten vom Öffnungswinkel des Kegels. Alle Dupinschen Flächen vom zylindrischen Typ sind Möbius-äquivalent. (Beweise als Übungsaufgaben!)

Die Dupinschen Zykliden besitzen zahlreiche Verallgemeinerungen, die in interessanten Klassifikationsresultaten in der Differentialgeometrie und der *Lieschen Sphärengeometrie* auftreten. Das im Jahr 1992 erschienene Buch [28] von Thomas E. Cecil ist eine ausgezeichnete Einführung in dieses Gebiet, es beschreibt die historische Entwicklung, enthält zahlreiche Literaturhinweise und neue, interessante Resultate. Die erste Monographie über die Sphärengeometrie in den Dimensionen 2 und 3 ist das Buch [14] von W. Blaschke und G. Thomsen, das eine Zusammenfassung der in der Möbius-Geometrie und der Lieschen Sphärengeometrie bis dahin entstandenen Resultate darstellt. [4] Die Liesche Sphärengeometrie hat ihren Ursprung in der Lieschen Theorie der Berührungstransformationen. Die algebraische Grundlage der n-dimensionalen Lieschen Sphärengeometrie ist der $(n+3)$-dimensionale pseudo-euklidische Vektorraum vom Index 2. Sie enthält die Möbius-Geometrie, und damit auch die euklidische, hyperbolische und elliptische, als Geometrien von Untergruppen. Man erhält ja die n-dimensionale hyperbolische Geometrie aus der Möbius-Geometrie, indem man eine Hypersphäre fixiert und eine der von ihr berandeten Halbsphären nach Festlegung eines Maßstabes mit dem n-dimensionalen hyperbolischen Raum identifiziert. Ähnlich erhält man die euklidische und die elliptische Geometrie als *Untergeometrien* der Möbius-Geometrie.

Beispiel 14. Loxodromen. Als Vorbereitung für das nächste Beispiel, die Spiralflächen, wollen wir nun eine auch für sich interessante Familie von Kurven der euklidischen Ebene $\boldsymbol{E}^2$ und damit auch der Sphäre S^2 einführen, die selbst Orbits sind. Dazu betrachten wir die einparametrischen Untergruppen $B(a) = \{\gamma_a(t) | t \in \mathbf{R}\} \subset CE(2)$ der konform-euklidischen Gruppe der Ebene, deren Elemente in einer orthonormierten Standardbasis

[4] Generell sollte man historischen Anmerkungen in mathematischen Fachbüchern (einschließlich des vorliegenden) recht kritisch gegenüber stehen. Oft fehlt es den Fachleuten an der nötigen Zeit und Geduld, die Quellen selbst vollständig aufzuspüren und ausführlich zu studieren. Zum Beispiel ist in [28] der Koautor G. Thomsen des Buches [14] weder im Text noch im Literaturverzeichnis genannt, auch dessen eigene Arbeiten werden nicht erwähnt.

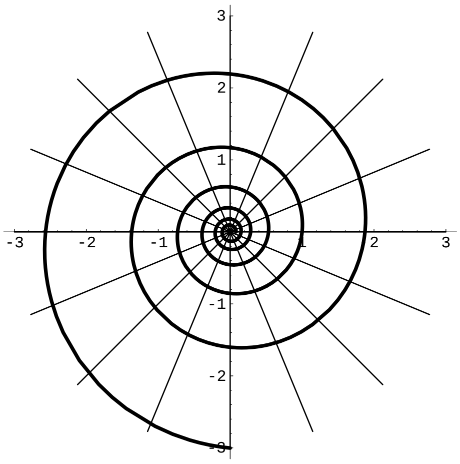

Abbildung 2.37: Eine Loxodrome in der Ebene.

durch die Matrizen

$$\gamma_a(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{at} \text{ mit } a = \text{const}, \ a, t \in \mathbf{R}, \tag{58}$$

definiert sind. Die entsprechenden Transformationen sind Drehungen mit simultan gekoppelter Dehnung der Ebene, wobei die Koppelung durch den Parameter a betimmt wird; für $a = 0$ erhalten wir die Drehgruppe $\boldsymbol{SO}(2)$ der Ebene. Die einzigen Fixpunkte aller von der Identität verschiedenen Transformationen $\gamma_a(t)$ sind der Ursprung und der unendlich ferne Punkt ∞. Die Orbits der Gruppe $H(a)$ eines Punktes $\boldsymbol{x}_0 = \mathfrak{e}_1 x_0$ der x-Achse sind die *Loxodromen* genannten Spiralen mit dem Ortsvektor

$$\mathfrak{x}_a(t) := (\mathfrak{e}_1 \cos t + \mathfrak{e}_2 \sin t) x_0 \, \mathrm{e}^{at} \text{ mit } a \neq 0, \ x_0 \neq 0, \tag{59}$$

und Kreise im Fall $a = 0$, vgl. Abbildung 2.37. Die durch inverse stereographische Projektion der Loxodromen auf der Sphäre entstehenden Kurven werden ebenso genannt; Abbildung 2.38 zeigt eine solche Kurve im Gitternetz der Sphäre. Ein Schiff, das mit konstantem Kompasskurs fährt, bewegt sich auf einer Loxodrome bzw. im Falle $a = 0$ auf einem Breitenkreis. Da nämlich die Schar der Meridiane der S^2 (mit dem Ursprung als Süd- und dem Punkt ∞ als Nordpol) ebenso wie der Orbit bei den betrachteten Transformationen aus $H(a)$ in sich transformiert wird und diese Transformationen konform sind, ist der Winkel, in dem die (Tangente der) Loxodrome die Meridiane schneidet, längs der Loxodrome konstant. □

Beispiel 15. In dem Artikel R. Sulanke [75] wurde die Frage nach der Klassifikation der homogenen Flächen des Möbius-Raumes S^3 beantwortet, das sind diejenigen Flächen, die Orbits von Untergruppen der Möbius-Gruppe G_4 sind. Zu den Ebenen, Sphären und den Dupinschen Zykliden kommen noch die *Spiralzylinder* hinzu, die wir in diesem Beispiel beschreiben wollen. In [75] wurde mit Hilfe einer von E. Cartan entwickelten differentialgeometrischen Methode gezeigt, dass mit den hier aufgezählten wirklich alle

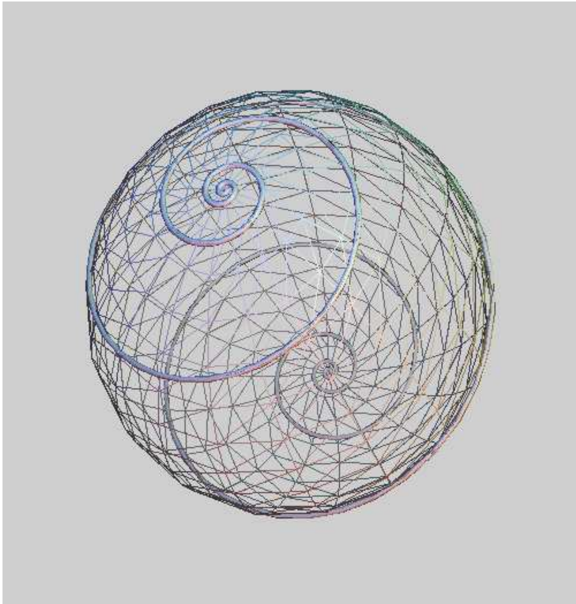

Abbildung 2.38: Eine Loxodrome auf der Sphäre.

homogenen Flächen der S^3 erfasst sind. Die Spiralzylinder entstehen als Flächen des euklidischen Raumes $\boldsymbol{E}^3$, indem man auf einer Loxodrome orthogonal zu ihrer Ebene den Zylinder errichtet, s. Abbildung 2.39. Nach (59) ist also

$$\mathfrak{z}_a(s,t) = \mathfrak{x}_a(t) + \mathfrak{e}_3 s$$

der Ortsvektor des Spiralzylinders mit dem Parameter $a \neq 0$. Die Spiralzylinder sind Spezialfälle der schon von S. Lie eingeführten *Spiralflächen*, die entstehen, wenn man eine in der x,z-Ebene gegebene Kurve den durch die *Spiralgruppe*

$$\gamma_a(t) := \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{at} \text{ mit } a = \text{const}, \ a, t \in \mathbf{R}, \tag{60}$$

bestimten Möbius-Transformationen unterwirft; ist $a = 0$, so ergeben sich die bekannteren *Rotationsflächen*. Ist die erzeugende Kurve eine Parallele zur z-Achse, so erhalten wir den Spiralzylinder. Die den Spiralzylinder als Orbit erzeugende Untergruppe $M_a^2 \subset G_4$ ist die vom Parameter a abhängende Gruppe, die von den Transformationen (60) und den Parallelverschiebungen parallel zur z-Achse erzeugt wird; ihre Elemente sind affine Abbildungen des $\boldsymbol{E}^3$ der Gestalt

$$f_a(s,t) : \boldsymbol{x} = [\mathfrak{x}] \in \boldsymbol{E}^3 \longmapsto \boldsymbol{y} = [\gamma_a(t)\mathfrak{x} + \mathfrak{e}_3 s]. \tag{61}$$

Man rechnet leicht nach, dass M_a^2 für $a \neq 0$ eine nicht abelsche Gruppe ist; denn es gilt

$$f_a(s,t) \circ f_a(s_0,t_0) = f_a(s_0 \, \mathrm{e}^{at} + s, t_0 + t).$$

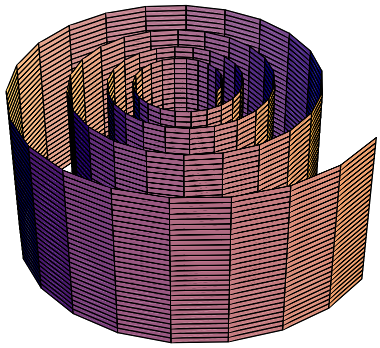

Abbildung 2.39: Ein Spiralzylinder.

Der Orbit des Punktes $[\mathfrak{e}_1 x_0]$ der x-Achse unter M_a^2 ergibt eine von der oben angegebenen leicht verschiedene Parameterdarstellung eines Spiralzylinders. Die Punkte der z-Axhse haben als Orbit natürlich nur die z-Achse selbst. Der einzige gemeinsame Fixpunkt aller Transformationen aus M_a^2 ist der unendlich ferne Punkt ∞. Der Spiralzylinder 2.39 sieht im Euklidischen ja nicht sehr interessant aus; man erhält ein schöneres und Möbius-geometrisch treffenderes Bild eines Stücks der Fläche, wenn man ihr Verhalten im Unendlichen betrachtet und eine Umgebung von ∞ durch Inversion an einer Sphäre ins Endliche spiegelt, s. Abbildung 2.40. Die erzeugenden Geraden des Spiralzylinders gehen dabei in Kreise über, die sich im Zentrum der die Inversion bestimmenden Sphäre berühren. $\square$

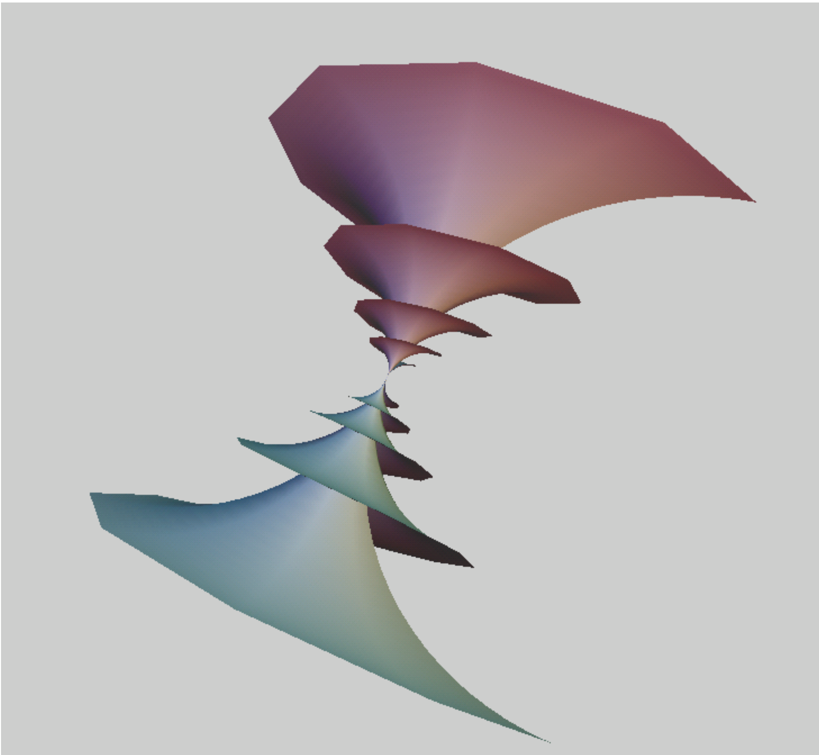

Abbildung 2.40: Inversion eines Spiralzylinders.

Literaturverzeichnis

[1] A. D. Alexandrow. *Die innere Geometrie der konvexen Flächen.* Akademie-Verlag, Berlin, 1955. Übersetzung aus dem Russischen. Original: Moskau, Leningrad 1948.

[2] F. Apéry. *Models of the Real Projective Plane.* Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1987.

[3] E. Artin. *Geometric Algebra.* Interscience Publishers, New York, London, 1957.

[4] R. Baer. *Linear Algebra and Projective Geometry.* Academic Press, New York, 1952.

[5] L. A. Batten and A. Beutelspacher. *The Theory of Finite Linear Spaces.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[6] Walter Benz. *Geometrische Transformationen unter besonderer Berücksichtigung der Lorentztransformationen.* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1992.

[7] Walter Benz. *Real Geometries.* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1994.

[8] Marcel Berger. *Géométrie II.* Nathan, Paris, 1978.

[9] A. Beutelspacher. *Einführung in die endliche Geometrie I.* Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, 1982.

[10] A. Beutelspacher. *Einführung in die endliche Geometrie II.* Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, 1983.

[11] A. Beutelspacher and U. Rosenbaum. *Projektive Geometrie.* Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1992.

[12] H.-G. Bigalke. *Kugelgeometrie.* Salle und Sauerländer, Frankfurt a. M., Aarau, 1984.

[13] W. Blaschke. *Projektive Geometrie.* Wolfenbütteler Verlagsanstalt K. G., Wolfenbüttel, Hannover, 1948.

[14] W. Blaschke and G. Thomsen. *Vorlesungen über Differentialgeometrie III, Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1929.

[15] J. et al. Böhm. *Geometrie I, II.* Studienbücherei, Mathematik für Lehrer, Bd. 6. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1974, 1975.

[16] N. Bourbaki. *Livre II, Algèbre.* Hermann, Paris, 1956-1960.

[17] W. Boy. Über die abbildung der projektiven ebene auf eine im endlichen geschlossene singularitätenfreie fläche. *Göttinger Nachr.*, pages 20–33, 1901.

[18] W. Boy. Über die curvatura integra und die topologie geschlossener flächen. *Math. Ann.*, 57:151–184, 1903.

[19] I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik.* BSB B. G. Teubner, Leipzig, 1985.

[20] W. Burau. *Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1961.

[21] H. Busemann and P.J. Kelly. *Projective Geometry and Projective Metrics.* Academic Press Inc., Publishers, New York, 1953.

[22] J. Böhm and E. Hertel. *Polyedergeometrie in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, oder Birkhäuser, Berlin bzw.Basel, 1980.

[23] J. Böhm and H. (Herausgeber) Reichardt. *Gaußsche Flächentheorie, Riemannsche Räume und Minkowski-Welt.* Teubner-Archiv zur Mathematik, Bd. 1. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1984.

[24] C. Carathéodory. *Funktionentheorie I.* Verlag Birkhäuser, Basel, 1950.

[25] E. Cartan. *La théorie des groupes fini et la géométrie différentielle, traitées par la méthode du repère mobile.* Gauthier-Villars, Paris, 1937.

[26] A. Cayley. A sixth memoir on quantics. *Phil. Trans.*, 149:61–90, 1859. See also Coll. Math. Papers vol. II, Notes an References 158.

[27] A. Cayley. On the non-euclidian geometry. *Math. Ann.*, 5:630–634, 1872.

[28] Thomas E. Cecil. *Lie Sphere Geometry.* Universitext. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, ..., 1992.

[29] H. S. M. Coxeter. *Reelle projektive Geometrie der Ebene.* R. Oldenbourg, München, 1955.

[30] J. Dieudonné. Les déterminants sur un corps non commutatif. *Bull. Soc. Math. France*, 71:27–45, 1943.

[31] J. Dieudonné. *La Géométrie des Groupes Classiques.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, troisième édition edition, 1971. Russische Ausgabe: Mir, Moskau, 1974.

[32] Gerd Fischer (ed.). *Mathematische Modelle.* Vieweg, Akademie-Verlag, Braunschweig, Berlin, 1986.

[33] H. Freudenthal. *Oktaven, Ausnahmegruppen, Oktavengeometrie.* Math. Inst. Rijksuniv., Utrecht, 1951.

[34] H. Freudenthal and H. De Vries. *Linear Lie Groups.* Academic Press, New York, 1969.

[35] Oswald Giering. *Vorlesungen über höhere Geometrie, unter Mitwirkung von Johann Hartl.* Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1982.

[36] Alfred Gray. *Differentialgeometrie. Klassische Theorie in moderner Darstellung.* Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1994.

[37] L. Heffter. *Grundlagen und analytischer Aufbau der projektiven, euklidischen, nichteuklidischen Geometrie.* B. G. Teubner, Leipzig, 1950.

[38] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.* Academic Press, New York, San Francisco, London, 1978.

[39] S. Helgason. *Groups and Geometric Analysis.* Academic Press, New York, San Francisco, London, 1984.

[40] S. Helgason. *Geometric Analysis on Symmetric Spaces.* Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 39. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1994.

[41] D. Hilbert. Über flächen constanter gaußscher krümmung. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2:87–99, 1901.

[42] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie.* B. G. Teubner, Stuttgart, 12. aufl. edition, 1968.

[43] J. W. P. Hirschfeld. *Projective Geometries over Finite Fields.* Oxford University Press, Oxford, 2. auflage edition, 1998.

[44] H. Hopf. über die abbildungen von sphären auf sphären niedrigerer dimension. *Fund. Math.*, 25:427–440, 1935.

[45] I. L. Kantor and A. S. Solodownikow. *Hyperkomplexe Zahlen.* Mathematische Schülerbücherei Nr. 95. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1978. Russische Ausgabe: Nauka, Moskau, 1973.

[46] F. Klein. Ueber die sogenannte nicht-euklidische geometrie. *Math. Ann.*, 4:573–625, 1871.

[47] F. Klein. Ueber die sogenannte nicht-euklidische geometrie. (zweiter aufsatz.). *Math. Ann.*, 6:112–145, 1873.

[48] F. Klein. *Gesammelte mathematische Abhnadlungen, Bd. 1-3.* Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968. Reprints früherer Auflagen.

[49] F. Klein. *Vorlesungen über höhere Geometrie.* Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968. Reprint der 3.Auflage 1926, bearbeitet von W. Blaschke.

[50] F. Klein. *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie.* Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968. Reprint der 1.Auflage 1928, bearbeitet von W. Rosemann.

[51] F. Klein. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen,* Habilitationsschrift, Erlangen 1872. (*Das Erlanger Programm,* Herausgeber H. Wussing). Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 253. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1974.

[52] W. Klingenberg. *Grundlagen der Geometrie, im C. F. Gauß Gedenkband.* B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1957.

[53] W. Klingenberg. *Lineare Algebra und Geometrie.* Springer-Verlag, Berlin etc., 1990.

[54] G. Köthe. Schiefkörper unendlichen ranges über dem zentrum. *Math. Ann.*, 105:15–39, 1931.

[55] Linus Kramer. Buildings and classical groups. *arXiv.math.*, 2003. URL: http://front.math.ucdavis.edu/math.GR/0307117.

[56] J. Kunze. *Der Schnittort auf konvexen Verheftungsflächen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.

[57] K. Leichtweiß. Karl strubecker zum gedenken. *Jber. d.dt.Math.-Verein.*, 94:105–117, 1992.

[58] K. Metsch. *Linear Spaces with Few Lines.* L. N. in Mathematics 1490. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1991.

[59] H. Minkowski. Raum und zeit. *Physikalische Zeitschrift*, 10:104–111, 1909. Ges. Abh. Bd. 2.

[60] A. P. Norden. *Einführung in die Lobatschewskische Geometrie.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1958. Übersetzung a. d. Russ., Moskau 1953.

[61] A. L. Onishchik. *Topology of Transitive Transformation Groups.* Johann Ambrosius Barth, Leipzig, Berlin, Heidelberg, 1994.

[62] A. L. Onishchik and E. B. Vinberg. *Lie Groups and Algebraic Groups.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.

[63] A.L. Oniščik and R. Sulanke. *Algebra und Geometrie I.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1986. 2. Auflage.

[64] A.L. Oniščik and R. Sulanke. *Algebra und Geometrie II.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988.

[65] G. Pickert. *Projektive Ebenen.* Springer-Verlag, Berlin etc., 1955.

[66] P. K. Raschewski. *Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959. Deutsche Übersetzung; Original: Gostechisdat, Moskau 1953; 2. Aufl. 1964.

[67] H. Reichardt. *Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968.

[68] H. Reichardt. *Gauß und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie. Mit Originalarbeiten von J. Bolyai, N. I. Lobatschewski und F. Klein.* Teubner-Archiv zur Mathematik, Bd. 4. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1985.

[69] W. Rinow. *Die innere Geometrie der metrischen Räume.* Grundlehren d. mat. Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1961.

[70] W. Rinow. *Lehrbuch der Topologie.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975.

[71] H. et al. Salzmann. *Compact Projective Planes.* Walter de Gruyter, Berlin, New-York, 1995.

[72] E. Sperner. *Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra I, II.* Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1961.

[73] M. Stary. Zum außen- und innengebiet von quadriken. *Journal of Geometry*, 27:87–93, 1986.

[74] N. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton University Press, 1951.

[75] R. Sulanke. Möbius geometry v. homogeneous surfaces in the möbius space. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai 46. Topics in Differential Geometry. Debrecen 1984*, 46:1141–1154, 1984.

[76] R. Sulanke. Möbius invariants for pairs of spheres (s_1^m, s_2^l) in the möbius space s^n. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 41:233–246, 2000.

[77] R. Sulanke and P. Wintgen. *Differentialgeometrie und Faserbündel.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Birkhäuser, Berlin, Basel, 1972.

[78] J. Tits. *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[79] O. Veblen and J. W. Young. *Projective Geometry, I, II.* xxxxxx, Boston - New York, 1910, 1918.

[80] H. Weyl. *The Classical Groups, their Invariants, and Representations.* Princeton University Press, 1939.

[81] J. B. Wilker. Inversive geometry. *The Geometric Vein, The Coxeter Festschrift*, pages 379–442, 1980.

[82] Joseph A. Wolf. *Spaces of Constant Curvature.* University of California, Berkeley, 1972.

[83] Stephen Wolfram. *Mathematica.* Addison-Wesley, 3. edition, 1997.

Bezeichnungen

In diesem Abschnitt listen wir – ohne Streben nach Vollständigkeit – einige allgemeine, häufig benutzte Bezeichnungen mit kurzen Erklärungen auf. Weitere speziellere, in diesem Buch benutzte Symbole findet man am Anfang des Index.

Zahlbereiche

$\mathbf{N}$ Menge der positiven ganzen Zahlen
$\mathbf{N_0}$ Menge der nicht negativen ganzen Zahlen
$\mathbf{Z}$ Ring der ganzen Zahlen
$\mathbf{Z}_p$ Restklassenkörper mod$p$, p eine Primzahl
$\mathbf{Q}$ Körper der rationalen Zahlen
$\mathbf{R}$ Körper der reellen Zahlen
$\mathbf{C}$ Körper der komplexen Zahlen
$\mathbf{H}$ Schiefkörper der Quaternionen

Es sei daran erinnert, dass der Unterschied zwischen einem Körper und einem Schiefkörper nur darin besteht, dass in einem Schiefkörper die Multiplikation nicht kommutativ zu sein braucht. Natürlich ist jeder Körper auch ein Schiefkörper, aber nicht umgekehrt.

Grundlagen. Mengenlehre

$A \iff B$ A gilt genau dann, wenn B gilt (*logische Äquivalenz*).
$A := B$ Das Symbol A wird *definiert* durch den Ausdruck B .
$A := \{x|H(x)\}$ A ist die *Menge* aller Elemente x mit der Eigenschaft $H(x)$.
$A := \{x_\iota\}_{\iota\in I}$ *Menge* der Elemente x_ι; hier gilt stets $x_\iota \neq x_\kappa$ für $\iota \neq \kappa$; analog sinngemäß für endliche oder abzählbare Mengen: $A := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $A := \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.
$f : A \to B$, genauer $f : x \in A \mapsto f(x) \in B$: f ist eine Abbildung der Menge A in die Menge B, welche dem Element $x \in A$ das Element $f(x) \in B$ zuordnet .
$\mathrm{id}_M : x \in M \mapsto \mathrm{id}(x) := x \in M$ Die *identische Abbildung* der Menge M.
$A \subset B$ A ist *Teilmenge* von B ($A = B$ impliziert $A \subset B$).
$\emptyset$ Die *leere Menge*, $\emptyset \subset M$ für alle Mengen M.
$\mathcal{P}(\mathcal{M})$ *Potenzmenge* der Menge M; $\mathcal{P}(M) := \{A|A \subset M\}$.
$(X_\iota)_{\iota\in I}$ Eine *Familie* von Objekten $X_\iota \in Obj$, das ist eine andere Bezeichnung für eine Zuordnung $\iota \in I \mapsto X_\iota \in Obj$; hierbei kann Obj eine Menge oder eine Klasse sein, und es ist $X_\iota = X_\kappa$ für $\iota \neq \kappa$ möglich. Analog sinngemäß für endliche oder abzählbare Familien: *n-Tupel* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, oder *Folgen* $(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

Lineare Algebra

K ein Schiefkörper
$Z(K)$ Das Zentrum des Schiefkörpers K
$K^* := \{\alpha \in K|\alpha \neq 0\}$ Die multiplikative Gruppe des Schiefkörpers K
$\alpha \in K^* \mapsto \sigma_\alpha : \xi \in K \mapsto \sigma_\alpha(\xi) := \alpha\xi\alpha^{-1} \in K$ der dem Element $\alpha \in K^*$ entsprechende *innere Automorphismus* des Schiefkörpers K
$\xi, \eta \in K$ nennt man zueinander *konjugiert*,wenn ein $\alpha \in K^*$ existiert mit $\eta = \sigma_\alpha(\xi)$
$\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \ldots$ Vektorräume
$\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \boldsymbol{V}$ Vektoren
$n = \dim \boldsymbol{V}$ Dimension des Vektorraums $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^n$. Mit wenigen Ausnahmen sind alle betrachteten Räume endlich-dimensional; der Dimensionsindex n wird oft fortgelassen

$\mathfrak{L}(M) = [M]$ Die lineare Hülle von $M \subset \boldsymbol{V}$

$(\mathfrak{a}_j)_{j=1,\ldots,n}$ Basis von $\boldsymbol{V}^n$

$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_j x^j := \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_j x^j$ Basisdarstellung des Vektors $\mathfrak{x} \in \boldsymbol{V}$; *Summenkonvention der Tensorrechnung*: Über gleich bezeichnete, in einem Ausdruck unten und oben vorkommende Indizes ist über den der Dimension entsprechenden Zahlenabschnitt zu summieren. In diesem Kontext ist das j in x^j keine Potenz, sondern ein Index!

$\not\Sigma$ Aufhebung der Summenkonvention

$\boldsymbol{V}'$ der zu $\boldsymbol{V}$ duale Vektorraum

$(a_{i\alpha}), i = 1, \ldots, n,\ \alpha = 1, \ldots, m$ eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten

$(a_{i\alpha})' := (b_{\alpha i})$ mit $b_{\alpha i} := a_{i\alpha}$ die zu $(a_{i\alpha})$ *transponierte Matrix*

Topologie

$[E, d]$ heißt ein *metrischer Raum* und d eine *Metrik* oder *Abstandsfunktion* auf E, wenn

$$d : (x, y) \in E \times E \mapsto d(x, y) \in \mathbf{R}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. d ist *positiv definit:* $d(x, y) \geq 0,\ d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y,$

2. d ist *symmetrisch:* $d(x, y) = d(y, x),$

3. d erfüllt die *Dreiecksungleichung*:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ für alle } x, y, z \in E.$$

$B(z, r) := \{x \in E | d(z, x) < r\}$ heißt ein *offener Ball* vom *Radius* $r > 0$ mit dem *Mittelpunkt* z in dem metrischen Raum E. Eine Menge $U \subset E$ wird *offen* genannt, wenn zu jedem ihrer Punkte $z \in U$ ein $r > 0$ existiert so, dass der offene Ball $B(z, r) \subset U$ in U liegt.

$[M, \mathcal{O}]$ ist ein *topologischer Raum* mit dem *System offener Mengen* $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(M)$, wenn $\mathcal{O}$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. $M \in \mathcal{O},$

2. Aus $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ folgt stets $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O},$

3. Ist $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ ein Teilsystem offener Mengen, so ist dessen Vereinigung offen:

$$\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U \in \mathcal{O}, \text{ wenn } \mathcal{B} \subset \mathcal{O}.$$

Jeder metrische Raum ist mit seinem System offener Mengen ein topologischer Raum.

Eine Abbildung $f : M_1 \to M_2$ topologischer Räume heißt *stetig*, wenn das Urbild jeder offenen Menge wieder offen ist, also $f^{-1}(\mathcal{O}_2) \subset \mathcal{O}_1$ gilt; f ist ein *Homöomorphismus*, wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

Ein topologischer Raum M heißt eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit*, wenn zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $U \in \mathcal{O}$, $x \in U$, und ein Homöomorphismus φ_U von U auf einen offenen Ball $B \subset \boldsymbol{E}^n$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes existiert;

derartige Homöomorphismen nennt man die *Karten* der Mannigfaltigkeit; sie definieren lokale Koordinaten:

$$\varphi_U : x \in U \mapsto (x^i(x)) := \varphi_U(x) \in \boldsymbol{E}^n.$$

Für die Punkte im Durchschnitt $U \cap W \neq \emptyset$ zweier sich schneidender Kartenumgebungen sind dann die *Koordinatentransformationen* definiert:

$$\psi_{UW} : (x^i) \in \varphi_U(U \cap W) \mapsto (y^j) := \varphi_W \circ \varphi_U^{-1}((x^i)) \in \varphi_W(U \cap W),$$

das sind Homöomorphismen zwischen offenen Mengen des euklidischen Raumes $\boldsymbol{E}^n$. Jedes System von Karten $\Phi = (\varphi_U)_{U \in \mathcal{B}}$, dessen Kartenumgebungen die Mannigfaltigkeit überdecken:

$$\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = M,$$

wird ein *Atlas* der Mannigfaltigkeit genannt. Ist auf einer Mannigfaltigkeit M ein Atlas ausgezeichnet derart, dass alle seine Koordinatentransformationen ψ_{UW} differenzierbar sind, so nennt man M, versehen mit diesem Atlas, eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit.* Die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten werden in der Differentialtopologie untersucht. Sie gestatten die Anwendungen analytischer Methoden in der Geometrie und bilden die Grundlage der Differentialgeometrie. Die in diesem Buch definierten Mannigfaltigkeiten sind in der Regel sogar analytisch in dem Sinn, dass die Koordinatentransformationen reell analytisch sind, also lokal in konvergente Potenzreihen entwickelt werden können.

Index