PROJECTEURS ORTHOGONAUX ET OPÉRATEURS ASSOCIÉS UTILES EN STATISTIQUE MULTIDIMENSIONNELLE

J. Dauxois.*†, G.M. Nkiet. et Y. Romain*.**

*Laboratoire de Statistique et Probabilités, UMR CNRS C55830,
Université Paul Sabatier, 118, Route de Narbonne,
F-31062 Toulouse cedex
e-mail : romain@cict.fr

†Equipe GRIMM, Université Toulouse 2
e-mail: dauxois@univ-tlse2.fr

**Université de Masuku, Gabon
e-mail: gnkiet@hotmail.com

Résumé

Dans cet article, nous nous proposons de rassembler un certain nombre de propriétés d'opérateurs définis à partir de projecteurs orthogonaux dans un espace de Hilbert H réel séparable. On considère deux sous-espaces fermés H_i et H_j de H et les projecteurs Π_i et Π_j d'images respectives H_i et H_j. On s'intéresse d'abord aux "opérateurs associés" à la projection Π_i; la surjection $\tilde{\Pi}_i$, la restriction $\Pi_{i|H_j}$ et la restriction surjective $\tilde{\Pi}_{i|H_j}$. Puis, on étudie les produits, sommes et différences des projecteurs Π_i et Π_j ainsi que leurs "complémentaires à l'identité". Enfin, d'autres opérateurs sont aussi considérés, notamment, ceux où interviennent les opérateurs associés, ceux qui sont particulièrement utiles en Analyse Canonique et aussi les commutateurs de projecteurs. Dans chaque cas (vingt au total), le noyau, l'image et l'adjoint sont explicités et quelques propriétés, notamment spectrales et en norme, sont présentées. Enfin, deux tableaux récapitulatifs sont proposés en annexe.

Mots clés : projection orthogonale, projecteur, noyau, image, adjoint, commutateur, sous-espace fermé, analyse canonique.

Abstract

In this paper a real separable Hilbert space H and two closed subspaces H_i and H_j with respective orthogonal projectors Π_i and Π_j are considered. We are first interested by the properties of Π_i, of $\tilde{\Pi}_i$ which projects H *onto* H_i and of the restrictions $\Pi_{i|H_j}$ and $\tilde{\Pi}_{i|H_j}$. Then product, sum and difference of Π_i and Π_j and of their orthocomplements are studied. Other operators (useful in Canonical Analysis) are also considered. In each case (twenty in total) the kernel, the range and the adjoint are given and some spectrum and norm properties are presented. Endly two synthetic tables are proposed in the Appendix.

Keywords : orthogonal projection, projector, kernel, range, adjoint, commutator, closed subspace, Canonical Analysis.

1. Introduction

Les projecteurs orthogonaux, i.e. les opérateurs idempotents autoadjoints, sont des outils fondamentaux en Statistique Multidimensionnelle lorsque l'on considère un cadre euclidien ou hilbertien. Dans cet article, nous nous proposons de rassembler un certain nombre de propriétés de base pour des opérateurs construits à partir de projecteurs orthogonaux dans un espace de Hilbert H réel. Plus précisement, considérons deux projecteurs Π_i et Π_j d'images respectives H_i et H_j deux sous-espaces fermés de H. On s'intéresse aux "opérateurs associés" à la projection Π_i : c'est-à-dire la surjection associée notée $\tilde{\Pi}_i$, la restriction $\Pi_{i|H_j}$ et la restriction surjective $\tilde{\Pi}_{i|H_j}$. Puis, on considère les sommes, les différences et les produits des deux projecteurs donnés et les complémentaires à l'identité de ces opérateurs (qu'on peut aussi dénommés ortho-complémentaires). Ensuite, d'autres opérateurs, définis par des"restrictions et /ou des surjections" associées et dont certains sont particulièrement utiles en Analyse Canonique, sont étudiés. Enfin, les commutateurs de projecteurs sont aussi pris en compte. Dans chaque cas (au total, vingt opérateurs sont concernés) le noyau, l'image et l'adjoint sont explicités et quelques propriétés, notamment spectrales et en norme, sont données. En annexe, deux tableaux récapitulatifs permettent une consultation globale et rapide des notations, définitions et autres propriétés.

Nous avons volontairement privilégié ici un point de vue fonctionnel en travaillant (dans un cadre réel) sur les opérateurs de projection orthogonale. Une publication jumelle à celle-ci consisterait à considérer les propriétés algébriques (voire géométriques et stochastiques) de l'ensemble des sous-espaces fermés de l'espace H complexe, noté $\mathcal{F}(H)$ et serait d'un intérêt complémentaire. En effet, on sait que $\mathcal{F}(H)$ admet une structure de treillis (orthomodulaire, complet et non distributif; voir Kalmbach (1983) par exemple) qui est le soubassement à des extensions importantes de notions usuelles (comme celle de tribu, par exemple). Jusqu'à présent, les applications à la Statistique de l'Algèbre des sous-espaces ont surtout été développées en dimension finie dans un cadre réel (voir Baksalary (1987), Nordström et von Rosen (1987), par exemple) alors que les connaissances générales sur leurs propriétés permettent d'envisager de nouvelles possibilités; dans ce sens, une ouverture à la Statistique non commutative et aux algèbres de von Neumann (qui sont des algèbres d'opérateurs engendrées par les projecteurs orthogonaux qu'elles contiennent) peut être proposée (voir, par exemple, Romain (1997)).

Sur un plan bibliographique, on peut considérer ce travail à l'intersection de plusieurs centres d'intérêt. La comparaison de projecteurs (ou de sous-espaces fermés) a motivé un nombre important de travaux dont on peut extraire, par exemple, ceux de Amrein et Sinha (1994), Avron et al (1994), Davis (1958), Dixmier (1948), Halmos (1969), Lenard (1972) ou encore Sunder (1988). Sur un plan statistique, ce thème concerne directement l'Analyse Canonique de deux (voire plus de deux) "objets d'étude" qui peuvent être, suivant le contexte, des variables ou des fonctions aléatoires, des sous-espaces ou des tribus, ou encore des opérateurs : avec cette "approche fonctionnelle", on peut citer ici les références de base de Gelfand et Yaglom (1957), Hannan (1961), Dauxois et Pousse (1975) ou encore Dauxois et Nkiet (1997, 1998). Quant à l'analyse fonctionnelle, plus particulièrement sa branche "théorie des opérateurs", elle est bien sûr en fondation des notions rencontrées ici. Les ouvrages généraux que l'on peut citer sont : Birman et Solomjak (1987), Brezis (1983), Dieudonné (1968), Dunford et Schwarz (1964), Gohberg et Krejn (1971), Havin et Jöricke (1995), Kato (1980), et, plus particulièrement pour cet article, Weidman (1980).

Enfin, il est à noter que cette publication contient tous les ingrédients utiles à la lecture du travail des mêmes auteurs sur l'Analyse Canonique relative à un troisième sous-espace (cf. Dauxois et al (2000)).

2. Quelques rappels et notations

Comme les notations sont relativement nombreuses, il peut être commode pour le lecteur de rassembler les principales dans un même paragraphe auquel il pourra se référer s'il le souhaite. D'autres notations plus spécifiques seront utilisées au cours de l'exposé.

Dans tout le texte, $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ (resp. $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle_G)$) est un espace de Hilbert réel. Comme le contexte permet presque toujours d'identifier le produit scalaire considéré, on omettra souvent l'indice de référence à l'espace (néanmoins, lorsque deux produits scalaires seront pris en compte, ils pourront être repérés, pour faciliter la lecture, par des indices distincts) et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. L'espace $\mathcal{L}(H,G)$ (resp. $\mathcal{L}(H)$) des opérateurs (sous-entendu linéaires continus) de H vers G (resp. H) est muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Soit Σ la sphère unité de H, on a par définition pour tout élément T de $\mathcal{L}(H,G)$:

$$\|T\|_\infty = \sup\{\|Tu\|;\ u \in \Sigma\}.$$

En notant $T_{|H'}$ la restriction au sous-espace fermé H' de H (c'est-à-dire l'application $u \in H' \mapsto Tu \in G$) et T^* l'adjoint de l'opérateur T de $\mathcal{L}(H,G)$, on a évidemment : $\left\|T_{|H'}\right\|_\infty \leq \|T\|_\infty$.

On sait par ailleurs (cf. Birman et Solomjak (1987), par exemple) que l'on a :

$$\|T^*\|_\infty = \|T\|_\infty = \sup\ \{|\langle Tu, v\rangle|;\ (u,v) \in \Sigma_H \times \Sigma_G\} \quad (2.1)$$

et que, lorsque T est de plus autoadjoint, on a aussi (cf. Weidman (1980), par exemple):

$$\|T\|_\infty = \sup\{|\langle Tu, u\rangle|;\ u \in \Sigma\}. \quad (2.2)$$

On désigne par I l'opérateur identité sur H. On sait que l'on a :

$$G = \operatorname{Ker} T^* \oplus \overline{\operatorname{Im} T} \quad \text{et} \quad H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{\operatorname{Im} T^*}. \quad (2.3)$$

Pour chaque T de $\mathcal{L}(H)$, on note $\mathrm{s}(T)$ le spectre de T, c'est-à-dire l'ensemble des complexes λ tels que $T - \lambda I$ n'admette pas d'inverse continu. Rappelons que ce spectre est, dans le cas le plus général, composé de trois sous-ensembles :

- le spectre ponctuel $\mathrm{sp}(T)$, ensemble des valeurs propres λ tel que $T - \lambda I$ ne soit pas inversible (on note $\mathrm{sp}^*(T)$ le spectre ponctuel privé de l'éventuelle valeur propre nulle),

- le spectre continu, ensemble des λ tels que l'inverse $(T-\lambda I)^{-1}$ n'est pas continu,

- le spectre résiduel (vide dès que T est un opérateur normal, donc vérifiant $TT^*=T^*T$) formé des complexes λ tels que $T-\lambda I$ admette un inverse défini sur un sous-espace non dense dans H.

Un opérateur, même compact, peut avoir un spectre ponctuel vide; c'est le cas de l'opérateur de Volterra défini par $f\in L^2([0,1]) \mapsto Tf$, où l'on pose $Tf(x)=\int_0^x f(y)dy$, dont le spectre est réduit à $\{0\}$. Un élément de $\operatorname{sp} T$ (une valeur propre) est notée $\lambda(T)$. Lorsque $\operatorname{sp} T$ est fini ou dénombrable, on note $\lambda'(T)=\left(\lambda'_j(T)\right)_{j\in\mathbb{N}^*}$ la suite pleine des valeurs propres (i.e. chaque valeur propre est répétée autant de fois que son ordre de multiplicité) de T avec la convention que, lorsque H est de dimension finie k, $\lambda'_j(T)$ est nul pour $j>k$; cette convention permet de traiter de la même façon tous les opérateurs, qu'ils soient à valeurs dans un espace de dimension finie ou non. Lorsque l'on pourra, cette suite sera systématiquement ordonnée en décroissant. La suite strictement décroissante des valeurs propres est notée $\lambda(T)=(\lambda_i(T))_{i\in I}$ (I est donc un ensemble $\{1,\ldots,p\}$ $(p\leq k)$ ou $\mathbb{N}^*$). Pour toute valeur propre $\lambda(T)$ (s'il en existe), on note $E_\lambda(T)$ le sous-espace (de $\operatorname{Im} T$) des vecteurs propres associés à $\lambda(T)$.

Lorsque T appartient à $\mathcal{L}(H,G)$, T^*T et TT^* ont les mêmes valeurs propres non nulles qui sont réelles positives. Lorsque x un vecteur propre associé à la valeur propre λ non nulle de TT^*, on a, d'une part :

$$\|T^*x\|^2=\langle TT^*x,x\rangle=\langle\lambda x,x\rangle=\lambda\|x\|^2, \qquad (2.4)$$

et, d'autre part :

$$(T^*T)\,T^*x=\lambda T^*x,$$

T^*x ne pouvant pas être nul puisque λ est différent de 0; il en résulte que $\operatorname{sp}^*(TT^*)=\operatorname{sp}^*(T^*T)$ et que, pour tout x unitaire, $(1/\sqrt{\lambda})\,T^*x$ est vecteur propre unitaire de T^*T associé à λ. Rappelons que l'on a :

$$\operatorname{Ker} T^*T=\operatorname{Ker} T;\quad \overline{\operatorname{Im} T^*T}=\overline{\operatorname{Im} T^*}. \qquad (2.5)$$

Si $\lambda(\in\mathbb{C})$ est une valeur propre de $T\in\mathcal{L}(H)$ d'ordre de multiplicité finie, $\bar\lambda$ est valeur propre de T^* avec le même ordre de multiplicité. Le résultat n'est plus vrai en général si la multiplicité est infinie (cf. Kato (1980), p.185).

Comme on a pour tout u de Σ :

$$\langle T^*Tu,u\rangle=\langle Tu,Tu\rangle=\|Tu\|^2,$$

il vient d'après (2.2)

$$\|T^*T\|_\infty=\|T\|_\infty^2=\|T^*\|_\infty^2=\|TT^*\|_\infty. \qquad (2.6)$$

Le spectre $\mathrm{s}(T)$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{C}$ inclus dans le disque $D(0; \|T\|_\infty)$. Le rayon spectral de T est le réel

$$\rho(T) := \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \mathrm{s}(T)\}$$

qui est donc inférieur à $\|T\|_\infty$. L'égalité (cf. Weidman(1980), p.127) a lieu dès que T est un opérateur normal (donc en particulier auto-adjoint). Pour tout T de $\mathcal{L}(H,G)$, on a :

$$\rho(TT^*) = \|TT^*\|_\infty .$$

Lorsque T est à spectre purement ponctuel (c'est-à-dire lorsque H est la somme hilbertienne des sous-espaces propres de T), $\mathrm{s}(T)$ est la fermeture de $\mathrm{sp}(T)$. On a alors :

$$\rho(T) = \sup\{|\lambda(T)|;\ \lambda(T) \in \mathrm{sp}(T)\}.$$

Lorsque T est compact, son spectre est fini ou dénombrable. La valeur 0 est ou non une valeur propre, mais elle appartient à $\mathrm{s}(T)$ dont elle est le seul point d'accumulation. Tous les autres éléments de $\mathrm{s}(T)$ sont des valeurs propres et les sous-espaces propres associés sont de dimension finie.

On note $\mathcal{F}(H)$ l'ensemble de tous les sous-espaces fermés de H. Cet ensemble est stable pour l'intersection, mais ne l'est pas pour l'union. Pour $k = 1, 2$, l'orthogonal de $H_k \in \mathcal{F}(H)$ est noté indifféremment $H_k^\perp$ ou $H_{k^\perp}$. Cette dernière notation est commode, puisque l'on peut représenter les espaces H_k et leurs orthogonaux sous la même écriture H_i l'indice i décrivant l'ensemble $\left\{1, 1^\perp, 2, 2^\perp\right\}$. Le projecteur orthogonal sur H_i est noté Π_i (on note aussi $\Pi_k^\perp$ le projecteur orthogonal sur $H_k^\perp$).

A partir de maintenant et dans tout l'article, on adopte les notations suivantes pour deux ensembles d'indices :

- l'ensemble Δ désigne les indices $\left\{1, 1^\perp, 2, 2^\perp\right\}$ (on fait la convention : $\left(i^\perp\right)^\perp = i$) ,
- l'ensemble Δ' est l'ensemble des couples $\left\{(1, 2^\perp), (1^\perp, 2), (1, 2), (1^\perp, 2^\perp)\right\}$.

Pour (i, j) de Δ', l'espace vectoriel, engendré par H_i et H_j (ou $H_i \cup H_j$), $H_i + H_j = \{x_i + x_j;\ x_i \in H_i,\ x_j \in H_j\}$ est un sous-espace de H qui n'est pas fermé en général (cf. Dauxois et al (2000) pour des exemples de sous-espaces fermés dont la somme n'est pas fermée). On note $H_{i,j}$ le plus petit sous-espace fermé $\overline{H_i + H_j}$ contenant $H_i + H_j$. On sait que l'on a :

$$\left(\overline{H_i + H_j}\right)^\perp = H_i^\perp \cap H_j^\perp \quad \text{et} \quad \overline{H_i^\perp + H_j^\perp} = (H_i \cap H_j)^\perp .$$

La somme directe orthogonale (resp. la différence orthogonale lorsque H_2 est contenu dans H_1) de H_1 et H_2 est notée $H_1 \oplus H_2$ (resp. $H_1 \ominus H_2$, c'est donc l'ensemble des éléments de H_1 qui sont orthogonaux à H_2).

Lorsque l'on cherche à décrire les liens entre deux sous-espaces H_1 et H_2 de $\mathcal{F}(H)$ en prenant en compte la notion d'angle entre deux éléments de ces deux espaces, quatre sous-espaces, manifestement orthogonaux entre eux, jouent un rôle "mineur" . Ce sont ceux qui concernent les angles 0 ou $\pi/2$: c'est-à-dire les $H_i \cap H_j$, pour (i,j) élément de Δ'. Trois d'entre eux, à savoir $H_i \cap H_j$, $(i,j) \neq (1,2)$ n'apportent aucune information sur les "imbrications" de H_1 et H_2, quant à $H_1 \cap H_2$ il ne prend en compte que les éléments communs aux deux sous-espaces. La part vraiment spécifique de l'information sur les liens entre H_1 et H_2 se trouve donc dans l'orthogonal du sous-espace *commutateur des espaces H_1 et H_2* défini par :

$$(H_0) = \mathrm{comm}\,(H_1, H_2) := (H_1 \cap H_2) \oplus (H_{1^\perp} \cap H_2) \oplus (H_1 \cap H_{2^\perp}) \oplus (H_{1^\perp} \cap H_{2^\perp})\,.$$

Cet espace peut être décrit (cf. § 6.1) comme le noyau du crochet (de Lie) $[\Pi_1, \Pi_2] := \Pi_1\Pi_2 - \Pi_2\Pi_1$, dit *commutateur des projecteurs* Π_1 *et* Π_2 (cf. Birman et Solomjak (1987) par exemple). L'espace $H_0^\perp$ (qui est contenu dans $H_{1,2}$) décrit en quelque sorte la "capacité" de commutation des projecteurs, i.e. la "taille" de l'ensemble des x de H pour lesquels on a : $\Pi_1\Pi_2 x = \Pi_2\Pi_1 x$. Les cas extrêmes sont bien sûr, d'une part, celui où $H_0^\perp = \{0\}$ qui correspond au cas où Π_1 et Π_2 commutent (et donc $\Pi_1\Pi_2$ est le projecteur orthogonal sur $H_1 \cap H_2$), d'autre part, celui où $H_0^\perp = H$. Quitte à remplacer H_i par $H_i \cap H_0^\perp$ $(i = 1, 2)$, on peut alors concentrer l'étude sur les couples d'éléments de $\mathcal{F}(H)$ dont le commutateur est réduit à $\{0\}$. De tels couples sont dits couples en position générique de sous-espaces. Dans la littérature, on parle aussi de couples de projecteurs en position générique (cf. Halmos (1982), Amrein et Sinha (1994), Lenard (1972)). Lorsque l'on suppose seulement que $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, on peut en suivant Havin et Jöricke (1995) parler de a-couple de projecteurs.

On peut également noter que, lorsque l'on ne s'intéresse vraiment qu'aux seuls liens entre H_1 et H_2 il est inutile de considérer H tout entier et on peut se "dégager de la nuisance" causée par $H_{1^\perp} \cap H_{2^\perp}$ en limitant l'étude à la fermeture dans H de $H_1 + H_2$.

Étant donné un opérateur T de $\mathcal{L}(G, H)$ dont l'image est contenue dans $H_k \in \mathcal{F}(H)$, on note $\tilde{T}$ le même opérateur mais considéré comme opérant de G vers H_k, ce dernier espace (qui est précisé suivant le contexte) étant muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_k$ induit sur H_k par $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$. Il est clair que T et $\tilde{T}$ ont même image, même noyau et même norme; en revanche, ils auront évidemment des adjoints différents. Tout vecteur propre de T appartient nécessairement à $\operatorname{Im} T$, T et $\tilde{T}$ ont donc même spectre ponctuel et tout vecteur propre pour l'un associé à la valeur propre λ est vecteur propre pour l'autre associé à la même valeur propre.

On note j_k l'injection canonique $H_k \hookrightarrow H$, c'est-à-dire l'application $x_k \in H_k \mapsto x_k \in H$. On remarquera que $\Pi_k\Pi_{3-k}$ est l'opérateur $\Pi_1\Pi_2$ pour $k = 1$ et l'opérateur $\Pi_2\Pi_1$ pour $k = 2$.

On considère ci-dessous les opérateurs suivants (où (i,j) est un élément de Δ') :

$$W_{ij} := \Pi_{j|H_i}; \quad V_{ij} := \Pi_i\Pi_{j|H_i}; \quad U_{ij} := \Pi_j\Pi_i; \quad D_{ij} := \Pi_i\Pi_j\Pi_i;$$

$$R_{ij} := I - \Pi_j \Pi_i; \quad B'_{ij} := \Pi_i + \Pi_j - I; \quad A'_{ij} = B'^2_{ij}, \quad [\Pi_i, \Pi_j] := \Pi_i \Pi_j - \Pi_j \Pi_i.$$

3. Les projecteurs orthogonaux et leurs opérateurs associés

3.1. Les opérateurs Π_i et $\tilde{\Pi}_i \in \mathcal{L}(H_i)$ $(i \in \Delta)$

L'opérateur $\tilde{\Pi}_i$ est ici l'application $x \in H \;\mapsto\; \Pi_i x \in H_i$. On a :

Propriété 3.1.

1. $\operatorname{Ker} \Pi_i = \operatorname{Ker} \tilde{\Pi}_i = H_i^{\perp}$; $\operatorname{Im} \Pi_i = \operatorname{Im} \tilde{\Pi}_i = H_i$.
2. $\Pi_i^* = \Pi_i$; $\tilde{\Pi}_i^* = j_i$.
3. $\operatorname{sp} \Pi_i = \{0, 1\}$; $E_1(\Pi_i) = H_i$, $E_0(\Pi_i) = H_i^{\perp}$.
4. $\Pi_i \in \sigma_\infty \;\Leftrightarrow\; \dim H_i < +\infty$

Preuve. Ces propriétés sont bien connues. Le deuxième point de 2 provient de ce que l'on a pour tout x de H et tout x_i de H_i :

$$\left\langle \tilde{\Pi}_i x, x_i \right\rangle_i = \langle \Pi_i x, x_i \rangle = \langle x, j_i x_i \rangle .$$

□

3.2. Les opérateurs $W_{ij} = \Pi_{j|H_i}$ et $\tilde{W}_{ij} = \tilde{\Pi}_{j|H_i} \in \mathcal{L}(H_i, H_j)$ $((i,j) \in \Delta')$

$\tilde{W}_{ij}$ est l'opérateur $x_i \in H_i \;\mapsto\; \Pi_j x_i \in H_j$. On a :

Propriété 3.2. *On a :*

1. $\operatorname{Ker} W_{ij} = \operatorname{Ker} \tilde{W}_{ij} = H_i \cap H_j^{\perp}$; $\overline{\operatorname{Im} W_{ij}} = \overline{\operatorname{Im} \tilde{W}_{ij}} = H_j \ominus \left(H_i^{\perp} \cap H_j\right)$.
2. $\tilde{W}_{ij}^* = \tilde{W}_{ji}$; $W_{ij}^* = \tilde{U}_{ji} \in \mathcal{L}(H, H_i)$
3. $\left\| W_{ij} \right\|_{\infty} = \left\| \tilde{W}_{ij} \right\|_{\infty} = \left\| \tilde{W}_{ji} \right\|_{\infty} = \left\| W_{ji} \right\|_{\infty}$ (≤ 1).

Preuve. Il est clair que $\operatorname{Ker} W_{ij} = H_i \cap \operatorname{Ker} \Pi_j$, d'où les deux premières égalités (on peut aussi le voir directement; $H_i \cap H_j^{\perp}$ est contenu dans $\operatorname{Ker} W_{ij}$ et l'inclusion inverse provient des implications :

$$x_i \in \operatorname{Ker} W_{ij} \Rightarrow x_i \in H_i \text{ et } 0 = \langle \Pi_j x_i, x_i \rangle = \left\| \Pi_j x_i \right\|^2 \Rightarrow x_i \in H_i \cap H_j^{\perp}.$$

Pour x_i de H_i et x_j de H_j, on a :

$$\left\langle \tilde{W}_{ij} x_i, x_j \right\rangle_j = \langle x_i, \Pi_j x_j \rangle = \left\langle x_i, \tilde{\Pi}_{i|H_j} x_j \right\rangle_i.$$

Pour x_i de H_i et x de H, il vient :

$$\langle W_{ij} x_i, x \rangle = \langle x_i, \Pi_j x \rangle = \langle x_i, \Pi_i \Pi_j x \rangle_i = \left\langle x_i, \tilde{U}_{ji} x \right\rangle_i.$$

Enfin, on déduit de (2.3) :

$$\overline{\operatorname{Im} \tilde{W}_{ij}} = H_j \ominus \operatorname{Ker} \tilde{W}_{ij}^* = H_j \ominus \left(H_j \cap H_i^{\perp}\right).$$

Le troisième point provient de ce que W_{ij} et $\tilde{W}_{ij}$ ont évidemment même norme, que la norme d'un opérateur et de son adjoint sont égales et enfin de l'inégalité triviale $\left\| W_{ij} \right\|_{\infty} \leq \left\| \Pi_j \right\|_{\infty} = 1$.

□

4. Les produits de projecteurs et leurs opérateurs associés.

4.1. Les opérateurs $V_{ij} = \Pi_i \Pi_{j|H_i}$ et $\tilde{V}_{ij} \in \mathcal{L}(H_i)$ $((i,j) \in \Delta')$

L'opérateur $\tilde{V}_{ij}$ est un élément de $\mathcal{L}(H_i)$. On rappelle que le produit de deux projecteurs orthogonaux n'a pas en général une image fermée (cf. par exemple Weidman (1980), p. 87).

Propriété 4.1. *On a :*

1. $\tilde{V}_{ij} = \tilde{W}_{ij}^{*}\tilde{W}_{ij} = \tilde{W}_{ji}\tilde{W}_{ji}^{*} = \tilde{V}_{ji}^{*};\ V_{ij}^{*} = \tilde{D}_{ij}(= \Pi_i\Pi_j\Pi_i \in \mathcal{L}(H, H_i))$.
2. $\operatorname{Ker} V_{ij} = \operatorname{Ker} \tilde{V}_{ij} = H_i \cap H_j^{\perp};\quad \overline{\operatorname{Im} V_{ij}} = \overline{\operatorname{Im} \tilde{V}_{ij}} = H_i \ominus \left(H_i \cap H_j^{\perp}\right).$
3. $\Vert V_{ji}\Vert_\infty = \Vert V_{ij}\Vert_\infty = \left\Vert \tilde{V}_{ij}\right\Vert_\infty \leq \left\Vert \tilde{W}_{ij}\right\Vert_\infty = \left\Vert \tilde{W}_{ji}\right\Vert_\infty;$ $\Vert V_{ij}\Vert_\infty = \left\Vert \tilde{D}_{ij}\right\Vert_\infty = \Vert U_{ji}\Vert_\infty^2 \leq \Vert U_{ji}\Vert_\infty.$
4. $\operatorname{sp} \tilde{V}_{ij} \subset [0,1];\ \operatorname{sp}^* \tilde{V}_{ij} = \operatorname{sp}^* \tilde{V}_{ij}^{*};$ $\lambda\left(\tilde{V}_{ij}\right) = 1 \ \Leftrightarrow\ H_i \cap H_j \neq \{0\};$ alors, $E_1\left(\tilde{V}_{ij}\right) = H_i \cap H_j;$ $\lambda\left(\tilde{V}_{ij}\right) = 0 \Leftrightarrow\ H_i \cap H_j^{\perp} \neq \{0\};$ alors, $E_0\left(\tilde{V}_{ij}\right) = H_i \cap H_j^{\perp}.$
5. $\lambda \in \operatorname{sp} \tilde{V}_{ij}$ et $x_i \in E_\lambda\left(\tilde{V}_{ij}\right) \Leftrightarrow x_i \in H_i$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $V_{ij}x_i = \lambda x_i$.
6. $\tilde{V}_{ij}$ compact sur $H_i \Leftrightarrow\ \tilde{W}_{ij}$ (et donc $\tilde{W}_{ij}^{*}$) compact.

Preuve.
1. On a :

$$\tilde{V}_{ij} = \left(\tilde{\Pi}_{i|H_j}\right)\left(\tilde{\Pi}_{j|H_i}\right) = \tilde{W}_{ji}\tilde{W}_{ij} = \tilde{W}_{ij}^{*}\tilde{W}_{ij} = \tilde{W}_{ji}\tilde{W}_{ji}^{*}.$$

$\tilde{V}_{ij}$ est donc un opérateur auto-adjoint positif de $\mathcal{L}(H_i)$.

Pour tout x_i de H_i et tout x de H, il vient :

$$\langle V_{ij}x_i, x\rangle_H = \langle x_i, \Pi_j\Pi_i x\rangle = \langle x_i, \Pi_i\Pi_j\Pi_i x\rangle_i = \left\langle x_i, \tilde{D}_{ij}x\right\rangle_i$$

(où $\tilde{D}_{ij}$ opère de H vers H_i).

2. On a (cf. (2.3)) :

$$\operatorname{Ker} \tilde{V}_{ij} = \operatorname{Ker} \tilde{W}_{ij} = H_i \cap H_j^{\perp};\quad \overline{\operatorname{Im} \tilde{V}_{ij}} = \overline{\operatorname{Im} \tilde{W}_{ij}^{*}} = \overline{\operatorname{Im} \tilde{W}_{ji}} = H_i \ominus \left(H_i \cap H_j^{\perp}\right).$$

3. On a en effet, d'une part :

$$\left\Vert \tilde{V}_{ij}\right\Vert_\infty = \left\Vert \tilde{W}_{ij}^{*}\tilde{W}_{ij}\right\Vert_\infty = \left\Vert \tilde{W}_{ij}\right\Vert_\infty^2 \leq \left\Vert \tilde{W}_{ij}\right\Vert_\infty \quad \text{et} \quad \left\Vert \tilde{V}_{ji}\right\Vert_\infty = \left\Vert \tilde{W}_{ji}\right\Vert_\infty^2 = \left\Vert \tilde{W}_{ij}\right\Vert_\infty^2$$

et, d'autre part :

$$\|V_{ij}\|_\infty = \left\|\tilde{D}_{ij}\right\|_\infty = \|(\Pi_i\Pi_j)(\Pi_i\Pi_j)^*\|_\infty = \|\Pi_i\Pi_j\|_\infty^2 \leq \|U_{ji}\|_\infty$$

(la dernière inégalité vient de ce que $\|U_{ji}\|_\infty$ est inférieure à 1).
4. Le spectre ponctuel de l'opérateur auto-adjoint positif $\tilde{V}_{ij}$ est contenu dans $\mathbb{R}_+$ et c'est un sous-ensemble de $[0,1]$ puisque l'on a : $\left\|\tilde{V}_{ij}\right\|_\infty \leq 1$. L'égalité de $\mathrm{sp}^*\,\tilde{V}_{ij}$ et de $\mathrm{sp}^*\,\tilde{V}_{ji}$ vient (cf. § 2) du fait que les opérateurs considérés s'écrivent respectivement $\tilde{W}_{ij}^*\tilde{W}_{ij}$ et $\tilde{W}_{ij}\tilde{W}_{ij}^*$. Les deux autres propriétés sont triviales (on rappelle que l'égalité $\Pi_i x = x$ revient à dire que x appartient à H_i).
5. Trivial.
6. Cette propriété provient du fait que TT^* est compact si, et seulement si, (cf. par exemple Weidman (1980), p. 131) T (et donc aussi T^*) l'est.

$\square$

Remarque 4.1. : Soit H_3 un autre élément de $\mathcal{F}(H)$. Posant pour $i = 1, 2$:

$$H_{i,3} = \overline{H_i + H_3}\,, \quad \hat{W}_{i,3^\perp} = \Pi_{H_{i,3}|H_3{}^\perp} \text{et} \quad \hat{V}_{i,3^\perp} = \Pi_{i,3}\,\Pi_{3^\perp}{}_{|H_{i,3}},$$

on a donc :

$$\overline{\mathrm{Im}\hat{V}_{i,3^\perp}} = \overline{\mathrm{Im}\hat{W}_{3^\perp,i}} = H_{i,3} \ominus (H_{i,3} \cap H_3).$$

Cette remarque est intéressante à noter pour l'étude des propriétés d'invariance de l'Analyse Canonique (cf. Dauxois et Nkiet (1997)) et pour la définition de l'Analyse Canonique Relative (cf. Dauxois et al (2000)).

Remarque 4.2. : Rappelons (cf. § 2) que la propriété 4 peut être complétée de la manière suivante. Lorsque $x_i \in H_i$ est vecteur propre de V_{ij} associé à la valeur propre non nulle λ, $y_j = \Pi_j x_i \in H_j$ est vecteur propre de V_{ji} associé à la même valeur λ. Par ailleurs, lorsque x_i est de plus unitaire, $(1/\sqrt{\lambda})\,\Pi_j x_i$ est vecteur propre unitaire de V_{ji} associé à λ.

4.2. Les opérateurs $U_{ij} = \Pi_j\Pi_i$ et $\tilde{U}_{ij} \in \mathcal{L}(H, H_i)$ $((i,j) \in \Delta')$

Rappelons que l'angle entre deux sous-espaces fermés H_i et H_j est le réel de $[0, \pi/2]$ défini par

$$\cos\theta\,(H_i, H_j) := \sup\,\{|\,\langle u, v\rangle\,|;\ (u,v) \in \Sigma_i \times \Sigma_j\}\,,$$

où Σ_i est la sphère unité de H_i. On a alors le résultat suivant

Proposition 4.1. *Lorsque H_i et H_j sont deux sous-espaces fermés de H, on a :*

$$\cos\theta\,(H_i, H_j) = \|U_{ij}\|_\infty = \|U_{ji}\|_\infty \geq \|V_{ij}\|_\infty = \|V_{ji}\|_\infty\,.$$

Preuve. Pour tout u de Σ_i et tout v de Σ_j, on a :

$$\langle u, v\rangle = \langle \Pi_i u, \Pi_j v\rangle = \langle \Pi_j \Pi_i u, v\rangle ,$$

d'où l'on déduit :

$$\cos\theta\,(H_i, H_j) \leq \sup\,\{|\langle U_{ij} u, v\rangle|\,;\ u \in \Sigma_i,\ v \in \Sigma_j\} = \|U_{ij}\|_\infty .$$

Inversement, on déduit des inégalités valables pour tout vecteur unitaire u et tout v de H n'appartenant pas à $H_{i^\perp}$et $H_{j^\perp}$ respectivement :

$$|\langle U_{ij} u, v\rangle| = |\langle \Pi_i u, \Pi_j v\rangle| = \left|\left\langle \frac{1}{\|\Pi_i u\|}\Pi_i u, \frac{1}{\|\Pi_j u\|}\Pi_j v\right\rangle\right| \|\Pi_i u\|\ \|\Pi_j v\| \leq \cos\theta\,(H_i, H_j)$$

d'où

$$\|U_{ij}\|_\infty = \cos\theta\,(H_i, H_j) \quad (= \cos\theta\,(H_j, H_i) = \|U_{ji}\|_\infty).$$

L'inégalité indiquée dans la proposition provient du point 3 de la propriété 4.1.

□

Propriété 4.2. *On a :*

1. $\mathrm{Ker}\, U_{ij} = \mathrm{Ker}\, \tilde U_{ij} = \left(H_i \cap H_j^\perp\right) \oplus H_i^\perp; \quad \overline{\mathrm{Im}\, U_{ij}} = \overline{\mathrm{Im}\, \tilde U_{ij}} = H_j \ominus \left(H_j \cap H_i^\perp\right).$

2. $U_{ij}^* = U_{ji}; \quad \tilde U_{ij}^* = \Pi_{i|H_j};\ \lambda \in \mathrm{sp}^* U_{ij}$ et $x \in E_\lambda\,(U_{ij}) \Rightarrow \Pi_i x \in E_\lambda\,(U_{ji})\,.$

3. $\mathrm{sp}^*\, U_{ij} = \mathrm{sp}^*\, \tilde V_{ij}^* = \mathrm{sp}^*\, U_{ij}^* \subset [0, 1].$
   $1 \in \mathrm{sp}\, U_{ij} \Leftrightarrow H_i \cap H_j \neq \{0\}$ et alors $E_1\,(U_{ij}) = H_i \cap H_j.$

4. $\dim H_i < +\infty \ \Rightarrow\ U_{ij} \in \sigma_\infty(H)$ (et donc $U_{ji} = U_{ij}^* \in \sigma_\infty(H)$).

Preuve. Le premier résultat de 1 provient des implications ($x_i \in H_i$ et $x_i^\perp \in H_i^\perp$) :

$$x = x_i + x_i^\perp \in \mathrm{Ker}\, U_{ij} \ \Leftrightarrow\ 0 = \Pi_j \Pi_i x = \Pi_j x_i \Rightarrow x_i \in H_j^\perp$$

qui entraîne l'inclusion $\mathrm{Ker}\, U_{ij} \subset H_i^\perp \oplus \left(H_i \cap H_j^\perp\right)$, l'inclusion inverse étant claire.

La première égalité de 2 est immédiate; la seconde a été vue dans le deuxième point de la propriété 3.2. Le deuxième résultat de 1 est alors une conséquence.

Les opérateurs U_{ij} et $\tilde{U}_{ij|H_j}$ ont les mêmes valeurs propres non nulles et $\mathrm{sp}^*\,\tilde{V}_{ij}^* = \mathrm{sp}^*\,\tilde{V}_{ji}$. D'autre part, si $\Pi_j\Pi_i x = \lambda x$ ($\lambda \neq 0$), alors, $\Pi_i x$ est non nul et vérifie $\Pi_i\Pi_j(\Pi_i x) = \lambda\Pi_i x$. Le deuxième point de 3 provient de la propriété 4.1.

4. Le résultat est standard, puisque Π_i est nécessairement compact.

□

Le résultat suivant est particulièrement intéressant.

Proposition 4.2. *Soit H_i et H_j* (pour (i,j) appartenant à Δ') *deux éléments de $\mathcal{F}(H)$. Pour que la norme de $U_{ji} = \Pi_i\Pi_j$ soit strictement inférieure à* 1 *(ou que l'angle de H_i et H_j soit strictement positif), il faut et suffit que $H_i + H_j$ soit une somme (algébrique) directe fermée dans H.*

Preuve. Montrons que la condition est nécessaire. Si $H_i \cap H_j$ était différent de $\{0\}$, le réel 1 serait valeur propre de U_{ji} et on aurait nécessairement $\|U_{ji}\|_\infty = 1$. La somme $H_i + H_j$ est donc directe. Comme un opérateur et son adjoint ont même norme, les opérateurs $R_{ji} = I - \Pi_i\Pi_j$ et son adjoint $R_{ji}^* = R_{ij}$ sont inversibles, d'inverses continus, puisque ce sont les sommes des séries absolument convergentes $\sum_{n=0}^{+\infty}(\Pi_i\Pi_j)^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(\Pi_j\Pi_i)^n$.

Pour tout $x = x_i + x_j$, $x_i \in H_i$, $x_j \in H_j$, on a :

$$\left\{\begin{array}{l}\Pi_i x = x_i + \Pi_i x_j\\ \Pi_j x = \Pi_j x_i + x_j\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\Pi_j\Pi_i x = \Pi_j x_i + \Pi_j\Pi_i x_j\\ \Pi_j x = \Pi_j x_i + x_j\end{array}\right. \Rightarrow \Pi_j\Pi_{i^\perp} x = (I - \Pi_j\Pi_i)\,x_j. \quad (4.1)$$

On en déduit :

$$x_j = R_{ij}^{-1}\Pi_j\Pi_i^\perp x, \quad \text{d'où} \quad \|x_j\| \leq \left\|R_{ij}^{-1}\right\|_\infty \|x\|. \qquad (4.2)$$

Par symétrie, on a de manière analogue:

$$x_i = R_{ji}^{-1}\Pi_i\Pi_j^\perp x, \quad \text{d'où} \quad \|x_i\| \leq \left\|R_{ji}^{-1}\right\|_\infty \|x\|. \qquad (4.3)$$

Soit alors $\left(x^{(n)} = x_i^{(n)} + x_j^{(n)}\right)_n$ ($x_i^{(n)} \in H_i$, $x_j^{(n)} \in H_j$) une suite de Cauchy d'éléments de $H_i + H_j$. Cette suite est évidemment convergente dans H. Comme il résulte immédiatement de (4.2) et (4.3) que les suites $\left(x_i^{(n)}\right)_n$ et $\left(x_j^{(n)}\right)_n$ sont des suites de Cauchy des espaces fermés respectifs H_i et H_j, on en conclut qu'elles convergent respectivement vers x_i dans H_i et x_j dans H_j. La limite de la suite des $x^{(n)}$ est donc $x_i + x_j$ et appartient à $H_i + H_j$, ce qui prouve que ce dernier espace est fermé.

Inversement, considérons l'opérateur

$$\Phi : (u,v) \in H_i \oplus H_j \ \mapsto \ u+v \in H_i + H_j,$$

où $H_i \oplus H_j$ est la somme hilbertienne des espaces H_i et H_j (i.e. $H_i \times H_j$ est muni de la norme produit $(u,v) \ \mapsto \ \sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2}$). La condition $H_i \cap H_j = \{0\}$ montre que Φ est une bijection, à image fermée d'après la deuxième condition. Une conséquence classique d'un théorème de Banach (cf. Brézis (1983), par exemple) est donc que Φ admet un inverse continu. Ceci entraîne l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que l'on ait pour tout (u,w) de $H_i \times H_j$:

$$\|u\|^2 + \|w\|^2 = \left\|\Phi^{-1}(u+w)\right\|^2 \leq (1/\alpha)^2\|u+w\|^2 \leq (1/\alpha)^2(\|u\|^2 + 2\langle u,w\rangle + \|w\|^2).$$

Le réel α est strictement inférieur à 1, sinon le produit $\langle u,w\rangle$ serait positif pour tout u et tout w, ce qui est absurde. L'inégalité précédente utilisée pour un vecteur u de la sphère unité Σ_i de H_i et un vecteur $w = \lambda v$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \Sigma_j$) conduit à :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \left(1-\alpha^2\right)\lambda^2 + 2\langle u,v\rangle\lambda + \left(1-\alpha^2\right) \geq 0,$$

ce qui implique

$$|\langle u,v\rangle| \leq 1-\alpha^2.$$

On en déduit que pour tout couple (u,v) de vecteurs unitaires de H, on a :

$$|\langle U_{ji}u, v\rangle| = |\langle \Pi_j u, \Pi_i v\rangle| \leq 1-\alpha^2$$

et donc

$$\|U_{ji}\|_\infty = \sup\left\{|\langle U_{ji}u,v\rangle|\,;\ (u,v) \in H^2,\ \|u\| = \|v\| = 1\right\} \leq 1-\alpha^2 < 1.$$

□

La démonstration de la proposition précédente amène le

Corollaire 4.1. *Soit H_i et H_j deux sous-espaces fermés tels que la somme $G = H_i + H_j$ soit directe et fermée dans H. Alors, le projecteur orthogonal sur G est :*

$$\Pi_G = R_{ij}^{-1}\Pi_j\Pi_i^\perp + R_{ji}^{-1}\Pi_i\Pi_j^\perp.$$

Preuve. Pour tout x de H, $\Pi_G x$ est l'élément de la forme $x_i + x_j$ ($x_i \in H_i$, $x_j \in H_j$) caractérisé par la nullité pour tout y de H_i et tout z de H_j du produit scalaire $\langle x - x_i - x_j, y+z\rangle$, ce qui équivaut à :

$$\forall\ y \in H_i,\ \ \langle \Pi_i x - x_i - \Pi_i x_j, y\rangle = 0 \ \text{ et } \ \forall\ z \in H_j,\ \ \langle \Pi_j x - \Pi_j x_i - x_j, z\rangle = 0,$$

et conduit à résoudre le système (4.1), où x est ici un élément de H. Les valeurs de x_i et x_j en fonction de x donnée par (4.2) et (4.3) fournissent bien le résultat indiqué pour Π_G.

$\square$

Lemme 4.1. *Soit P_i et P_j les projecteurs orthogonaux de H sur deux sous-espaces fermés F_i et F_j tels que l'opérateur $S := I - P_j^\perp P_i^\perp$ $(= P_i + P_j - P_j P_i)$ soit inversible. Alors,*

$$T = P_i S^{-1} P_j \left(= P_j \left(S^*\right)^{-1} P_i = T^*\right)$$

est le projecteur orthogonal sur $F_i \cap F_j$.

Preuve. Il convient de remarquer la propriété évidente, mais à la base de la démonstration :

$$\forall\ x \in H,\ \forall\ y \in H \quad \text{avec } Sx = P_j y, \quad \text{on a} : Ty = P_i x \qquad (\mathcal{P})$$

(on a en effet $Ty = P_i S^{-1} P_j y = P_i \left(S^{-1} S\right) x = P_i x$).

Il en résulte que, tout élément y de $F_i \cap F_j$ vérifiant $Sy = y$, on a $Ty = P_i y = y$ et la restriction de T à $F_i \cap F_j$ est donc l'injection canonique de $F_i \cap F_j$ dans H. Il suffit donc de montrer que T est nulle sur $(F_i \cap F_j)^\perp = \overline{F_i^\perp + F_j^\perp}$. Cette propriété résulte de la nullité des restrictions de T à $F_i^\perp$ et $F_j^\perp$: pour tout y de $F_i^\perp$, on a $Sy = y - P_j^\perp y = P_j y$, d'où, en utilisant $(\mathcal{P})$, $Ty = P_i y = 0$ et, d'autre part, pour tout y de $F_j^\perp$ on a $S0 = P_j y$, d'où en, utilisant à nouveau $(\mathcal{P})$, $Ty = P_i 0 = 0$. $\square$

On en déduit le

Corollaire 4.2. *Lorsque $H_i + H_j$ est une somme directe fermée, le projecteur orthogonal sur $H_i^\perp \cap H_j^\perp$* est

$$\Pi_{H_i^\perp \cap H_j^\perp} = \Pi_i^\perp R_{ij}^{-1} \Pi_j^\perp \left(= \Pi_j^\perp R_{ji}^{-1} \Pi_i^\perp\right).$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme à $F_k = H_k^\perp$ $(k = i, j)$ puisque par hypothèse la norme de $\Pi_i \Pi_j$ est strictement inférieure à 1 et R_{ji}, comme R_{ij}, est inversible.

$\square$

Nota : les démonstrations de la proposition 4.2, du corollaire 4.1, du lemme 4.1 et du corollaire 4.2 précédents sont largement inspirées de Havin et Jöricke (1995).

4.3. Les opérateurs $D_{ij} = \Pi_i \Pi_j \Pi_i$, $\tilde{D}_{ij} \in \mathcal{L}(H, H_i)$ et $Q_{ij} = I - D_{ij}$ $((i,j) \in \Delta')$

Les opérateurs D_{ij} et Q_{ij} sont manifestement auto-adjoints et positifs. Cette dernière propriété est évidente pour $D_{ij} = (\Pi_i \Pi_j)(\Pi_i \Pi_j)^*$ et pour Q_{ij} provient de ce que l'on a :

$$\langle Q_{ij} x, x \rangle = \|x\|^2 - \langle \Pi_i \Pi_j \Pi_i x, x \rangle \text{ et } 0 \leq \langle \Pi_i \Pi_j \Pi_i x, x \rangle \leq \|x\|^2.$$

Propriété 4.3. *On a:*

1. $\operatorname{Ker} D_{ij} = \operatorname{Ker} \tilde{D}_{ij} = \left(H_i \cap H_j^\perp\right) \oplus H_i^\perp$; $\overline{\operatorname{Im} D_{ij}} = \overline{\operatorname{Im} \tilde{D}_{ij}} = H_i \ominus \left(H_i \cap H_j^\perp\right)$.
2. $D_{ij}^* = D_{ij}$; $\tilde{D}_{ij}^* = V_{ij}$.
3. $\operatorname{sp}^* D_{ij} = \operatorname{sp}^* D_{ji} = \operatorname{sp}^* U_{ij} = \operatorname{sp}^* U_{ij}^* = \operatorname{sp}^* \tilde{V}_{ij} \subset [0,1]$.
4. $D_{ij^\perp} = \Pi_i R_{ij} = R_{ji} \Pi_i$; $D_{ij \vert H_i} = V_{ij}$.
5. Si $\lambda \neq 0$, $x \in E_\lambda(D_{ij}) \Leftrightarrow x \in E_\lambda(U_{ij}) \Leftrightarrow x \in E_\lambda\left(\tilde{V}_{ij}\right)$; $\operatorname{sp} Q_{ij} \subset [0,1]$; $E_0(D_{ij}) = E_1(Q_{ij}) = \left(H_i \cap H_j^\perp\right) \oplus H_i^\perp$; $E_1(D_{ij}) = E_0(Q_{ij}) = H_i \cap H_j$.

Preuve. La propriété 1 et la première égalité de 2 proviennent des égalités

$$D_{ij} = (\Pi_i \Pi_j)(\Pi_j \Pi_i) = U_{ji} U_{ji}^* = U_{ij}^* U_{ij},$$

(qui montrent de plus que D_{ij} est auto-adjoint positif, de spectre ponctuel dans $[0,1]$). La deuxième égalité de 2 résulte du point 1 de la propriété 4.1.

La vérification de 4 est immédiate.

Il est clair que tout vecteur propre x de D_{ij} (resp. U_{ji}; resp. $\tilde{V}_{ij}$) associé à une valeur propre non nulle λ est un élément de H_i et on a :

$$D_{ij} x = \lambda x \Leftrightarrow \Pi_i \Pi_j x = \lambda x \Leftrightarrow \Pi_i \Pi_{j \vert H_i} x = \lambda x.$$

Si λ est valeur propre de Q_{ij}, il est clair que $1 - \lambda$ est un élément de $\operatorname{sp} D_{ij}$ qui est contenu dans $[0,1]$. Les autres résultats sont évidents.

□

4.4. Les opérateurs $R_{ij} = I - \Pi_j \Pi_i$ $((i,j) \in \Delta')$

Rappelons que R_{ij} est inversible dès que la norme de $\Pi_j \Pi_i$ est strictement inférieure à 1, donc dès que $H_i + H_j$ est une somme directe fermée.

Propriété 4.4. *On a :*

1. $R_{ij}^* = R_{ji}$; $R_{i^\perp j^\perp} = \Pi_i + \Pi_j - \Pi_j \Pi_i$; $R_{ij}\Pi_i = U_{ij^\perp}$; $\Pi_j R_{ij} = U_{i^\perp j}$.
2. $\operatorname{Ker} R_{ij} = H_i \cap H_j ; \overline{\operatorname{Im} R_{ij}} = \overline{H_{i^\perp} + H_{j^\perp}}$.
3. $\operatorname{sp} R_{ij} \subset [0,1]$ et $E_1 (R_{ij}) = \left(H_i \cap H_{j^\perp} \right) \oplus H_{i^\perp}$.
4. $\left\| \Pi_i \Pi_j \right\|_\infty < 1 \quad \Rightarrow \; R_{ij} \quad$ inversible

Preuve. 1. La première égalité est évidente. On a par ailleurs (cf. aussi le lemme 4.1) :

$$R_{i^\perp j^\perp} = I - (I - \Pi_j)(I - \Pi_i) = \Pi_i + \Pi_j - \Pi_j \Pi_i$$

et, par exemple :

$$R_{ij}\Pi_i = (I - \Pi_j)\,\Pi_i.$$

2. L'égalité est vraie puisque l'on a : $\operatorname{Ker} R_{ij} = E_1 (\Pi_j \Pi_i)$ (cf. ensuite la propriété 4.2.). Le deuxième résultat provient de l'égalité $\overline{\operatorname{Im} R_{ij}} = [\operatorname{Ker} R_{ij}]^\perp$.

3. Lorsque x est vecteur propre de R_{ij} associé à la valeur propre λ, on a, d'une part :

$$\lambda \|x\|^2 = \langle R_{ij} x, x \rangle = \|x\|^2 - \langle \Pi_i x, \Pi_j x \rangle \geq 0$$

(l'inégalité étant une conséquence immédiate de celle de Cauchy-Schwarz) et, d'autre part :

$$x - \Pi_j \Pi_i x = \lambda x \Rightarrow U_{ij} x = (1 - \lambda) x, \quad \text{d'où } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

On a enfin : $E_1 (R_{ij}) = \operatorname{Ker} (U_{ij})$.
4. Le résultat a été vu au cours de la démonstration de la proposition 4.2. □

5. Les sommes et différences de projecteurs et leurs opérateurs associés.

5.1. Les opérateurs $\Pi_i + \Pi_j$ **et** $\Pi_i - \Pi_j$ $((i,j) \in \Delta')$

On peut remarquer que l'on a : $\Pi_i - \Pi_j = \Pi_{j^\perp} - \Pi_{i^\perp}$. La norme de cet opérateur est précisée par la

Proposition 5.1. *Soit Π_i et Π_j les projecteurs orthogonaux sur les sous-espaces fermés H_i et H_j respectivement. On a :*

$$\|\Pi_i - \Pi_j\|_\infty = \max\left(\left\|W_{i^\perp j}\right\|_\infty, \left\|W_{j^\perp i}\right\|_\infty\right).$$

Preuve. (variante de Weidman (1980), p. 84) Par définition de la norme d'un opérateur, on a :

$$\|\Pi_i - \Pi_j\|_\infty = \sup\left\{\|\Pi_i u - \Pi_j u\|\,;\ u \in \Sigma\right\} \geq \sup\left\{\|\Pi_i u - \Pi_j u\|\,;\ u \in H_{j^\perp} \cap \Sigma\right\} = \left\|W_{j^\perp i}\right\|_\infty.$$

Comme on a $\|\Pi_i - \Pi_j\|_\infty = \|\Pi_j - \Pi_i\|_\infty$, il vient donc :

$$\|\Pi_i - \Pi_j\|_\infty \geq \max\left(\left\|W_{i^\perp j}\right\|_\infty, \left\|W_{j^\perp i}\right\|_\infty\right).$$

Inversement, pour tout u de H, on a :

$$\begin{aligned}
\|(\Pi_i - \Pi_j)(u)\|^2 &= \left\|\Pi_i \Pi_{j^\perp} u - \Pi_{i^\perp} \Pi_j u\right\|^2 = \left\|\Pi_i \Pi_{j^\perp} u\right\|^2 + \|\Pi_{i^\perp} \Pi_j u\|^2 \\
&= \left\|\Pi_{i|H_{j^\perp}} \Pi_{j^\perp} u\right\|^2 + \langle \Pi_j \Pi_{i^\perp}(\Pi_j u), \Pi_j u\rangle \\
&\leq \left\|W_{j^\perp i}\right\|_\infty \left\|\Pi_{j^\perp} u\right\|^2 + \left\langle \Pi_{j|H_i^\perp}(\Pi_j u), \Pi_j u\right\rangle.
\end{aligned}$$

Comme on a :

$$< W_{i^\perp j}(\Pi_j(u))\,,\, \Pi_j(u) > \leq \ \|W_{i^\perp j}(\Pi_j(u))\|\ \|\Pi_j(u)\| \ \leq \|W_{i^\perp j}\|_\infty \|\Pi_j(u)\|^2,$$

on obtient

$$\|(\Pi_i - \Pi_j)(u)\|^2 \leq \max\left(\left\|W_{j^\perp i}\right\|_\infty, \left\|W_{i^\perp j}\right\|_\infty\right)\left(\left\|\Pi_{j^\perp} u\right\|^2 + \|\Pi_j u\|^2\right),$$

ce qui montre que l'on a :

$$\|\Pi_i - \Pi_j\|_\infty \leq \max\left(\left\|W_{j^\perp i}\right\|_\infty, \left\|W_{i^\perp j}\right\|_\infty\right).$$

□

Remarque 5.1. :

La norme de la différence de deux projecteurs est donc inférieure à 1. On sait (cf. Weidman (1980), p.86) que l'inégalité est stricte à la condition nécessaire qu'il existe un opérateur L unitaire tel que l'on ait : $\Pi_2 = L\Pi_1 L^{-1}$.

Propriété 5.1. *On a:*

1. $\mathrm{Ker}\ (\Pi_i + \Pi_j) = H_i^\perp \cap H_j^\perp$; $\mathrm{Ker}\ (\Pi_i - \Pi_j) = (H_i \cap H_j) \oplus \left(H_i^\perp \cap H_j^\perp\right)$;
2. $\overline{\mathrm{Im}\ (\Pi_i + \Pi_j)} = \overline{H_i + H_j}\ (= H_{i,j})$; $\overline{\mathrm{Im}\ (\Pi_i - \Pi_j)} = H_{i,j} \cap H_{i^\perp, j^\perp}$;
3. $\Pi_i (\Pi_i - \Pi_j)^2 = D_{ij^\perp} = (\Pi_i - \Pi_j)^2 \Pi_i$.
4. $\mathrm{sp}\ (\Pi_i + \Pi_j) \subset [0,2]$; $\mathrm{sp}\ (\Pi_i - \Pi_j) \subset [-1,1]$, $E_2 (\Pi_i + \Pi_j) = H_i \cap H_j$; $E_1 (\Pi_i + \Pi_j) = \left(H_i \cap H_j^\perp\right) \oplus \left(H_i^\perp \cap H_j\right)$ $E_0 (\Pi_i + \Pi_j) = H_i^\perp \cap H_j^\perp$; $E_1 (\Pi_i - \Pi_j) = H_i \cap H_j^\perp$; $E_{-1} (\Pi_i - \Pi_j) = H_i^\perp \cap H_j$; $E_0 (\Pi_i - \Pi_j) = (H_i \cap H_j) \oplus \left(H_i^\perp \cap H_j^\perp\right)$.
5. $x \in E_\lambda (\Pi_i + \Pi_j)$, $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1 \Rightarrow \Pi_i x \in E_{(\lambda-1)^2} (U_{ji})$, $\Pi_i x \in E_{(\lambda-1)^2} (U_{ji})$, $\Pi_i x \in E_{(\lambda-1)^2} \left(\tilde{V}_{ij}\right)$.

Preuve. Les opérateurs $\Pi_i + \Pi_j$ et $\Pi_i - \Pi_j$ sont évidemment auto-adjoints, le premier étant de plus positif et l'on a :

$$\forall\ x \in H, \quad \langle x, \Pi_i x\rangle + \langle x, \Pi_j x\rangle = \|\Pi_i x\|^2 + \|\Pi_j x\|^2 \geq 0. \qquad (5.1)$$

Pour tout x de $\mathrm{Ker}\ (\Pi_i + \Pi_j)$, (5.1) entraîne $\|\Pi_i x\| = \|\Pi_j x\| = 0$, donc $x \in H_i^\perp \cap H_j^\perp$. L'inclusion inverse est évidente.

L'inclusion $(H_i \cap H_j) \oplus \left(H_i^\perp \cap H_j^\perp\right)$ dans $\mathrm{Ker}\ (\Pi_i - \Pi_j) = \mathrm{Ker}\ \left(\Pi_{j^\perp} - \Pi_{i^\perp}\right)$ est évidente. Inversement, pour tout x du noyau de $\Pi_i - \Pi_j$, on a $\Pi_i x = \Pi_j x$ et $\Pi_{i^\perp} x = \Pi_{j^\perp} x$. Il vient donc : $\Pi_i x \in H_i \cap H_j$ et $\Pi_{i^\perp} x \in H_i^\perp \cap H_j^\perp$, d'où l'inclusion inverse puisque l'on a : $x = \Pi_i x + \Pi_{i^\perp} x$.

On a par ailleurs :

$$\overline{\mathrm{Im}\ (\Pi_i + \Pi_j)} = [\mathrm{Ker}\ (\Pi_i + \Pi_j)]^\perp = \left(H_i^\perp \cap H_j^\perp\right)^\perp = \overline{H_i + H_j},$$

$$\overline{\text{Im }(\Pi_i - \Pi_j)} = [\text{Ker }(\Pi_i - \Pi_j)]^{\perp} = \left(\overline{H_i + H_j}\right) \cap \overline{\left(H_i^{\perp} + H_j^{\perp}\right)}.$$

Un simple calcul montre la commutativité de Π_i et $(\Pi_i - \Pi_j)^2$.

4. La première inclusion provient de ce que les projecteurs ont une norme inférieure à 1 et de ce que $\Pi_i + \Pi_j$ est positif. La seconde résulte de la proposition 5.1.

On a :

$$\begin{aligned}
&x \in E_2(\Pi_i + \Pi_j) \;\Leftrightarrow\; (I - \Pi_i)\,x + (I - \Pi_j)\,x = 0 \;\Leftrightarrow x \in \text{Ker }\left(\Pi_{i^\perp} + \Pi_{j^\perp}\right),\\
&x \in E_1(\Pi_i + \Pi_j) \;\Leftrightarrow\; \left(\Pi_i - \Pi_{j^\perp}\right) x = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \text{Ker }\left(\Pi_i - \Pi_{j^\perp}\right),\\
&E_0(\Pi_i + \Pi_j) = \text{Ker }(\Pi_i + \Pi_j).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x \in E_1(\Pi_i - \Pi_j) \;\Leftrightarrow\; \Pi_{i^\perp}x + \Pi_j x = 0 \;\Leftrightarrow x \in \text{Ker }(\Pi_{i^\perp} + \Pi_j),\\
&x \in E_{-1}(\Pi_i - \Pi_j) \;\Leftrightarrow\; \Pi_i x + \Pi_{j^\perp}x = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \text{Ker }\left(\Pi_i + \Pi_{j^\perp}\right),\\
&E_0(\Pi_i - \Pi_j) = \text{Ker }(\Pi_i - \Pi_j).
\end{aligned}$$

Soit x vecteur propre de $\Pi_i + \Pi_j$ associé à une valeur propre λ différente de 0 et 1. Ce vecteur propre appartient nécessairement à $H_i + H_j$. Il vient :

$$\Pi_i x + \Pi_j x = \lambda x \;\Rightarrow\; \begin{cases} \Pi_i\Pi_j x = (\lambda - 1)\Pi_i x \\ \Pi_j\Pi_i x = (\lambda - 1)\Pi_j x \end{cases} \;\Rightarrow\; (\Pi_i\Pi_j)\,\Pi_i x = (\lambda - 1)^2\Pi_i x.$$

Si $\Pi_i x$ était nul, on aurait : $\Pi_j x = \lambda x$ ce qui est impossible puisque l'on a supposé λ différent de 0 et 1. Il en résulte que $\Pi_i x$ est vecteur propre de U_{ji} (ou encore de D_{ij} ou $\tilde{V}_{ij}$) associé à la valeur propre $(\lambda - 1)^2$, d'où le point 5.

□

Remarque 5.2.: L'opérateur $B_{ij} := (\Pi_i + \Pi_j - I)_{|H_{i,j}}$ n'admet donc pas la valeur propre -1. En effet, $\Pi_i x + \Pi_j x - x = -x$ $(x \in H_{i,j})$ signifie que x appartient Ker $(\Pi_i + \Pi_j)$ et $B_{ij}x = -x$ n'est donc possible que lorsque x appartient à $\left(\overline{H_i + H_j}\right) \cap \left(\overline{H_i + H_j}\right)^{\perp} = \{0\}$.

Remarque 5.3. : Lorsque (H_i, H_j) est un couple en position générique, $\Pi_i + \Pi_j$ (resp. $\Pi_i - \Pi_j$) n'admet pas les valeurs propres 0, 1 et 2 (resp. 0, et ± 1). De même, lorsque (H_i, H_j) est un a-couple, 2 ne peut pas être valeur propre de $\Pi_i + \Pi_j$ et le noyau de $\Pi_i - \Pi_j$ est l'orthogonal de $H_{i,j}$.

5.2. Les opérateurs $B'_{ij} = \Pi_i + \Pi_j - I$ et $A'_{ij} = B'^2_{ij}$ $((i,j) \in \Delta')$

Les opérateurs B'_{ij} et A'_{ij} sont évidemment auto-adjoints. Le second est positif et on a : $A'_{ij} = B'_{ij}B'^{*}_{ij}$. Ces opérateurs ont donc même noyau et même fermeture d'image.

Propriété 5.2. *On a :*

1. $B'_{ij} = \Pi_i - \Pi_{j^\perp} = \Pi_j - \Pi_{i^\perp} = -B'_{i^\perp j^\perp}$.

2. $A'_{ij} = \Pi_i\Pi_j + \Pi_{j^\perp}\Pi_{i^\perp} = \Pi_j\Pi_i + \Pi_{i^\perp}\Pi_{j^\perp}$.

3. $B'_{ij}\Pi_i = U_{ij} = \Pi_j B'_{ij}$; $\Pi_i A'_{ij} = D_{ij} = A'_{ij}\Pi_i$; $B'_{ij|H_i} = \Pi_{j|H_i}$; $A'_{ij|H_i} = V_{ij}$.

4. $\operatorname{Ker} A'_{ij} = \operatorname{Ker} B'_{ij} = \left(H_i \cap H_j^\perp\right) \oplus \left(H_i^\perp \cap H_j\right)$.

5. $\|V_{ij}\|_\infty = \|V_{ji}\|_\infty \leq \left\|A'_{ij}\right\|_\infty = \left\|B'_{ij}\right\|_\infty^2 \leq \max\left(\left\|W_{i^\perp j^\perp}\right\|_\infty^2, \|W_{ji}\|_\infty^2\right)$

6. $\overline{\operatorname{Im} A'_{ij}} = \overline{\operatorname{Im} B'_{ij}} = H_{i,j^\perp} \cap H_{i^\perp,j}$.

7. $\operatorname{sp} B'_{ij} \subset [-1,1]$; $E_1\left(B'_{ij}\right) = H_i \cap H_j$;
   $\forall\, \lambda \in \operatorname{sp} B'_{ij} - \{-1\}$, $E_\lambda\left(B'_{ij}\right) \subset H_i + H_j$;
   si $\lambda \neq 0$ et -1, $\lambda \in \operatorname{sp}^* B'_{ij} \Rightarrow \lambda^2 \in \operatorname{sp}^* V_{ij} \Leftrightarrow \lambda^2 \in \operatorname{sp}^* D_{ij}$.

Preuve.

Les points 1 et 3 sont obtenus par simples vérifications. On a (la deuxième égalité s'en déduisant par symétrie) :

$$A'_{ij} = (\Pi_i + \Pi_j - I)^2 = \left(\Pi_i - \Pi_{j^\perp}\right)(\Pi_j - \Pi_{i^\perp}) = \Pi_i\Pi_j + \Pi_{j^\perp}\Pi_{i^\perp}.$$

d'où 2.
4. Cette propriété provient de l'égalité :

$$\operatorname{Ker}\left(B'_{ij}\right) = E_1(\Pi_i + \Pi_j)$$

5. La première inégalité vient de ce que l'on a : $V_{ij} = A'_{ij|H_i}$, la seconde de ce que A'_{ij} est égal à $B'_{ij}B'^*_{ij}$. Enfin, le dernier résultat découle imédiatement de la proposition 5.1 appliquée à $B'_{ij} = \Pi_i - \Pi_{j^\perp}$.

6. On a en effet d'après la propriété 5.1 :

$$\overline{\mathrm{Im}\, B'_{ij}} = \overline{\mathrm{Im}\, \left(\Pi_i - \Pi_{j^\perp}\right)} = H_{i,j^\perp} \cap H_{i^\perp,j}.$$

7. Pour tout vecteur propre x de B'_{ij} associé à la valeur propre λ différente de -1, on a : $x = (1/(\lambda+1))\,(\Pi_i x + \Pi_j x)$. On peut remarquer que $E_1\left(B'_{ij}\right) = E_2\,(\Pi_i + \Pi_j)$ et que, si λ ($\neq 0$ et $\neq -1$) appartient à sp B'_{ij}, λ^2 est (cf. propriété 5.1) valeur propre de D_{ij} et $\tilde{V}_{ij}$.

□

5.3. Les opérateurs B_{ij} et A_{ij}

(restrictions de B'_{ij} et A'_{ij} à $H_{i,j}(=\overline{H_i + H_j})$ $((i,j) \in \Delta')$.

Les images de B_{ij} et A_{ij} sont contenues dans $\overline{H_i + H_j}$ puisque, si $x_i + x_j$ appartient à $H_i + H_j$, on a $B_{ij}\,(x_i + x_j) = \Pi_j x_i + \Pi_i x_j$.

Nous commençons par un résultat important en Analyse Canonique (cf. Dauxois et al. (2000)); il met en évidence les rapports entre les spectres ponctuels de B_{ij} et $\tilde{V}_{ij}$ (donc aussi de $\tilde{V}_{ji}$).

Proposition 5.2. *1. Pour chaque (couple) élément de Δ', 0 est une valeur propre de B_{ij}, de sous-espace propre associé $(H_i \cap H_{j^\perp}) \oplus (H_{i^\perp} \cap H_j)$, lorsque ce sous-espace n'est pas $\{0\}$. Pour tout vecteur propre α de B_{ij} associé à la valeur propre non nulle λ, $\Pi_i(\alpha)$ (resp. $\Pi_j(\alpha)$) est un vecteur propre de V_{ji} (resp. V_{ij}) associé à la valeur propre λ^2.*

2. Tout vecteur propre (s'il en existe) de V_{ij} associé à la valeur propre 0 a une image nulle par B_{ij}. Tout vecteur propre (s'il en existe) de V_{ij} associé à la valeur propre 1 est aussi vecteur propre de B_{ij} associé à la même valeur propre 1. Lorsque f est un vecteur propre unitaire de V_{ij} associé à la valeur propre λ de $]0,1[$, posant $g = \|\Pi_j f\|^{-1}\,\Pi_j f = \lambda^{-1/2}\Pi_j f$, alors, $f + \epsilon g$ (avec $\epsilon = \pm 1$) est un vecteur propre de B_{ij} associé à la valeur propre $\epsilon\sqrt{\lambda}$.

Preuve. 1. La première partie a été montrée antérieurement. Pour tout α de $H_i + H_j$ et tout réel λ non nul vérifiant : $B_{ij}\alpha = \lambda\alpha$, il vient en prenant l'image des deux membres de cette égalité par Π_i (resp. Π_j) :

$$\Pi_i \circ \Pi_j \alpha = \lambda \Pi_i \alpha \qquad (\text{resp. } \Pi_j \circ \Pi_i \alpha = \lambda \Pi_j \alpha)$$

On en déduit :

$$\Pi_i \circ \Pi_j \circ (\Pi_i \alpha) = \lambda\,(\Pi_i \circ \Pi_j)\,\alpha = \lambda^2 \Pi_i \alpha,$$

d'où le résultat puisque $\Pi_i\alpha$ n'est pas nul (si c'était le cas, il en serait de même pour $\Pi_j\alpha$; α appartiendrait à Ker $(\Pi_j + \Pi_i) = H_{i^\perp} \cap H_{j^\perp}$, ce qui ne serait possible que si α était nul).

2. Inversement, pour tout f de H_i, on a : $B_{ij}f = \Pi_j f$. Puisque tout vecteur propre f de V_{ij} associé à $\lambda = 0$ appartient nécessairement à $H_i \cap H_{j^\perp}$, on a bien $B_{ij}f = 0$. On sait par ailleurs que tout f vérifiant $V_{ij}f = f$ appartient à $H_i \cap H_j$. On a donc : $B_{ij}f = \Pi_i f + \Pi_j f - f = f$. Enfin, lorsque f est un vecteur propre unitaire de V_{ij} associé à la valeur propre λ non nulle, on a vu (cf. remarque 4.2) que $g = (1/\sqrt{\lambda})\,\Pi_j f$ est vecteur propre de V_{ji} associé à la même valeur propre. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
&B_{ij}(f + \epsilon g) = \Pi_i(f + \epsilon g) + \Pi_j(f + \epsilon g) - f - \epsilon g = \epsilon \Pi_i g + \Pi_j f \\
&= \epsilon \lambda^{-1/2} \left(\Pi_i \circ \Pi_j\right) f + \lambda^{1/2} g = \epsilon \lambda^{1/2}(f + \epsilon g).
\end{aligned}$$

□

Propriété 5.3. *On a :*

1. $B^*_{ij} = \Pi_i + \Pi_j - \Pi_{H_{i,j}}$; $B_{ij\|H_i} = \Pi_{j\|H_i}$, $A_{ij\|H_i} = V_{ij}$;
2. $\mathrm{Ker}\, B_{ij} = \mathrm{Ker}\, A_{ij} = \left(H_i \cap H_{j^\perp}\right) \oplus \left(H_{i^\perp} \cap H_j\right)$;
3. $\overline{\mathrm{Im}\ A_{ij}} = \overline{\mathrm{Im}\ B_{ij}} = \overline{H_i + H_{j^\perp}} \cap \overline{H_{i^\perp} + H_j}$.
4. $\\|V_{ij}\\|_\infty = \left\\|A_{ij\|H_i}\right\\|_\infty \leq \\|A_{ij}\\|_\infty = \\|B_{ij}\\|^2_\infty \leq \left\\|A'_{ij}\right\\|_\infty = \left\\|B'_{ij}\right\\|^2_\infty$.
5. B'_{ij} compact $\Rightarrow B_{ij}$ et A_{ij} compacts $\Leftrightarrow$ $\tilde{V}_{ij}$ compact.

Preuve. 1. Pour x de $H_{i,j}$ et y de H, on a :

$$\langle B_{ij}x, y\rangle_H = \left\langle x, B'_{ij}y\right\rangle_H = \left\langle \Pi_{H_{i,j}}x, \left(\Pi_i + \Pi_j - I\right)y\right\rangle_H = \left\langle x, \Pi_{H_{i,j}}\left(\Pi_i + \Pi_j - I\right)y\right\rangle_{H_{i,j}},$$

d'où le premier résultat de 1, les autres étant vérifiés sans difficulté.

3. On a en effet :

$$\overline{\mathrm{Im}\,\tilde{A}_{ij}} = \overline{\mathrm{Im}\, B^*_{ij}B_{ij}} = \overline{\mathrm{Im}\, B^*_{ij}} = [\mathrm{Ker}\, B_{ij}]^\perp.$$

5. La première implication est évidente. Comme $\tilde{A}_{ij} = B^2_{ij}$, il est clair que B_{ij} est compact si, et seulement si, il en est de même pour A_{ij}. D'après la dernière égalité de 1., la compacité de A_{ij} entraîne celle de $\tilde{V}_{ij}$. La réciproque vient du fait que, d'après la proposition 5.2, les opérateurs $\tilde{V}_{ij}$ et B^2_{ij} ont même suite pleine de valeurs propres non nulles.

$\square$

6. Les commutateurs et anticommutateurs.

6.1. Les opérateurs $[\Pi_i, \Pi_j] = \Pi_i\Pi_j - \Pi_j\Pi_i$ $((i,j) \in \Delta')$

Notons que le commutateur n'est autre que le crochet de Lie de Π_i et Π_j, qui, pour tout couple et tout triplet de projecteurs considérés, vérifie les deux propriétés :

$[\Pi_j, \Pi_i] = -[\Pi_i, \Pi_j]$ (propriété d'antisymétrie), et

$[\Pi_i\,,\,[\Pi_j, \Pi_k]\,] + [\Pi_j\,,\,[\Pi_k, \Pi_i]\,] + [\Pi_k\,,\,[\Pi_i, \Pi_j]\,] = 0$ (identité de Jacobi)

Propriété 6.1. *On a :*

1. $[\Pi_i, \Pi_j] = [\Pi_j, \Pi_{i^\perp}] = \left[\Pi_{j^\perp}, \Pi_i\right] = \left[\Pi_{i^\perp}, \Pi_{j^\perp}\right]$. $[\Pi_i, \Pi_j]^* = [\Pi_j, \Pi_i]$
2. $(\Pi_i - \Pi_j) \circ B'_{ij} = [\Pi_i, \Pi_j] = B'_{ij} \circ (\Pi_j - \Pi_i) = B_{ij} \circ (\Pi_j - \Pi_i)$.
3. Ker $[\Pi_i, \Pi_j] =$ comm (H_i, H_j).
4. $\overline{\mathrm{Im}\,[\Pi_i, \Pi_j]} = [\mathrm{comm}\,(H_i,H_j)]^\perp$; $H = \mathrm{comm}\,(H_i,H_j) \oplus [\mathrm{Ker}\,[\Pi_i, \Pi_j]]^\perp$.

Preuve.
La vérification des points 1 et 2 est immédiate. Par ailleurs, on déduit de 2 que l'on a :

$$\mathrm{Ker}\,[\Pi_i, \Pi_j] \supset \mathrm{Ker}\,B'_{ij} \oplus \mathrm{Ker}\,(\Pi_i - \Pi_j) = \mathrm{comm}\,(H_i, H_j)\,(:= H_0).$$

Inversement, soit $u = v + w \in H_0 \oplus H_0^\perp$ un élément de Ker $[\Pi_i, \Pi_j]$. Alors, $w = u - v$ appartient aussi au noyau de $[\Pi_i, \Pi_j]$; il en résulte que $\Pi_i \circ \Pi_j(w)$ $(= \Pi_j \circ \Pi_i(w))$, donc élément de H_0, est orthogonal à w. On en déduit :

$$\langle \Pi_i w, \Pi_j w\rangle = \langle w, \Pi_i \circ \Pi_j w\rangle = 0. \qquad (6.1)$$

D'après 1, u est aussi un élément de Ker $[\Pi_{i^\perp}, \Pi_j]$, de Ker $\left[\Pi_i, \Pi_{j^\perp}\right]$ et de Ker $\left[\Pi_{i^\perp},\ \Pi_{j^\perp}\right]$ respectivement. La relation (6.1) est donc encore vraie si, au couple (i,j), on substitue

$\left(i^{\perp}, j\right)$ (resp. $\left(i, j^{\perp}\right)$; resp. $\left(i^{\perp}, j^{\perp}\right)$). Il vient par suite :

$$0 = \langle \Pi_{i^\perp} w, \Pi_j w \rangle = \|\Pi_j w\|^2 - \langle \Pi_i w, \Pi_j w \rangle = \|\Pi_j w\|^2 , \quad \text{d'où } \Pi_j w = 0,$$

donc, par symétrie : $\Pi_i w = 0$ et enfin :

$$\|w\|^2 = \langle w - \Pi_i w, w - \Pi_j w \rangle = \left\langle \Pi_{i^\perp} w, \Pi_{j^\perp} w \right\rangle = 0.$$

On obtient : $u = v$ et H_0 est bien le noyau de $[\Pi_i, \Pi_j]$. La première propriété de 4 provient de ce que $[\Pi_i, \Pi_j]^* = [\Pi_j, \Pi_i]$; la seconde est évidente.

□

6.2. Les opérateurs $\{\Pi_i, \Pi_j\} = \Pi_i \Pi_j + \Pi_j \Pi_i \quad ((i,j) \in \Delta')$

Considérons, pour terminer, l'opérateur "anticommutateur" des projecteurs Π_i et Π_j défini par $\{\Pi_i, \Pi_j\} = \Pi_i \Pi_j + \Pi_j \Pi_i$ et qu'on peut aussi rencontrer avec la notation $[\Pi_i, \Pi_j]_+$ pour le distinguer du commutateur précédent qui est parfois noté $[\Pi_i, \Pi_j]_-$.

Propriété 6.2. On a :

1. $\{\Pi_i, \Pi_j\} = \{\Pi_j, \Pi_i\} = \{\Pi_i, \Pi_j\}^*$
2. $\{\Pi_i, \Pi_j\} + \{\Pi_{i^\perp}, \Pi_j\} = 2\Pi_j$ $\{\Pi_i, \Pi_j\} + \{\Pi_{i^\perp}, \Pi_j\} + \{\Pi_i, \Pi_{j^\perp}\} + \{\Pi_{i^\perp}, \Pi_{j^\perp}\} = 2I$
3. $\{\Pi_i, \Pi_j\} = (\Pi_i + \Pi_j) B'_{ij} = B'_{ij}(\Pi_i + \Pi_j)$
4. $\mathrm{Ker}\{\Pi_i, \Pi_j\} = \mathrm{Ker}\ [\Pi_i, \Pi_j] \ominus \mathrm{Ker} R_{ij}$ et $\overline{\mathrm{Im}\{\Pi_i, \Pi_j\}} = H_o^\perp \oplus (H_i \cap H_j)$

Preuve.

Les trois premiers points se vérifient aisément. La démonstration du 4 ressemble à celle du point 3 de la propriété précédente mais on n'a pas l'égalité entre les quatre anticommutateurs possibles avec $(i,j) \in \Delta'$.

D'abord Ker $\{\Pi_i, \Pi_j\}$ contient bien $\mathrm{Ker} B'_{ij} \oplus \mathrm{Ker}\,(\Pi_i + \Pi_j)$ et on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker} B'_{ij} \oplus \mathrm{Ker}\,(\Pi_i + \Pi_j) &= (H_{i^\perp} \cap H_j) \oplus (H_i \cap H_{j^\perp}) \oplus (H_{i^\perp} \cap H_{j^\perp}) \\ &= \mathrm{comm}\,(H_i, H_j) \ominus (H_i \cap H_j) \\ &= \mathrm{Ker}\ [\Pi_i, \Pi_j] \ominus \mathrm{Ker}\, R_{ij}. \end{aligned}$$

Inversement, soit $x = x_o + x_1 + x_2$ avec $x_0 \in \mathrm{comm}\,(H_i, H_j) \ominus (H_i \cap H_j)$, $x_1 \in H_i \cap H_j$ et $x_2 \in H_o^\perp$ (ces trois éléments étant bien sûr orthogonaux deux à deux).

On suppose que $x \in \mathrm{Ker}\,\{\Pi_i, \Pi_j\}$. Montrons que $x_1 = x_2 = 0$.

On sait que $x - x_o$ $(= x_1 + x_2)$ est tel que

$$\{\Pi_i, \Pi_j\}(x_1 + x_2) = 2x_1 + \{\Pi_i, \Pi_j\}x_2 = 0.$$

Comme l'anticommutateur est un opérateur auto-adjoint, on en déduit,

$$\langle 2x_1 + \{\Pi_i, \Pi_j\}x_2,\, x_1\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\|x_1\|^2 + \langle x_2,\, \{\Pi_i, \Pi_j\}x_1\rangle = 2\|x_1\|^2 + 2\,\langle x_2,\, x_1\rangle = 0\,,$$

et donc $x_1 = 0$, ce qui entraîne

$$\Pi_i\Pi_j x_2 + \Pi_j\Pi_i x_2 = 0$$

et donc, en développant et par symétrie du produit scalaire,

$$\langle(\Pi_i\Pi_j + \Pi_j\Pi_i)x_2,\, x_2\rangle = \langle \Pi_i\Pi_j x_2,\, x_2\rangle + \langle \Pi_j\Pi_i x_2,\, x_2\rangle = 2\,\langle \Pi_j x_2,\, \Pi_i x_2\rangle = 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\|\Pi_i\Pi_j x_2\|^2 &= \langle \Pi_i\Pi_j x_2,\, \Pi_i\Pi_j x_2\rangle \\
&= \langle \Pi_j x_2,\, \Pi_i\Pi_j x_2\rangle = \langle (\Pi_j - I + I)x_2,\, \Pi_i\Pi_j x_2\rangle \\
&= -\langle (I - \Pi_j)x_2,\, \Pi_j\Pi_i x_2\rangle + \langle x_2,\, \Pi_i\Pi_j x_2\rangle \\
&= -\langle x_2,\, \Pi_{j\perp}\Pi_j\Pi_i x_2\rangle = 0
\end{aligned}$$

D'où, $\Pi_i\Pi_j x_2 = 0 = \Pi_j\Pi_i x_2$, c'est-à-dire encore que x_2 appartient à Ker $[\Pi_i, \Pi_j]$. Comme, par hypothèse, x_2 appartient aussi à son orthogonal $H_o^\perp$, on en déduit qu'il est nul.

□

ANNEXE : TABLEAUX SYNTHETIQUES

A. Premier tableau : OPÉRATEURS de BASE

B. Second tableau : OPÉRATEURS ASSOCIÉS

Opérateur	Notation	Noyau	(Fermeture de l') Image	Adjoint	Spectre
Π_i	-	$H_i^\perp$	H_i	autoadjoint (a.a.)	sp $\Pi_i = \{0,1\}$
$\Pi_j\Pi_i$	U_{ij}	$(H_i \cap H_j^\perp) \oplus H_i^\perp$	$H_j \ominus (H_j \cap H_i^\perp)$	U_{ji}	sp $U_{ij} \subset [0,1]$
$\Pi_i\Pi_j\Pi_i$	D_{ij}	$(H_i \cap H_j^\perp) \oplus H_i^\perp$	$H_i \ominus (H_i \cap H_j^\perp)$	a.a.	sp $D_{ij} \subset [0,1]$
$\Pi_i + \Pi_j$	-	$H_i^\perp \cap H_j^\perp$	$\overline{H_i + H_j}$ $(:= H_{i,j})$	a.a.	sp $(\Pi_i + \Pi_j) \subset [0,2]$
$\Pi_i - \Pi_j$	-	$(H_i \cap H_j) \oplus (H_i^\perp \cap H_j^\perp)$	$H_{i,j} \cap H_{i^\perp,j^\perp}$	a.a.	sp $(\Pi_i - \Pi_j) \subset [-1,1]$
$I - \Pi_j\Pi_i$	R_{ij}	$H_i \cap H_j$	$H_{i^\perp,j^\perp}$	R_{ji}	sp $R_{ij} \subset [0,1]$
$I - \Pi_i\Pi_j\Pi_i$	Q_{ij}	$H_i \cap H_j$	$H_{i^\perp,j^\perp}$	a.a.	sp $Q_{ij} \subset [0,1]$
$\Pi_i + \Pi_j - I$	B'_{ij}	$(H_i \cap H_j^\perp) \oplus (H_i^\perp \cap H_j)$	$H_{i,j^\perp} \cap H_{i^\perp,j}$	a.a.	sp $B'_{ij} \subset [-1,1]$
$(\Pi_i + \Pi_j - I)^2$	A'_{ij}	$(H_i \cap H_j^\perp) \oplus (H_i^\perp \cap H_j)$	$H_{i,j^\perp} \cap H_{i^\perp,j}$	a.a.	sp $A'_{ij} \subset [0,1]$
$\Pi_i\Pi_j - \Pi_j\Pi_i$	$[\Pi_i, \Pi_j]$	$\mathrm{comm}(H_i, H_j)$	$[\mathrm{comm}(H_i, H_j)]^\perp$	$[\Pi_j, \Pi_i]$	-
$\Pi_i\Pi_j + \Pi_j\Pi_i$	$\{\Pi_i, \Pi_j\}$	$\mathrm{comm}(H_i, H_j) \ominus (H_i \cap H_j)$	$[\mathrm{comm}(H_i, H_j) \ominus (H_i \cap H_j)]^\perp$	a.a.	-

Opérateur	Domaines	Noyau	(Fermeture de l')Image	Adjoint
$\widetilde{\Pi}_i$	$H \to H_i$	$H_i^\perp$	H_i	$j_i : H_i \hookrightarrow H$
$W_{ij} = \Pi_{j\vert H_i}$	$H_i \to H$	$H_i \cap H_j^\perp$	$H_j \ominus (H_i^\perp \cap H_j)$	$\widetilde{U}_{ji}$
$\widetilde{W}_{ij} = \widetilde{\Pi}_{j\vert H_i}$	$H_i \to H_j$	$H_i \cap H_j^\perp$	$H_j \ominus (H_i^\perp \cap H_j)$	$\widetilde{W}_{ji}$
$V_{ij} = \Pi_i \Pi_{j\vert H_i}$	$H_i \to H$	$H_i \cap H_j^\perp$	$H_i \ominus H_i \cap H_j^\perp$	$\widetilde{D}_{ij}$
$\widetilde{V}_{ij} = \widetilde{\Pi}_{i\vert H_j} \widetilde{\Pi}_{j\vert H_i}$	$H_i \to H_i$	$H_i \cap H_j^\perp$	$H_i \ominus H_i \cap H_j^\perp$	$\widetilde{V}_{ji}$
$\widetilde{U}_{ij}$	$H \to H_j$	$(H_i \cap H_j^\perp) \oplus H_i^\perp$	$H_j \ominus (H_j \cap H_i^\perp)$	W_{ji}
$\widetilde{D}_{ij}$	$H \to H_i$	$(H_i \cap H_j^\perp) \oplus H_i^\perp$	$H_i \ominus (H_i \cap H_j^\perp)$	V_{ij}
$B_{ij} = B'_{ij\vert H_{i,j}}$	$H_{i,j} \to H$	$(H_i \cap H_j^\perp) \oplus (H_i^\perp \cap H_j)$	$H_{i,j^\perp} \cap H_{i^\perp,j}$	$\Pi_i + \Pi_j - \Pi_{H_{i,j}}$
$A_{ij} = A'_{ij\vert H_{i,j}}$	$H_{i,j} \to H$	$(H_i \cap H_j^\perp) \oplus (H_i^\perp \cap H_j)$	$H_{i,j^\perp} \cap H_{i^\perp,j}$	-

Références bibliographiques

[1] **Amrein, W. O.** et **Sinha, K. B.** (1994). On pairs of projections in a Hilbert space. *Linear Algebra Appl.,* **208/209** 425-435.

[2] **Avron, J.**, **Seiler, R.** et **Simon, B.** (1994). The index of a pair of projections. *J. Funct. Anal.,* **120**, 220-237.

[3] **Baksalary, J.** (1987). Algebraic characterizations and statistical implications of the commutativity of orthogonal projectors. In *Proc. Sec. Int. Tampere Conf. Stat.* Pukkila et Putanen Eds, Univ. Tampere.

[4] **Birman, M. S.** et **Solomjak, M. S.** (1987). *Spectral Theory of Self-Adjoint Operator in Hilbert Spaces.* Reidel, Dordrecht.

[5] **Brezis, D.** (1983). *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson, Paris.

[6] **Dauxois, J.** et **Nkiet, G. M.** (1997). Canonical analysis of two Euclidean subspaces and its applications. *Linear Algebra Appl.,* **264** 355-388.

[7] **Dauxois, J.** et **Nkiet, G. M.** (1998). Nonlinear canonical analysis and independance tests. *Ann. Statist.,* **26** n°4, 1254-1278.

[8] **Dauxois, J.**, **Nkiet, G. M.** et **Romain, Y.** (2000). Analyse Canonique relative à un sous-espace fermé. *Publ. Lab. Statist. Probab.,* **16**-00. Université Paul Sabatier, Toulouse.

[9] **Dauxois, J.** et **Pousse, A.** (1975). Une extension de l'analyse canonique. Quelques Applications. *Ann. Inst. Henri Poincaré,* XI 355-379.

[10] **Davis, C.** (1958). Separation of two linear subspaces. *Acta Sci. Math. (Szeged),* **19**, 172-187.

[11] **Dieudonné, J.** (1968). *Fondements de l'Analyse moderne. t. 1.* Gauthier-Villars, Paris.

[12] **Dixmier, J.** (1948). Positions relatives de deux variétés fermées dans un espace de Hilbert. *Rev. Sci.,* **86**, 387-389.

[13] **Dunford, N.** et **Schwartz, J. T.** (1964). *Linear Operators. t. 1 &2.* Interscience Publishers, New-York.

[14] **Gel'fand, I. M.** et **Yaglom, A. M.** (1957). Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function. *Usp. Mat. Nauk.* **12**(1) 3-52; english transl., *Ann. Math. Soc. Transl.,* **12** 192-246 (1959).

[15] **Gohberg, I. C.** et **Krejn, M. G.** (1971). *Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non-autoadjoints dans un espace hilbertien.* Dunod, Paris.

[16] **Halmos, P. R.**(1969). Two subspaces. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **144,** 381-389.

[17] **Hannan, E.J.** (1961). The general theory of canonical correlations and its relation to functional analysis. *J. Austral. Math. Soc.,***2** 229-242.

[18] **Havin, V.** et **Jöricke, B.** (1995). The uncertainty principle in harmonic analysis. In *Commutative Harmonic Analysis 3, Encyclopaedia of Mathematical Sciences,* vol. 72 (Havin and al, Eds). Springer, Berlin.

[19] **Kalmbach,G.** (1983). *Orthomodular lattices.* Academic Press, London.

[20] **Kato, T.** (1980). *Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer-Verlag, New-York.

[21] **Lenard, A.** (1972). The numerical range of a pair of projections. *J. Funct. Anal.,* **10** 410-423.

[22] **Nordström,K.** et **von Rosen,D.**(1987). Algebra of subspaces with applications to problems in statistics. *Proc. Sec. Int. Tampere Conf. Stat.* Pukkila et Putanen Eds, Univ. Tampere.

[23] **Romain, Y.** (1997). Une introduction à l'approche fonctionnelle stochastique de la Statistique. *Publ. Lab. Statist. Probab.,* **09**-97. Université Paul Sabatier, Toulouse.

[24] **Sunder, V. S** (1988). *N* Subspaces. *Can. J. Math.,* Vol XL, **1**, 38-54.

[25] **Weidman, J.** (1980). *Linear Operators in Hilbert Spaces.* Springer-Verlag, New-York.