Zur Eindeutigkeit des Potentials bei inversen Spektralproblemen für Schrödingeroperatoren

Vom Fachbereich 11/Mathematik der
Gerhard–Mercator–Universität
Gesamthochschule Duisburg

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

Carsten Ehrlich
aus
Duisburg

Referent: Prof. Dr. J. Donig

Korreferent: Prof. Dr. H. Kalf

Datum der mündlichen Prüfung: 27.06.1997

Für die interessante Themenstellung und die Betreuung dieser Arbeit danke ich meinem akademischen Lehrer Herrn Prof. Dr. J. Donig an dieser Stelle recht herzlich.

Ferner danke ich meiner Mutter, die mich fortwährend unterstützt hat.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wir betrachten zunächst Sturm–Liouville–Operatoren. Sei $q : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ eine absolut integrierbare Funktion, und seien α, $\beta \in [0,\pi)$ reelle Zahlen. Es sei $T = T(q,\alpha,\beta)$ der lineare Operator im Lebesgueraum $L^2(0,\pi)$ mit

$$T := (-D^2 + q) \restriction L \,, \tag{1}$$

wobei D^2 die gewöhnliche zweite Ableitung bezeichne und L die lineare Mannigfaltigkeit aller absolut–stetig differenzierbaren Funktionen $y : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ mit $-y'' + qy \in L^2(0,\pi)$ sei, die der Randbedingung

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \,, \quad y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0$$

genügen. Das Spektrum dieses Operators besteht aus unendlich vielen reellen Eigenwerten der Vielfachheit 1, die lediglich den uneigentlichen Häufungspunkt ∞ besitzen. Die Eigenwerte von T bilden somit eine streng monoton wachsende reelle Zahlenfolge (μ_k) mit $\mu_k = \mu_k(q,\alpha,\beta) \to \infty \quad (k \to \infty)$.

G. Borg [3] hat gezeigt, daß die Folge (μ_k) das Potential q niemals eindeutig bestimmt, da es stets unendlich viele reellwertige Potentiale $p \in L^1(0,\pi)$ mit

$$\mu_k(p,\alpha,\beta) = \mu_k(q,\alpha,\beta) \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{2}$$

gibt (vgl. [3, Satz P, Satz P^*]). Es stellt sich die Frage, inwiefern das Potential q durch die Eigenwerte $\mu_k(q,\alpha,\beta)$ bestimmt wird, und unter welchen zusätzlichen Bedingungen man aus (2) schließen kann, daß $p = q$ ist. Ein erstes diesbezügliches Ergebnis wurde von G. Borg erzielt und später von N. Levinson in [8] wie folgt verallgemeinert:

Ist $\gamma \in [0,\pi)$ mit $\gamma \neq \beta$, so sind zwei reellwertige Potentiale p, $q \in L^1(0,\pi)$ genau dann identisch, wenn

$$\mu_k(p,\alpha,\beta) = \mu_k(q,\alpha,\beta) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

und

$$\mu_k(p,\alpha,\gamma) = \mu_k(q,\alpha,\gamma) \qquad (k \in \mathbb{N}) \tag{3}$$

gilt (vgl. [8, Theorem I]).

Das Studium des von N. Levinson angegebenen Beweises zeigt, daß an Stelle von (3) auch eine Bedingung an die Eigenfunktionen von $T(q,\alpha,\beta)$ und $T(p,\alpha,\beta)$ gestellt werden kann. Diese werden wir im folgenden kurz herleiten.

Sei $\phi_k(x) = \phi_k(x,q) \quad (x \in \Omega)$ eine Eigenfunktion von $T = T(q,\alpha,\beta)$ zum Eigenwert μ_k. Da, wie man zeigen kann, ϕ_k als Eigenfunktion von T keine doppelten Nullstellen besitzt und die Randbedingungen

$$\phi_k(0)\cos\alpha + \phi_k'(0)\sin\alpha = 0\,, \quad \phi_k(\pi)\cos\beta + \phi_k'(\pi)\sin\beta = 0$$

erfüllt, gibt es Zahlen $C_k(0,q) \neq 0$, $C_k(\pi,q) \neq 0$ mit

$$\begin{pmatrix}\phi_k\\ \phi_k'\end{pmatrix}(0,q) \;=\; C_k(0,q)\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\phi_k\\ \phi_k'\end{pmatrix}(\pi,q) \;=\; C_k(\pi,q)\begin{pmatrix}\sin\beta\\ -\cos\beta\end{pmatrix}.$$

Die Bedingung (3) stellt lediglich sicher, daß

$$\frac{C_k(\pi,p)}{C_k(0,p)} \;=\; \frac{C_k(\pi,q)}{C_k(0,q)} \qquad (k \in I\!N)$$

gilt (siehe [8, Seite 27 u.]). Das Potential q des Operators $T = T(q,\alpha,\beta)$ wird also durch die Eigenwerte $\mu_k(q)$ von T und das Verhalten der Eigenfunktionen von T in den Randpunkten des Intervalls $[0,\pi]$ eindeutig bestimmt. Nach [8] gilt folgendes Ergebnis:

Zwei reellwertige Potentiale p, $q \in L^1(0,\pi)$ sind genau dann identisch, wenn

$$\mu_k(p) \;=\; \mu_k(q)\,, \quad \frac{C_k(\pi,p)}{C_k(0,p)} \;=\; \frac{C_k(\pi,q)}{C_k(0,q)} \qquad (k \in I\!N) \tag{4}$$

gilt.

Liegen Dirichletsche Randbedingungen vor, d. h. ist $\alpha = \beta = 0$, so wird (4) zu

$$\mu_k(p) \;=\; \mu_k(q)\,, \quad \frac{\phi_k'(\pi,p)}{\phi_k'(0,p)} \;=\; \frac{\phi_k'(\pi,q)}{\phi_k'(0,q)} \qquad (k \in I\!N)\,. \tag{5}$$

Einen ausführlichen Beweis dafür, daß diese Bedingung nur für $p = q$ erfüllt ist, geben J. Pöschel und E. Trubowitz in [13, Theorem 3.5].[1] Unter Beschränkung auf den Fall Dirichletscher Randbedingungen geben diese Autoren in [13] darüber hinaus einen umfassenden Einblick in die Zusammenhänge zwischen dem Potential q und dem Spektrum des Operators $T = T(q,0,0)$.

Während die Arbeiten von Borg und Levinson bereits 1946 bzw. 1949 erschienen sind, wurden verwandte Fragestellungen für Schrödingeroperatoren (vermutlich) etwa ab 1988 untersucht, u. a. von A. Nachman, J. Sylvester und G. Uhlmann [10].

[1] Zur Verdeutlichung der grundlegenden Ideen wird in [13] vorausgesetzt, daß p und q quadratisch Lebesgue–integrierbar sind.

Die zuletzt genannten Autoren gehen dabei von folgenden Voraussetzungen aus:

Gegeben seien ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset I\!R^m$, $m \geq 2$, mit glattem Rand und eine reellwertige Funktion $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Sei T der (selbstadjungierte) lineare Operator im Lebesgueraum $L^2(\Omega)$ mit

$$(6) \qquad \begin{aligned} D(T) &= \{u \in W^{2,2}(\Omega) \,|\, u|_{\partial\Omega} = 0\}\,, \\ Tu &= -\Delta u + qu \qquad (u \in D(T))\,, \end{aligned}$$

wobei $u|_{\partial\Omega}$ für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ die Spur von u auf $\partial\Omega$ bezeichne. ($W^{k,2}(\Omega)$ ist ein Sobolewraum mit $k \in \{1,2\}$.) Das Spektrum von T ist rein diskret, d. h. jede Zahl $z \in \sigma(T)$ ist isolierter Punkt des Spektrums und ein Eigenwert endlicher Vielfachheit von T. Die Eigenwerte von T können in Form einer monoton wachsenden reellen Zahlenfolge (μ_k) mit $\mu_k \to \infty \quad (k \to \infty)$ angeordnet werden, wobei jeder Eigenwert seiner Vielfachheit entsprechend oft in (μ_k) vorkommt. Ferner kann für jedes $k \in I\!N$ eine Eigenfunktion ϕ_k von T zum Eigenwert μ_k so gewählt werden, daß (ϕ_k) eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega)$ ist.

Die Ergebnisse von [10] kann man nun wie folgt zusammenfassen:

Nach [10, Theorem 1.3] sind zwei reellwertige Potentiale $q_1,\ q_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ genau dann identisch sind, wenn die Orthonormalbasen $(\phi_k^{(1)})$ und $(\phi_k^{(2)})$ so gewählt werden können, daß

$$\mu_k^{(1)} = \mu_k^{(2)}\,, \quad \tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi_k^{(1)} = \tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi_k^{(2)} \qquad (k \in I\!N)$$

gilt. Dabei bezeichne $\frac{\partial}{\partial n}\,\phi_k$ die äußere Normalenableitung von $\phi_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$ auf $\partial\Omega$.

Eine entsprechende Aussage gilt, wenn wir in (6) die Dirichletsche Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ durch eine Robinsche Randbedingung $\frac{\partial}{\partial n}\,u + \alpha u|_{\partial\Omega} = 0$ mit fest gewählter reellwertiger Funktion $\alpha \in C^\infty(\partial\Omega)$ ersetzen. Nach [10, Theorem 1.4] stimmen in diesem Fall zwei reellwertige Potentiale $q_1,\ q_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ genau dann überein, wenn die Orthonormalbasen $(\phi_k^{(1)})$ und $(\phi_k^{(2)})$ so gewählt werden können, daß

$$\mu_k^{(1)} = \mu_k^{(2)}\,, \quad \phi_k^{(1)}|_{\partial\Omega} = \phi_k^{(2)}|_{\partial\Omega} \qquad (k \in I\!N)$$

gilt.

Ebenfalls 1988 sind verwandte Ergebnisse von R. G. Novikov und von G. Henkin [11], [12] sowie A. G. Ramm [14] mitgeteilt worden.

Die Aussage von [10, Theorem 1.3], also für den Operator mit Dirichletschen Randbedingungen, wurde bislang in zwei Richtungen verallgemeinert. T. Kriecherbauer hat in [7] die Voraussetzungen zu $q_1,\ q_2 \in L^\infty(\Omega)$ (reellwertig) abgeschwächt, während H. Isozaki in [5] den Beweis erheblich vereinfacht und zusätzlich gezeigt hat, daß zwei reellwertige Potentiale q_1, $q_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ bereits dann übereinstimmen, wenn es eine Zahl $k_0 \in I\!N_0$ mit

$$\mu_k^{(1)} = \mu_k^{(2)}\,, \quad \tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi_k^{(1)} = \tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi_k^{(2)} \qquad (k > k_0) \tag{7}$$

gibt (vgl. [5, Theorem B]).

Die vorliegenden Arbeit verallgemeinert die Resultate von [10], [7] und [5] in zwei Richtungen. Erstens lassen wir allgemeinere Potentiale zu. Wir setzen lediglich voraus, daß das Potential eine reellwertige Funktion $q \in L^2(\Omega)$ mit der Eigenschaft ist, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $C_\varepsilon > 0$ mit

$$\int_\Omega |q||\varphi|^2 \;\le\; \varepsilon\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})) \tag{8}$$

gibt. Dies schließt sowohl Potentiale $q \in L^p(\Omega)$ mit $p \ge \max(2, \frac{m}{2})$ ein, als auch wesentlich singulärere Potentiale, die einer Stummel–Schechter–Bedingung genügen. Zweitens zerlegen wir den Rand $\partial\Omega$ in disjunkte Mengen Γ_1 und Γ_2 und verlangen an Stelle Dirichletscher oder Robinscher Randbedingungen die Erfüllung gemischter Randbedingungen der Form

$$u|_{\Gamma_1} = 0\,, \quad (\tfrac{\partial}{\partial n}\,u + \alpha u)|_{\Gamma_2} = 0\,.$$

Dirichletsche und Robinsche Randbedingungen sind zugelassene Spezialfälle.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist der von Isozaki im Vergleich zu [10] wesentlich vereinfachte Nachweis, daß ein Potential $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$ eindeutig durch die Neumann–Abbildungen $N(z,q)$ bestimmt wird, die für $z \in \varrho(T)$ durch

$$N(z,q)f \;:=\; \tfrac{\partial}{\partial n}\,u_{f,z} \qquad (f \in C^\infty(\partial\Omega))$$

erklärt sind, wobei $u_{f,z} : \Omega \to \mathbb{C}$ für $f \in C^\infty(\partial\Omega)$ die eindeutig bestimmte Funktion $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit

$$-\Delta u + qu \;=\; zu \quad \text{in } \Omega\,, \quad u|_{\partial\Omega} \;=\; f$$

bezeichne.

Im folgenden skizzieren wir kurz den von Isozaki angegeben Beweis, daß zwei reellwertige Potentiale q_1, $q_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ dann übereinstimmen, wenn (7) gilt.

Für $z \in \varrho(T) \setminus (-\infty, 0]$ und θ, $\omega \in S^{m-1}$ (der Einheitssphäre in $I\!R^m$) sei

$$S(z,\theta,\omega\,;q) \;:=\; \int_{\partial\Omega} N(z,q)e^{i\sqrt{z}\,\omega\cdot x}\cdot e^{-i\sqrt{z}\,\theta\cdot x}\,d\sigma(x)\,.$$

Nach [5, Lemma 2.2] gilt dann

$$
(9)\qquad \begin{aligned} S(z,\theta,\omega\,;q) \;&=\; -\frac{z\,|\theta-\omega|^2}{2}\int_\Omega e^{-i\sqrt{z}\,(\theta-\omega)\cdot x}\,dx \;+\; \int_\Omega e^{-i\sqrt{z}\,(\theta-\omega)\cdot x}\,q(x)\,dx\;+\\ &\qquad + \int_\Omega (z-T)^{-1}(qe^{i\sqrt{z}\,\omega\cdot x})\cdot qe^{-i\sqrt{z}\,\theta\cdot x}\,dx\;. \end{aligned}
$$

Sei nun $\xi \in I\!R^m \setminus \{0\}$ fest gewählt. Wir wählen einen Vektor $\eta \in S^{m-1}$ mit $\eta \perp \xi$ und setzen für $N \in I\!N$ mit $N > \frac{|\xi|}{2}$

$$
(10)\qquad \begin{aligned} z_N \;&:=\; (N+i)^2\,, \qquad c_N \;:=\; \Big(1-\tfrac{|\xi|^2}{4N^2}\Big)^{\frac12}\,,\\ \theta_N \;&:=\; c_N\eta + \tfrac{1}{2N}\,\xi\,, \quad \omega_N \;:=\; c_N\eta - \tfrac{1}{2N}\,\xi\;. \end{aligned}
$$

Dann gilt

$$
\operatorname{Im} z_N = 2Ni \to \infty\,, \quad -i\sqrt{z_N}\,(\theta_N-\omega_N) = \tfrac{1}{N}\,\xi - i\xi \to -i\xi \qquad (N\to\infty)
$$

und

$$
|\operatorname{Re}(i\sqrt{z_N}\,\omega_N)| = |\omega_N| = 1\,, \quad |\operatorname{Re}(-i\sqrt{z_N}\,\theta_N)| = |\theta_N| = 1 \qquad (N > \tfrac{|\xi|}{2})\,,
$$

also folgt aus (9)

$$
\lim_{N\to\infty} S(z_N,\theta_N,\omega_N;q) \;=\; -\frac{|\xi|^2}{2}\int_\Omega e^{-i\xi\cdot x}\,dx \;+\; \int_\Omega e^{-i\xi\cdot x}\,q(x)\,dx\;.
$$

Zum Nachweis, daß aus (7) schon $q_1 = q_2$ folgt, genügt es daher zu zeigen, daß unter dieser Voraussetzung bei beliebiger Wahl von ξ

$$
\lim_{N\to\infty}\Big|S(z_N,\theta_N,\omega_N;q_1) - S(z_N,\theta_N,\omega_N;q_2)\Big| \;=\; 0
$$

ist. Diese Gleichung ist erfüllt, wenn es Zahlen $C > 0$ und $z_0 > 0$ so gibt, daß für alle $z \in \varrho(T)$ mit $|z| > z_0$

$$
(11)\qquad \Big\|\Big[N(z,q_1) - N(z,q_2)\Big]f\Big\|_{L^2(\partial\Omega)} \;\le\; \frac{C}{|z|}\,\|f\|_{L^2(\partial\Omega)} \qquad (f \in C^\infty(\partial\Omega))
$$

gilt. Beim Beweis von (11) benutzt Isozaki, daß es eine Zahl $m \in I\!N$ derart gibt, daß für $z \in \varrho(T)$ und $f \in C^\infty(\partial\Omega)$

$$
\Big[\Big(\frac{d}{dz}\Big)^m N(z,q)f\Big](x) \;=\; \int_{\partial\Omega} r_z(x,y)\,f(y)\,d\sigma(y) \qquad (x\in\partial\Omega)
$$

gilt, wobei r_z die durch

$$r_z(x,y) \;=\; m!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu_k - z)^{m+1}}\;\tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi_k(x)\cdot\tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi_k(y) \qquad (x,\,y\in\partial\Omega)$$

erklärte stetige Funktion auf $\partial\Omega\times\partial\Omega$ ist (siehe [10, Lemma 3.1]). Unter der Voraussetzung (7) gilt folglich

$$\Big(\frac{d}{dz}\Big)^m\Big[N(z,q_1)-N(z,q_2)\Big] \;=\; \sum_{k=1}^{k_0}\frac{m!\,A_k^{(1)}}{\mu_k^{(1)}-z} \;-\; \sum_{k=1}^{k_0}\frac{m!\,A_k^{(2)}}{\mu_k^{(2)}-z} \qquad (z\in\varrho(T))$$

mit

$$A_k^{(j)}f \;=\; \Big(\int_{\partial\Omega}\tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi_k^{(j)}(y)\cdot f(y)\,d\sigma(y)\Big)\,\tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi_k^{(j)} \qquad (f\in C^\infty(\partial\Omega))\,.$$

Also gibt es beschränkte lineare Operatoren $B_n \quad (0\le n\le m-1)$ aus $L^2(\partial\Omega)$ in $L^2(\partial\Omega)$ so, daß für $z\in\varrho(T)$

$$N(z,q_1)-N(z,q_2) \;=\; \sum_{k=1}^{k_0}\frac{A_k^{(1)}}{\mu_k^{(1)}-z} \;-\; \sum_{k=1}^{k_0}\frac{A_k^{(2)}}{\mu_k^{(2)}-z} \;+\; \sum_{n=0}^{m-1}z^n B_n$$

ist. Aufgrund von

$$\lim_{z\to-\infty}\Big\|\Big[N(z,q_1)-N(z,q_2)\Big]f\Big\|_{L^2(\partial\Omega)} \;=\; 0 \qquad (f\in C^\infty(\partial\Omega))$$

gilt $B_n=0 \quad (0\le n\le m-1)$, und da $A_k^{(j)} \quad (1\le k\le k_0,\ j\in\{1,2\})$ beschränkte Operatoren aus $L^2(\partial\Omega)$ in $L^2(\partial\Omega)$ sind, folgt (11).

Diesen Beweis werden wir so modifizieren, daß wir die bereits angesprochene Verallgemeinerung der Ergebnisse von [10], [7] und [5] durchführen können.

Wir setzen voraus, daß Ω ein beschränktes C^2–Gebiet in $I\!R^m$, $m\ge 2$, ist, das lokal nur auf einer Seite seines Randes liegt. Dieser sei so in drei disjunkte Mengen Γ_0, Γ_1, Γ_2 aufgeteilt, daß Γ_1, Γ_2 (relativ) offen in $\partial\Omega$ sind und $\Gamma_0=\overline{\Gamma}_1\cap\overline{\Gamma}_2$ gilt. Ist $\Gamma_0\ne\emptyset$ und $m=2$, so bestehe Γ_0 aus zwei Punkten, ist $\Gamma_0\ne\emptyset$ und $m\ge 3$, so sei Γ_0 eine $(m-2)$–dimensionale C^2–Mannigfaltigkeit. Auf $\partial\Omega$ sei eine reellwertige Funktion $\alpha\in L^\infty(\partial\Omega)$ erklärt. Da wir bezüglich q die Bedingung (8) stellen, müssen wir erklären, wie wir an Stelle von (6) den Schrödingeroperator zum formalen Randwertproblem

$$(12) \qquad -\Delta u+qu \;=\; zu \;\text{ in }\Omega\,,\quad u|_{\Gamma_1}=f\,,\quad (\tfrac{\partial}{\partial n}\,u+\alpha u)|_{\Gamma_2}=g$$

einführen wollen. Dazu untersuchen wir die Sesquilinearform

$$t(u,v) := \int_\Omega (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} + q u \overline{v}) + \int_{\Gamma_1} \alpha u \overline{v} \qquad (u,\, v \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)),$$

wobei $W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$ die Abschließung von $C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2)$ in $W^{1,2}(\Omega)$ bezeichne. Wir zeigen, daß t eine symmetrische, in $L^2(\Omega)$ dicht definierte, abgeschlossene und nach unten beschränkte Sesquilinearform ist. Der Schrödingeroperator T zum formalen Randwertproblem (12) ist per definitionem der eindeutig bestimmte selbstadjungierte Operator in $L^2(\Omega)$ mit $D(T) \subset D(t)$ und

$$t(u,v) = \langle Tu, v \rangle \qquad (u \in D(T),\, v \in D(t)).$$

Also ist $D(T)$ eine Teilmenge von $W^{1,2}(\Omega)$, weshalb wir den Randwert $u|_{\partial\Omega}$ einer Funktion $u \in D(T)$ mit Hilfe des Spuroperators $\gamma : W^{1,2}(\Omega) \to W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ erklären können. Da Funktionen aus $D(T)$ auf $\partial\Omega$ unter Umständen keine Normalenableitung im gewöhnlichen Sinn besitzen, müssen wir die Normalenableitung $\frac{\partial}{\partial n} u$ einer Funktion $u \in D(T)$ in geeigneter Weise durch Distributionen erklären (siehe Seite 16). Wir zeigen, daß unsere Begriffsbildung zu

$$\begin{aligned} D(T) &= \left\{ u \in W^{1,2}(\Omega) \,\middle|\, -\Delta u + qu \in L^2(\Omega),\ u|_{\Gamma_1} = 0,\ (\tfrac{\partial}{\partial n} u + \alpha u)|_{\Gamma_2} = 0 \right\}, \\ Tu &= -\Delta u + qu \qquad (u \in D(T)) \end{aligned}$$

führt. Da T ein selbstadjungierter Operator mit kompakter Resolvente ist, können die Eigenwerte von T in Form einer monoton wachsenden reellen Zahlenfolge (μ_k) mit $\mu_k \to \infty \quad (k \to \infty)$ aufgezählt werden, wobei jeder Eigenwert seiner Vielfachheit entsprechend oft in (μ_k) vorkommt. Ferner kann für jedes $k \in I\!N$ eine Eigenfunktion ϕ_k von T zum Eigenwert μ_k so gewählt werden, daß (ϕ_k) eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega)$ ist.

Wir werden zeigen, daß $q_1 = q_2$ ist, wenn $(\phi_k^{(1)})$ und $(\phi_k^{(2)})$ so gewählt werden können, daß mit geeigneten Zahlen $k_1,\, k_2 \in I\!N_0$

$$\begin{aligned} \mu^{(1)}_{k_1+k} &= \mu^{(2)}_{k_2+k} \qquad (k \in I\!N), \\ (\tfrac{\partial}{\partial n} \phi^{(1)}_{k_1+k})|_{\Gamma_1} &= (\tfrac{\partial}{\partial n} \phi^{(2)}_{k_2+k})|_{\Gamma_1}, \quad \phi^{(1)}_{k_1+k}|_{\Gamma_2} = \phi^{(2)}_{k_2+k}|_{\Gamma_2} \qquad (k \in I\!N) \end{aligned} \tag{13}$$

gilt.

Der Beweis dieser Aussage erfolgt in drei Schritten. Dazu ist es zweckmäßig eine kanonische Sesquilinearform zu erklären: Für $z \in \varrho(T)$ sei

$$S_z(f,g) := (\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z})(\overline{g}) - \int_{\partial\Omega} u_{f,z} \tfrac{\partial}{\partial n} \overline{g} \qquad (f,g \in C^2(\overline{\Omega})),$$

wobei $u_{f,z} : \Omega \to \mathbb{C}$ für $f \in C^2(\overline{\Omega})$ die eindeutig bestimmte Funktion $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\Delta u \in L^1(\Omega)$ bezeichne, für die

$$-\Delta u + qu = zu \quad \text{in } \Omega\,, \quad u|_{\Gamma_1} = f|_{\Gamma_1}\,, \quad (\tfrac{\partial}{\partial n}\, u + \alpha u)|_{\Gamma_2} = (\tfrac{\partial}{\partial n}\, f + \alpha f)|_{\Gamma_2}$$

gilt.

Zunächst zeigen wir, daß die Familie $(S_z)_{z\in\mathbb{C},\, \arg z \in (0, \frac{\pi}{2})}$ das Potential q eindeutig bestimmt. Dazu wählen wir zu $\xi \in \mathbb{R}^m$ einen Vektor $\nu \in S^{m-1}$ mit $\nu \perp \xi$ und setzen für $r > 0$ an Stelle von (10)

$$\zeta(r) := \nu - i(r\nu + \tfrac{1}{2}\,\xi)\,, \quad \eta(r) := \nu + i(r\nu - \tfrac{1}{2}\,\xi)\,,$$

$$z_r := r^2 + \tfrac{1}{4}\,|\xi|^2 - 1 + 2i\,r\,.$$

Für die durch

$$f_r(x) := e^{\zeta(r)\cdot x}\,, \quad g_r(x) := e^{-\eta(r)\cdot x} \qquad (x \in \overline{\Omega}\,,\ r > 0)$$

erklärten Funktionen gilt dann

$$S_{z_r}(f_r, g_r) = \int_\Omega e^{-i\xi\cdot x} q(x)\, dx - \langle (z_r - T)^{-1}(qf_r), qg_r\rangle \qquad (r > 0)$$

und damit

$$\lim_{r\to\infty} S_{z_r}(f_r, g_r) = \int_\Omega e^{-i\xi\cdot x} q(x)\, dx\,. \tag{14}$$

Aus $S_z^{(1)} = S_z^{(2)}$ $\quad (z \in \mathbb{C},\ \arg z \in (0, \frac{\pi}{2}))$, folgt daher $q_1 = q_2$.

Anschließend zeigen wir, daß aus (13) mit $k_1 = 0$ und $k_2 = 0$ die Übereinstimmung der Formen $S_z^{(1)}$ und $S_z^{(2)}$ folgt. Dazu entwickeln wir $u_{f,z}$ in $L^2(\Omega)$ nach den Eigenfunktionen von T, wodurch wir die folgende Darstellung von $u_{f,z}$ erhalten:

$$u_{f,z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_k(f)}{z - \mu_k}\ \phi_k \qquad \text{in } L^2(\Omega)$$

mit Koeffizienten

$$\ell_k(f) = (\tfrac{\partial}{\partial n}\,\overline{\phi}_k)(f) - \int_{\partial\Omega} \overline{\phi}_k\ \tfrac{\partial}{\partial n}\, f \qquad (k \in \mathbb{N})\,,$$

die für $k \in I\!N$ eindeutig durch $(\frac{\partial}{\partial n}\phi_k)|_{\Gamma_1}$ und $\phi_k|_{\Gamma_2}$ bestimmt werden. Aus dieser Darstellung von $u_{f,z}$ schließen wir, daß

$$(15) \qquad S_z(f,g) \;=\; -\sum_{k=1}^{\infty} \ell_k(f)\Big[\langle \phi_k, g\rangle - \frac{\overline{\ell_k(g)}}{z-\mu_k}\Big] \qquad (f,\, g \in C^2(\,\overline{\Omega}\,))$$

gilt. Ist die Voraussetzung (13) mit $k_1 = 0$ und $k_2 = 0$ erfüllt, so folgt aus (15)

$$\Big[S_z^{(1)} - S_z^{(2)}\Big](f,g) \;=\; -\sum_{k=1}^{\infty} \ell_k^{(1)}(f)\Big[\langle \phi_k^{(1)}, g\rangle - \langle \phi_k^{(2)}, g\rangle\Big] \qquad (f,\, g \in C^2(\,\overline{\Omega}\,))\,.$$

In diesem Fall ist somit die Differenz $\big[S_z^{(1)} - S_z^{(2)}\big](f,g)$ für fest gewählte Funktionen $f,\, g \in C^2(\,\overline{\Omega}\,)$ unabhängig von z. Wenn andererseits

$$(16) \qquad \Big[S_z^{(1)} - S_z^{(2)}\Big](f,g) \;\to\; 0 \qquad (z \to -\infty)$$

gilt, stimmen die Formen $S_z^{(1)}$ und $S_z^{(2)}$ überein.

Der Nachweis von (16) basiert auf der Beobachtung, daß für $z \in \varrho(T_1) \cap \varrho(T_2)$

$$\Big[S_z^{(1)} - S_z^{(2)}\Big](f,g) \;=\; \int_\Omega (q_1 - q_2) u_{f,z}^{(2)}\, \overline{u_{g,\overline{z}}^{(1)}} \qquad (f,\, g \in C^2(\,\overline{\Omega}\,))$$

gilt. Mit Hilfe dieser Gleichung und (8) läßt sich die Frage nach der Gültigkeit von (16) durch die Untersuchung des Verhaltens von $u_{f,z}$ und $\nabla u_{f,z}$ bei fest gewählter Funktion $f \in C^2(\,\overline{\Omega}\,)$ für $z \to -\infty$ beantworten.

Nachdem wir damit gezeigt haben, daß $q_1 = q_2$ aus (13) mit $k_1 = 0$ und $k_2 = 0$ folgt, setzen wir im folgenden voraus, daß (13) mit geeigneten Zahlen $k_1,\, k_2 \in I\!N$ gilt. In diesem Fall folgt aus (15) und (16)

$$\Big[S_z^{(1)} - S_z^{(2)}\Big](f,g) \;=\; \sum_{k=1}^{k_1} \frac{\ell_k^{(1)}(f)\,\overline{\ell_k^{(1)}(g)}}{z-\mu_k^{(1)}} \;-\; \sum_{k=1}^{k_2} \frac{\ell_k^{(2)}(f)\,\overline{\ell_k^{(2)}(g)}}{z-\mu_k^{(2)}} \qquad (f,\, g \in C^2(\,\overline{\Omega}\,))\,.$$

Beachten wir (14), so sehen wir, daß

$$(17) \qquad \lim_{r\to\infty} \frac{\ell_k^{(j)}(f_r)\,\overline{\ell_k^{(j)}(g_r)}}{z_r - \mu_k^{(j)}} \;=\; 0 \qquad (1 \le k \le k_j,\; j \in \{1,2\})$$

somit eine hinreichende Bedingung für

$$(18) \qquad \int_\Omega e^{-i\xi\cdot x}\,(q_1 - q_2)(x)\,dx \;=\; 0$$

ist. Nach Definition von f_r und g_r ist (17) erfüllt, wenn zu $\xi \in I\!R^m$ ein Vektor $\nu \in S^{m-1}$ mit $\nu \perp \xi$ gewählt werden kann, der die Eigenschaft besitzt, daß für

$$h_r(x) \;:=\; e^{(a-ir\nu)\cdot x} \qquad (x \in \overline{\Omega},\; r > 0)$$

mit $a = (\nu - \frac{i}{2}\,\xi)$ oder $a = -(\nu - \frac{i}{2}\,\xi)$

$$\ell_k(h_r) \;=\; o(r) \qquad (r \to \infty) \tag{19}$$

gilt. Im Fall Dirichletscher Randbedingungen gilt (19) für beliebige Vektoren $\nu \in S^{m-1}$, was aus dem Satz von Riemann–Lebesgue folgt. Liegen hingegen gemischte oder Robinsche Randbedingungen vor, so gibt es unter Umständen Vektoren $\nu \in S^{m-1}$, die (19) nicht erfüllen. Diese Ausnahmemenge ist jedoch nirgends dicht in S^{m-1}, weshalb (18) auf einer für den Schluß $q_1 = q_2$ ausreichenden Teilmenge von $I\!R^m$ erfüllt ist.

1 Generelle Voraussetzungen

Gegeben sei ein beschränktes Gebiet Ω in $I\!R^m$, $m \geq 2$, dessen Rand $\partial\Omega$ eine $(m-1)$–dimensionale C^2–Mannigfaltigkeit ist. Es gelte $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}$. Ferner seien Γ_1 und Γ_2 zwei disjunkte Teilmengen von $\partial\Omega$, die relativ offen in $\partial\Omega$ sind. Mit $\Gamma_0 := \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$ gelte $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_0$. Ist $\Gamma_0 \neq \emptyset$ und $m = 2$, so bestehe Γ_0 aus zwei Punkten, ist $\Gamma_0 \neq \emptyset$ und $m \geq 3$, so sei Γ_0 eine $(m-2)$–dimensionale C^1–Mannigfaltigkeit. Wir setzen voraus, daß $q : \Omega \to I\!R$ eine Funktion aus $L^2(\Omega)$ ist, die die Eigenschaft besitzt, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $C_\varepsilon > 0$ mit

$$(1) \qquad \int_\Omega |q||\varphi|^2 \;\leq\; \varepsilon\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (\varphi \in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,))$$

gibt. Bis auf weiteres sei q fest gewählt. Ferner sei $\alpha : \partial\Omega \to I\!R$ eine der Bedingung

$$\alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$$

genügende fest gewählte Funktion.

Bemerkung 1.1 *Für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ ist $qu^2 \in L^1(\Omega)$. Ferner gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $C_\varepsilon > 0$ mit*

$$(2) \qquad \int_\Omega |q||u|^2 \;\leq\; \varepsilon\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (u \in W^{1,2}(\Omega))\,.$$

Beweis. Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Dann gibt es eine Folge (φ_n) in $C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)$, die in $W^{1,2}(\Omega)$ gegen u konvergiert (vgl. [1, Theorem 3.18]). Da nach der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung für $n, k \in I\!N$

$$(3) \qquad \begin{aligned} \int_\Omega |q\varphi_n^2 - q\varphi_k^2| \;&\leq\; \int_\Omega |q||\varphi_n - \varphi_k||\varphi_n + \varphi_k| \\ &\leq\; \left(\int_\Omega |q||\varphi_n - \varphi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |q||\varphi_n + \varphi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

gilt, folgt aus (3) mit Hilfe von (1), daß $(q\varphi_n^2)$ eine Cauchyfolge in $L^1(\Omega)$ ist. Somit gibt es eine Funktion $v \in L^1(\Omega)$ mit $q\varphi_n^2 \to v$ in $L^1(\Omega)$ $\quad (n \to \infty)$. Für eine geeignete Teilfolge (φ_{n_k}) von (φ_n) gilt nun

$$q\varphi_{n_k}^2 \to qu^2\,, \quad q\varphi_{n_k}^2 \to v \qquad \text{fast überall auf } \Omega \quad (k \to \infty)\,.$$

Daraus folgt $v = qu^2$ fast überall auf Ω, also ist $qu^2 \in L^1(\Omega)$, und es gilt $q\varphi_n^2 \to qu^2$ in $L^1(\Omega)$ $\quad (n \to \infty)$. Wegen (1) gibt es nun zu jedem $\varepsilon > 0$ eine von u unabhängige

Zahl $C_\varepsilon > 0$ mit

$$\int_\Omega |q||u|^2 \;=\; \lim_{n\to\infty} |q\varphi_n^2| \;\le\; \lim_{n\to\infty} \left(\varepsilon\|\nabla\varphi_n\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon\|\varphi_n\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$
$$= \; \varepsilon\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

∎

Bemerkung 1.2 *Ist $q : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die eine der beiden nachfolgend aufgeführten Eigenschaften besitzt, so gilt (1).*

a) $q \in L^p(\Omega)$ *mit* $p \ge \max(2, \frac{m}{2})$;

b) $q \in L^2(\Omega)$ *mit* $N_\delta := \sup_{y\in\mathbb{R}^m} \int_{B_\delta(y)\cap\Omega} |q(x)|\,\omega(y-x)\,dx \;\to\; 0 \qquad (\delta \searrow 0)\,,$

$$\omega(x) \;:=\; \begin{cases} 1-\log|x|\,, & m=2 \\ |x|^{2-m}\,, & m\ge 3 \end{cases} \qquad (x\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\})\,.$$

Beweis.
a) Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{p}+\frac{2}{r} = 1$. Da $p \ge \max(2, \frac{m}{2})$ ist, gilt dann $2 \le r < \infty$, falls $m = 2$ ist bzw. $2 \le r \le \frac{2m}{m-2}$, falls $m > 2$ ist. Also gibt es nach dem Sobolewschen Einbettungssatz (vgl. [1, Theorem 5.4]) eine Zahl $C > 0$ mit

$$\|\varphi\|_{L^r(\Omega)} \;\le\; C\|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad (\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}))\,.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$q_n(x) \;:=\; \begin{cases} q(x)\,, & |q(x)| < n \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x\in\Omega)\,.$$

Dann gilt

$$\int_\Omega |q-q_n|^p \;=\; \int_{\{x\in\Omega\,|\,|q(x)|\ge n\}} |q(x)|^p\,dx \qquad (n\in\mathbb{N})\,,$$

und wegen $\mu\{x\in\Omega\,|\,|q(x)|\ge n\} \to 0 \quad (n\to\infty)$ gibt es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|q-q_N\|_{L^p(\Omega)} \;\le\; \frac{\varepsilon}{C^2}\,.$$

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung ($\frac{1}{p}+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}=1$) folgt daraus

$$\begin{aligned}\int_\Omega |q||\varphi|^2 &= \int_\Omega |q-q_N||\varphi||\varphi| + \int_\Omega |q_N||\varphi|^2 \\ &\le \|q-q_N\|_{L^p(\Omega)}\|\varphi\|^2_{L^r(\Omega)} + \|q_N\|_{L^\infty(\Omega)}\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\le \frac{\varepsilon}{C^2}\, C^2\|\varphi\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + N\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \varepsilon\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + (\varepsilon+N)\|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (\varphi\in C^\infty(\,\overline{\Omega}\,))\,.\end{aligned}$$

b) Sei Q die Fortsetzung von $\sqrt{|q|}$ auf $I\!R^m$ mit $Q(x)=0 \quad (x\in\overline{\Omega}^{\,c})$. Dann ist $Q\in L^2_{\mathrm{loc}}(I\!R^m)$, und für $0<\delta\le 1$ gilt

$$\begin{aligned}\sup_{y\in I\!R^m}\int_{|x|<\delta}|Q(x-y)|^2\,\omega(x)\,dx &= \sup_{y\in I\!R^m}\int_{|x+y|<\delta}|Q(x)|^2\,\omega(x+y)\,dx \\ &= \sup_{y\in I\!R^m}\int_{|x-y|<\delta,\,x\in\Omega}|q(x)|\,\omega(x-y)\,dx \\ &= N_\delta \;<\; \infty\,.\end{aligned}$$

Man kann zeigen (siehe [15, CH. 7, Theorem 7.3]), daß es eine Zahl $K>0$ mit folgender Eigenschaft gibt: Zu jedem $\delta\in(0,1)$ gibt es eine Zahl $C_\delta>0$ mit

$$(4) \qquad \|Q\,\varphi\|^2_{L^2(I\!R^m)} \;\le\; KN_\delta\|\varphi\|^2_{W^{1,2}(I\!R^m)} + C_\delta\|\varphi\|^2_{L^2(I\!R^m)} \qquad (\varphi\in C_0^\infty(I\!R^m))\,.$$

Nun ist $C_0^\infty(I\!R^m)$ dicht in $W^{1,2}(I\!R^m)$, also ist (4) äquivalent zu

$$(5) \qquad \|Q\,v\|^2_{L^2(I\!R^m)} \;\le\; KN_\delta\|v\|^2_{W^{1,2}(I\!R^m)} + C_\delta\|v\|^2_{L^2(I\!R^m)} \qquad (v\in W^{1,2}(I\!R^m))$$

(vgl. Bemerkung 1.1). Da Ω ein beschränktes C^2–Gebiet ist, können wir jede Funktion $u\in W^{1,2}(\Omega)$ so zu einer Funktion $v\in W^{1,2}(I\!R^m)$ fortsetzen, daß mit einer von u und v unabhängigen Zahl $C>1$

$$\|v\|_{W^{k,2}(I\!R^m)} \;\le\; C\|u\|_{W^{k,2}(\Omega)} \qquad (0\le k\le 1)$$

gilt (vgl. [1, Theorem 4.26]). Aus (5) folgt daher, daß es eine Zahl $K>0$ und zu jedem $\delta\in(0,1)$ eine Zahl $C_\delta>0$ so gibt, daß

$$\int_\Omega |q||u|^2 \;\le\; C^2\Big(KN_\delta\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + C_\delta\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) \qquad (u\in W^{1,2}(\Omega))$$

gilt. Da nach Voraussetzung $N_\delta\to 0 \quad (\delta\searrow 0)$ gilt, ist damit auch (1) erfüllt. ■

2 Randfunktion und distributionelle Normalenableitung einer Funktion

Bekanntlich sind die Elemente von $W^{1,2}(\Omega)$ keine Funktionen, sondern Äquivalenzklassen von auf Ω erklärten Funktionen, die fast überall übereinstimmen. Da $\partial\Omega$ eine Nullmenge in $I\!R^m$ ist, stellt sich die Frage, was wir unter der Randfunktion einer Funktion $u \in W^{1,2}(\Omega)$ verstehen wollen.

Ist $\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$, so besitzt φ genau eine stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$, die wir der Einfachheit halber ebenfalls mit φ bezeichnen.[2] Man kann zeigen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $C_\varepsilon > 0$ mit

$$(1) \qquad \int_{\partial\Omega} |\varphi|^2 \;\leq\; \varepsilon \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon \|\varphi\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (\varphi \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega))$$

gibt (siehe z. B. [9, Theorem 3.16]). Insbesondere ist somit der durch

$$\gamma_0\,\varphi \;:=\; \varphi \restriction \partial\Omega \qquad (\varphi \in C^0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega))$$

erklärte lineare Operator aus $W^{1,2}(\Omega)$ in $L^2(\partial\Omega)$ beschränkt. Da $C^\infty(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{1,2}(\Omega)$ liegt (vgl. [1, Theorem 3.18]), ist γ_0 zudem dicht definiert. Also besitzt γ_0 genau eine beschränkte Fortsetzung $\gamma : W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, den Spuroperator.

Definition 2.1 *Unter der Randfunktion einer Funktion $u \in W^{1,2}(\Omega)$ auf einer relativ offenen Teilmenge Γ von $\partial\Omega$ verstehen wir die punktweise Einschränkung der Funktion $\gamma u : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ auf Γ. Hierfür schreiben wir $(\gamma u) \restriction \Gamma$, oder $u|_\Gamma$ oder — wenn aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, daß die Einschränkung auf Γ betrachtet wird — kurz u.*

Die bekannte Darstellung

$$(2) \qquad W_0^{1,2}(\Omega) \;=\; \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid \gamma u = 0\}$$

(siehe z. B. [9, Theorem 3.12]) hat im Falle der disjunkten Zerlegung $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_0$ (vgl. Seite 11) ihre Entsprechung in

$$(3) \qquad W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2) \;=\; \{u \in W^{1,2}(\Omega) \mid u|_{\Gamma_1} = 0\}\,.$$

Um (3) zu verifizieren, wählt man entsprechend der Definition von $W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$ zu $u \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$ eine Folge (φ_n) in $C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2)$ mit $\|u - \varphi_n\|_{W^{1,2}(\Omega)} \to 0 \quad (n \to \infty)$.

[2] Vgl. die Definition von $C^0(\overline{\Omega})$, Seite 66.

Dann gilt $\varphi_n|_{\Gamma_1} = 0 \quad (n \in I\!N)$ und damit

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} |u|^2 &= \int_{\Gamma_1} |u - \varphi_n|^2 \leq \int_{\partial\Omega} |u - \varphi_n|^2 \\ &\leq C_\gamma^2 \|u - \varphi_n\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \to 0 \qquad (n \to \infty)\,, \end{aligned}$$

wobei C_γ die Operatornorm des Spuroperators $\gamma : W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ bezeichne. Also ist $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $u|_{\Gamma_1} = 0$. Ist andererseits $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $u|_{\Gamma_1} = 0$, so kann man mit den Methoden aus dem Beweis von [1, Theorem 3.18] zeigen, daß es eine Folge (φ_n) in $C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2)$ mit $\|u - \varphi_n\|_{W^{1,2}(\Omega)} \to 0 \quad (n \to \infty)$ gibt, was äquivalent zu $u \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$ ist.

Im Raum $W^{1,2}(\Omega)$ gibt es bekanntlich Funktionen, deren distributioneller Gradient nicht die Anwendung des Spuroperators erlaubt, so daß eine Normalenableitung nicht mit Hilfe des Spuroperators gebildet werden kann. Für Funktionen $u \in W^{1,2}(\Omega)$, die die Eigenschaft besitzen, daß $\Delta u \in L^1(\Omega)$ ist und mit einer geeigneten Zahl $C > 0$

$$\left| \int_\Omega \Delta u \cdot \varphi \right| \leq C \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad (\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}\,)) \tag{4}$$

gilt, können wir jedoch eine distributionelle Normalenableitung einführen.

Im folgenden sei u eine Funktion aus $W^{1,2}(\Omega)$ mit der Eigenschaft, daß $\Delta u \in L^1(\Omega)$ ist und (4) gilt. Für $v \in W^{1,2}(\Omega)$ ist dann $\Delta u \cdot v \in L^1(\Omega)$, und es gilt

$$\left| \int_\Omega \Delta u \cdot v \right| \leq C \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \quad (v \in W^{1,2}(\Omega))\,.^3 \tag{5}$$

Indem wir

$$G_u(v) := \int_\Omega (\Delta u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v) \qquad (v \in W^{1,2}(\Omega))$$

setzen, erhalten wir also ein beschränktes lineares Funktional auf $W^{1,2}(\Omega)$. Ist (φ_n) eine Folge in $C_0^2(\overline{\Omega}\,)$ mit

$$\|u - \varphi_n\|_{W^{1,2}(\Omega)} \to 0\,, \quad \|\Delta u - \Delta\varphi_n\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \qquad (n \to \infty)\,,^4$$

so gilt nach der ersten Greenschen Formel

$$\begin{aligned} G_u(v) &= \int_\Omega (\Delta u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega (\Delta\varphi_k \cdot v + \nabla\varphi_k \cdot \nabla v) \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial}{\partial n}\,\varphi_k \cdot v \qquad (v \in C^1(\overline{\Omega}\,))\,. \end{aligned}$$

[3] Der Beweis erfolgt analog zu dem von Bemerkung 1.1.

[4] Zur Existenz von (φ_n) vgl. z. B. den Beweis von [1, Theorem 3.18].

Insbesondere gilt $G_u(v) = 0 \quad (v \in C_0^1(\Omega))$, woraus durch Grenzübergang $G_u(v) = 0$ $(v \in W_0^{1,2}(\Omega))$ folgt.
Seien nun $v,\, w \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\gamma v = \gamma w$. Nach (2) ist dann $v - w \in W_0^{1,2}(\Omega)$, also $G_u(v) = G_u(w)$. Da somit G_u ein beschränktes lineares Funktional auf $W^{1,2}(\Omega)$ ist, dessen Wert $G_u(v)$ für $v \in W^{1,2}(\Omega)$ lediglich von γv abhängt, wird durch

$$(6) \qquad F_u(g) \;:=\; G_u(v) \qquad (g \in L^2(\partial\Omega),\; v \in W^{1,2}(\Omega) \text{ mit } \gamma v = g)$$

ein beschränktes lineares Funktional auf dem Banachraum

$$\begin{aligned} W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega) &= \left\{ g \in L^2(\partial\Omega) \,\middle|\, \text{es gibt ein } v \in W^{1,2}(\Omega) \text{ mit } \gamma v = g \right\}, \\ \|g\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} &= \inf\left\{ \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \,\middle|\, v \in W^{1,2}(\Omega),\; \gamma v = g \right\} \end{aligned}$$

erklärt. Ist insbesondere $u \in C^2(\,\overline{\Omega}\,)$, so gilt nach der ersten Greenschen Formel

$$F_u(g) \;=\; \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial}{\partial n}\, u \cdot g \qquad (g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)).$$

Dies gibt Anlaß zu folgender Definition:

Definition 2.2 *Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\Delta u \in L^1(\Omega)$ so, daß* (4) *erfüllt ist. Wir setzen*

$$(\tfrac{\partial}{\partial n}\, u)(g) \;:=\; F_u(g) \qquad (g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)),$$

wobei F_u das gemäß (6) *erklärte lineare Funktional auf $W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ bezeichne. Dieses Funktional bezeichnen wir als* distributionelle (äußere) Normalenableitung von u auf $\partial\Omega$*.*

Bemerkung 2.3 *Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $-\Delta u + qu \in L^2(\Omega)$. Dann besitzt u eine distributionelle äußere Normalenableitung $\frac{\partial}{\partial n} u$ auf $\partial\Omega$. Für $g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ gilt*

$$(7) \qquad (\tfrac{\partial}{\partial n}\, u)(g) \;=\; \int_{\Omega} (\Delta u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v) \qquad (v \in W^{1,2}(\Omega),\; \gamma v = g).$$

Beweis. Aufgrund von (1.2) gibt es eine Zahl $C_q > 0$ mit

$$\|\, |q|^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2(\Omega)} \;\le\; \sqrt{C_q}\, \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad (u \in W^{1,2}(\Omega)),$$

so daß mit Hilfe der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$(8) \qquad \int_\Omega |quv| \;\le\; C_q \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad (u,\, v \in W^{1,2}(\Omega))$$

folgt. Sei nun $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $-\Delta u + qu \in L^2(\Omega)$. Wegen $q,\ u \in L^2(\Omega)$ ist $qu \in L^1(\Omega)$. Da Ω beschränkt ist, gilt zudem $-\Delta u + qu \in L^1(\Omega)$. Also ist $\Delta u = qu - (-\Delta u + qu) \in L^1(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \Delta u \cdot \varphi \right| \;&\le\; \int_\Omega |qu\varphi| + \int_\Omega |-\Delta u + qu||\varphi| \\ &\le\; \Big(C_q \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + \|-\Delta u + qu\|_{L^2(\Omega)} \Big) \|\varphi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad (\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}\,))\,. \end{aligned}$$

Die Formel (7) folgt unmittelbar aus Definition 2.2 und (6). ■

Definition 2.4 *Sind $F \in [\,W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)\,]^*$ und $\Gamma \subset \partial\Omega$ relativ offen in $\partial\Omega$, so schreiben wir* [5]

$$F|_\Gamma \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad F\varphi \;=\; 0 \quad (\varphi \in C^1(\partial\Omega),\ \operatorname{supp}\varphi \subset \Gamma)\,.$$

Dabei bezeichne $\operatorname{supp}\varphi$ *für* $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$ *die Abschließung von* $\{x \in \partial\Omega \,|\, \varphi(x) \neq 0\}$ *in* $\partial\Omega$ *bezüglich der Spurtopologie.*

Wie üblich sei

$$F|_\Gamma = G|_\Gamma \;\Leftrightarrow\; (F-G)|_\Gamma = 0 \qquad (F\,, G \in [\,W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)\,]^*,\ \Gamma \subset \partial\Omega \text{ relativ offen})\,.$$

[5] $[\,W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)\,]^*$ bezeichne den topologischen Dualraum von $W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$.

3 Definition des Schrödingeroperators

Bei der Konstruktion des zu untersuchenden Schrödingeroperators werden wir den ersten Darstellungssatz für eine Klasse von Sesquilinearformen auf einem Hilbertraum anwenden, den wir dem Buch von Kato (vgl. [6, Theorem VI–2.1, Theorem VI–2.6]) entnehmen. In unserem Fall wird stets der Hilbertraum $L^2(\Omega)$ mit dem kanonischen Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega u\,\overline{v} \qquad (u,\ v \in L^2(\Omega))$$

zugrundegelegt.

Satz 3.1 *Ist t eine dicht definierte, abgeschlossene, symmetrische und nach unten beschränkte Sesquilinearform in $L^2(\Omega)$, so gibt es genau einen selbstadjungierten Operator T in $L^2(\Omega)$ mit $D(T) \subset D(t)$ und*

$$(1) \qquad t(u,v) = \langle Tu, v\rangle \qquad (u \in D(T),\ v \in D(t))\,.$$

Sind $u \in D(t)$, $h \in L^2(\Omega)$ mit

$$t(u,v) = \langle h, v\rangle \qquad (v \in D(t))\,,$$

so gilt $u \in D(T)$, $Tu = h$. Der Operator T ist nach unten beschränkt und hat dieselbe untere Schranke wie t. (T heißt der mit t assoziierte Operator *in $L^2(\Omega)$.)*

Die Form t sei im weiteren wie folgt fest gewählt:

Definition 3.2 *Wir setzen*

$$t(u,v) := \int_\Omega (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} + qu\,\overline{v}\,) + \int_{\Gamma_2} \alpha u\,\overline{v} \qquad (u,\ v \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2))\,.$$

Die mit t assoziierte quadratische Form bezeichnen wir wie üblich durch

$$t(u) := t(u,u) \qquad (u \in D(t))\,.$$

(Hierbei sind q und α die auf Seite 11 vorgegebenen Funktionen.)

Lemma 3.3 *Durch Definition 3.2 wird eine dicht definierte, abgeschlossene, symmetrische und nach unten beschränkte Sesquilinearform t in $L^2(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften erklärt:*

a) Es gibt eine Zahl $C > 0$ mit

$$|t(u,v)| \le C\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad (u,v \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)).$$

b) Zu jeder Zahl $a < 1$ gibt es eine Zahl $b \in I\!R$ mit

$$t(u) \ge a\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + b\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (u \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)).$$

Beweis. Da q und α reellwertige Funktionen sind, ist t symmetrisch. Ferner ist t in $L^2(\Omega)$ dicht definiert, denn $C_0^\infty(\Omega)$ ist eine Teilmenge von $W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$, die dicht in $L^2(\Omega)$ ist. Im Anschluß an b) werden wir zeigen, daß t in $L^2(\Omega)$ abgeschlossen und nach unten beschränkt ist.

a) Nach (2.8) gibt es eine Zahl $C_q > 0$ mit

$$\int_\Omega |quv| \le C_q\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad (u,\ v \in W^{1,2}(\Omega)).$$

Ist $C_\gamma > 0$ die Operatornorm des Spuroperators $\gamma : W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, so folgt aus der Beschränktheit von α

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2} |\alpha u\,\overline{v}\,| &\le \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\le \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)}C_\gamma^2\,\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad (u,\ v \in W^{1,2}(\Omega)).\end{aligned}$$

Mit $C := 1 + C_q + \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)}C_\gamma^2$ gilt also

$$\begin{aligned}|t(u,v)| &\le \int_\Omega |\nabla u \cdot \overline{\nabla v} + qu\,\overline{v}\,| + \int_{\Gamma_2} |\alpha u\,\overline{v}\,| \\ &\le C\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad (u,\ v \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)).\end{aligned}$$

b) Sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$ fest gewählt. Dann gilt

$$\begin{aligned}t(u) &= \int_\Omega (|\nabla u|^2 + q|u|^2) + \int_{\Gamma_2} \alpha|u|^2 \\ &\ge \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega |q||u|^2 - \int_{\Gamma_2} |\alpha||u|^2 .\end{aligned} \tag{2}$$

Nach (1.2) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine von u unabhängige Zahl $C_\varepsilon > 0$ mit

$$\int_\Omega |q||u|^2 \le \varepsilon\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon\|u\|^2_{L^2(\Omega)} . \tag{3}$$

Ferner gibt es aufgrund von (2.1) zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $C'_\varepsilon > 0$ mit

$$\|\gamma w\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq \varepsilon \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} + C'_\varepsilon \|w\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (w \in W^{1,2}(\Omega)),$$

also mit

$$\int_{\Gamma_2} |\alpha||u|^2 \leq \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \Big(\varepsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + C'_\varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big). \tag{4}$$

Berücksichtigen wir (3) und (4) in (2), so sehen wir, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ von u unabhängige Zahlen $C_\varepsilon > 0$, $C'_\varepsilon > 0$ mit

$$t(u) \geq (1 - \varepsilon - \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\varepsilon)\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - (C_\varepsilon + \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)} C'_\varepsilon)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{5}$$

gibt, woraus b) folgt.

Die Ungleichung (5) zeigt insbesondere, daß t in $L^2(\Omega)$ nach unten beschränkt ist. Um zu zeigen, daß t abgeschlossen in $L^2(\Omega)$ ist, wählen wir Zahlen $a \in (0,1)$ und $b \in \mathbb{R}$ mit

$$t(u) \geq a\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + b\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (u \in W^{1,2}_0(\Omega \cup \Gamma_2)).$$

Wir weisen nach, daß der Prähilbertraum $(W^{1,2}_0(\Omega \cup \Gamma_2), (\cdot,\cdot)_t)$ mit

$$(u,v)_t := t(u,v) + (1-b)\langle u, v\rangle \qquad (u,\ v \in W^{1,2}_0(\Omega \cup \Gamma_2))$$

vollständig ist (vgl. [6, Theorem VI–1.11]). Da $W^{1,2}_0(\Omega \cup \Gamma_2)$ als Abschließung von $C^\infty_0(\Omega \cup \Gamma_2)$ in $W^{1,2}(\Omega)$ unter der Norm $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ vollständig ist, genügt es zu zeigen, daß die durch $(\cdot,\cdot)_t$ gegebene Norm äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ ist. Dies ist aber erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned}
(u,u)_t &= t(u) + (1-b)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq a\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + b\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + (1-b)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\underset{a\in(0,1)}{\geq} a\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad (u \in W^{1,2}_0(\Omega \cup \Gamma_2))
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(u,u)_t &\leq |t(u)| + (1-b)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\underset{\text{a)}}{\leq} C\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} + (1-b)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (C + 1 + |b|)\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \qquad (u \in W^{1,2}_0(\Omega \cup \Gamma_2)).
\end{aligned}$$

∎

Definition 3.4 *Wir definieren T als den (eindeutig bestimmten) nach unten beschränkten selbstadjungierten Operator in $L^2(\Omega)$, der mit der durch Definition 3.2 erklärten Sesquilinearform t assoziiert ist.*

Satz 3.5 *Es gilt*

$$\begin{aligned} D(T) &= \left\{u \in W^{1,2}(\Omega) \,\middle|\, -\Delta u + qu \in L^2(\Omega),\ u|_{\Gamma_1} = 0,\ (\tfrac{\partial}{\partial n}\, u + \alpha u)|_{\Gamma_2} = 0\right\}, \\ Tu &= -\Delta u + qu \qquad (u \in D(T)) . \end{aligned}$$

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir

$$D := \left\{u \in W^{1,2}(\Omega) \,\middle|\, -\Delta u + qu \in L^2(\Omega),\ u|_{\Gamma_1} = 0,\ (\tfrac{\partial}{\partial n}\, u + \alpha u)|_{\Gamma_2} = 0\right\}$$

und zeigen zunächst $D(T) \subset D$, $Tu = -\Delta u + qu \quad (u \in D(T))$.

Sei $u \in D(T)$ fest gewählt. Da $D(T) \subset D(t)$ gilt, ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$. Nach (2.3) ist dies äquivalent zu $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $u|_{\Gamma_1} = 0$. Ferner gilt $Tu \in L^2(\Omega)$, und aus (1) folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega (Tu)\varphi &= t(u, \overline{\varphi}) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi + qu\varphi) \\ &= \int_\Omega u(-\Delta + q)\varphi \qquad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega)) , \end{aligned}$$

mithin $Tu = (-\Delta + q)u \in L^2(\Omega)$. Nach Bemerkung 2.3 besitzt u damit auch eine distributionelle Normalenableitung auf $\partial\Omega$ im Sinne von Definition 2.2.

Sei nun $\varphi \in C^1(\partial\Omega)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \Gamma_2$. Dann gibt es eine Funktion $v \in C_0^1(\Omega \cup \Gamma_2)$ mit $v|_{\partial\Omega} = \varphi$. Nach Bemerkung 2.3 sowie der Definition von t und Tu gilt

$$\begin{aligned} (\tfrac{\partial}{\partial n}\, u + \alpha u)(\varphi) &= \int_\Omega (\Delta u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v) + \int_{\Gamma_2} \alpha uv \\ &= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + quv) + \int_{\Gamma_2} \alpha uv - \int_\Omega (-\Delta + q)u \cdot v \\ &= t(u, \overline{v}) - \langle Tu, \overline{v}\rangle \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Damit ist auch $(\tfrac{\partial}{\partial n}\, u + \alpha u)|_{\Gamma_2} = 0$ erfüllt, womit $u \in D$ nachgewiesen ist.

Sei nun $u \in D$. Dann ist $(\frac{\partial}{\partial n} u)|_{\Gamma_2} = -(\alpha u)|_{\Gamma_2}$, also gilt für $v \in C_0^1(\Omega \cup \Gamma_2)$

$$\begin{aligned} t(u,v) &= \int_\Omega (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} + qu\,\overline{v}\,) + \int_{\partial\Omega} \alpha u\,\overline{v} \\ &= \int_\Omega (-\Delta u + qu)\overline{v} + \int_\Omega (\nabla u \cdot \overline{\nabla v} + \Delta u \cdot \overline{v}\,) + (\alpha u)(\,\overline{v}\,) \\ &= \langle (-\Delta + q)u, v\rangle + (\,\tfrac{\partial}{\partial n} u)(\,\overline{v}\,) + (\alpha u)(\,\overline{v}\,) \\ &= \langle (-\Delta + q)u, v\rangle\,. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes und mit Hilfe von Lemma 3.3 a) durch Grenzübergang

$$(6) \qquad t(u,v) \;=\; \langle (-\Delta + q)u, v\rangle \qquad (v \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2))\,.$$

Entsprechend der Charakterisierung von $D(T)$ gemäß Satz 3.1 (2.Teil) folgt aus $u \in D \subset D(t)$ und (6), daß $u \in D(T)$, $Tu = -\Delta u + qu$ gilt. Der Satz ist damit vollständig bewiesen. ■

Wir kommen nun zu einigen, wenn auch nicht neuen, so doch nützlichen Abschätzungen.

Lemma 3.6

a) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $C_\varepsilon > 0$ mit

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \;\leq\; \varepsilon\,\|Tu\|_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega)} \qquad (u \in D(T))\,.$$

b) Ist $\Gamma_0 = \emptyset$, $\alpha \in C^1(\partial\Omega)$ und gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $C_\varepsilon > 0$ mit

$$(7) \qquad \|qu\|_{L^2(\Omega)} \;\leq\; \varepsilon\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} + C_\varepsilon\|u\|_{L^2(\Omega)} \qquad (u \in W^{2,2}(\Omega))\,,$$

so gilt

$$D(T) \;=\; \left\{ u \in W^{2,2}(\Omega) \;\middle|\; u|_{\Gamma_1} = 0,\ (\,\tfrac{\partial}{\partial n} u + \alpha u)|_{\Gamma_2} = 0 \right\}.$$

Weiter gibt es unter dieser Voraussetzung eine Zahl $C > 0$ mit

$$(8) \qquad \|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \;\leq\; C\Big(\|Tu\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\Big) \qquad (u \in D(T))\,.$$

Beweis. a) Sei $u \in D(T)$. Nach Satz 3.1 gilt $u \in D(t) = W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$. Folglich gibt es nach Lemma 3.3 b) zu beliebigem $a \in (0,1)$ eine von u unabhängige Zahl $b \in I\!R$ mit

$$a\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \;\leq\; t(u) + (a-b)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \;=\; \langle Tu, u\rangle + (a-b)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Daraus erhalten wir (wenn wir $a = \frac{1}{2}$ wählen) durch Anwendung der Cauchyschen Interpolationsungleichung für $\varepsilon > 0$

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \;\leq\; \varepsilon\|Tu\|^2_{L^2(\Omega)} + (\tfrac{1}{\varepsilon} + 1 - 2b)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

b) Sei T_0 der Schrödingeroperator mit Potential 0. Ist $\Gamma_0 = \emptyset$, so kann man zeigen, daß

$$D(T_0) \;=\; \Big\{u \in W^{2,2}(\Omega) \;\Big|\; u|_{\Gamma_1} = 0,\; (\tfrac{\partial}{\partial n}\,u + \alpha u)|_{\Gamma_2} = 0\Big\}$$

gilt, und daß es eine Zahl $C > 0$ mit

$$\text{(9)} \qquad \|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \;\leq\; C\Big(\|T_0u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}\Big) \qquad (u \in D(T_0))$$

gibt (bzgl. (9) vgl. den Beweis von [4, Theorem 8.12]). Aus a) (angewendet auf T_0 an Stelle von T) und (9) folgt, daß es eine Zahl $C > 0$ mit

$$\text{(10)} \qquad \|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} \;\leq\; C\Big(\|T_0u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\Big) \qquad (u \in D(T_0))$$

gibt. Die Kombination von (7) und (10) ergibt für $\varepsilon > 0$

$$\|qu\|_{L^2(\Omega)} \;\leq\; \varepsilon\, C\|T_0u\|_{L^2(\Omega)} + (\varepsilon\, C + C_\varepsilon)\|u\|_{L^2(\Omega)} \qquad (u \in D(T_0))\,,$$

d. h. der Operator der Multiplikation mit q in $L^2(\Omega)$ mit dem Definitionsbereich $D(q) = W^{2,2}(\Omega)$ ist T_0–beschränkt mit T_0–Schranke Null. Die Operatorsumme $T_0 + q$ ist also auf $D(T_0)$ wohldefiniert und selbstadjungiert (vgl. [6, Theorem V–4.3]). Wegen $D(T_0) \subset D(T)$ ist $(T_0 + q)$ somit eine Einschränkung von T. Da beide Operatoren selbstadjungiert sind, gilt

$$(T_0 + q) \subset T = T^* \subset (T_0 + q)^* = (T_0 + q)\,,$$

also $T_0 + q = T$. Die Ungleichung (8) folgt unmittelbar aus (10) und (7). ■

Nach Lemma 3.6 b) ist unter den dort angegebenen Voraussetzungen $D(T)$ in $W^{2,2}(\Omega)$ enthalten. In diesem Fall besitzt jede Funktion $u \in D(T)$ also eine reguläre äußere Normalenableitung $\frac{\partial}{\partial n} u \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$, und es gilt

$$(\tfrac{\partial}{\partial n} u)(g) \;=\; \int_{\partial\Omega} (n \cdot \gamma \nabla u)\, g \qquad (u \in D(T),\; g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega))\,.$$

Wie das folgende Beispiel von E. Shamir [17] zeigt, ist die Voraussetzung $\Gamma_0 = \emptyset$ allerdings eine notwendige Bedingung von Lemma 3.6 b).

Beispiel 3.7 Sei $H^+ := I\!R \times (0,\infty)$. Als Imaginärteil einer holomorphen Funktion ist

$$u(x,y) \;:=\; \operatorname{Im}(x+iy)^{\frac{1}{2}} \qquad ((x,y) \in H^+)$$

harmonisch. Außerdem ist u eine Funktion aus $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(H^+)$, erfüllt die Randbedingungen

$$u(x,0) \;=\; 0 \quad (x>0), \qquad -\tfrac{\partial}{\partial y} u(x,0) \;=\; 0 \quad (x<0)$$

und ist nicht in $W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(H^+)$ enthalten. Sei nun Ω ein in der oberen Halbebene liegendes, beschränktes C^2–Gebiet, dessen Rand in $B_1(0)$ mit $\{(x,0) \,|\, -1 < x < 1\}$ übereinstimmt. Wir setzen

$$\Gamma_2 \;:=\; \{(x,0) \,|\, -1 < x < 0\}\,, \quad \Gamma_0 \;:=\; \{\,(-1,0)\,,\,(0,0)\,\}\,, \quad \Gamma_1 \;:=\; \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}_2\,.$$

Multiplizieren wir u mit einer rotationssymmetrischen Funktion $\psi \in C_0^\infty(I\!R^2)$, die $\operatorname{supp}\psi \subset B_1(0)$ und $\psi(x) = 1 \quad (|x| < \frac{1}{2})$ erfüllt, so erhalten wir eine Funktion $v = \psi u$ mit folgenden Eigenschaften:

$$v \in W^{1,2}(\Omega), \quad \Delta v \in L^2(\Omega), \quad v|_{\Gamma_1} = 0, \quad (\tfrac{\partial}{\partial n} v)|_{\Gamma_2} = 0,$$

aber $v \notin W^{2,2}(\Omega)$. ∎

Satz 3.8 *Die Resolvente des Operators T ist kompakt.*

Beweis. Da T selbstadjungiert und nach unten beschränkt ist, gilt $\varrho(T) \neq \emptyset$ und

$$\|R(z,T)\|_{B(L^2(\Omega))} \;=\; \frac{1}{\operatorname{dist}(z,\sigma(T))} \qquad (z \in \varrho(T)) \tag{11}$$

(vgl. [6, V–(3.16)]). Es gibt folglich ein $z_0 \in \varrho(T)$ mit $0 < \|R(z_0,T)\|_{B(L^2(\Omega))} < \infty$. Ferner gibt es nach Lemma 3.6 a) eine Zahl $C_1 > 0$ so, daß für $u \in L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\|R(z_0,T)u\|_{W^{1,2}(\Omega)} &\leq \|TR(z_0,T)u\|_{L^2(\Omega)} + C_1\|R(z_0,T)u\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \|(I - z_0R(z_0,T))u\|_{L^2(\Omega)} + C_1\|R(z_0,T)u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \Big(1 + (|z_0| + C_1)\|R(z_0,T)\|_{B(L^2(\Omega))}\Big)\|u\|_{L^2(\Omega)} \,.
\end{aligned} \tag{12}$$

gilt. Nach (12) ist $R(z_0,T)$ als Operator in $L^2(\Omega)$ kompakt, da Ω ein beschränktes C^2–Gebiet in $\mathbb{R}^m$ ist und die Einbettung von $W^{1,2}(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ nach dem Satz von Rellich kompakt ist (siehe [1, Theorem 6.2]). Daraus kann man sofort schließen, daß die Resolvente von T für jedes $z \in \varrho(T)$ kompakt ist (vgl. [6, Theorem III–6.29]). ■

Nachdem wir gezeigt haben, daß T ein Operator mit kompakter Resolvente ist, können wir aufgrund allgemeiner Sätze (vgl. [6, Theorem III–6.29, Theorem V–2.10]) sofort die für die vorliegende Arbeit wesentlichen Konsequenzen ziehen:

Satz 3.9 *Das Spektrum von T ist rein diskret.*[6] *Es gibt genau eine monoton wachsende Zahlenfolge (μ_k) in $\mathbb{R}$ mit $\mu_k \to \infty \quad (k \to \infty)$ derart, daß jeder Eigenwert von T genau seiner Vielfachheit*[7] *entsprechend oft in (μ_k) vorkommt. Ferner gibt es eine Orthonormalbasis (ϕ_k) von $L^2(\Omega)$ mit der Eigenschaft, daß $T\phi_k = \mu_k\phi_k \quad (k \in \mathbb{N})$ gilt. Ist (ϕ_k) eine derartige Basis, so gilt*

$$R(z,T) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z-\mu_k}\,\langle\,\cdot\,,\phi_k\rangle\,\phi_k \qquad (z \in \varrho(T)).$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig in $B(L^2(\Omega))$.

Wir benötigen für Kapitel 7 eine Abschätzung der Resolvente für spezielle Funktionenklassen, die wir im folgenden herleiten.

Satz 3.10 *Seien $\xi,\ \nu \in \mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ mit $|\nu| = 1$ und $\nu \cdot \xi = 0$ fest gewählt. Für $r > 0$ seien*

$$\begin{aligned}
&\zeta(r) \;:=\; \nu - i(r\nu + \tfrac{1}{2}\,\xi)\,, \quad \eta(r) \;:=\; \nu + i(r\nu - \tfrac{1}{2}\,\xi)\,, \\
&z_r \;:=\; r^2 + \tfrac{1}{4}\,|\xi|^2 - 1 + 2i\,r
\end{aligned} \tag{13}$$

[6] Zur Klarstellung: Das diskrete Spektrum von T besteht aus den Eigenwerten endlicher Vielfachheit von T, die isolierte Punkte in $\sigma(T)$ sind.

[7] Es ist nicht erforderlich hier algebraische und geometrische Vielfachheit zu unterscheiden, da beide Zahlen identisch sind.

und

$$f_r(x) := e^{\zeta(r)\cdot x}, \quad g_r(x) := e^{-\eta(r)\cdot x} \qquad (x \in \overline{\Omega}). \tag{14}$$

Dann gibt es eine Zahl $C > 0$ derart, daß für jedes $r > 0$

$$\left|\langle R(z_r,T)(qf_r), qg_r\rangle\right| \le \frac{C}{r}$$

gilt.

Beweis. Sei $r > 0$. Da Ω nach Voraussetzung beschränkt ist, gibt es ein $R > 0$ mit $\Omega \subset B_R(0)$. Somit gilt

$$\left.\begin{aligned} |f_r(x)| &= e^{\operatorname{Re}\zeta(r)\cdot x} &= e^{\nu\cdot x} &\le e^{|x|} \le e^R \\ |g_r(x)| &= e^{-\operatorname{Re}\eta(r)\cdot x} &= e^{-\nu\cdot x} &\le e^{|x|} \le e^R \end{aligned}\right\} \qquad (x \in \overline{\Omega}). \tag{15}$$

Nach Wahl von z_r gilt ferner

$$\|R(z_r,T)\|_{B(L^2(\Omega))} \underset{(11)}{=} \frac{1}{\operatorname{dist}(z_r,\sigma(T))} \underset{\sigma(T)\subset\mathbb{R}}{\le} \frac{1}{|\operatorname{Im} z_r|} = \frac{1}{2r}. \tag{16}$$

Aus (15) und (16) folgt

$$\begin{aligned} \left|\langle R(z_r,T)(qf_r), qg_r\rangle\right| &\le \|R(z_r,T)(qf_r)\|_{L^2(\Omega)}\,\|qg_r\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \|R(z_r,T)\|_{B(L^2(\Omega))}\,\|qf_r\|_{L^2(\Omega)}\,\|qg_r\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \frac{\left(e^R\|q\|_{L^2(\Omega)}\right)^2}{2r}. \end{aligned}$$

∎

4 Untersuchung des gemischten Randproblems

Wie bisher machen wir die generelle Voraussetzung, daß das Potential $q : \Omega \to I\!R$ in $L^2(\Omega)$ ist und der Bedingung (1.1) (vgl. Seite 11) genügt und daß die Randfunktion $\alpha : \partial\Omega \to I\!R$ beschränkt ist.

Definition 4.1 *Seien $z \in \mathbb{C}$ und $f \in C^2(\overline{\Omega})$.*
Wir bezeichnen eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{C}$ als Lösung des gemischten Randproblems

$$(1) \qquad (-\Delta + q - z)u \;=\; 0\,,$$

$$(2) \qquad u|_{\Gamma_1} \;=\; f|_{\Gamma_1}\,, \quad (\tfrac{\partial}{\partial n} u + \alpha u)|_{\Gamma_2} \;=\; (\tfrac{\partial}{\partial n} f + \alpha f)|_{\Gamma_2}\,,$$

wenn $u \in W^{1,2}(\Omega)$, $\Delta u \in L^1(\Omega)$ ist und wenn folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
&\Delta u \;=\; qu - zu && \textit{fast überall auf } \Omega\,,\\
&\gamma u \;=\; \gamma f && \textit{fast überall auf } \Gamma_1\,,\\
&(\tfrac{\partial}{\partial n} u + \alpha u)(\varphi) \;=\; (\tfrac{\partial}{\partial n} f + \alpha f)(\varphi) && (\varphi \in C^1(\partial\Omega),\ \operatorname{supp}\varphi \subset \Gamma_2)\,.
\end{aligned}$$

Wie die folgende Bemerkung (siehe c)) zeigt, stellt die spezielle Wahl von (2) keine Einschränkung des Lösungsbegriffs dar.

Bemerkung 4.2 *Sei $z \in \mathbb{C}$.*

a) Für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $\quad \Delta u \in L^1(\Omega)$ *mit* $(-\Delta + q - z)u = 0$ *;*

2) $\quad \displaystyle\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi + (q-z)u\varphi) \;=\; 0 \qquad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega))\,.$

b) Ist $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\Delta u \in L^1(\Omega)$, $(-\Delta + q - z)u = 0$, so besitzt u eine distributionelle (äußere) Normalenableitung auf $\partial\Omega$.

c) Seien $g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$, $h \in [W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)]^*$. Genau dann gibt es eine Funktion $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\Delta u \in L^1(\Omega)$ und

$$(3) \qquad (-\Delta + q - z)u \;=\; 0\,, \quad u|_{\Gamma_1} \;=\; g|_{\Gamma_1}\,, \quad (\tfrac{\partial}{\partial n} u + \alpha u)|_{\Gamma_2} \;=\; h|_{\Gamma_2}\,,$$

wenn es eine Funktion $f \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $-\Delta f + qf \in L^2(\Omega)$ und

$$(4) \qquad g|_{\Gamma_1} \;=\; f|_{\Gamma_1}\,, \quad h|_{\Gamma_2} \;=\; (\tfrac{\partial}{\partial n} f + \alpha f)|_{\Gamma_2}$$

gibt, für die das Problem (1)/(2) *eine Lösung besitzt.*

Beweis.
a) 1) $\Rightarrow$ 2) Da $\Delta u = (q-z)u$ fast überall auf Ω gilt, folgt 2) aus

(5) $$\int_\Omega -\Delta u \cdot \varphi \;=\; \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \;=\; \int_\Omega u \cdot (-\Delta\varphi) \qquad (\varphi \in C_0^\infty(\Omega))\,.$$

2) $\Rightarrow$ 1) Aus 2) folgt mit (5), daß $\Delta u = (q-z)u$ fast überall auf Ω gilt. Wegen $q,\, u \in L^2(\Omega)$ gilt damit auch $\Delta u \in L^1(\Omega)$.

b) Da $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $-\Delta u + qu = zu \in L^2(\Omega)$ ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus Bemerkung 2.3.

c) Seien $g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$, $h \in [W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)]^*$ so, daß es eine Funktion $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\Delta u \in L^1(\Omega)$ und (3) gibt. Dann gilt $(-\Delta+q)u = zu \in L^2(\Omega)$, also ist $f = u$ eine geeignete Funktion. Sei nun $f \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $(-\Delta+q)f \in L^2(\Omega)$. Nach Bemerkung 2.3 besitzt f eine distributionelle Normalenableitung auf $\partial\Omega$. Gilt nun (4) und ist u eine Lösung des Problems (1)/(2) für f, so ist $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\Delta u \in L^1(\Omega)$ und (3). ■

Satz 4.3 *Ist $z \in \varrho(T)$, so besitzt das Problem* (1)/(2) *für jedes $f \in C^2(\overline{\Omega}\,)$ genau eine Lösung, die (formal) gegeben ist durch*

$$u_{f,z} \;:=\; f + R(z,T)(-\Delta + q - z)f\,.$$

Beweis. Ist u eine Lösung von (1)/(2), so ist $v := f - u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit

$$(-\Delta+q)v \;=\; (-\Delta+q)f - (-\Delta+q)u \;=\; (-\Delta+q)f - zu \;\in L^2(\Omega)\,,$$

$v|_{\Gamma_1} = f|_{\Gamma_1} - u|_{\Gamma_1} = 0$ und $(\frac{\partial}{\partial n}v + \alpha v)|_{\Gamma_2} \;=\; (\frac{\partial}{\partial n}f + \alpha f)|_{\Gamma_2} - (\frac{\partial}{\partial n}u + \alpha u)|_{\Gamma_2} = 0.$
Also ist $v \in D(T)$, und es gilt

$$\begin{aligned}
& Tv &&= (-\Delta+q)v \;=\; (-\Delta+q)f - zu \;=\; (-\Delta+q-z)f + zv\\
\Leftrightarrow\quad & (T-z)v &&= (-\Delta+q-z)f\\
\Leftrightarrow\quad & v &&= -R(z,T)(-\Delta+q-z)f\\
\Leftrightarrow\quad & u &&= f - v \;=\; f + R(z,T)(-\Delta+q-z)f\,.
\end{aligned}$$

Umgekehrt ist $u \;=\; f + R(z,T)(-\Delta+q-z)f$ offenbar eine Lösung von (1)/(2). ■

In den folgenden zwei Lemmata untersuchen wir das Verhalten der in Satz 4.3 bestimmten Lösungen $u_{f,z}$ des gemischten Randproblems bei fest gewählter Funktion $f \in C^2(\overline{\Omega})$ für $z \to -\infty$.

Lemma 4.4 *Ist $f \in C^2(\overline{\Omega})$, so gilt*

$$\|u_{f,z}\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \qquad (I\!R \ni z \to -\infty)\,.$$

Beweis. Da μ_1 der kleinste Eigenwert von T ist, gilt $(-\infty, \mu_1) \subset \varrho(T)$. Nach (3.11) gilt folglich für $z \in I\!R$, $z < \mu_1$

$$\|R(z,T)\|_{B(L^2(\Omega))} \;=\; \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \varrho(T))} \;=\; \frac{1}{\mu_1 - z}\,. \tag{6}$$

Da T mit seiner Resolvente vertauschbar ist, erhalten wir somit für $z \in I\!R$, $z < \mu_1$

$$\begin{aligned} \|(I - zR(z,T))v\|_{L^2(\Omega)} \;&=\; \|TR(z,T)v\|_{L^2(\Omega)} \;=\; \|R(z,T)Tv\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le\; \tfrac{1}{\mu_1 - z}\,\|Tv\|_{L^2(\Omega)} \qquad (v \in D(T))\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Seien nun $f \in C^2(\overline{\Omega})$ und $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Da T dicht definiert ist, gibt es ein $v \in D(T)$ mit $\|f - v\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$. Aufgrund von (6) und (7) gilt für $z < \min(\mu_1, 0)$

$$\begin{aligned} \|(I - zR(z,T))f\|_{L^2(\Omega)} &\le \|(I - zR(z,T))(f-v)\|_{L^2(\Omega)} + \|(I - zR(z,T))v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le \Big(1 + \tfrac{|z|}{\mu_1 - z}\Big)\varepsilon + \tfrac{1}{\mu_1 - z}\,\|Tv\|_{L^2(\Omega)} \\ &= 2\varepsilon + \tfrac{1}{\mu_1 - z}\Big(\|Tv\|_{L^2(\Omega)} - \mu_1\varepsilon\Big)\,, \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} \|u_{f,z}\|_{L^2(\Omega)} \;&=\; \|f + R(z,T)(-\Delta + q - z)f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le\; \|(I - zR(z,T))f\|_{L^2(\Omega)} + \|R(z,T)(-\Delta + q)f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\underset{(6)}{\le}\; \|(I - zR(z,T))f\|_{L^2(\Omega)} + \tfrac{1}{\mu_0 - z}\,\|(-\Delta + q)f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le\; 2\varepsilon + \tfrac{1}{\mu_1 - z}\Big(\|Tv\|_{L^2(\Omega)} - \mu_1\varepsilon + \|(-\Delta + q)f\|_{L^2(\Omega)}\Big)\,. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{\mu_1 - z} \to 0 \quad (I\!R \ni z \to -\infty)$ gibt es somit eine Zahl $z_0 < \min(\mu_1, 0)$ mit

$$\|u_{f,z}\|_{L^2(\Omega)} \;\le\; 3\varepsilon \qquad (z < z_0)\,.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. ∎

Lemma 4.5 *Sei $f \in C^2(\overline{\Omega})$ eine reellwertige Funktion und sei $k := \max_{x \in \Gamma_1} |f(x)|$ (bzw. $k := 0$, falls $\Gamma_1 = \emptyset$). Für $z \in \varrho(T) \cap I\!R$ sei*

$$(8) \qquad \tilde{u}_{f,z}(x) := \begin{cases} k & , \; u_{f,z}(x) > k \\ u_{f,z}(x) \, , & |u_{f,z}(x)| \le k \\ -k & , \; u_{f,z}(x) < -k \end{cases} \qquad (x \in \Omega) \, .$$

Dann ist $\tilde{u}_{f,z} \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ mit $\|\tilde{u}_{f,z}\|_{L^\infty(\Omega)} \le k \quad (z \in \varrho(T) \cap I\!R)$, es gilt

$$\|u_{f,z} - \tilde{u}_{f,z}\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \qquad (I\!R \ni z \to -\infty) \, ,$$

und es gibt Zahlen $z_0 < 0$ und $C = C(f, z_0) > 0$ derart, daß

$$\|\nabla(u_{f,z} - \tilde{u}_{f,z})\|_{L^2(\Omega)} \le C \qquad (z < z_0)$$

gilt.

Beweis. Sei $z \in \varrho(T) \cap I\!R$. Durch Komponentenvergleich folgt aus (1)/(2), daß $u_\Im := \operatorname{Im} u_{f,z}$ die eindeutig bestimmte Lösung des Randproblems

$$(-\Delta + q - z)u_\Im = 0 \, , \quad u_\Im|_{\Gamma_1} = 0 \, , \quad (\tfrac{\partial}{\partial n} u_\Im + \alpha u_\Im)|_{\Gamma_2} = 0$$

ist. Also ist $u_\Im = 0$, d. h. $u_{f,z}$ ist reellwertig. Die Funktion $\tilde{u}_{f,z}$ ist somit wohldefiniert und offenbar durch k beschränkt. Da

$$(9) \qquad \tilde{u}_{f,z} = u_{f,z} - (u_{f,z} - k)^+ - (u_{f,z} + k)^-$$

gilt, ist $\tilde{u}_{f,z} \in W^{1,2}(\Omega)$. Wegen $|\tilde{u}_{f,z}(x)| \le |u_{f,z}(x)| \quad (x \in \Omega)$ und $\|u_{f,z}\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ $(I\!R \ni z \to -\infty)$ (vgl. Lemma 4.4) gilt ferner

$$\|\tilde{u}_{f,z}\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \qquad (I\!R \ni z \to -\infty) \, ,$$

also gilt $\|u_{f,z} - \tilde{u}_{f,z}\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \qquad (I\!R \ni z \to -\infty)$.

Im folgenden sei $z < \min(\mu_1, 0)$ fest gewählt. Dann ist $z \in \varrho(T)$ und $u := u_{f,z}$ definiert. Wir setzen

$$v := (u - k)^+ \, , \quad w := (u + k)^- \, .$$

Nach Konstruktion sind v, w Funktionen aus $W^{1,2}(\Omega)$. Ferner gilt $v|_{\Gamma_1} = w|_{\Gamma_1} = 0$, also sind v und w Funktionen aus $W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$, denn nach Wahl von k gilt fast überall

$$(u-k)|_{\Gamma_1} \;=\; (f-k)|_{\Gamma_1} \;\le\; 0\,, \quad (u+k)|_{\Gamma_1} \;=\; (f+k)|_{\Gamma_1} \ge 0\,.$$ [8]

Da $(\frac{\partial}{\partial n}u + \alpha u)|_{\Gamma_2} = (\frac{\partial}{\partial n}f + \alpha f)|_{\Gamma_2}$ und $v \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$ ist, gilt

$$(\tfrac{\partial}{\partial n}u)(v) \;=\; (\tfrac{\partial}{\partial n}f + \alpha f - \alpha u)(v)\,.$$

Aufgrund von $-\Delta u = (z-q)u$ gilt also

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v &= \int_\Omega (-\Delta u)v + (\tfrac{\partial}{\partial n}u)(v)\\ &= \int_\Omega (z-q)uv + (\tfrac{\partial}{\partial n}f + \alpha f - \alpha u)(v)\,.\end{aligned} \tag{10}$$

Im folgenden bezeichne χ_+ die charakteristische Funktion von $\{x\in\Omega \,|\, u(x)>k\}$. Es ist $v = \chi_+(u-k)$ und $\nabla v = \chi_+\nabla u$. Daraus folgt $uv = (v+k)v \ge 0$, sowie $D_k u\cdot v = D_k v\cdot v$ und $D_k u\cdot D_i v = D_k v\cdot D_i v \quad (i,k\in\{1,\dots,m\})$. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\gamma u\,\gamma v &= \gamma u\,\gamma[(u-k)^+] \;=\; \gamma u[\gamma u - k]^+\\ &= [\gamma u - k][\gamma u - k]^+ + k[\gamma u - k]^+\\ &= [\gamma u - k]^+[\gamma u - k]^+ + k[\gamma u - k]^+\\ &= (\gamma v)^2 + k\gamma v \;=\; \gamma(v+k)\,\gamma v\,.\end{aligned}$$

Durch entsprechende Ersetzungen in (10) erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\\ &= \int_\Omega (z-q)uv + (\tfrac{\partial}{\partial n}f + \alpha f - \alpha u)(v)\\ &= \int_\Omega (z(v+k)v - q(v+k)v) + (\tfrac{\partial}{\partial n}f + \alpha f - \alpha(v+k))(v)\\ &\underset{z<0}{\le} \int_\Omega |q|(v+k)v + (\tfrac{\partial}{\partial n}f + \alpha f - \alpha(v+k))(v)\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Da (10) eine Konsequenz von $v\in W_0^{1,2}(\Omega\cup\Gamma_2)$ ist, gilt (10) auch mit w an Stelle von v. Bezeichnen wir die charakteristische Funktion von $\{x\in\Omega|\,u(x)<-k\}$ mit χ_-, so ist $w = \chi_-(u+k)$ und $\nabla w = \chi_-\nabla u$, woraus $uw = (w-k)w \ge 0$, $D_k u\cdot w = D_k w\cdot w$, $D_k u\cdot D_i w = D_k w\cdot D_i w$ für alle $i,\ k\in\{1,\dots,m\}$ sowie $\gamma u\,\gamma w = \gamma(w-k)\,\gamma w$ folgt. Analog zu (11) erhalten wir also

$$\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} \;=\; \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w \;=$$

[8] Ist $g\in W^{1,2}(\Omega)$ reellwertig, so gilt $\gamma(g^+) = (\gamma g)^+$.

$$\begin{aligned}
&= \int_\Omega (z-q)uw + (\tfrac{\partial}{\partial n} f + \alpha f - \alpha u)(w) \\
(12) \qquad &= \int_\Omega (z(w-k)w - q(w-k)w) + (\tfrac{\partial}{\partial n} f + \alpha f - \alpha(w-k))(w) \\
&\underset{z<0}{\leq} \int_\Omega |q|(w-k)w + (\tfrac{\partial}{\partial n} f + \alpha f - \alpha(w-k))(w)\,.
\end{aligned}$$

Nun ist $v = \chi_+ v$, $\nabla v = \chi_+ \nabla v$ und $w = \chi_- w$, $\nabla w = \chi_- \nabla w$, was mit $\chi_+\chi_- = 0$ zu

$$(v+w)^2 \;=\; v^2 + w^2\,, \qquad |\nabla(v+w)|^2 \;=\; |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2$$

führt. Sei jetzt $\chi_k := k\,\chi_+ - k\,\chi_-$. Durch Addition von (11) und (12) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|\nabla(v+w)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \int_\Omega |q|(v^2 + kv + w^2 - kw) + (\tfrac{\partial}{\partial n} f + \alpha f)(v+w) \\
(13) \qquad & \quad - \int_{\Gamma_2} \alpha(v^2 + kv + w^2 - kw) \\
&= \int_\Omega |q|((v+w)^2 + \chi_k(v+w)) + (\tfrac{\partial}{\partial n} f + \alpha f)(v+w) \\
& \quad - \int_{\Gamma_2} \alpha((v+w)^2 + \chi_k(v+w))\,.
\end{aligned}$$

Im folgenden schätzen wir die Terme auf der rechten Seite von (13) nach oben ab. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Nach (1.2) gibt es eine von u unabhängige Zahl $C_\varepsilon > 0$ so, daß

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |q|\,|(v+w)^2 + \chi_k(v+w)| \;&\leq\; \varepsilon\|\nabla(v+w)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon\|v+w\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + k\|q\|_{L^2(\Omega)}\|v+w\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

gilt. Ferner ist

$$\left|(\tfrac{\partial}{\partial n} f + \alpha f)(v+w)\right| \;\leq\; \|\tfrac{\partial}{\partial n} f + \alpha f\|_{[W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)]^*}\|v+w\|_{W^{1,2}(\Omega)}\,.$$ [9]

Außerdem gibt es aufgrund von (2.1) von u unabhängige Zahlen C'_ε, $C > 0$ mit

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2} |\alpha|\,|(v+w)^2 + \chi_k(v+w)| \;&\leq\; \|\alpha\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\Big[\varepsilon\|\nabla(v+w)\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad + C'_\varepsilon\|v+w\|^2_{L^2(\Omega)} + k\,C\|v+w\|_{W^{1,2}(\Omega)}\Big]\,.
\end{aligned}$$

Wählen wir $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so folgt aus diesen Abschätzungen in Verbindung mit (13), daß es von f, nicht jedoch von z, abhängige Zahlen C, $D > 0$

---

[9] Für $F \in [W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)]^*$ sei $\|F\|_{[W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)]^*} := \sup\left\{|Fg| \;\Big|\; g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega),\ \|g\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} = 1\right\}$.

mit

$$\begin{aligned}\|\nabla(v+w)\|^2_{L^2(\Omega)} &\le C\|\nabla(v+w)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + D\Big(\|v+w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v+w\|_{L^2(\Omega)}\Big)\end{aligned}$$

gibt. Da $v+w = u_{f,z} - \tilde{u}_{f,z}$ ist (vgl. (9)), gilt also

$$\begin{aligned}\|\nabla(u_{f,z}-\tilde{u}_{f,z})\|^2_{L^2(\Omega)} &\le C\|\nabla(u_{f,z}-\tilde{u}_{f,z})\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + D\Big(\|u_{f,z}-\tilde{u}_{f,z}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{f,z}-\tilde{u}_{f,z}\|_{L^2(\Omega)}\Big)\,. \end{aligned}\tag{14}$$

Sei nun $z_0 < \min(\mu_1, 0)$ so gewählt, daß

$$D\Big(\|u_{f,z}-\tilde{u}_{f,z}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{f,z}-\tilde{u}_{f,z}\|_{L^2(\Omega)}\Big) \le \left(\tfrac{1}{2}\,C\right)^2 \qquad (z < z_0)$$

gilt. Aus (14) folgt dann

$$\Big(\|\nabla(u_{f,z}-\tilde{u}_{f,z})\|_{L^2(\Omega)} - \tfrac{1}{2}\,C\Big)^2 \le C^2 \qquad (z < z_0)\,.$$

Also gilt

$$\|\nabla(u_{f,z}-\tilde{u}_{f,z})\|_{L^2(\Omega)} \le \tfrac{3}{2}\,C \qquad (z < z_0)\,,$$

was noch zu zeigen war. ∎

Ist $\Gamma_1 \neq 0$, d. h. werden auf einem Teil von $\partial\Omega$ Dirichletsche Randbedingungen verlangt, so ist $\|\nabla u_{f,z}\|_{L^2(\Omega)}$ für $z \to -\infty$ in $\mathbb{R}$ in der Regel nicht beschränkt, wie die folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung 4.6 *Sei $f \in C^2(\overline{\Omega})$. Genau dann gibt es Zahlen $z_0 < 0$ und $C > 0$ mit*

$$\|\nabla u_{f,z}\|_{L^2(\Omega)} \le C \qquad (z < z_0)\,,$$

wenn $f|_{\Gamma_1} = 0$ gilt.

Beweis. „$\Rightarrow$" Für $z \in \varrho(T)$ sei $v_z := f - u_{f,z}$. Da $v_z \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$ ist und die durch Definition 3.2 erklärte Sesquilinearform t nach Lemma 3.3 a) in $W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$ beschränkt ist, gilt mit geeigneten Zahlen C, $C' > 0$

$$\begin{aligned}|t(v_z)| &\le C\Big(\|\nabla v_z\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_z\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\ &\le 2C\Big(\|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_{f,z}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_{f,z}\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) \\ &\le C' \qquad (z < z_0)\,.\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.4 gilt ferner $v_z \to f \quad (\mathbb{R} \ni z \to -\infty)$ in $L^2(\Omega)$. Da t eine abgeschlossene, symmetrische Sesquilinearform in $L^2(\Omega)$ ist, folgt daraus $f \in D(t) = W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$ (siehe [6, Theorem VI–1.16]). Also ist $f|_{\Gamma_1} = 0$.

„$\Leftarrow$" Für $z \in \varrho(T)$ ist $u_{f,z}$ linear in f. Da mit f auch $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ Funktionen aus $C^2(\overline{\Omega})$ sind, können wir uns somit auf den Fall beschränken, daß f reellwertig ist. Dann ist Lemma 4.5 anwendbar, und die dort erklärte Funktion $\tilde{u}_{f,z}$ ist aufgrund von $f|_{\Gamma_1} = 0$ gleich Null. Es gibt also Zahlen $z_0 < 0$ und $C > 0$ mit

$$\|\nabla u_{f,z}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \qquad (z < z_0)\,.$$

∎

5 Reihenentwicklung der Lösung des gemischten Randproblems

Im folgenden wenden wir uns der Entwicklung von $u_{f,z}$ nach den Eigenfunktionen des Operators T zu, wobei wir eine Orthonormalbasis (ϕ_k) von $L^2(\Omega)$ relativ zur Eigenwertfolge (μ_k) gemäß Satz 3.9 fest wählen.

Definition 5.1 *Wir setzen für $k \in I\!N$*

$$\ell_k(f) := \left(\tfrac{\partial}{\partial n}\,\overline{\phi}_k\right)(f) - \int_{\partial\Omega} \overline{\phi}_k \,\tfrac{\partial}{\partial n} f \qquad (f \in C^2(\,\overline{\Omega}\,))\,.^{10}$$

Bemerkung 5.2 *Für $k \in I\!N$ und $f \in C^2(\,\overline{\Omega}\,)$ gilt*

$$\ell_k(f) = \langle(-\Delta + q - \mu_k)f, \phi_k\rangle\,.$$

Beweis. Nach der zweiten Greenschen Formel gilt

$$\begin{aligned}
\ell_k(f) &= \int_\Omega (f\,\Delta\overline{\phi}_k - \Delta f \cdot \overline{\phi}_k\,) \\
&= \langle(-\Delta+q)f, \phi_k\rangle - \langle f, (-\Delta+q)\phi_k\rangle \\
&= \langle(-\Delta+q)f, \phi_k\rangle - \langle f, \mu_k\phi_k\rangle \\
&= \langle(-\Delta+q-\mu_k)f, \phi_k\rangle\,.
\end{aligned}$$

∎

Satz 5.3 *Für $z \in \varrho(T)$, $f \in C^2(\,\overline{\Omega}\,)$ gilt*

$$u_{f,z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_k(f)}{z-\mu_k}\,\phi_k\,,$$

wobei die Reihe in $L^2(\Omega)$ konvergiert.

Beweis. Nach Satz 3.9 und Bemerkung 5.2 gilt

$$\begin{aligned}
u_{f,z} &= f + R(z,T)(-\Delta+q-z)f \\
&\underset{3.9}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\langle f,\phi_k\rangle + \frac{1}{z-\mu_k}\,\langle(-\Delta+q-z)f,\phi_k\rangle\Big]\phi_k =
\end{aligned}$$

[10]Da Ω ein beschränktes C^2–Gebiet in $I\!R^m$ ist, können wir f zu einer Funktion aus $C_0^2(I\!R^m)$ fortsetzen, also ist $f|_{\partial\Omega} \in C^2(\partial\Omega)$. Der Kürze halber schreiben wir $(\frac{\partial}{\partial n}\,\overline{\phi}_k)(f)$ an Stelle von $(\frac{\partial}{\partial n}\,\overline{\phi}_k)(f|_{\partial\Omega})$.

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle (z-\mu_k)f, \phi_k\rangle + \langle(-\Delta+q-z)f,\phi_k\rangle}{z-\mu_k}\,\phi_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle(-\Delta+q-\mu_k)f,\phi_k\rangle}{z-\mu_k}\,\phi_k \\ &\underset{5.2}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_k(f)}{z-\mu_k}\,\phi_k\,. \end{aligned}$$

■

Da für $k \in I\!N$ offenbar $\phi_k|_{\Gamma_1} = 0$ ist, wird $\gamma\phi_k$ eindeutig durch $\phi_k|_{\Gamma_2}$ bestimmt. Zum Nachweis, daß aufgrund von $(\frac{\partial}{\partial n}\phi_k + \alpha\phi_k)|_{\Gamma_2} = 0$ entsprechendes für $\frac{\partial}{\partial n}\phi_k$ gilt, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 5.4 *Zu jeder Funktion $f \in C^1(\overline{\Omega})$ gibt es eine Folge (f_n) in $C_0^1(\Omega\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2)$ mit*

$$\|f|_{\partial\Omega} - f_n|_{\partial\Omega}\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \to 0 \qquad (n\to\infty)\,.$$

Beweis. Nach Lemma A.1 gibt es eine Folge (f_n) in $C_0^1(\Omega\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2)$ mit $f_n \to f$ in $W^{1,2}(\Omega)$ $(n\to\infty)$. Da für $n \in I\!N$

$$\|f|_{\partial\Omega} - f_n|_{\partial\Omega}\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} = \inf_{v\in W^{1,2}(\Omega),\,\gamma v = f-f_n} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \le \|f-f_n\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

gilt, hat die Folge (f_n) die geforderten Eigenschaften. ■

Lemma 5.5 *Für $k \in I\!N$ und $f \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt*

$$\ell_k(f) = \lim_{n\to\infty} (\tfrac{\partial}{\partial n}\overline{\phi}_k)(\chi_{\Gamma_1} f_n) - \int_{\Gamma_2} (\tfrac{\partial}{\partial n} + \alpha) f \cdot \overline{\phi}_k\,,$$

wobei (f_n) eine beliebige Folge in $C_0^1(\Omega\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2)$ mit $\|f|_{\partial\Omega} - f_n|_{\partial\Omega}\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \to 0$ $(n\to\infty)$ sei.

Beweis. Sei (f_n) eine Folge von Funktionen aus $C_0^1(\Omega\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2)$, deren Spuren auf $\partial\Omega$ in $W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$, also insbesondere in $L^2(\partial\Omega)$, gegen $f|_{\partial\Omega}$ konvergieren. Dann gilt

$$(\chi_{\Gamma_2} f_n)|_{\partial\Omega} \in C^1(\partial\Omega)\,, \quad \operatorname{supp}(\chi_{\Gamma_2} f_n)|_{\partial\Omega} \subset \Gamma_2 \qquad (n \in I\!N)\,.$$

Sei nun $k \in I\!N$ fest. Da $\frac{\partial}{\partial n}\overline{\phi}_k$ ein beschränktes lineares Funktional auf $W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$ mit $(\frac{\partial}{\partial n}\overline{\phi}_k)|_{\Gamma_2} = -(\alpha\,\overline{\phi}_k)|_{\Gamma_2}$ ist, gilt also

(1) $$\lim_{n\to\infty} (\tfrac{\partial}{\partial n}\overline{\phi}_k)(\chi_{\Gamma_2} f_n) = -\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_2} \alpha\,\overline{\phi}_k\, f_n = -\int_{\Gamma_2} \alpha\,\overline{\phi}_k\, f\,.$$

Mit Hilfe von (1) folgt

$$
\text{(2)} \qquad \begin{aligned}
(\tfrac{\partial}{\partial n}\overline{\phi}_k)(f) &= \lim_{n\to\infty}\Big((\tfrac{\partial}{\partial n}\overline{\phi}_k)(\chi_{\Gamma_1} f_n) + (\tfrac{\partial}{\partial n}\overline{\phi}_k)(\chi_{\Gamma_2} f_n)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty}(\tfrac{\partial}{\partial n}\overline{\phi}_k)(\chi_{\Gamma_1} f_n) - \int_{\Gamma_2} \alpha\,\overline{\phi}_k\, f\,.
\end{aligned}
$$

Weiter folgt aus $\phi_k \in D(T)$, also $\phi_k|_{\Gamma_1} = 0$,

$$
\text{(3)} \qquad \int_{\partial\Omega} \overline{\phi}_k\, \tfrac{\partial}{\partial n} f \;=\; \int_{\Gamma_2} \overline{\phi}_k\, \tfrac{\partial}{\partial n} f\,.
$$

Subtrahieren wir (3) von (2), so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\ell_k(f) &= (\tfrac{\partial}{\partial n}\overline{\phi}_k)(f) - \int_{\partial\Omega}\overline{\phi}_k\,\tfrac{\partial}{\partial n} f \\
&= \lim_{n\to\infty}(\tfrac{\partial}{\partial n}\overline{\phi}_k)(\chi_{\Gamma_1} f_n) - \int_{\Gamma_2}\alpha\,\overline{\phi}_k\, f - \int_{\Gamma_2}\overline{\phi}_k\,\tfrac{\partial}{\partial n} f \\
&= \lim_{n\to\infty}(\tfrac{\partial}{\partial n}\overline{\phi}_k)(\chi_{\Gamma_1} f_n) - \int_{\Gamma_2}(\tfrac{\partial}{\partial n}+\alpha) f\cdot\overline{\phi}_k\,.
\end{aligned}
$$

■

In Kapitel 7 benötigen wir für festes $k \in I\!N$ eine Aussage über das Wachstumsverhalten der Zahlen $\ell_k(f_r)$ und $\ell_k(g_r)$ für $r \to \infty$, wobei f_r und g_r die in (3.14) (siehe Seite 26) erklärten Funktionen seien. Der Einfachheit halber betrachten wir zunächst den Fall Dirichletscher Randbedingungen ($\Gamma_1 = \partial\Omega$, $\Gamma_2 = \emptyset$).

Proposition 5.6 *Seien $a \in \mathbb{C}^m$, $b \in S^{m-1}$ fest. Für $r > 0$ sei*

$$
h_r(x) := e^{(a-irb)\cdot x} \qquad (x \in \overline{\Omega})\,.^{11}
$$

Ist $\Gamma_2 = \emptyset$, so gilt für alle $k \in I\!N$

$$
\ell_k(h_r) = o(r) \qquad (r \to \infty)\,.
$$

Beweis. Sei $k \in I\!N$ fest. Da Ω beschränkt ist, folgt aus $\Delta\overline{\phi}_k \in L^1(\Omega)$ bzw. $\nabla\overline{\phi}_k \in [L^2(\Omega)]^m$, daß $\chi_\Omega\, e^{a\cdot x}\Delta\overline{\phi}_k \in L^1(I\!R^m)$ und $\chi_\Omega\, e^{a\cdot x} D_j\,\overline{\phi}_k \in L^1(I\!R^m)$ ($j \in \{1,\dots,m\}$) gilt. Von den letzteren Funktionen unterscheiden wir deren Fouriertransformierte, indem wir die entsprechenden Funktionennamen jeweils mit dem Symbol „ ^ “ kennzeichnen. Dann gilt für $r > 0$

$$
\ell_k(h_r) = (\tfrac{\partial}{\partial n}\overline{\phi}_k)(h_r) =
$$

[11] Bei geeigneter Wahl von a, b gilt $h_r = f_r$ $(r > 0)$ bzw. $h_r = g_r$ $(r > 0)$ (siehe Seite 26).

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega (\Delta\overline{\phi}_k(x)\cdot e^{(a-irb)\cdot x} + \nabla\,\overline{\phi}_k(x)\cdot\nabla e^{(a-irb)\cdot x})dx \\
(4)\qquad &= \int_{I\!R^m} e^{-irb\cdot x}\,[\chi_\Omega(x)\,e^{a\cdot x}\Delta\overline{\phi}_k(x)]dx \\
&\quad + \sum_{j=1}^m (a_j - irb_j)\int_{I\!R^m} e^{-irb\cdot x}\,[\chi_\Omega(x)\,e^{a\cdot x}\,D_j\overline{\phi}_k(x)]dx \\
&= (2\pi)^{\frac{m}{2}}(\chi_\Omega\,e^{a\cdot x}\Delta\overline{\phi}_k)\hat{}\,(rb) \\
&\quad + (2\pi)^{\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^m (a_j - irb_j)(\chi_\Omega\,e^{a\cdot x}\,D_j\overline{\phi}_k)\hat{}\,(rb)\,,
\end{aligned}
$$

Nach dem Satz von Riemann–Lebesgue gilt nun

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&(\chi_\Omega\,e^{a\cdot x}\Delta\overline{\phi}_k)\hat{}\,(rb) \;\to\; 0 \qquad (r\to\infty)\,, \\
&\sum_{j=1}^m (a_j - irb_j)(\chi_\Omega\,e^{a\cdot x}\,D_j\overline{\phi}_k)\hat{}\,(rb) \;=\; o(r) \qquad (r\to\infty)\,.
\end{aligned}
$$

Aus (4) und (5) folgt die Behauptung. ■

Ist $\Gamma_2 \neq \emptyset$, so können wir ein Proposition 5.6 entsprechendes Ergebnis nur für Vektoren $b \in S^{m-1}$ garantieren, die außerhalb einer speziellen Teilmenge von S^{m-1} liegen. Es wird sich zeigen, daß diese Ausnahmemenge von der Gestalt von $\partial\Omega$ abhängt. Wir benutzen im weiteren die folgende Vereinbarung:

Definition 5.7 *Zu gegebenem $x_0 \in \partial\Omega$ seien $U(x_0)$ eine (relativ) offene Umgebung von x_0 in $\partial\Omega$, $V(0)$ eine offene Nullumgebung in $I\!R^{m-1}$ und $\phi : V(0) \to U(x_0)$ eine C^2–Einbettung mit $U(x_0) = \phi(V(0))$, $x_0 = \phi(0)$.*
Dann ist $\partial\Omega$ vom Typ 2 in x_0, *wenn es zu jedem $\eta \in S^{m-1}$ einen Multiindex $\alpha \in I\!N_0^{m-1}$ mit $1 \leq |\alpha| \leq 2$ so gibt, daß*

$$
(6)\qquad D_y^\alpha[\phi(y)\cdot\eta]\,|_{y=0} \neq 0
$$

gilt. Ferner ist $\partial\Omega$ vom Typ 2, *wenn $\partial\Omega$ für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ vom Typ 2 in x_0 ist.* (Siehe z. B. [16, Seite 350/351].)

Ist $\partial\Omega$ vom Typ 2 in x_0, so können sich $\partial\Omega$ und eine beliebige Hyperebene in x_0 höchstens von erster Ordnung berühren. Weiter ist $\partial\Omega$ in den Punkten einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 ebenfalls vom Typ 2, denn sind $\eta \in S^{m-1}$ und $\alpha \in I\!N_0^{m-1}$, $1 \leq |\alpha| \leq 2$ mit (6), so gibt es eine Zahl $\delta > 0$ mit

$$
D_y^\alpha[\phi(y)\cdot\eta']\,|_{y=\phi^{-1}(x')} \neq 0 \qquad ((x',\eta') \in \partial\Omega\times I\!R^m,\ |(x',\eta') - (x_0,\eta)| < \delta)\,.
$$

Also ist die Teilmenge derjenigen Punkte von $\partial\Omega$, in denen $\partial\Omega$ vom Typ 2 ist, relativ offen in $\partial\Omega$. Ist hingegen $\partial\Omega$ nicht vom Typ 2 in x_0, so gibt es ein $\eta(x_0) \in S^{m-1}$ mit der Eigenschaft

$$D_y^\alpha [\phi(y) \cdot \eta(x_0)] \,|_{y=\phi^{-1}(x_0)} = 0 \qquad (1 \leq |\alpha| \leq 2). \tag{7}$$

Da $\{D_1\phi(y), \ldots, D_{m-1}\phi(y)\}|_{y=\phi^{-1}(x_0)}$ eine Basis des Tangentialraumes $T_{x_0}\partial\Omega$ an $\partial\Omega$ im Punkt x_0 ist, kann $\eta(x_0)$ die Gleichungen (7) nur dann erfüllen, wenn $\eta(x_0)$ orthogonal zu $T_{x_0}\partial\Omega$ ist. Die beiden Einheitsnormalenvektoren $\pm n(x_0)$ von $\partial\Omega$ in x_0 sind daher die einzigen Einheitsvektoren, die (7) erfüllen können.

Definition 5.8 *Wir setzen*

$$A \;:=\; \{\, \pm n(x) \,|\, x \in \partial\Omega,\ \partial\Omega \textit{ ist nicht vom Typ 2 in } x \} \,.$$

Wir werden im folgenden zeigen, daß unter allgemeinen Randbedingungen (also evtl. $\Gamma_2 \neq \emptyset$) die Aussage von Proposition 5.6 für beliebige Vektoren $a \in \mathbb{C}^m$ und $b \in S^{m-1} \setminus A$ gilt. Dabei greifen wir auf Ergebnisse aus dem Buch von E. M. Stein [16, VIII §1–§3] zurück. Nach [16, VIII–3, Theorem 2 (Seite 351)] gilt

Lemma 5.9 *Ist Γ_2 vom Typ 2, so gibt es zu jeder Funktion $\psi \in C_0^1(\Gamma_2)$ eine Zahl $C > 0$ mit*

$$\left| \int_{\Gamma_2} e^{-i\xi\cdot x} \psi(x)\, d\sigma(x) \right| \;\leq\; \frac{C}{|\xi|^{\frac{1}{2}}} \qquad (\xi \in \mathbb{R}^m,\ \xi \neq 0).$$

Unter Verwendung der zum Beweis von Lemma 5.9 in [16, VIII §1–§3] angegebenen Argumentation kann man nun folgendes zeigen:

Lemma 5.10 *Ist $b \in S^{m-1} \setminus A$, so gilt für jede Funktion $\psi \in C_0^1(\Gamma_2)$*

$$\int_{\Gamma_2} e^{-irb\cdot x} \psi(x)\, d\sigma(x) \;\to\; 0 \qquad (r \to \infty).$$

Lemma 5.10 gilt i. allg. nicht für beliebige Vektoren $b \in S^{m-1}$, denn gibt es einen Punkt $x_0 \in \Gamma_2$ und ein $\varepsilon > 0$ derart, daß

$$b \perp (x - x_0) \qquad (x \in \Gamma_2 \cap B_\varepsilon(x_0))\,,$$

also

$$e^{-irb\cdot x} \;=\; e^{-irb\cdot x_0} e^{-irb\cdot(x-x_0)} \;=\; e^{-irb\cdot x_0} \qquad (x \in \Gamma_2 \cap B_\varepsilon(x_0))\,,$$

gilt, so gilt für jede Funktion $\psi \in C_0^1(\Gamma_2)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subset B_\varepsilon(x_0)$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_2} e^{-irb\cdot x}\psi(x)\,d\sigma(x)\right| \;&=\; \left|\int_{\Gamma_2} e^{-irb\cdot x_0}\psi(x)\,d\sigma(x)\right| \;=\; \left|e^{-irb\cdot x_0}\int_{\Gamma_2}\psi\right| \\ &=\; \left|\int_{\Gamma_2}\psi\right| \qquad (r \in \mathbb{R})\,.\end{aligned}$$

Ist überdies $\displaystyle\int_{\Gamma_2}\psi \neq 0$, so folgt

$$\int_{\Gamma_2} e^{-irb\cdot x}\psi(x)\,d\sigma(x) \;\neq\; o(1) \qquad (r \to \infty).$$

Lemma 5.11 *Seien $a \in \mathbb{C}^m$, $b \in S^{m-1} \setminus A$ fest. Dann gilt für $j \in \{1,\ldots,m\}$ und $k \in \mathbb{N}$*

$$\int_{\partial\Omega} e^{-irb\cdot x} n_j(x)\, e^{a\cdot x}\,\overline{\phi}_k(x)\,d\sigma(x) \;\to\; 0 \qquad (r \to \infty)\,.$$

Beweis. Seien a, b und j fest gewählt. Da Ω ein beschränktes C^2–Gebiet ist, können wir n_j als Funktion aus $C^1(\partial\Omega)$ zu einer Funktion aus $C_0^1(\mathbb{R}^m)$ fortsetzen, die wir ebenfalls mit n_j bezeichnen. Offenbar ist $n_j\, e^{a\cdot x}\,\overline{\phi}_k \in W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$, also gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\psi \in C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2)$ mit

$$\|n_j\, e^{a\cdot x}\,\overline{\phi}_k - \psi\|_{W^{1,2}(\Omega)} < \varepsilon\,.$$

Aufgrund der Stetigkeit des Spuroperators gilt dann mit einer von ψ unabhängigen Zahl $C_\gamma > 0$

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Gamma_2} e^{-irb\cdot x}[n_j(x)\, e^{a\cdot x}\,\overline{\phi}_k(x) - \psi(x)]\,d\sigma(x)\right| \\ &\qquad\leq\; \int_{\Gamma_2} |n_j(x)\, e^{a\cdot x}\,\overline{\phi}_k(x) - \psi(x)|\,d\sigma(x) \;\leq\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|1\|_{L^2(\partial\Omega)} \|n_j\, e^{a\cdot x}\,\overline{\phi}_k - \psi\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\leq \|1\|_{L^2(\partial\Omega)} C_\gamma \|n_j\, e^{a\cdot x}\,\overline{\phi}_k - \psi\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\ &\leq \|1\|_{L^2(\partial\Omega)} C_\gamma\, \varepsilon \qquad (r \in \mathbb{R})\,. \end{aligned}$$

Wir können also zu beliebigem, fest gewähltem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2)$ so finden, daß

$$\left| \int_{\Gamma_2} e^{-irb\cdot x}[n_j(x) e^{a\cdot x}\,\overline{\phi}_k(x) - \psi_\varepsilon(x)]\, d\sigma(x) \right| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \qquad (r \in \mathbb{R})$$

gilt. Da $b \in S^{m-1} \setminus A$ ist, gibt es nach Lemma 5.10 eine Zahl $R_\varepsilon > 0$ mit

$$\left| \int_{\Gamma_2} e^{-irb\cdot x} \psi_\varepsilon(x)\, d\sigma(x) \right| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \qquad (r > R_\varepsilon)\,.$$

Wegen $\phi_k|_{\Gamma_1} = 0$ gilt damit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} e^{-irb\cdot x} n_j(x) e^{a\cdot x}\,\overline{\phi}_k(x)\, d\sigma(x) \right| \;&=\; \left| \int_{\Gamma_2} e^{-irb\cdot x} n_j(x) e^{a\cdot x}\,\overline{\phi}_k(x)\, d\sigma(x) \right| \\ &\leq\; \left| \int_{\Gamma_2} e^{-irb\cdot x}[n_j(x) e^{a\cdot x}\,\overline{\phi}_k(x) - \psi_\varepsilon(x)]\, d\sigma(x) \right| + \left| \int_{\Gamma_2} e^{-irb\cdot x} \psi_\varepsilon(x)\, d\sigma(x) \right| \\ &<\; \varepsilon \qquad (r > R_\varepsilon)\,. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. ■

Wir sind nun in der Lage, die angekündigte Verallgemeinerung von Proposition 5.6 zu beweisen.

Satz 5.12 *Seien* $a \in \mathbb{C}^m$, $b \in S^{m-1} \setminus A$ *fest. Für* $r > 0$ *sei*

$$h_r(x) \;:=\; e^{(a-irb)\cdot x} \qquad (x \in \overline{\Omega})\,.$$

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\ell_k(h_r) \;=\; o(r) \qquad (r \to \infty)\,.$$

Beweis. Unter Verwendung von (4) erhalten wir für $r > 0$

$$\ell_k(h_r) \;=\; (\tfrac{\partial}{\partial n}\,\overline{\phi}_k)(h_r) - \int_{\partial\Omega} \overline{\phi}_k\, \tfrac{\partial}{\partial n}\, h_r \;=$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{\frac{m}{2}} (\chi_\Omega\, e^{a\cdot x} \Delta \overline{\phi}_k)\widehat{\ }\,(rb) \\
(8) \qquad &+ (2\pi)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{m} (a_j - irb_j)(\chi_\Omega\, e^{a\cdot x}\, D_j \overline{\phi}_k)\widehat{\ }\,(rb) \\
&- \sum_{j=1}^{m} (a_j - irb_j) \int_{\partial\Omega} e^{-irb\cdot x} n_j(x) e^{a\cdot x}\, \overline{\phi}_k(x)\, d\sigma(x)\,.
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite von (8) strebt der erste Term nach Proposition 5.6 (vgl. den Beweis), der zweite Term nach Lemma 5.11 gegen Null für $r \to \infty$. Damit ist alles bewiesen. ∎

Nachdem wir das gewünschte Verhalten von $\ell_k(h_r)$ für $r \to \infty$ nur für Vektoren $b \in S^{m-1} \setminus A$ garantieren können, stellt sich die Frage nach der „Größe“ der Ausnahmemenge A. Eine für unsere Zwecke ausreichende Antwort auf diese Frage gibt das folgende

Lemma 5.13 *Die Menge A liegt nirgends dicht in S^{m-1}.*

Beweis. Siehe Lemma A.2. ∎

6 Definition und Untersuchung einer kanonischen Sesquilinearform

Zur Erschließung der Eindeutigkeitsaussagen in Kapitel 7 ist es nützlich, mit Hilfe der Lösung des gemischten Randproblems (4.1)/(4.2) eine kanonische Sesquilinearform einzuführen. Diese Form werden wir genauer untersuchen, indem wir die Entwicklung der betreffenden Lösung nach der in Kapitel 5 gewählten Orthonormalbasis (ϕ_k) von $L^2(\Omega)$ relativ zur Eigenwertfolge (μ_k) gemäß Satz 3.9 verwenden.

Definition 6.1 *Für $z \in \varrho(T)$ definieren wir die Sesquilinearform*

$$S_z(f,g) := \left(\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z}\right)(\overline{g}) - \int_{\partial\Omega} u_{f,z}\, \tfrac{\partial}{\partial n}\overline{g} \qquad (f,g \in C^2(\overline{\Omega}))\,.$$

Nach der zweiten Greenschen Formel gilt für $z \in \varrho(T)$ und $f,\ g \in C^2(\overline{\Omega})$

$$(1)\qquad \begin{aligned} S_z(f,g) &= \int_\Omega (\Delta u_{f,z} \cdot \overline{g} + \nabla u_{f,z} \cdot \overline{\nabla g}) - \int_\Omega (u_{f,z}\,\overline{\Delta g} + \nabla u_{f,z} \cdot \overline{\nabla g}) \\ &= \int_\Omega (\Delta u_{f,z} \cdot \overline{g} - u_{f,z}\,\overline{\Delta g})\,. \end{aligned}$$

Lemma 6.2 *Für $z \in \varrho(T)$ und $f,\ g \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt*

$$\begin{aligned} S_z(f,g) &= \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z}\right)(\chi_{\Gamma_1}\overline{g_n}) - \int_{\Gamma_2} u_{f,z}\,\overline{\left(\tfrac{\partial}{\partial n} + \alpha\right) g} \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} f\,\overline{\tfrac{\partial}{\partial n} g} + \int_{\Gamma_2} \left(\tfrac{\partial}{\partial n} + \alpha\right) f \cdot \overline{g}\,, \end{aligned}$$

wobei (g_n) eine beliebige Folge in $C_0^1(\Omega \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ mit $\|g_n|_{\partial\Omega} - g|_{\partial\Omega}\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \to 0$ $(n \to \infty)$ sei.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem von Lemma 5.5. Da $u_{f,z}$ die eindeutig bestimmte Lösung von (4.1)/(4.2) ist, gilt

$$(2)\qquad u_{f,z}|_{\Gamma_1} = f|_{\Gamma_1}\,, \quad \left(\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z} + \alpha u_{f,z}\right)|_{\Gamma_2} = \left(\tfrac{\partial}{\partial n} f + \alpha f\right)|_{\Gamma_2}\,.$$

Ist nun (g_n) eine Folge mit den in der Voraussetzung angegebenen Eigenschaften, so folgt also

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z}\right)(\chi_{\Gamma_2}\overline{g_n}) = \left(\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z} + \alpha u_{f,z}\right)(\chi_{\Gamma_2}\overline{g_n}) - \int_{\Gamma_2} \alpha u_{f,z}\,\overline{g_n} =$$

$$\begin{aligned} &= \left(\tfrac{\partial}{\partial n} f + \alpha f\right)(\chi_{\Gamma_2} \overline{g_n}) - \int_{\Gamma_2} \alpha u_{f,z} \overline{g_n} \\ &= \int_{\Gamma_2} \left(\tfrac{\partial}{\partial n} + \alpha\right) f \cdot \overline{g_n} - \int_{\Gamma_2} \alpha u_{f,z} \overline{g_n} \qquad (n \in I\!N)\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter

$$\lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z}\right)(\chi_{\Gamma_2} \overline{g_n}) \;=\; \int_{\Gamma_2} \left(\tfrac{\partial}{\partial n} + \alpha\right) f \cdot \overline{g} - \int_{\Gamma_2} \alpha u_{f,z} \overline{g}\,,$$

mithin

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z}\right)(\overline{g}) &= \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z}\right)(\chi_{\Gamma_1} \overline{g_n}) + \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z}\right)(\chi_{\Gamma_2} \overline{g_n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z}\right)(\chi_{\Gamma_1} \overline{g_n}) + \int_{\Gamma_2} \left(\tfrac{\partial}{\partial n} + \alpha\right) f \cdot \overline{g} - \int_{\Gamma_2} \alpha u_{f,z} \overline{g}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Beachten wir die Zerlegung $\gamma u_{f,z} \;=\; \chi_{\Gamma_1} \gamma u_{f,z} + \chi_{\Gamma_2} \gamma u_{f,z}$ und (2), so erhalten wir mit Hilfe von (3)

$$\begin{aligned} S_z(f,g) &\underset{(2)}{=} \left(\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z}\right)(\overline{g}) - \int_{\Gamma_1} f \, \overline{\tfrac{\partial}{\partial n} g} - \int_{\Gamma_2} u_{f,z} \overline{\tfrac{\partial}{\partial n} g} \\ &\underset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z}\right)(\chi_{\Gamma_1} \overline{g_n}) + \int_{\Gamma_2} \left(\tfrac{\partial}{\partial n} + \alpha\right) f \cdot \overline{g} - \int_{\Gamma_2} \alpha u_{f,z} \overline{g} \\ &\quad - \int_{\Gamma_1} f \, \overline{\tfrac{\partial}{\partial n} g} - \int_{\Gamma_2} u_{f,z} \overline{\tfrac{\partial}{\partial n} g}\,. \end{aligned}$$

Durch Umstellen der rechten Seite erhalten wir die gewünschte Darstellung. ∎

Satz 6.3 *Für $z \in \varrho(T)$ und $f,\, g \in C^2(\overline{\Omega})$ gilt*

$$S_z(f,g) \;=\; -\sum_{k=1}^{\infty} \ell_k(f) \left[\langle \phi_k, g \rangle - \frac{\overline{\ell_k(g)}}{z - \mu_k} \right].$$

Beweis. Seien $z \in \varrho(T)$ und $f,\, g \in C^2(\overline{\Omega})$. Da $\Delta u_{f,z} = (q-z) u_{f,z}$ ist, folgt aus Satz 5.3

$$\begin{aligned} S_z(f,g) &= \int_\Omega \left(\Delta u_{f,z} \cdot \overline{g} - u_{f,z} \Delta \overline{g}\right) \\ &= \int_\Omega \left((q-z) u_{f,z} \overline{g} - u_{f,z} \Delta \overline{g}\right) \\ &= \langle u_{f,z}, (-\Delta + q - \overline{z}) g \rangle \;= \end{aligned} \tag{4}$$

$$\underset{5.3}{=} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ell_k(f)}{z-\mu_k} \, \langle \phi_k, (-\Delta + q - \overline{z}\,)g \rangle \, .$$

Nach Bemerkung 5.2 gilt für $k \in I\!N$

$$\begin{aligned} \langle \phi_k, (-\Delta + q - \overline{z}\,)g \rangle \quad &= \quad \langle \phi_k, (-\Delta + q - \mu_k)g \rangle + (\mu_k - z)\langle \phi_k, g \rangle \\ &= \quad \overline{\langle (-\Delta + q - \mu_k)g, \phi_k \rangle} + (\mu_k - z)\langle \phi_k, g \rangle \\ &\underset{5.2}{=} \quad \overline{\ell_k(g)} + (\mu_k - z)\langle \phi_k, g \rangle \, , \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} \frac{\ell_k(f)}{z-\mu_k} \, \langle \phi_k, (-\Delta + q - \overline{z}\,)g \rangle \quad &= \quad \frac{\ell_k(f)}{z-\mu_k} \left[\overline{\ell_k(g)} + (\mu_k - z)\langle \phi_k, g \rangle \right] \\ &= \quad -\, \ell_k(f) \Big[\langle \phi_k, g \rangle - \frac{\overline{\ell_k(g)}}{z-\mu_k} \Big] \, . \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (4) erhalten wir die Behauptung. ∎

Lemma 6.4 *Seien* ξ, $\nu \in I\!R^m$ *mit* $|\nu| = 1$ *und* $\nu \cdot \xi = 0$ *fest gewählt. Für* $r > 0$ *seien*

$$\zeta(r) \; := \; \nu - i(r\nu + \tfrac{1}{2}\,\xi) \, , \quad \eta(r) \; := \; \nu + i(r\nu - \tfrac{1}{2}\,\xi) \, ,$$

$$z_r \; := \; r^2 + \tfrac{1}{4}\,|\xi|^2 - 1 + 2i\,r$$

und

$$f_r(x) \; := \; e^{\zeta(r)\cdot x} \, , \quad g_r(x) \; := \; e^{-\eta(r)\cdot x} \qquad (x \in \overline{\Omega}\,) \, .$$

Dann gilt für alle $r > 0$

$$S_{z_r}(f_r, g_r) \; = \; \int_\Omega e^{-i\xi\cdot x} q(x)\, dx \; + \; \langle R(z_r, T)(qf_r), qg_r \rangle \, .$$

Beweis. Seien zunächst $z \in \varrho(T)$ und f, $g \in C^2(\,\overline{\Omega}\,)$ mit

$$(5) \quad (\Delta + z)f \; = \; 0 \qquad \text{und} \qquad (6) \quad (\Delta + z)g \; = \; 0.$$

Dann gilt

$$qf\,\overline{g} \quad = \quad q(u_{f,z} - R(z,T)(-\Delta + q - z)f)\,\overline{g} \; =$$

$$
\begin{aligned}
&\underset{(5)}{=} \quad q u_{f,z} \cdot \overline{g} \;-\; R(z,T)(qf) \cdot q\,\overline{g} \\
&= \quad (\Delta + z) u_{f,z} \cdot \overline{g} \;-\; R(z,T)(qf) \cdot \overline{qg} \\
&\underset{(6)}{=} \quad (\Delta u_{f,z} \cdot \overline{g} - u_{f,z}\, \overline{\Delta g}\,) - R(z,T)(qf) \cdot \overline{qg}\,.
\end{aligned}
$$

Integration über Ω führt mit (1) zu

$$
(7) \qquad \int_\Omega q f \,\overline{g} \;=\; S_z(f,g) - \langle R(z,T)(qf), qg \rangle\,.
$$

Sei nun $r > 0$ fest gewählt. Dann ist $\operatorname{Im} z_r > 0$, also $z_r \in \varrho(T)$, und für $z := z_r$, $\zeta := \zeta(r)$, $\eta := \eta(r)$ gilt wegen $|\nu| = 1$, $\nu \cdot \xi = 0$

$$
\begin{aligned}
\zeta^2 &= (\operatorname{Re}\zeta + i \operatorname{Im}\zeta) \cdot (\operatorname{Re}\zeta + i \operatorname{Im}\zeta) \\
&= |\operatorname{Re}\zeta|^2 - |\operatorname{Im}\zeta|^2 + 2i\,(\operatorname{Re}\zeta) \cdot (\operatorname{Im}\zeta) \\
&= |\nu|^2 - |r\nu + \tfrac{1}{2}\,\xi|^2 + 2i\,\nu \cdot (-r\nu - \tfrac{1}{2}\,\xi) \\
&= 1 - (r^2 + \tfrac{1}{4}\,|\xi|^2) - 2i\,r \;=\; -z \\
&= |\nu|^2 - |r\nu - \tfrac{1}{2}\,\xi|^2 - 2i\,\nu \cdot (r\nu - \tfrac{1}{2}\,\xi) \\
&= |\operatorname{Re}\eta|^2 - |\operatorname{Im}\eta|^2 - 2i\,(\operatorname{Re}\eta) \cdot (\operatorname{Im}\eta) \\
&= \overline{\eta}^{\,2}\,.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\left.
\begin{aligned}
(\Delta_x + z) f_r(x) &= (\Delta_x + z) e^{\zeta \cdot x} = (\zeta^2 + z) e^{\zeta \cdot x} = 0 \\
(\Delta_x + z)\, \overline{g_r(x)} &= (\Delta_x + z) e^{-\overline{\eta} \cdot x} = (\,\overline{\eta}^{\,2} + z) e^{-\overline{\eta} \cdot x} = 0
\end{aligned}
\right\} \qquad (x \in \overline{\Omega}\,)\,.
$$

Setzen wir in (7) $f = f_r$, $g = g_r$ und beachten wir $\zeta(r) - \overline{\eta(r)} \;=\; -i\xi$, so erhalten wir die Behauptung. ∎

7 Die Eindeutigkeitssätze

Im folgenden seien T_1 und T_2 Schrödingeroperatoren mit Potentialen q_1 bzw. q_2, die den gleichen Bedingungen wie das Potential q in Kapitel 1 – 6 genügen. Weiter seien $(\phi_k^{(1)})$ und $(\phi_k^{(2)})$ Orthonormalbasen von $L^2(\Omega)$ relativ zu den Eigenwertfolgen $(\mu_k^{(1)})$ bzw. $(\mu_k^{(2)})$ von T_1 bzw. T_2, wobei diese Folgen wie in Satz 3.9 gebildet seien.

Die Lösungen der zugehörigen Randprobleme gemäß Definition 4.1 (mit derselben Randfunktion α) bezeichnen wir für $f \in C^2(\overline{\Omega})$ und $z \in \varrho(T_1)$ bzw. $z \in \varrho(T_2)$ mit $u_{f,z}^{(1)}$ bzw. $u_{f,z}^{(2)}$. Die Symbole $S_z^{(1)}$, $S_z^{(2)}$ sind entsprechend zu verstehen.

Satz 7.1 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

A) Für $z \in \mathbb{C}$*,* $\arg z \in (0, \frac{\pi}{2})$ *gilt*

$$\left.\begin{array}{rcl} (\frac{\partial}{\partial n} u_{f,z}^{(1)})|_{\Gamma_1} & = & (\frac{\partial}{\partial n} u_{f,z}^{(2)})|_{\Gamma_1} \\ u_{f,z}^{(1)}|_{\Gamma_2} & = & u_{f,z}^{(2)}|_{\Gamma_2} \end{array}\right\} \qquad (f \in C^2(\overline{\Omega}))\,.$$

B) Für $z \in \mathbb{C}$*,* $\arg z \in (0, \frac{\pi}{2})$ *gilt* $S_z^{(1)} = S_z^{(2)}$.

C) Es gilt $q_1 = q_2$.

Beweis. A) $\Rightarrow$ B) Nach Lemma 6.2 gilt für $z \in \varrho(T_1) \cap \varrho(T_2)$ und $f,\, g \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\begin{aligned}\Big[S_z^{(1)} - S_z^{(2)}\Big](f,g) \;&=\; \lim_{n\to\infty} \Big[\tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z}^{(1)} - \tfrac{\partial}{\partial n} u_{f,z}^{(2)}\Big](\chi_{\Gamma_1}\,\overline{g_n}) \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} (u_{f,z}^{(1)} - u_{f,z}^{(2)})\overline{(\tfrac{\partial}{\partial n} + \alpha) g}\,,\end{aligned}$$

wobei (g_n) eine beliebige Folge gemäß Lemma 6.2 sei. Aufgrund der Voraussetzung folgt daraus die Behauptung.

B) $\Rightarrow$ C) Sei $\xi \in \mathbb{R}^m$ fest gewählt. Da $m \geq 2$ ist, gibt es einen Vektor $\nu \in S^{m-1}$ mit $\nu \cdot \xi = 0$. Wie schon in Satz 3.10 und Lemma 6.4 setzen wir für $r > 0$

$$\begin{aligned}\zeta(r) \;&:=\; \nu - i(r\nu + \tfrac{1}{2}\,\xi)\,, \quad \eta(r) \;:=\; \nu + i(r\nu - \tfrac{1}{2}\,\xi)\,, \\ z_r \;&:=\; r^2 + \tfrac{1}{4}\,|\xi|^2 - 1 + 2i\,r\end{aligned}$$

und

$$f_r(x) \;:=\; e^{\zeta(r)\cdot x}\,, \quad g_r(x) \;:=\; e^{-\eta(r)\cdot x} \qquad (x \in \overline{\Omega})\,.$$

Sei nun $r > 1$. Dann ist $\arg z_r \in (0, \frac{\pi}{2})$, also gilt nach Voraussetzung

$$S^{(1)}_{z_r}(f_r, g_r) \;=\; S^{(2)}_{z_r}(f_r, g_r)\,.$$

Nach Lemma 6.4 gilt somit

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{-i\xi\cdot x}(q_1 - q_2)(x)\,dx \;&=\; -\,\langle R(z_r, T_1)(q_1 f_r), q_1 g_r\,\rangle \\ &\quad\; + \langle R(z_r, T_2)(q_2 f_r), q_2 g_r\,\rangle\,.\end{aligned}$$

Aufgrund von Satz 3.10 gibt es daher eine Zahl $C > 0$ so, daß für $r > 1$

$$\left|\int_\Omega e^{-i\xi\cdot x}(q_1 - q_2)(x)\,dx\right| \;\leq\; \frac{C}{r}$$

gilt. Da wir r beliebig groß wählen können, folgt daraus

$$\int_\Omega e^{-i\xi\cdot x} q_1(x)\,dx \;=\; \int_\Omega e^{-i\xi\cdot x} q_2(x)\,dx\,.$$

Nun war $\xi \in I\!R^m$ beliebig gewählt. Wir haben also gezeigt, daß $\hat{q}_1 = \hat{q}_2$ gilt, wobei wir q_1 und q_2 als Funktionen aus $L^1(I\!R^m)$ auffassen, die auf Ω^c identisch Null sind. Aus der Injektivität der Fouriertransformation folgt $q_1 = q_2$.

C) $\Rightarrow$ A) Offensichtlich. ∎

Lemma 7.2 *Für $z \in \varrho(T_1) \cap \varrho(T_2)$ gilt*

$$\left[S^{(1)}_z - S^{(2)}_z\right](f, g) \;=\; \int_\Omega (q_1 - q_2)\, u^{(2)}_{f,z}\, \overline{u^{(1)}_{g,\overline{z}}} \qquad (f,\, g \in C^2(\,\overline{\Omega}\,))\,.$$

Beweis. Seien $z \in \varrho(T_1) \cap \varrho(T_2)$ und $f,\, g \in C^2(\,\overline{\Omega}\,)$. Wir setzen $u := u^{(1)}_{f,z} - u^{(2)}_{f,z}$ und $v := \overline{u^{(1)}_{g,\overline{z}} - g}$. Dann sind u und v Funktionen aus $W^{1,2}(\Omega)$ mit $u|_{\Gamma_1} = 0$ bzw. $v|_{\Gamma_1} = 0$, d. h. u und v liegen in $W^{1,2}_0(\Omega \cup \Gamma_2)$. Ferner besitzen u und v distributionelle (äußere) Normalenableitungen auf $\partial\Omega$, für die gilt:

$$(1) \qquad (\tfrac{\partial}{\partial n}\, u)|_{\Gamma_2} \;=\; -\alpha u|_{\Gamma_2}\,, \quad (\tfrac{\partial}{\partial n}\, v)|_{\Gamma_2} \;=\; -\alpha v|_{\Gamma_2}\,.$$

Aus

$$(2) \qquad \Delta u^{(j)}_{f,z} \;=\; (q_j - z)\, u^{(j)}_{f,z} \qquad (j \in \{1, 2\})$$

folgt

$$
\begin{aligned}
& (\Delta u^{(1)}_{f,z} \cdot \overline{g} - u^{(1)}_{f,z}\, \Delta\overline{g}\,) - (\,\Delta u^{(2)}_{f,z} \cdot \overline{g} - u^{(2)}_{f,z}\, \Delta\overline{g}\,) \;= \\
& \underset{(2)}{=} \quad ((q_1 - z)u^{(1)}_{f,z}\, \overline{g} - u^{(1)}_{f,z}\, \Delta\overline{g}\,) - ((q_2 - z)u^{(2)}_{f,z}\, \overline{g} - u^{(2)}_{f,z}\, \Delta\overline{g}\,) \\
(3) \qquad & = \quad u^{(1)}_{f,z}\, (-\Delta + q_1 - z\,)\,\overline{g} - u^{(2)}_{f,z}\, (-\Delta + q_2 - z\,)\,\overline{g} \\
& = \quad (u^{(1)}_{f,z} - u^{(2)}_{f,z})\, (-\Delta + q_1 - z\,)\,\overline{g} + u^{(2)}_{f,z}\, (q_1 - q_2)\,\overline{g} \\
& = \quad u\, \overline{(-\Delta + q_1 - \overline{z}\,)g} + u^{(2)}_{f,z}\, (q_1 - q_2)\,\overline{g}\,.
\end{aligned}
$$

Da $(-\Delta + q_1 - \overline{z}\,)u^{(1)}_{g,\overline{z}} = 0$ ist, gilt nach Definition von $v = \overline{u^{(1)}_{g,\overline{z}} - g}$

$$
(4) \qquad (-\Delta + q_1 - \overline{z}\,)g \;=\; (-\Delta + q_1 - \overline{z}\,)(u^{(1)}_{g,\overline{z}} - \overline{v}\,) \;=\; (\Delta - q_1 + \overline{z}\,)\,\overline{v}\,.
$$

Berücksichtigen wir (4) in (3), so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
& (\Delta u^{(1)}_{f,z} \cdot \overline{g} - u^{(1)}_{f,z}\, \Delta\,\overline{g}\,) - (\Delta u^{(2)}_{f,z} \cdot \overline{g} - u^{(2)}_{f,z}\, \Delta\overline{g}\,) \;= \\
(5) \qquad & = \; u\, \overline{(\Delta - q_1 + \overline{z}\,)\,\overline{v}} + u^{(2)}_{f,z}\, (q_1 - q_2)\,\overline{g} \\
& = \; u\,\Delta v - (q_1 - z)uv + u^{(2)}_{f,z}\, (q_1 - q_2)\overline{g}\,.
\end{aligned}
$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
-(q_1 - z)u \quad & = \quad -q_1(u^{(1)}_{f,z} - u^{(2)}_{f,z}) + z(u^{(1)}_{f,z} - u^{(2)}_{f,z}) \\
& \underset{(2)}{=} \quad -q_1 u^{(1)}_{f,z} + q_1 u^{(2)}_{f,z} + (-\Delta + q_1)u^{(1)}_{f,z} - (-\Delta + q_2)u^{(2)}_{f,z} \\
(6) \qquad & = \quad -\Delta(u^{(1)}_{f,z} - u^{(2)}_{f,z}) + (q_1 - q_2)u^{(2)}_{f,z} \\
& = \quad -\Delta u + (q_1 - q_2)u^{(2)}_{f,z}\,.
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen von (6) in (5) und Integration über Ω erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\Big[S^{(1)}_z - S^{(2)}_z\Big](f,g) \quad & = \quad \int_\Omega \Big[(\Delta u^{(1)}_{f,z} \cdot \overline{g} - u^{(1)}_{f,z}\, \Delta\overline{g}) - (\Delta u^{(2)}_{f,z} \cdot \overline{g} - u^{(2)}_{f,z}\, \Delta\overline{g})\Big] \\
& \underset{(5)}{=} \quad \int_\Omega (u\,\Delta v - (q_1 - z)uv) + \int_\Omega u^{(2)}_{f,z}\, (q_1 - q_2)\,\overline{g} \\
(7) \qquad & \underset{(6)}{=} \quad \int_\Omega (u\,\Delta v - \Delta u \cdot v + (q_1 - q_2)u^{(2)}_{f,z}\, v) \\
& \qquad + \int_\Omega (q_1 - q_2)u^{(2)}_{f,z}\,\overline{g} \\
& = \quad \int_\Omega (u\,\Delta v - \Delta u \cdot v) + \int_\Omega (q_1 - q_2)u^{(2)}_{f,z}\, (\,\overline{g} + v) \\
& = \quad (\tfrac{\partial}{\partial n}\, v)(u) - (\tfrac{\partial}{\partial n}\, u)(v) \;+\; \int_\Omega (q_1 - q_2)u^{(2)}_{f,z}\, \overline{u^{(1)}_{g,\overline{z}}}\,.
\end{aligned}
$$

Da u und v Funktionen aus $W_0^{1,2}(\Omega \cup \Gamma_2)$ sind, gibt es Folgen (u_n) und (v_n) in $C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2)$, die in $W^{1,2}(\Omega)$ gegen u bzw. v konvergieren. Offenbar gilt

$$u_n|_{\partial\Omega} \in C^1(\partial\Omega), \quad \operatorname{supp}(u_n|_{\partial\Omega}) \subset \Gamma_2 \qquad (n \in I\!N)$$

und $\|\gamma u - u_n|_{\partial\Omega}\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \to 0 \quad (n \to \infty)$. Entsprechendes gilt für (v_n) und v. Mit (1) folgt daraus

$$\tag{8} \begin{aligned} (\tfrac{\partial}{\partial n}\, v)(u) - (\tfrac{\partial}{\partial n}\, u)(v) &= \lim_{n\to\infty} \Big[(\tfrac{\partial}{\partial n}\, v)(u_n) - (\tfrac{\partial}{\partial n}\, u)(v_n) \Big] \\ &\underset{(1)}{=} -\lim_{n\to\infty} \Big[\int_{\Gamma_2} \alpha u_n v - \int_{\Gamma_2} \alpha u v_n \Big] \\ &= -\int_{\Gamma_2} \alpha u v + \int_{\Gamma_2} \alpha u v \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus (8) und (7) folgt die Behauptung. ■

Lemma 7.3 *Sind $f,\, g \in C^2(\,\overline{\Omega}\,)$ fest gewählt, so gilt*

$$\tag{9} \Big[S_z^{(1)} - S_z^{(2)} \Big](f,g) \to 0 \qquad (I\!R \ni z \to -\infty)\,.$$

Beweis. Wir setzen o. B. d. A. voraus, daß $f,\, g \in C^2(\,\overline{\Omega}\,)$ fest gewählte reellwertige Funktionen sind. Ist die Aussage (9) für reellwertige Funktionen bewiesen, so verifiziert man die entsprechende Aussage für komplexwertige Funktionen, indem man letztere in Real– und Imaginärteil zerlegt und die Sesquilinearität der Form $S_z^{(1)} - S_z^{(2)}$ verwendet.

Im folgenden bezeichnen wir für reellwertiges $h \in C^2(\,\overline{\Omega}\,)$ und $z \in \varrho(T_j) \cap I\!R$ mit $\tilde{u}_{h,z}^{(j)}$ die gemäß (4.8) eingeführten Hilfsfunktionen relativ zu $q_j \quad (j \in \{1,2\})$. Wir setzen ferner $q := q_1 - q_2$

Dann gilt nach Lemma 7.2 für jedes $z \in \varrho(T_1) \cap \varrho(T_2) \cap I\!R$

$$\tag{10} \begin{aligned} \Big| \Big[S_z^{(1)} - S_z^{(2)} \Big](f,g) \Big| &= \Big| \int_\Omega q\, u_{f,z}^{(2)}\, \overline{u_{g,z}^{(1)}} \Big| \\ &\le \Big| \int_\Omega q\, (u_{f,z}^{(2)} - \tilde{u}_{f,z}^{(2)})\, \overline{(u_{g,z}^{(1)} - \tilde{u}_{g,z}^{(1)})} \Big| \\ &\quad + \Big| \int_\Omega q\, \tilde{u}_{f,z}^{(2)}\, \overline{(u_{g,z}^{(1)} - \tilde{u}_{g,z}^{(1)})} \Big| + \Big| \int_\Omega q\, u_{f,z}^{(2)}\, \overline{\tilde{u}_{g,z}^{(1)}} \Big|\,. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß die drei Terme der rechten Seite von (10) für $z \to \infty$ in $I\!R$ gegen Null konvergieren.

Seien gemäß Lemma 4.5 $K > 0$ und $z_0 < 0$ Zahlen mit

$$
(11) \qquad \begin{aligned}
\|\nabla(u_{f,z}^{(2)} - \tilde{u}_{f,z}^{(2)})\|_{L^2(\Omega)} \;&\leq\; \sqrt{K} \qquad (z < z_0)\,,\\
\|\nabla(u_{g,z}^{(1)} - \tilde{u}_{g,z}^{(1)})\|_{L^2(\Omega)} \;&\leq\; \sqrt{K} \qquad (z < z_0)\,.
\end{aligned}
$$

Nach der Cauchyschen Ungleichung, Bemerkung 1.1 und (11) gibt es zu jedem $\delta > 0$ eine Zahl $C_\delta > 0$ derart, daß für $z < z_0$ gilt:

$$
(12) \qquad \begin{aligned}
&\left|\int_\Omega q\,(u_{f,z}^{(2)} - \tilde{u}_{f,z}^{(2)})\,\overline{(u_{g,z}^{(1)} - \tilde{u}_{g,z}^{(1)})}\right| \;\leq\\
&\leq \quad \int_\Omega \frac{|q|}{2}\Big(|u_{f,z}^{(2)} - \tilde{u}_{f,z}^{(2)}|^2 + |u_{g,z}^{(1)} - \tilde{u}_{g,z}^{(1)}|^2\Big)\\
&\underset{1.1}{\leq} \quad \frac{\delta}{2}\Big(\|\nabla(u_{f,z}^{(2)} - \tilde{u}_{f,z}^{(2)})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(u_{g,z}^{(1)} - \tilde{u}_{g,z}^{(1)})\|_{L^2(\Omega)}^2\Big)\\
&\qquad + \frac{C_\delta}{2}\Big(\|u_{f,z}^{(2)} - \tilde{u}_{f,z}^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{g,z}^{(1)} - \tilde{u}_{g,z}^{(1)}\|_{L^2(\Omega)}^2\Big)\\
&\underset{(11)}{\leq} \quad K\delta + C_\delta\Big(\|u_{f,z}^{(2)} - \tilde{u}_{f,z}^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{g,z}^{(1)} - \tilde{u}_{g,z}^{(1)}\|_{L^2(\Omega)}^2\Big)\,.
\end{aligned}
$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Aufgrund der vorstehenden Aussage (12) wählen wir eine Zahl C_ε mit der Eigenschaft, daß für $z < z_0$

$$
(13) \qquad \begin{aligned}
&\left|\int_\Omega q\,(u_{f,z}^{(2)} - \tilde{u}_{f,z}^{(2)})\,\overline{(u_{g,z}^{(1)} - \tilde{u}_{g,z}^{(1)})}\right| \;\leq\\
&\qquad \leq\; \frac{\varepsilon}{2} + C_\varepsilon\Big(\|u_{f,z}^{(2)} - \tilde{u}_{f,z}^{(2)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{g,z}^{(1)} - \tilde{u}_{g,z}^{(1)}\|_{L^2(\Omega)}^2\Big)
\end{aligned}
$$

gilt. Nach Lemma 4.5 gilt weiter

$$
(14) \qquad \begin{aligned}
\|u_{f,z}^{(2)} - \tilde{u}_{f,z}^{(2)}\|_{L^2(\Omega)} \;&\to\; 0 \qquad (I\!R \ni z \to -\infty)\,,\\
\|u_{g,z}^{(1)} - \tilde{u}_{g,z}^{(1)}\|_{L^2(\Omega)} \;&\to\; 0 \qquad (I\!R \ni z \to -\infty)\,.
\end{aligned}
$$

Aus (13) und (14) folgt sofort, daß es eine Zahl $z_1 < z_0$ mit

$$
\left|\int_\Omega q\,(u_{f,z}^{(2)} - \tilde{u}_{f,z}^{(2)})\,\overline{(u_{g,z}^{(1)} - \tilde{u}_{g,z}^{(1)})}\right| \;\leq\; \varepsilon \qquad (z < z_1)
$$

gibt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, gilt somit

$$
(15) \qquad \left|\int_\Omega q\,(u_{f,z}^{(2)} - \tilde{u}_{f,z}^{(2)})\,\overline{(u_{g,z}^{(1)} - \tilde{u}_{g,z}^{(1)})}\right| \;\to\; 0 \qquad (I\!R \ni z \to -\infty)\,.
$$

Weiter erhalten wir unter Verwendung von Lemma 4.5 für jedes $z \in \varrho(T_1) \cap \varrho(T_2) \cap I\!R$

$$\left| \int_\Omega q\, \tilde{u}^{(2)}_{f,z}\, \overline{(u^{(1)}_{g,z} - \tilde{u}^{(1)}_{g,z})} \right| \;\leq\; \|q\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|u^{(1)}_{g,z} - \tilde{u}^{(1)}_{g,z}\|_{L^2(\Omega)}\,, \tag{16}$$

$$\left| \int_\Omega q\, u^{(2)}_{f,z}\, \overline{\tilde{u}^{(1)}_{g,z}} \right| \;\leq\; \|q\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \|u^{(2)}_{f,z}\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{17}$$

Mit (14) und Lemma 4.4 schließen wir aus (16) und (17)

$$\left| \int_\Omega q\, \tilde{u}^{(2)}_{f,z}\, \overline{(u^{(1)}_{g,z} - \tilde{u}^{(1)}_{g,z})} \right| \;\to\; 0 \qquad (I\!R \ni z \to -\infty)\,, \tag{18}$$

$$\left| \int_\Omega q\, u^{(2)}_{f,z}\, \overline{\tilde{u}^{(1)}_{g,z}} \right| \;\to\; 0 \qquad (I\!R \ni z \to -\infty)\,. \tag{19}$$

Aus (10) und (15), (18), (19) folgt die Behauptung. ∎

Lemma 7.4 *Unter der Voraussetzung*

$$\mu^{(1)}_k \;=\; \mu^{(2)}_k\,, \quad \left(\tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi^{(1)}_k\right)|_{\Gamma_1} \;=\; \left(\tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi^{(2)}_k\right)|_{\Gamma_1}\,, \quad \phi^{(1)}_k|_{\Gamma_2} \;=\; \phi^{(2)}_k|_{\Gamma_2} \qquad (k \in I\!N)$$ [12]

gilt mit $\varrho := \varrho(T_1) = \varrho(T_2)$ *für* $z \in \varrho$

$$\left[S^{(1)}_z - S^{(2)}_z\right](f,g) \;=\; -\sum_{k=1}^{\infty} \ell^{(1)}_k(f)\left[\langle \phi^{(1)}_k, g\rangle - \langle \phi^{(2)}_k, g\rangle\right] \qquad (f,\, g \in C^2(\overline{\Omega}\,))\,.$$

Insbesondere ist dann $S^{(1)}_z - S^{(2)}_z$ *unabhängig von* $z \in \varrho$.

Beweis. Seien $f,\, g \in C^2(\overline{\Omega}\,)$ fest gewählt. Unter obiger Voraussetzung gilt nach Satz 6.3 für $z \in \varrho$

$$\begin{aligned}
&\left[S^{(1)}_z - S^{(2)}_z\right](f,g) = \\
&\quad = -\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \ell^{(1)}_k(f)\left[\langle \phi^{(1)}_k, g\rangle - \frac{\overline{\ell^{(1)}_k(g)}}{z-\mu^{(1)}_k}\right] - \ell^{(2)}_k(f)\left[\langle \phi^{(2)}_k, g\rangle - \frac{\overline{\ell^{(2)}_k(g)}}{z-\mu^{(2)}_k}\right] \right\} \\
&\quad = -\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\ell^{(1)}_k(f)\,\langle \phi^{(1)}_k, g\rangle - \ell^{(2)}_k(f)\,\langle \phi^{(2)}_k, g\rangle\right] \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{\ell^{(1)}_k(f)\,\overline{\ell^{(1)}_k(g)} - \ell^{(2)}_k(f)\,\overline{\ell^{(2)}_k(g)}}{z-\mu^{(1)}_k} \right\}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Da aus $\left(\tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi^{(1)}_k\right)|_{\Gamma_1} = \left(\tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi^{(2)}_k\right)|_{\Gamma_1}$ $(k \in I\!N)$ und $\phi^{(1)}_k|_{\Gamma_2} = \phi^{(2)}_k|_{\Gamma_2}$ $(k \in I\!N)$ mit Lemma 5.5

$$\ell^{(1)}_k(f) \;=\; \ell^{(2)}_k(f)\,, \quad \ell^{(1)}_k(g) \;=\; \ell^{(2)}_k(g) \qquad (k \in I\!N) \tag{21}$$

[12] Bzgl. $(\mu^{(j)}_k)$ und $(\phi^{(j)}_k)$ $(j \in \{1,2\})$ vgl. Seite 47.

folgt, gilt für $z \in \varrho$

$$\frac{\ell_k^{(1)}(f)\,\overline{\ell_k^{(1)}(g)} - \ell_k^{(2)}(f)\,\overline{\ell_k^{(2)}(g)}}{z-\mu_k^{(1)}} = 0 \qquad (k \in I\!N)\,. \tag{22}$$

Durch Einsetzen von (21) und (22) in (20) erhalten wir die Behauptung. ■

Satz 7.5 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

A) $\mu_k^{(1)} = \mu_k^{(2)}\,, \quad (\frac{\partial}{\partial n}\phi_k^{(1)})|_{\Gamma_1} = (\frac{\partial}{\partial n}\phi_k^{(2)})|_{\Gamma_1}\,, \quad \phi_k^{(1)}|_{\Gamma_2} = \phi_k^{(2)}|_{\Gamma_2} \qquad (k \in I\!N)\,;$

B) $q_1 = q_2$.

Beweis. A) $\Rightarrow$ B) Seien $f,\, g \in C^2(\overline{\Omega})$ fest gewählt. Nach Lemma 7.3 gilt

$$\Big[S_z^{(1)} - S_z^{(2)}\Big](f,g) \to 0 \qquad (I\!R \ni z \to -\infty)\,.$$

Nach Lemma 7.4 ist $\Big[S_z^{(1)} - S_z^{(2)}\Big](f,g)$ unter den Voraussetzungen A) jedoch unabhängig von z. Daraus folgt

$$\Big[S_z^{(1)} - S_z^{(2)}\Big](f,g) = 0 \qquad (z \in \varrho(T_1) \cap \varrho(T_2))\,.$$

Also ist die Bedingung B) von Satz 7.1 erfüllt, woraus die Behauptung folgt.
B) $\Rightarrow$ A) Offensichtlich. ■

Es sei darauf hingewiesen, daß $\sigma(T_1) = \sigma(T_2)$ u. U. keine zu $(\mu_k^{(1)}) = (\mu_k^{(2)})$ äquivalente Bedingung ist, da die Eigenwerte eines Schrödingeroperators i. allg. nicht einfach sind.
Im folgenden werden wir die Voraussetzung von Satz 7.5 abschwächen.

Lemma 7.6 *Seien $k_1,\, k_2 \in I\!N_0$ Zahlen mit folgenden Eigenschaften:*

$$\mu_{k_1+k}^{(1)} = \mu_{k_2+k}^{(2)} \qquad (k \in I\!N)\,,$$

$$(\tfrac{\partial}{\partial n}\phi_{k_1+k}^{(1)})|_{\Gamma_1} = (\tfrac{\partial}{\partial n}\phi_{k_2+k}^{(2)})|_{\Gamma_1}\,, \quad \phi_{k_1+k}^{(1)}|_{\Gamma_2} = \phi_{k_2+k}^{(2)}|_{\Gamma_2} \qquad (k \in I\!N)\,.$$

Dann gilt für $z \in \varrho(T_1) \cap \varrho(T_2)$

$$\Big[S_z^{(1)} - S_z^{(2)}\Big](f,g) = \sum_{k=1}^{k_1} \frac{\ell_k^{(1)}(f)\,\overline{\ell_k^{(1)}(g)}}{z-\mu_k^{(1)}} - \sum_{k=1}^{k_2} \frac{\ell_k^{(2)}(f)\,\overline{\ell_k^{(2)}(g)}}{z-\mu_k^{(2)}} \qquad (f,\, g \in C^2(\overline{\Omega}))\,.$$

Beweis. Seien $f,\, g \in C^2(\,\overline{\Omega}\,)$ fest gewählt. Die zur Herleitung von (22) verwendete Argumentation führt unter den gegebenen Voraussetzungen zu

$$\ell^{(1)}_{k_1+k}(f) \;=\; \ell^{(2)}_{k_1+k}(f)\,, \quad \ell^{(1)}_{k_1+k}(g) \;=\; \ell^{(2)}_{k_1+k}(g) \qquad (k \in I\!N)\,.$$

Folglich gilt für $z \in \varrho(T_1) \cap \varrho(T_2)$

$$\frac{\ell^{(1)}_{k_1+k}(f)\,\overline{\ell^{(1)}_{k_1+k}(g)}}{z-\mu^{(1)}_{k_1+k}} \;=\; \frac{\ell^{(2)}_{k_2+k}(f)\,\overline{\ell^{(2)}_{k_2+k}(g)}}{z-\mu^{(2)}_{k_2+k}} \qquad (k \in I\!N)\,.$$

Nach Satz 6.3 gilt somit für $z \in \varrho(T_1) \cap \varrho(T_2)$

$$\begin{aligned}
&\Big[S^{(1)}_z - S^{(2)}_z\Big](f,g) \;= \\
&\quad=\; -\sum_{k=1}^{\infty} \ell^{(1)}_k(f)\Bigg[\langle \phi^{(1)}_k, g\rangle - \frac{\overline{\ell^{(1)}_k(g)}}{z-\mu^{(1)}_k}\Bigg] + \sum_{k=1}^{\infty} \ell^{(2)}_k(f)\Bigg[\langle \phi^{(2)}_k, g\rangle - \frac{\overline{\ell^{(2)}_k(g)}}{z-\mu^{(2)}_k}\Bigg] \\
&\quad=\; -\sum_{k=1}^{k_1} \ell^{(1)}_k(f)\Bigg[\langle \phi^{(1)}_k, g\rangle - \frac{\overline{\ell^{(1)}_k(g)}}{z-\mu^{(1)}_k}\Bigg] + \sum_{k=1}^{k_2} \ell^{(2)}_k(f)\Bigg[\langle \phi^{(2)}_k, g\rangle - \frac{\overline{\ell^{(2)}_k(g)}}{z-\mu^{(2)}_k}\Bigg] \\
&\qquad -\sum_{k=1}^{\infty} \Bigg\{\Big[\ell^{(1)}_{k_1+k}(f)\langle \phi^{(1)}_{k_1+k}, g\rangle - \ell^{(2)}_{k_2+k}(f)\langle \phi^{(2)}_{k_2+k}, g\rangle\Big] \\
&\qquad\qquad - \Bigg[\frac{\ell^{(1)}_{k_1+k}(f)\,\overline{\ell^{(1)}_{k_1+k}(g)}}{z-\mu^{(1)}_{k_1+k}} - \frac{\ell^{(2)}_{k_2+k}(f)\,\overline{\ell^{(2)}_{k_2+k}(g)}}{z-\mu^{(2)}_{k_2+k}}\Bigg]\Bigg\} \\
&\quad=\; \sum_{k=1}^{k_1} \frac{\ell^{(1)}_k(f)\,\overline{\ell^{(1)}_k(g)}}{z-\mu^{(1)}_k} - \sum_{k=1}^{k_2} \frac{\ell^{(2)}_k(f)\,\overline{\ell^{(2)}_k(g)}}{z-\mu^{(2)}_k} \\
&\qquad -\sum_{k=1}^{k_1} \ell^{(1)}_k(f)\langle \phi^{(1)}_k, g\rangle + \sum_{k=1}^{k_2} \ell^{(2)}_k(f)\langle \phi^{(2)}_k, g\rangle \\
&\qquad -\sum_{k=1}^{\infty} \ell^{(1)}_{k_1+k}(f)\Big[\langle \phi^{(1)}_{k_1+k}, g\rangle - \langle \phi^{(2)}_{k_2+k}, g\rangle\Big]\,.
\end{aligned} \tag{23}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\Big[S^{(1)}_z - S^{(2)}_z\Big](f,g) \;\to\; &-\sum_{k=1}^{k_1} \ell^{(1)}_k(f)\langle \phi^{(1)}_k, g\rangle + \sum_{k=1}^{k_2} \ell^{(2)}_k(f)\langle \phi^{(2)}_k, g\rangle \\
&-\sum_{k=1}^{\infty} \ell^{(1)}_{k_1+k}(f)\Big[\langle \phi^{(1)}_{k_1+k}, g\rangle - \langle \phi^{(2)}_{k_2+k}, g\rangle\Big] \qquad (z \to -\infty)\,.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 7.3 gilt aber

$$\Big[S^{(1)}_z - S^{(2)}_z\Big](f,g) \;\to\; 0 \qquad (I\!R \ni z \to -\infty)\,.$$

Also ist

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \ell^{(1)}_{k_1+k}(f)\Big[\langle \phi^{(1)}_{k_1+k}, g\rangle - \langle \phi^{(2)}_{k_2+k}, g\rangle\Big] \;=\; \sum_{k=1}^{k_1} \ell^{(1)}_k(f)\langle \phi^{(1)}_k, g\rangle - \sum_{k=1}^{k_2} \ell^{(2)}_k(f)\langle \phi^{(2)}_k, g\rangle \,.$$

Durch Einsetzen in (23) erhalten wir die behauptete Identität. ∎

Satz 7.7 *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

A) Es gibt Zahlen $k_1,\, k_2 \in I\!N_0$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\mu^{(1)}_{k_1+k} \;=\; \mu^{(2)}_{k_2+k} \qquad (k \in I\!N)\,,$$

$$\big(\tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi^{(1)}_{k_1+k}\big)\big|_{\Gamma_1} \;=\; \big(\tfrac{\partial}{\partial n}\,\phi^{(2)}_{k_2+k}\big)\big|_{\Gamma_1}\,, \quad \phi^{(1)}_{k_1+k}\big|_{\Gamma_2} \;=\; \phi^{(2)}_{k_2+k}\big|_{\Gamma_2} \qquad (k \in I\!N)\,.$$

B) Es gilt $q_1 = q_2$.

Beweis. A) $\Rightarrow$ B) Sei $\xi \in I\!R^m$ ein fest gewählter Vektor mit der Eigenschaft, daß es einen Vektor $\nu \in S^{m-1} \setminus A$ mit $\nu \perp \xi$ gibt.[13]
Wie im Beweis von Satz 7.1 {B)$\Rightarrow$ C)} setzen wir für $r > 0$

$$\zeta(r) \;:=\; \nu - i(r\nu + \tfrac{1}{2}\,\xi)\,, \quad \eta(r) \;:=\; \nu + i(r\nu - \tfrac{1}{2}\,\xi)\,,$$

$$z_r \;:=\; r^2 + \tfrac{1}{4}\,|\xi|^2 - 1 + 2i\,r$$

und

$$f_r(x) \;:=\; e^{\zeta(r)\cdot x}\,, \quad g_r(x) \;:=\; e^{-\eta(r)\cdot x} \qquad (x \in \overline{\Omega}\,)\,.$$

Nach Lemma 6.4 gilt für $r > 0$

$$\int_\Omega e^{-i\xi\cdot x}(q_1 - q_2)(x)\,dx \;=\; S^{(1)}_{z_r}(f_r, g_r) - \langle R(z_r, T_1)(q_1 f_r), q_1 g_r\rangle - S^{(2)}_{z_r}(f_r, g_r) + \langle R(z_r, T_2)(q_2 f_r), q_2 g_r\rangle\,.$$

Aufgrund von Satz 3.10 gibt es daher eine Zahl $C > 0$ so, daß für alle $r > 0$

$$\left|\int_\Omega e^{-i\xi\cdot x}(q_1 - q_2)(x)\,dx\right| \;\le\; \left|\Big[S^{(1)}_{z_r} - S^{(2)}_{z_r}\Big](f_r, g_r)\right| + \frac{C}{r} \tag{24}$$

[13] Bzgl. der Definition von A siehe Seite 39.

gilt. Nach Lemma 7.6 gilt nun für beliebiges $r > 0$

$$\Big[S^{(1)}_{z_r} - S^{(2)}_{z_r}\Big](f_r, g_r) \;=\; \sum_{k=1}^{k_1} \frac{\ell_k^{(1)}(f_r)\,\overline{\ell_k^{(1)}(g_r)}}{z_r - \mu_k^{(1)}} - \sum_{k=1}^{k_2} \frac{\ell_k^{(2)}(f_r)\,\overline{\ell_k^{(2)}(g_r)}}{z_r - \mu_k^{(2)}}\,. \tag{25}$$

Da wir $\nu \in S^{m-1} \setminus A$ gewählt haben, und da für $r > 0$

$$\zeta(r) \;=\; a - ir\nu, \quad -\eta(r) \;=\; -a - ir\nu \qquad \text{mit } a \;:=\; \nu - \tfrac{i}{2}\,\xi$$

gilt, folgt aus Satz 5.12 für $j \in \{1,2\}$ und beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$\ell_k^{(j)}(f_r) \;=\; o(r) \quad (r \to \infty)\,, \qquad \ell_k^{(j)}(g_r) \;=\; o(r) \quad (r \to \infty)\,.$$

Für $j \in \{1,2\}$ und beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt daher

$$\frac{\ell_k^{(j)}(f_r)\,\overline{\ell_k^{(j)}(g_r)}}{z_r - \mu_k^{(j)}} \;=\; \frac{o(r^2)}{r^2 + \frac{1}{4}\,|\xi|^2 - 1 + 2i\,r - \mu_k^{(j)}} \;=\; o(1) \qquad (r \to \infty)\,.$$

Mit (24) und (25) folgt daraus

$$\left|\int_\Omega e^{-i\xi\cdot x}(q_1 - q_2)(x)\,dx\right| \;\le\; o(1) + \frac{C}{r} \qquad (r \to \infty)\,,$$

also ist

$$\int_\Omega e^{-i\xi\cdot x} q_1 \;=\; \int_\Omega e^{-i\xi\cdot x} q_2\,.$$

Unter der Voraussetzung, daß zu $\xi \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor $\nu \in \{\xi\}^\perp \cap S^{m-1}$ mit $\nu \notin A$ existiert,[14] gilt somit $\hat{q}_1(\xi) = \hat{q}_2(\xi)$, wobei wir q_1 und q_2 wie im Beweis von Satz 7.1 als Funktionen aus $L^1(\mathbb{R}^m)$ auffassen, die auf Ω^c identisch Null sind. Sei nun

$$M := \{\xi \in \mathbb{R}^m \,|\, (\{\xi\}^\perp \cap S^{m-1}) \subset A\}\,.$$

Wie wir gezeigt haben, gilt $\hat{q}_1(\xi) = \hat{q}_2(\xi) \quad (\xi \in M^c)$. Da q_1 und q_2 Funktionen aus $L^1(\mathbb{R}^m)$ sind, sind ihre Fouriertransformierten stetig auf $\mathbb{R}^m$. Zum Nachweis, daß $\hat{q}_1 = \hat{q}_2$ und damit $q_1 = q_2$ gilt, genügt es daher zu zeigen, daß M nirgends dicht in $\mathbb{R}^m$ ist.

Widerspruchsannahme: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, daß M dicht in $B_\varepsilon(x_0)$ liegt.

[14] Für $\xi \in \mathbb{R}^m$ bezeichne $\{\xi\}^\perp$ das orthogonale Komplement von $\{r\xi \,|\, r \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^m$.

Ist $0 \in B_\varepsilon(x_0)$, so gibt es eine Kugel in $B_\varepsilon(x_0)$, die den Ursprung nicht mehr enthält und in der M ebenfalls dicht liegt. Wir setzen daher o. B. d. A. voraus daß $0 \notin B_\varepsilon(x_0)$ ist. Dann ist $R := |x_0| > 0$ und $\frac{x_0}{R} \in S^{m-1}$.

Sei $\delta := \frac{\varepsilon}{R}$ und sei $x \in S^{m-1}$ mit $|x - \frac{x_0}{R}| < \delta$. Dann gilt $Rx \in B_\varepsilon(x_0)$, also gibt es eine Folge (x_n) in $M \setminus \{0\}$ mit $|Rx - x_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$. Offenbar ist $(\frac{x_n}{|x_n|})$ eine Folge in $M \cap S^{m-1}$ mit $\frac{x_n}{|x_n|} \to x \quad (n \to \infty)$. Daraus folgt

$$\left(B_\delta(\tfrac{x_0}{R}) \cap S^{m-1}\right) \subset \overline{M \cap S^{m-1}}\,. \tag{26}$$

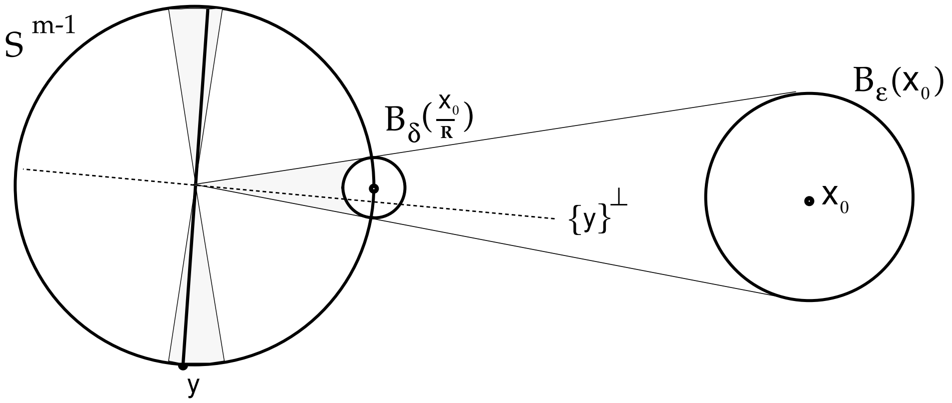

Abb. 1

Sei nun $y \in S^{m-1}$ ein beliebiger Vektor mit $\operatorname{dist}(y, \{\frac{x_0}{R}\}^\perp \cap S^{m-1}) < \delta$. Dann ist $\operatorname{dist}(\{y\}^\perp \cap S^{m-1}, \frac{x_0}{R}) < \delta$, also gibt es einen Vektor

$$x \in (\{y\}^\perp \cap S^{m-1}) \cap (B_\delta(\tfrac{x_0}{R}) \cap S^{m-1})\,.$$

Nach (26) gibt es eine Folge (x_n) in $M \cap S^{m-1}$ mit $x_n \to x \quad (n \to \infty)$. Damit gilt auch $\operatorname{dist}(\{y\}^\perp \cap S^{m-1}, x_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$, woraus

$$\operatorname{dist}(y, \{x_n\}^\perp \cap S^{m-1}) \;\to\; 0 \qquad (n \to \infty)$$

folgt. Da für $n \in I\!N$ stets $x_n \in M$ ist, gilt $(\{x_n\}^\perp \cap S^{m-1}) \subset A \quad (n \in I\!N)$. Also ist $\operatorname{dist}(y, A) = 0$, d. h. es gilt $y \in \overline{A}$. Aus der Annahme folgt somit

$$\left\{y \in S^{m-1} \,\middle|\, \operatorname{dist}(y, \{\tfrac{x_0}{R}\}^\perp \cap S^{m-1}) < \delta\right\} \subset \overline{A}\,.$$

Dies steht im Widerspruch dazu, daß A nach Lemma 5.13 nirgends dicht in S^{m-1} liegt.

Da B) $\Rightarrow$ A) offenbar gilt, ist der Satz bewiesen. ∎

Im folgenden verwenden wir die in der Einleitung (Seite 1 – 2) erklärten Begriffe. Wir setzen ferner

$$\kappa_k(q) := \frac{\phi_k'(\pi, q)}{\phi_k'(0, q)} \qquad (k \in I\!N)\,.$$

Nach Gleichung (5), Seite 2, wird eine reellwertige Funktion $q \in L^1(0, \pi)$ eindeutig durch die Folgen $(\mu_k(q))$ und $(\kappa_k(q))$ bestimmt. Andererseits gibt es reellwertige Funktionen $q,\, p \in L^2(0, \pi)$ mit

$$\mu_k(q) = \mu_k(p)\,, \quad \kappa_k(q) = \kappa_k(p) \qquad (k \geq 2)$$

und $q \neq p$, wie der folgende Satz zeigt. In einer Dimension, d. h. für Sturm–Liouville–Operatoren, gilt also keine Satz 7.7 entsprechende Aussage.

Satz 7.8 *Seien (μ_k) eine beliebige, streng monoton wachsende und (κ_k) eine beliebige reelle Zahlenfolge.*
Gibt es eine reellwertige Funktion $q \in L^2(0, \pi)$ und eine Zahl $k_0 \in I\!N$ derart, daß

$$\mu_k(q) = \mu_k\,, \quad \kappa_k(q) = \kappa_k \qquad (k \geq k_0)$$

gilt, so gibt es genau eine reellwertige Funktion $p \in L^2(0, \pi)$ mit

$$\mu_k(p) = \mu_k\,, \quad \kappa_k(p) = \kappa_k \qquad (k \in I\!N)\,.$$

Beweis. Der Satz ist eine unmittelbare Folgerung von [13, Corollary 6.2]. ■

A Anhang

Lemma A.1 *Zu jeder Funktion* $g \in C^1(\overline{\Omega})$ *gibt es eine Folge* (g_n) *von Funktionen aus* $C_0^1(\Omega \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ *mit*

$$\|g - g_n\|_{W^{1,2}(\Omega)} \;\to\; 0 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Beweis. Da $\Omega \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \overline{\Omega} \setminus \Gamma_0$ gilt, nehmen wir im folgenden an, daß $\Gamma_0 \neq \emptyset$ ist. Wir führen zunächst die allgemeine Situation auf einen Spezialfall zurück.

Nach Voraussetzung ist $\Gamma_0 = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$ eine $(m-2)$–dimensionale C^1–Mannigfaltigkeit, die kompakt in $I\!R^m$ ist (bzw. eine zweipunktige Menge, falls $m = 2$ gilt). Also gibt es eine endliche Überdeckung $\{U_1, \ldots, U_N\}$ von Γ_0 mit offenen Mengen in $I\!R^m$ so, daß es für jedes $j \in \{1, \ldots, N\}$ einen C^1–Diffeomorphismus $\phi_j : U_j \to B_1(0)$ mit

$$\phi_j(U_j \cap \Gamma_0) \;=\; \{x \in B_1(0) \,|\, x_{m-1} = x_m = 0\}$$

gibt, der ebenso wie seine Umkehrabbildung ψ_j einschließlich seiner Ableitungen beschränkt ist. Auf einer hinreichend kleinen Umgebung von Γ_0 sei $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ eine Zerlegung der Eins bzgl. $\{U_1, \ldots, U_N\}$. Da Funktionen aus $C^1(\overline{\Omega})$ zu Funktionen aus $C_0^1(I\!R^m)$ fortsetzbar sind, können wir o. B. d. A. voraussetzen, daß $g \in C_0^1(I\!R^m)$ ist. Offenbar genügt es zu zeigen, daß für beliebiges $j \in \{1, \ldots, N\}$ die Funktion

$$\varphi \;:=\; (\alpha_j \cdot g) \circ \psi_j \;\in C_0^1(B_1(0)) \tag{1}$$

in $W^{1,2}(B_1(0))$ durch eine Folge (φ_n) von Funktionen aus $C_0^1(B_1(0))$ mit

$$\operatorname{supp} \varphi_n \cap \Big(I\!R^{m-2} \times \{(0,0)\}\Big) \;=\; \emptyset \qquad (n \in I\!N) \tag{2}$$

approximiert werden kann.

Im folgenden sei $x' := (x_{m-1}, x_m)$ $\;(x = (x_1, \ldots, x_m) \in I\!R^m)$. Für $n \in I\!N$ setzen wir

$$h_n(r) := \begin{cases} 0 & , \quad r \le \frac{1}{n^{n+1}} \\ (nr)^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} & , \quad \frac{1}{n^{n+1}} < r < \frac{1}{n} \\ 1 - \frac{1}{n} & , \quad \frac{1}{n} \le r \end{cases} \qquad (r \ge 0)$$

und

$$u_n(x) := h_n(\,|x'|\,) \qquad (x \in I\!R^m).$$

Für $k \in \{1, \cdots m-2\}$ ist $D_k u_n = 0$, und für $k \in \{m-1, m\}$ gilt

$$D_k u_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad |x'| < \frac{1}{n^{n+1}} \text{ oder } |x'| > \frac{1}{n} \\ (n|x'|)^{\frac{1}{n}-1} \frac{x_k}{|x'|} & , \quad \frac{1}{n^{n+1}} < |x'| < \frac{1}{n} \end{cases} \qquad (x \in I\!R^m)\,.$$

Also ist u_n auf $I\!R^m$ stetig und fast überall differenzierbar. Wie man leicht nachrechnet gilt

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} |\nabla u_n(x)|^2 dx \;\leq \\ &\leq \int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} \Big(\int_{\frac{1}{n^{n+1}} < |x'| < \frac{1}{n}} (n|x'|)^{\frac{2}{n}-2} \frac{x_{m-1}^2 + x_m^2}{|x'|^2}\, dx' \Big) dx_{m-2} \cdots dx_1 \\ (3) \qquad &= 2^{m-2} \int_{\frac{1}{n^{n+1}}}^{\frac{1}{n}} 2\pi r (nr)^{\frac{2}{n}-2} dr \\ &= 2^{m-1} \pi\, n^{\frac{2}{n}-2}\, \frac{n}{2}\, r^{\frac{2}{n}} \Big|_{r=\frac{1}{n^{n+1}}}^{\frac{1}{n}} \;\leq\; 2^{m-2} \pi\, n^{\frac{2}{n}-1}\, n^{-\frac{2}{n}} \\ &= 2^{m-2} \pi\, n^{-1}\,. \end{aligned}$$

Da die Folge (u_n) punktweise auf $B_1(0)$ gegen 1 konvergiert und $0 \leq u_n \leq 1$ $(n \in I\!N)$ gilt, strebt (u_n) nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz in $L^2(B_1(0))$ gegen 1. Aufgrund von (3) ist (u_n) somit eine Folge in $W^{1,2}(B_1(0))$, die in $W^{1,2}(B_1(0))$ gegen 1 konvergiert. Durch Regularisierung mit Friedrichsschen Glättungskernen (vgl. [1, 2.17]) können wir aus (u_n) eine Folge (f_n) von Funktionen aus $C^\infty(I\!R^m)$ mit

$$\operatorname{supp} f_n \cap \Big(I\!R^{m-2} \times \{(0,0)\} \Big) = \emptyset \qquad (n \in I\!N)$$

konstruieren, die ebenfalls in $W^{1,2}(B_1(0))$ gegen 1 konvergiert.

Sei jetzt φ die durch (1) erklärte Funktion und $\varphi_n := \varphi \cdot f_n \quad (n \in I\!N)$. Dann ist (φ_n) eine Folge von Funktionen aus $C_0^1(B_1(0))$ mit (2), und es gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_n\|_{W^{1,2}(B_1(0))} &\leq \Big(\max_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(B_1(0))} \Big) \|1 - f_n\|_{W^{1,2}(B_1(0))} \\ &\to 0 \qquad (n \to \infty), \end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist. ∎

Lemma A.2 *Die Menge A liegt nirgends dicht in S^{m-1}.*

Beweis. Sei $E := \{x \in \partial\Omega \,|\, \partial\Omega$ ist nicht vom Typ 2 in $x\}$. Das Lemma ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß $n(E)$ nirgends dicht in S^{m-1} liegt, denn nach Konstruktion ist $A = \{\pm n(x) \,|\, x \in E\}$.

Zu jedem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Kugel $U \subset \mathbb{R}^{m-1}$, eine Funktion $h \in C^2(\overline{U})$ und ein $k \in \{1, \ldots m\}$ derart, daß $\partial\Omega$ in einer offenen Umgebung V von x_0 durch $x_k = h(x_1, \ldots x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_m)$ beschrieben wird (Eulersche bzw. Mongsche Parametrisierung von $\partial\Omega$). Da $\partial\Omega$ kompakt ist, können wir $\partial\Omega$ mit endlich vielen solcher Umgebungen $V_1, \ldots V_N$ überdecken. Diese seien so klein, daß S^{m-1} für $j \in \{1, \ldots N\}$ auf $n(V_j)$ eine einheitliche Parametrisierung besitzt. Wie wir im Anschluß an Definition 5.7 bemerkt haben, ist $\partial\Omega \setminus E$ relativ offen in $\partial\Omega$ und E damit abgeschlossen. Also gibt es abgeschlossene Mengen $E_1, \ldots E_N$ mit $\bigcup_{j=1}^N E_j = E$ derart, daß für $j \in \{1, \ldots N\}$ stets $E_j \subset V_j$ ist. Offenbar genügt es, für jedes $j \in \{1, \ldots N\}$ nachzuweisen, daß $n(E_j)$ nirgends dicht in S_e^{m-1} liegt.
Wir können somit o. B. d. A. annehmen, daß es offene Kugeln U, $V \subset \mathbb{R}^{m-1}$, eine Funktion $h \in C^2(\overline{U})$ sowie eine C^∞–Einbettung $\psi : V \to \mathbb{R}^m$ so gibt, daß gilt (siehe Abb. 2, Seite 62):

1) $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ mit $\phi(y) := (y, h(y)) \quad (y \in U)$ ist in einer wegzusammenhängenden Umgebung $\Gamma \subset \partial\Omega$ von E eine Parametrisierung von $\partial\Omega$;

2) ψ ist in einer Umgebung $S \subset S^{m-1}$ von $n(\Gamma)$ eine Parametrisierung von S^{m-1}.

Seien $x \in \Gamma$, $y \in U$ mit $\phi(y) = x$. Die Vektoren $\{D_1\phi(y), \ldots, D_{m-1}\phi(y)\}$ bilden eine Basis des Tangentialraumes $T_x\Gamma$ an Γ in x. Aus

$$D_k\phi(y) = e_k + D_k h(y) e_m \qquad (k = 1, \ldots, m-1) \tag{4}$$

(hierbei bezeichne e_j den j–ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^m$) folgt daher

$$0 = D_k\phi(y) \cdot n(x) = n_k(x) + D_k h(y)\, n_m(x) \qquad (k = 1, \ldots, m-1),$$

d. h. $n(x)$ ist gleich einem der beiden Vektoren

$$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h(y)|^2}} (\nabla h, -1)(y)\,. \tag{5}$$

O. B. d. A. sei $n_m(x) < 0$. Da n_m eine stetige Funktion auf der wegzusammenhängenden Menge Γ ist, folgt aus (5), daß damit bereits

$$n \circ \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} (\nabla h, -1) \qquad \text{auf } U$$

gilt. Für $j,\, k \in \{1, \ldots, m-1\}$ gilt also

$$D_j(n_k \circ \phi) \;=\; \frac{D_j D_k h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} - \frac{D_k h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}^{\,3}} \sum_{i=1}^{m-1} (D_i h) D_j D_i h \tag{6}$$

auf U, und für $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, $k = m$ gilt

$$D_j(n_k \circ \phi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}^{\,3}} \sum_{i=1}^{m-1} (D_i h) D_j D_i h \tag{7}$$

auf U. Ist $x = \phi(y) \in E$, so gilt nach Definition 5.7

$$D_y^\alpha[\phi(y) \cdot n(x)] \;=\; 0 \qquad (1 \leq |\alpha| \leq 2),$$

woraus bei Betrachtung der Fälle $|\alpha| = 2$

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; [D_i D_j \phi(y)] \cdot n(x) \underset{(4)}{=} [D_i(e_j + D_j h(y) e_m)] \cdot n(x) \;=\; D_i D_j h(y) e_m \cdot n(x) \\ &\underset{(5)}{=} -\frac{D_i D_j h(y)}{\sqrt{1 + |\nabla h(y)|^2}} \qquad (i, j \in \{1, \ldots, m-1\}) \end{aligned}$$

folgt. Für $i,\, j \in \{1, \ldots, m-1\}$ gilt also $D_i D_j h(y) \;=\; 0 \quad (y \in \phi^{-1}(E))$. Aufgrund von (6) und (7) folgt daraus, daß für $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ und $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$D_j(n_k \circ \phi)(y) \;=\; 0 \qquad (y \in \phi^{-1}(E))\,. \tag{8}$$

gilt.

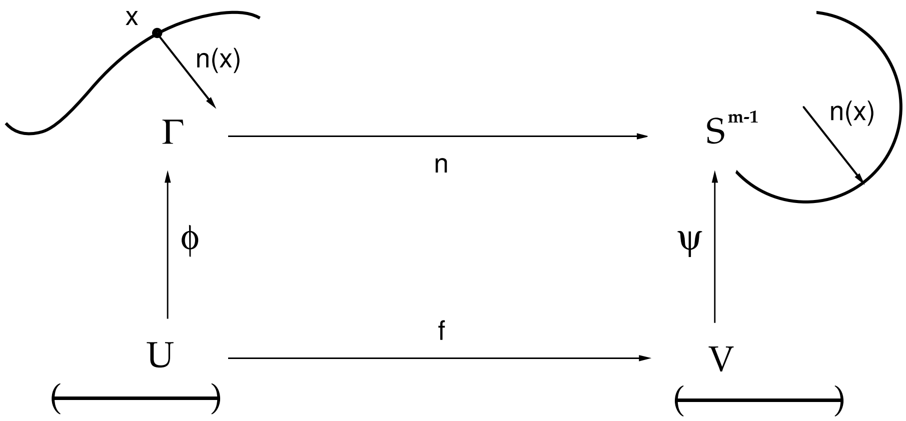

Abb. 2

Wir setzen nun $f : U \to V$, $f := \psi^{-1} \circ n \circ \phi$ und erhalten so eine Funktion $f \in [C^1(U)]^{m-1}$, für die gilt:

$$(9) \qquad J_f(y) = J_{\psi^{-1}}((n \circ \phi)(y)) \underbrace{J_{n\circ\phi}(y)}_{\underset{(8)}{=} 0} = 0 \qquad (y \in \phi^{-1}(E)).$$

„$f(\phi^{-1}(E))$ ist eine Lebesguesche Nullmenge“ (vgl. [2, 4.3.3.]) :

Als offene Menge ist U die abzählbare Vereinigung kompakter Würfel. Daher genügt es nachzuweisen, daß für einen beliebigen Würfel K die Bildmenge von $\phi^{-1}(E) \cap K$ unter f das Maß Null hat. Sei also K ein Würfel mit $K \subset U$. O. B. d. A. sei $K := [0,1]^{m-1}$. Für $r > 0$ setzen wir

$$\eta(r) := \sup\{\|J_f(z)\| \mid z \in K, \text{ für ein } y \in \phi^{-1}(E) \cap K \text{ ist } |z-y| < r\},$$

wobei $\|J_f(z)\|$ die Operatornorm des durch die Matrix $J_f(z)$ repräsentierten Endomorphismus auf dem euklidischen Vektorraum $I\!R^m$ bezeichne. Aus (9) folgt in Verbindung mit der gleichmäßigen Stetigkeit der Einträge von J_f auf K, daß

$$\begin{aligned} 0 \le \eta(r) &\underset{(9)}{=} \sup\{\|J_f(z) - J_f(y)\| \mid z \in K,\ y \in \phi^{-1}(E) \cap K,\ |z-y| < r\} \\ &\le \sup\{\|J_f(z) - J_f(y)\| \mid z \in K,\ y \in K,\ |z-y| < r\} \\ &\to 0 \qquad (r \searrow 0). \end{aligned}$$

gilt.

Seien jetzt $y \in \phi^{-1}(E) \cap K$ und $x \in K$ mit $|x-y| < r$ fest gewählt. Wir setzen

$$z_t := y + t(x-y), \quad g(t) := J_f(y + t(x-y))(x-y) \qquad (t \in [0,1]).$$

Für $0 \le t \le 1$ ist dann $z_t \in K$ mit $|z_t - y| \le |x-y| < r$. Nach Definition von η gilt also

$$(10) \qquad |g(t)| = |J_f(z_t)(x-y)| \le \|J_f(z_t)\| |x-y| \le \eta(r)\, r \qquad (0 \le t \le 1).$$

Nun ist

$$(11) \qquad \begin{aligned} f(x) - f(y) &= \int_0^1 \tfrac{d}{dt}\,[f(y + t(x-y))]\, dt \\ &= \int_0^1 J_f(y + t(x-y))(x-y)\, dt = \int_0^1 g(t) dt, \end{aligned}$$

und da $g = (g_1, \ldots, g_{m-1}) : [0,1] \to \mathbb{R}^{m-1}$ stetig ist, gilt

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^1 g(t)\,dt\right| &= \left(\sum_{k=1}^{m-1}\left|\int_0^1 g_k(t)\,dt\right|^2\right)^{\frac12} \le \left(\sum_{k=1}^{m-1}\|g_k\|^2_{L^1(0,1)}\right)^{\frac12} \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{m-1}\|g_k\|^2_{L^2(0,1)}\right)^{\frac12} = \left(\int_0^1\sum_{k=1}^{m-1}|g_k(t)|^2\,dt\right)^{\frac12} \\
&= \left(\int_0^1 |g(t)|^2\,dt\right)^{\frac12} \le \sup_{0\le t\le 1}|g(t)|\,.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Aufgrund von (11), (12) und (10) sowie der Wahl von x, y gilt also

$$|f(x) - f(y)| \le \eta(r)\,r \qquad (x \in K,\ y \in \phi^{-1}(E) \cap K,\ |x-y| < r)\,.$$

Daraus folgt, daß für $y \in \phi^{-1}(E) \cap K$ und $r > 0$ die Menge $f(B_r(y) \cap K)$ stets von einem Würfel mit Volumen $[2\,\eta(r)\,r]^{m-1}$ umfaßt wird. Wir unterteilen nun $K = [0,1]^{m-1}$ in k^{m-1} Würfel mit der Kantenlänge $\frac{1}{k}$. Enthält ein solcher (kleiner) Würfel einen Punkt $y \in \phi^{-1}(E)$, so ist er in der Kugel um y mit dem Radius $\frac{\sqrt{m-1}}{k}$ enthalten, weshalb sein Bild unter f in einem Würfel vom Volumen $\left[2\eta\left(\frac{\sqrt{m-1}}{k}\right)\frac{\sqrt{m-1}}{k}\right]^{m-1}$ liegt. Da es höchstens k^{m-1} Würfel gibt, die einen Punkt aus $\phi^{-1}(E)$ enthalten, können wir $f(\phi^{-1}(E) \cap K)$ derart mit endlich vielen Würfeln überdecken, daß die Summe ihrer Volumina nicht größer als

$$k^{m-1}\left[2\,\eta\left(\frac{\sqrt{m-1}}{k}\right)\frac{\sqrt{m-1}}{k}\right]^{m-1} = \left[2\sqrt{m-1}\,\eta\left(\frac{\sqrt{m-1}}{k}\right)\right]^{m-1}$$

ist. Für wachsendes $k \in \mathbb{N}$ streben diese Zahlen gegen Null, denn $\eta(r)$ strebt gegen Null für $r \searrow 0$. Also ist $f(\phi^{-1}(E) \cap K)$ eine Lebeguesche Nullmenge.

Wie wir gezeigt haben ist $f(\phi^{-1}(E))$ eine Lebesquesche Nullmenge in $\mathbb{R}^{m-1}$. Außerdem ist $f(\phi^{-1}(E))$ kompakt, denn f ist stetig und $\phi^{-1}(E)$ ist kompakt. Also enthält diese Menge alle ihre Häufungspunkte. Da sie das Maß Null hat, muß sie nirgends dicht in V liegen. Nach Konstruktion gilt nun $(\psi^{-1} \circ n)(E) = f(\phi^{-1}(E))$. Da $\psi : V \to S^{m-1}$ ein Homöomorphismus ist, liegt damit $n(E)$ nirgends dicht in S^{m-1}, was zu zeigen war. ∎

Symbolverzeichnis

$I\!N$, $I\!N_0$	Menge der natürlichen Zahlen, $\quad I\!N_0 = I\!N \cup \{0\}$
$x \cdot y$, $\lvert x\rvert$	$x \cdot y = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k, \quad \lvert x\rvert = \sqrt{x \cdot x}$
$\overline{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$	konjugiert komplexe Zahl, Realteil bzw. Imaginärteil von z
$T_x\Gamma$	Tangentialraum an Γ im Punkt x
S^{m-1}	Einheitssphäre in R^m
∂A, $\overline{A}$, A^c, $A^\perp$	Rand, Abschließung, Komplement bzw. orthogonales Komplement von A
χ_A	charakteristische Funktion von A
$f\vert_A$	Einschränkung von f auf A
D_k, D	$D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D = (D_1, \dots D_m)$
∇, Δ	$\nabla = D, \quad \Delta = \nabla \cdot \nabla$
$\frac{\partial}{\partial n}$	äußere Normalenableitung auf $\partial\Omega$
γ	Spuroperator, $\gamma : W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$
J_f	Jacobi–Matrix von $f = (f_1, \dots f_n), \quad J_f = (\frac{\partial f_i}{\partial x_k})$
$\operatorname{supp} f$	Träger von f
$\hat{f}$	Fouriertransformierte von f, $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{I\!R^m} e^{-i\xi\cdot x} f(x)\, dx$
$T : E \supset\!\!\longrightarrow F$	linearer Operator aus E in F, d. h. $D(T) \subset E$
$T \restriction D$	Einschränkung von T auf D
$D(T)$	Definitionsbereich von T
$\sigma(T)$, $\varrho(T)$	Spektrum bzw. Resolventenmenge von T
$R(z,T)$	Resolvente von T, $\quad R(z,T) = (z-T)^{-1}$
$B(E,F)$, $B(E)$	Raum der beschränkten linearen Operatoren $T : E \to F$, versehen mit der Operatornorm; $B(E) = B(E,E)$

$C^k(\Omega)$	Menge der auf Ω k–mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen
$C^k(\overline{\Omega})$	Menge der Funktionen $\varphi \in C^k(\Omega)$ mit der Eigenschaft, daß $D^\alpha\varphi$ für $0 \le \lvert\alpha\rvert \le k$ beschränkt und gleichmäßig stetig auf Ω ist
$C_0^k(\Omega \cup \Gamma)$	Menge der Funktionen aus $C^k(\overline{\Omega})$ mit kompaktem Träger in $\Omega \cup \Gamma$
$L^p(\Omega)$	Lebesgue–Raum
$W^{k,p}(\Omega)$	Raum der Funktionen aus $L^p(\Omega)$ mit distributionellen Ableitungen bis zur Ordnung k in $L^p(\Omega)$
$W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$	Menge der Funktionen u mit der Eigenschaft, daß $u \in W^{k,p}(\Omega')$ ($\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt) gilt
$W_0^{k,p}(\Omega \cup \Gamma)$	Abschließung von $C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma)$ in $W^{k,p}(\Omega)$
$W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$	Bild von $W^{1,2}(\Omega)$ unter dem Spuroperator
$[W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)]^*$	topologischer Dualraum von $W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$
$\langle u, v\rangle$	$\int_\Omega u\,\overline{v}$
$\lVert u\rVert_{L^p(\Omega)}$	$(\int_\Omega \lvert u\rvert^p)^{\frac{1}{p}}$
$\lVert u\rVert_{L^\infty(\Omega)}$	$\inf\{c \in [0,\infty] \mid \lvert u(x)\rvert \le c \quad (\text{f. a. } x \in \Omega)\}$
$\lVert u\rVert_{W^{k,p}(\Omega)}$	$\Big(\sum\limits_{\lvert\alpha\rvert\le k} \int_\Omega \lvert D^\alpha u\rvert^p\Big)^{\frac{1}{p}}$
$\lVert g\rVert_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)}$	$\inf\{\,\lVert u\rVert_{W^{1,2}(\Omega)} \mid u \in W^{1,2}(\Omega),\ \gamma u = g\,\}$
t	Schrödinger–Sesquilinearform (Seite 18)
T	Schrödingeroperator (Seite 21)
μ_k	Eigenwert von T (Seite 25)
ϕ_k	Eigenfunktion von T zum Eigenwert μ_k (Seite 25)
$u_{f,z}$	Lösung des Randwertproblems (4.1)/(4.2) (Seite 43)
$\tilde{u}_{f,z}$	(Seite 30)
$\ell_k(f)$	$u_{f,z} \;=\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\ell_k(f)}{z-\mu_k}\,\varphi_k$ (Seite 35)
S_z	$S_z(f,g) \;=\; (\frac{\partial}{\partial n}\,u_{f,z})(\,\overline{g}\,) - \int_{\partial\Omega} u_{f,z}\,\frac{\partial}{\partial n}\,\overline{g}$ (Seite 43)
A	Ausnahmemenge von S^{m-1} (Seite 39)

Literaturverzeichnis

[1] R. Adams, *Sobolev spaces*, New York: Academic Press 1975

[2] M. Berger, B. Gostiaux, *Differential geometry: Manifolds, curves and surfaces*, New York: Springer–Verlag 1988

[3] G. Borg, *Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte*, Acta. Math. **78**, 1–96 (1946)

[4] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Berlin: Springer–Verlag 1983

[5] H. Isozaki, *Some remarks on the multi–dimensional Borg–Levinson theorem*, Journées: "Equations Deriv. Partielles", Paris 1989, Exp. No. 17, 1–6 (1989), J. Math. Kyoto Univ. **31**, No. 3, 743–753 (1991)

[6] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, New York: Springer–Verlag 1966

[7] T. Kriecherbauer, *Eine N–dimensionale Verallgemeinerung des Theorems von Borg und Levinson*, München, Diplomarbeit, 1989

[8] N. Levinson, *The inverse Sturm–Liouville problem*, Mat. Tidsskr. B. 1949, 25–30

[9] S. Mizohata, *The theory of partial differential equations*, London: Cambridge University Press 1973

[10] A. Nachman, J. Sylvester, G. Uhlmann, *An n–dimensional Borg–Levinson theorem*, Commun. Math. Phys. **115**, 595–605 (1988)

[11] R. G. Novikov *Multidimensional inverse spectral problems for the equation* $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$, Funkts. Anal. Prilozhen., **22** (1988), No. 4, 11–22, Übersetzung in Funct. Anal. Appl. **22**, No. 4, 263–272 (1988)

[12] R. G. Novikov, G. Henkin, $\overline{\partial}$*–equation in the multidimensional inverse scattering problem*, Usp. Mat. Nauk **42**, No. 3 (1987), 93–152, Übersetzung in Russ. Math. Surv. **42**, No. 4, 109–180 (1987)

[13] J. Pöschel, E. Trubowitz, *Inverse spectral theory*, Orlando: Academic Press 1990

[14] A. G. Ramm, *Multi–dimensional inverse problems and completeness of the products of solutions to PDE*, J. Math. Anal. Appl. **134**, 211–253 (1988)

[15] M. Schechter, *Spectra of partial differential operators*, Amsterdam: North–Holland Publishing Co. 1971

[16] E. M. Stein, *Harmonic analysis*, Princeton, N. J.: Princeton University Press 1993

[17] E. Shamir, *Regularisation of mixed second–order elliptic problems*, Israel J. Math. **6**, 150–168 (1968)