Principes d'incertitude et Statistique : une première approche

KOUDOU, A. E.* et ROMAIN, Y.**

*Institut Elie Cartan, Labo. de Maths., Univ. H.Poincaré, B.P. 239,
54506 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex.
e-mail : *koudou@iecn.u-nancy.fr*

**Laboratoire de Statistique et Probabilités, UMR CNRS C55830,
Université Paul Sabatier, 118, Route de Narbonne,
F-31062 Toulouse cedex
e-mail : *romain@cict.fr*

Résumé

Les deux grands types du principe d'incertitude qu'on peut rencontrer dans la littérature sont abordés ici d'un point de vue statistique. Le premier type, qui se met sous la forme d'une minoration du produit de deux variances, intègre les deux versions, classique et quantique, de l'inégalité de Cramer-Rao utilisée en estimation linéaire sans biais et nécessite des conditions de régularité. On étudie notamment la particularité de cette inégalité par rapport au principe d'incertitude d'Heisenberg. Le second type stipule qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent avoir des supports de mesure de Lebesgue simultanément finies et est valable sous des hypothèses moins restrictives. On considère alors une extension complexe de l'analyse canonique réelle de deux sous-espaces hilbertiens et on montre qu'on peut caractériser cette relation d'incertitude à l'aide d'une condition sur le coefficient canonique maximal de deux sous-espaces "conjugués" bien choisis. Enfin, commentaires et perspectives de développements sont présentés en conclusion.

Mots clés *: principe d'incertitude, analyse canonique complexe, inégalité de Cramer-Rao classique, inégalité de Cramer-Rao quantique, analyse harmonique.*

Abstract

The two most known types of the uncertainty principle are considered here from a statistical point of view. The first one, which can be expressed as a positive lower bound of the product of two variances, contains the classical and the quantum versions of the well-known Cramer-Rao inequality which needs regularity conditions. This inequality is then compared to the Heisenberg uncertainty principle.The second one asserts a function and its Fourier transform cannot be "as concentrated as possible" (that is their supports cannot have simultaneously finite Lebesgue measure). We show in this paper we can express that property with a condition on the maximal canonical coefficient between two "conjugated" well chosen complex Hilbert subspaces. Then remarks and future investigations conclude the paper.

Keywords *: Uncertainty Principle, Complex Canonical Analysis, Cramer-Rao inequality, quantum version of the Cramer-Rao inequality, Harmonic Analysis.*

Introduction

Le terme *Principe d'Incertitude* (P.I.) est utilisé dans la littérature pour désigner une famille d'inégalités mathématiques qui a des applications dans de nombreux domaines variés (en physique, en théorie du signal, en mécanique,...) et on distingue généralement deux sous-familles. D'une part, les inégalités où le produit des variances de deux objets liés est minoré par une constante strictement positive : dans ce cas, elles sont dites ici *de type I.* D'autre part, les inégalités concernant l'"incertitude", en un sens à préciser, des mesures simultanées des supports d'une fonction et de sa transformée de Fourier : dans ce cas, elles sont dites *de type II.*

Par exemple, le principe d'incertitude le plus connu est celui d'Heisenberg en mécanique quantique; il stipule que l'on ne peut approcher à la fois la position et le moment ("la vitesse") d'une particule élémentaire avec une marge d'erreur aussi petite que l'on veut. Plus précisément, le produit des écarts-types, ou des variances, de la position et du moment est minoré par une constante strictement positive : cette relation d'incertitude est du premier type. En revanche, lorsqu'on s'intéresse à la durée et aux fréquences d'un signal, on sait qu'on ne peut limiter ces deux grandeurs de façon simultanée autant qu'on le désire : on est alors en présence d'un exemple d'un principe du second type rencontré notamment en analyse harmonique.

Dans la partie 1 de cet article, nous nous intéressons à l'inégalité de Cramer-Rao, dans ses deux versions connues classique et quantique et nous exhibons les faits que, d'une part, dans ses deux versions, elle peut être considérée comme un P.I. de type I et qu'elle nécessite des hypothèses de "régularité", d'autre part, qu'elle admet des fondements légèrement différents d'autres inégalités du même type, comme le P.I. d'Heisenberg par exemple. Il est ainsi remarquable de noter que la version quantique de l'inégalité de Cramer-Rao s'exprime à l'aide de l'anticommutateur de deux opérateurs auto-adjoints (ceux dont on cherche à minorer le produit des variances) alors que le P.I. d'Heisenberg, ou d'autres inégalités encore, s'écrit à partir du commutateur de ces deux opérateurs (et on peut signaler que ces deux formulations ont des écritures en terme de produits tensoriels fonctionnels; cf. ROMAIN (2000)). Sur un plan plus général, ce travail dans le domaine quantique, ou non commutatif, nous semble enrichissant quant à l'élargissement, tant sur le plan théorique que pratique, du champ des méthodes et des applications statistiques (cf. MALLEY ET HORNSTEIN (1993) pour une invitation à la statistique non commutative).

Dans la partie 2, nous proposons de caractériser le principe d'incertitude de type II, qui prend sa source en analyse harmonique, à l'aide d'une condition simple sur le coefficient canonique maximal d'une analyse canonique compacte de deux sous-espaces fermés complexes bien choisis, qui seront dénommés "conjugués" de par leur définition. Les hypothèses sont affaiblies par rapport au P.I. de type I car des conditions d'intégrabilité du premier et du second ordre sont seulement nécessaires. L'analyse canonique complexe, qui est définie ici comme extension du cas réel proposé par DAUXOIS ET POUSSE (1975), est utilisée essentiellement au niveau de sa première étape (le coefficient canonique maximal est la racine carrée de la plus grande valeur propre de l'opérateur auto-adjoint dont l'analyse spectrale fournit l'analyse canonique). On peut aussi remarquer que ce type de P.I. est lié à la non-commutativité de deux projecteurs orthogonaux (ceux dont la comparaison est justement donnée par l'analyse canonique considérée). La démonstration du résultat principal est présentée en plusieurs lemmes et elle est inspirée en grande partie de HAVIN ET JÖRICKE (1995) tout en en proposant des compléments et des corrections.

Enfin, dans la troisième partie, quelques réflexions et remarques permettent d'envisager les perspectives du travail présenté ici. Par exemple, la comparaison de deux sous-espaces hilbertiens fermés complexes, par le biais de leur analyse canonique, nous semble particulièrement intéressante à approfondir dans le futur au vu des applications potentielles tant en statistique classique que quantique.

1. PRINCIPE D'INCERTITUDE DE TYPE I ET INÉGALITÉS DE CRAMER-RAO

On s'intéresse ici aux liens existant entre les deux versions connues de l'inégalité de Cramer-Rao et le principe d'incertitude de type I.

1.1. **Principe d'incertitude de type I.**

La formulation mathématique du principe d'incertitude de type I entre deux objets liés est caractérisée par une inégalité de minoration du produit des variances des deux éléments considérés. En notant A et B les deux objets en question, on a la formulation générale suivante, où c est une constante réelle :

$$\mathrm{Var} A \,\mathrm{Var} B \geq c > 0$$

Le fondement mathématique de cette expression se trouve dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de nombreuses applications peuvent être rencontrées dans la littérature. Par exemple, en électrostatique, où A est le potentiel et B l'énergie d'un élément, en théorie du signal où A est la durée et B l'intensité d'un signal, ou encore, en mécanique quantique où A est la position et B le moment d'une particule élémentaire...

1.2. **Inégalité de Cramer-Rao classique.**

En ce qui concerne la statistique inférentielle classique, c'est en estimation linéaire sans biais qu'on rencontre un P.I. de type I. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta, \theta \in \Theta)$ un modèle statistique paramétrique, où θ est le paramètre réel à estimer. Les deux objets à considérer sont ici un estimateur T sans biais d'une fonction g

du paramètre θ et la “fonction score”, notée S_θ, i.e. le gradient, noté ∇, du logarithme de la fonction de vraisemblance associée à la structure statistique considérée. Sous des conditions de régularité qui sont rappelées ci-dessous, on montre facilement que l'information dite de Fisher est la variance de la fonction score et qu'on peut plonger l'inégalité de Cramer-Rao dans la famille des P.I. de type 1.

Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P_\theta,\, \theta \in \Theta)$ un modèle statistique vérifiant les conditions de régularité suivantes :

i) Il existe une mesure de probabilité μ sur Θ telle que, pour tout $\theta \in \Theta$, P_θ est absolument continue par rapport à μ de densité p_θ. De plus, le support de P_θ ne dépend pas de θ.

ii) Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $\theta \mapsto p_\theta(\omega)$ est de classe C^1 sur Θ et

$$\int_\Omega (\nabla \log p_\theta(\omega))\, p_\theta(\omega)\, d\mu(\omega) = 0.$$

iii)

$$I(\theta) := \int_\Omega (\nabla \log p_\theta(\omega))^2\, p_\theta(\omega)\, d\mu(\omega)$$

est l'information de Fisher qui, lorqu'elle existe, est strictement positive.

Proposition 1.1. *Sous les conditions de régularité précédentes, l'estimateur T et la fonction score S_θ vérifient le principe d'incertitude de type 1 donné par:*

$$Var_\theta(T).\, Var\; S_\theta \geq (\nabla g(\theta))^2,$$

qui, dans le cas particulier d'une estimation linéaire sans biais de θ, est :

$$Var_\theta(T).\, Var\; S_\theta \geq 1.$$

Démonstration. La preuve est bien connue et nous ne la reprenons pas ici. □

Nota : comme cette inégalité admet des extensions bien connues dans le cas multivarié, nous avons volontairement gardé la notation du gradient ici pour y faire allusion.

1.3. **Inégalité de Cramer-Rao : version quantique.**

1.3.1. *Eléments de probabilités non commmutatives.* On fait ici les rappels minimaux nécessaires à la compréhension de ce qui suit (pour se familiariser avec ces notions le lecteur peut consulter par exemple Parthasarathy (1992), Meyer (1993) ou Biane (1995)). Soit H un espace de Hilbert complexe séparable. La notion classique d'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est remplacée par le triplet $(H,\, \mathcal{P}(H),\, \rho)$, où $\mathcal{P}(H)$

est un treillis de sous-espace fermés de H (ou des projecteurs orthogonaux associés) et ρ un opérateur positif de $\mathcal{L}(H)$ de trace unité, parfois dénommé "opérateur de densité". Un événement E est un sous-espace fermé de H et sa probabilité est donnée par :

$$P(E) = \mathrm{tr}\,(\rho\pi_E),$$

où π_E note le projecteur orthogonal associé à E (cette propriété est issue d'un théorème dû à Gleason (1957)).

Une variable aléatoire quantique (v.a.q.) est un opérateur A, autoadjoint et borné, de $\mathcal{L}(H)$. L'analogue de l'écriture classique d'une variable aléatoire X discrète

$$X = \sum \alpha_i \mathbb{I}_{B_i}\,,$$

où B_i est l'image réciproque de α_i par X, est donnée, dans le cas non-commutatif (ou quantique), par la décomposition spectrale de l'opérateur autoadjoint A, c'est-à-dire (dans le cas compact), par :

$$A = \sum \lambda_i \pi_i\,,$$

où les valeurs propres λ_i sont les valeurs de la variable aléatoire et où les projecteurs propres associés jouent le rôle des indicatrices (rappelons ici qu'un projecteur n'admet que 0 et 1 comme valeurs propres possibles). La loi d'une v.a.q. est une mesure de probabilité sur son spectre, qui est réel, et, par rapport au cas classique, on ne peut considérer la loi jointe de deux v.a.q. que lorsqu'elles commutent.

L'espérance d'un projecteur est la probabilité de son sous-espace image et l'espérance de la v.a.q. A s'obtient alors par :

$$\mathbb{E}_\rho(A) = \sum \lambda_i \mathbb{E}_\rho(\pi_i) = \sum \lambda_i \mathrm{tr}(\rho\pi_i) = \mathrm{tr}(\rho \sum \lambda_i\pi_i) = \mathrm{tr}\,(\rho A).$$

Le moment centré d'ordre k de A a comme expression

$$m_k(A) = \mathbb{E}_\rho(A - \mathrm{tr}(\rho A))^k = \mathrm{tr}\,\rho(A - \mathrm{tr}(\rho A))^k,$$

et ainsi la variance de A peut s'écrire :

$$\mathrm{Var}_\rho(A) = \mathrm{tr}(\rho A^2) - (\mathrm{tr}(\rho A))^2.$$

Quant à la covariance de deux v.a.q. A et B, elle est définie par :

$$\mathrm{cov}_\rho(A,B) = \mathrm{tr}\rho(\mathrm{A} - \mathrm{tr}(\rho A))(B - \mathrm{tr}(\rho B)) = \mathrm{tr}(\rho AB) - \mathrm{tr}(\rho\mathrm{A})\mathrm{tr}(\rho B),$$

et, grâce aux propriétés $\mathrm{tr}A^* = \overline{\mathrm{tr}A}$ et $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, elle vérifie :

$$\mathrm{cov}_\rho(B,A) = \overline{\mathrm{cov}_\rho(A,B)}.$$

Notons enfin que la terminologie est inspirée de la physique quantique : par exemple, lorsque l'opérateur ρ peut s'écrire $\rho = u \otimes u$ où u est un vecteur unitaire (i.e. , pour x de H, $\rho(x) =< x, u > u$), on dit que ρ est un "état pur", ou aussi pour une v.a.q. A, on dit souvent " un observable".

1.3.2. *Une formulation générale.* On utilise ici les notions non commutatives précédemment introduites et, de plus, on note par $[A, B]$ (resp. par $\{A, B\}$) le "crochet de Lie" de deux opérateurs autoadjoints, c'est-à-dire encore leur *commutateur* (resp. leur *anticommutateur*), défini par $[A, B] = AB - BA$ (resp. par $\{A, B\} = AB + BA$). Considérons l'opération de "centrage" d'une v.a.q. $A^c = A - \mathbb{E}_\rho(A)$, où $\mathbb{E}_\rho(A) = \mathrm{tr}\,(\rho A)$. Alors, on vérifie facilement les propriétés $[A, B] = [A^c, B^c]$ et $[A, B]^* = -[A, B] = [B, A]$, ainsi que $\{A, B\}^* = \{A, B\}$ et :

$$\mathbb{E}_\rho(\{A^c, B^c\}) = \mathbb{E}_\rho\{A, B\} - 2\mathbb{E}_\rho(A)\mathbb{E}_\rho(B).$$

On a alors le résultat suivant dans le cas où ρ est un "état pur" :

Proposition 1.2. *Soit H un espace de Hilbert complexe. Soit ψ un vecteur unitaire de H et ρ la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par ψ. Si A et B sont des opérateurs hermitiens de $\mathcal{L}(H)$, alors ils vérifient deux principes d'incertitude de type 1 qui s'expriment par :*

$$i) \quad Var_\rho(A)\, Var_\rho(B) \geq \frac{1}{4}| < [A, B], \rho > |^2,$$

$$ii) \quad Var_\rho(A)\, Var_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|\mathbb{E}_\rho\{A^c, B^c\}|^2.$$

Compte tenu des propriétés de l'anticommutateur, il suffit que l'un des opérateurs soit centré pour pouvoir écrire :

$$iii) \quad Var_\rho(A)\, Var_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|\mathbb{E}_\rho\{A, B\}|^2.$$

Démonstration. Notons que, ρ pouvant s'écrire ici $\psi \otimes \psi$, on a, pour tout A autoadjoint de $\mathcal{L}(H)$:

$$\mathbb{E}_\rho(A) = \mathrm{tr}\,(\rho A) = \langle \psi, A\psi \rangle = \langle A\psi, \psi \rangle,$$

et aussi

$$Var_\rho(A) = \mathbb{E}_\rho[(A^c)^2] = \|A^c\psi\|^2.$$

Puisque A et B sont des opérateurs hermitiens de H, un calcul simple donne pour la première inégalité :

$$\begin{aligned}
| < [A, B], \rho > |^2 &= |\langle [A^c, B^c]\psi, \psi \rangle|^2 \\
&= |\langle B^c\psi, A^c\psi \rangle - \overline{\langle B^c\psi, A^c\psi \rangle|}^2 \\
&= |2\mathrm{Im}\langle B^c\psi, A^c\psi \rangle|^2 \\
&\leq 4|\langle B^c\psi, A^c\psi \rangle|^2 \\
&\leq 4\|B^c\psi\|^2\|A^c\psi\|^2 \quad (\text{par Cauchy} - \text{Schwarz}) \\
&\leq 4\, Var_\rho(A)\, Var_\rho(B)
\end{aligned}$$

Ensuite pour la seconde, on a, de façon similaire :

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}_\rho\{A^c, B^c\}|^2 &= |\langle B^c\psi, A^c\psi\rangle + \overline{\langle B^c\psi, A^c\psi\rangle}|^2 \\
&= |2\mathrm{Re}\langle B^c\psi, A^c\psi\rangle|^2 \\
&\leq 4|\langle B^c\psi, A^c\psi\rangle|^2 \\
&\leq 4\,Var_\rho(A)\,Var_\rho(B).
\end{aligned}$$

ce qui entraîne aisément le cas particulier iii) où l'un (au moins) des opérateurs est centré. □

Remarques :

- Si on applique la première inégalité aux opérateurs A de *position* et B de *moment*, qui sont respectivement des opérateurs de multiplication et de dérivation qui ne commutent pas, on retrouve le P.I. d'Heisenberg (cf. PARTHASARATHY (1992)).
- Ces deux inégalités peuvent être présentées à l'aide d'opérateurs tensoriels fonctionnels : voir ROMAIN (2000). Ceci permet notamment de parler du moment d'ordre deux du produit tensoriel (fonctionnel) de deux v.a.q. pour une probabilité produit "tensoriel".
- La troisième inégalité est le fondement de la version quantique de l'inégalité de Cramer-Rao. La présentation simple, que nous proposons ici, en termes de commutateur et anticommutateur d'opérateurs nous semble intéressante pour mieux comparer ces diverses inégalités.

1.3.3. *Version non commutative de l'inégalité de Cramer-Rao.* Nous donnons maintenant une version quantique de l'inégalité de Cramer-Rao telle qu'elle est formulée dans MALLEY ET HORNSTEIN (1993) : son écriture rigoureuse (notamment ce qui concerne l'extension au cas non commutatif des conditions de régularité) nécessiterait, à notre sens, des développements explicites qui dépassent le cadre de cet article.

Soit H un espace de Hilbert complexe. Une structure statistique dans le cas non commutatif prend la forme du triplet $(H, \mathcal{P}(H), (\rho_\theta)_{\{\theta\in\Theta\}})$ où Θ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $(\rho_\theta)_{\{\theta\in\Theta\}}$ une famille paramétrée d'opérateurs de densité. On note T un estimateur sans biais d'une fonction g du paramètre θ, c'est-à-dire un opérateur autoadjoint tel que, pour toutes les valeurs du paramètre :

$$\mathbb{E}_{\rho_\theta}(T) = tr\,\rho_\theta T = g(\theta)$$

On suppose que l'application

$$\rho : \begin{cases} \Theta \to \mathcal{L}(H) \\ \theta \mapsto \rho_\theta \end{cases}$$

est différentiable et que $\nabla\rho(\theta)$ est borné. D'autre part, il existe (voir MALLEY ET HORNSTEIN (1993), HOLEVO (1976, 1982)) un opérateur hermitien S_θ qu'on appelle ici "la fonction score opératorielle" qui est défini *implicitement* par l'équation suivante :

$$\nabla\rho(\theta) = \frac{1}{2}(\rho_\theta S_\theta + S_\theta\rho_\theta). \qquad (\wp)$$

Remarquons, sous la condition de pouvoir échanger les opérations d'intégration (i.e. de calcul de trace) et de dérivation, que S_θ est ρ_θ-centré. En effet, pour toute valeur du paramètre, puisque $\mathrm{tr}\,(\rho_\theta) = 1$, on a :

$$\nabla(\mathrm{tr}\,(\rho_\theta)) = 0 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\rho_\theta S_\theta + S_\theta\rho_\theta) = \mathrm{tr}\,(\rho_\theta S_\theta) = \mathbb{E}_{\rho_\theta}(S_\theta).$$

Or, on remarque que :

$$\begin{aligned}
\nabla\mathbb{E}_{\rho_\theta}(T) &= \nabla\mathrm{tr}\,(\rho_\theta T) \\
&= \mathrm{tr}\,((\nabla(\rho_\theta)T) \\
&= \mathrm{tr}\,\left(\frac{1}{2}(\rho_\theta S_\theta + S_\theta\rho_\theta)T\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\rho_\theta S_\theta T) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,S_\theta\rho_\theta T) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\rho_\theta(S_\theta T + TS_\theta) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\rho_\theta}(\{S_\theta, T\})
\end{aligned}$$

Puisque S_θ est ρ_θ-centré, il ne reste plus qu'à utiliser directement la troisième inégalité présentée dans le paragraphe précédent avec $A = T$ et $B = S_\theta$. Afin d'introduire la covariance, on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}
|\nabla\mathbb{E}_{\rho_\theta}(T)|^2 &= |\mathrm{Re}\,\mathrm{cov}_{\rho_\theta}(S_\theta, T)|^2 \\
&\leq |\mathrm{cov}_{\rho_\theta}(S_\theta, T)|^2 \\
&\leq \mathrm{Var}_{\rho_\theta}(S_\theta)\,\mathrm{Var}_{\rho_\theta}(T)
\end{aligned}$$

ce qui donne une version quantique de l'inégalité de Cramer-Rao qu'on exprime par la

Proposition 1.3. *Soit T un estimateur sans biais d'une fonction du paramètre θ et S_θ l'opérateur "fonction score opératorielle" défini implicitement dans l'équation $(\wp)$. Sous les conditions de régularité données, T et S_θ vérifient un principe d'incertitude de type 1 qui s'écrit :*

$$Var_{\rho_\theta}(T)\,Var_{\rho_\theta}(S_\theta) \geq [\nabla\mathbb{E}_{\rho_\theta}(T)]^2.$$

Remarque : en appliquant la première inégalité du paragraphe précédent aux opérateurs $A = T$ et $B = S_\theta$, on obtient :

$$Var_{\rho_\theta}(T)\,Var_{\rho_\theta}(S_\theta) \geq |\mathrm{Im}\,\mathrm{cov}_{\rho_\theta}(S_\theta, T)|^2$$

ou

$$Var_{\rho_\theta}(T)\,Var_{\rho_\theta}(S_\theta) \geq 1/4|\nabla\mathbb{E}_{\rho_\theta}(T) - \mathrm{cov}_{\rho_\theta}(S_\theta, T)|^2.$$

La comparaison des deux bornes obtenues ne permet pas de vérifier a priori l'affirmation de MALLEY ET HORNSTEIN (1993) selon laquelle "la version quantique de l'inégalité de Cramer-Rao fournit une meilleure borne que le P. I. d'Heisenberg".

D'autres remarques concernant la borne de Cramer-Rao et le P.I. de type un seront faites dans la dernière partie de ce travail. Auparavant, nous proposons d'étudier le P.I. de type II d'un point de vue statistique.

2. PRINCIPE D'INCERTITUDE DE TYPE II ET ANALYSE CANONIQUE DE DEUX SOUS-ESPACES.

Dans cette partie, on s'intéresse à une propriété connue en analyse harmonique et en traitement du signal : on ne peut, autant qu'on le désire, limiter un signal à la fois dans sa durée et dans ses fréquences. Cette constatation expérimentale est aussi exprimée par le fait qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent être simultanément aussi "concentrées" qu'on le veut; ce principe d'incertitude est appelé de type II. "Limiter une fonction-signal dans le temps" revient à la pré-multiplier par l'indicatrice d'un intervalle de durée et cette opération fonctionnelle agit comme une projection orthogonale. De même, "limiter une fonction-signal dans ses fréquences" revient à faire une opération analogue avec sa transformée de Fourier et donc à considérer un second projecteur "dans le domaine des fréquences". L'idée de cette partie est alors de considérer ces deux projections orthogonales et de les comparer. On est alors amené à étudier la position relative des deux sous-espaces image de deux projections, ce qui consiste, sous un angle statistique, à considérer leur analyse canonique.

2.1. **Principe d'incertitude de type II.**

2.1.1. *Définitions et notations.* Nous désignerons par $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$: l'isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont la restriction à $L^2 \cap L^1$ est définie pour tout t de $\mathbb{R}^d$ par

$$\mathcal{F}(f)(t) = \hat{f}(t) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t,x\rangle}dx.$$

Soit $\mathcal{T}$ la tribu de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$ et λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Si $S \in \mathcal{T}$, la mesure de Lebesgue de S sera notée $\lambda(S)$ ou $|S|$.

Nous rappelons que si f est une fonction complexe définie sur $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{T}$-mesurable, on appelle support essentiel (au sens de la mesure λ) de f, noté $\mathrm{supp}(f)$, le plus petit fermé F de $\mathbb{R}^d$ tel que f s'annule $\lambda-$presque partout sur $\mathbb{R}^d \setminus F$.

Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, le support essentiel de la transformée de Fourier de f est aussi appelé *spectre essentiel de f* .

2.1.2. *Enoncé du Principe d'incertitude de type II.* Si f est une fonction non nulle de $L^2(\mathbb{R}^d)$ et si S et Σ désignent respectivement le support essentiel de f et celui de sa transformée de Fourier, alors un énoncé du P.I. de type II peut se faire sous la forme :

$$\lambda(S)\lambda(\Sigma) = \infty.$$

Remarque : il existe d'autres versions de ce type de P.I., qui ne traitent pas du support (essentiel) de f, mais du support de f "à ϵ près". Reprenant DE JEU (1984), nous donnons le définition suivante :

Définition 2.1. Pour tout réel ϵ strictement positif, une fonction f non nulle de $L^2(\mathbb{R}^d)$ est dite ϵ-concentrée sur $S \in \mathcal{T}$ si

$$\|f - \mathbb{1}_S f\|_2 \leq \epsilon \|f\|_2.$$

Le résultat suivant est dû à DONOHO ET STARK (1989) :

Proposition 2.2. *Soit f une fonction non nulle de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Soit S et Σ des éléments de $\mathcal{T}$. Si f est ϵ-concentrée sur S et si sa transformée de Fourier est ϵ'-concentrée sur Σ, alors*

$$|S|\,|\Sigma| \geq (1 - \epsilon\epsilon')^2.$$

C'est la première version du P.I. de type II qui nous intéresse ici quant à son expression à l'aide de l'analyse canonique.

2.2. **Analyse canonique complexe compacte.** Nous proposons ici l'extension complexe de la définition de l'analyse canonique de deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert réel au sens de DAUXOIS ET POUSSE (1975). Nous renvoyons à cette référence pour plus de détail.

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable. Soit H_1 et H_2 des sous-espaces fermés de H, P_1 et P_2 les projections orthogonales sur H_1 et H_2 respectivement et I l'identité sur H.

Il existe une représentation isométrique de H par une "intégrale hilbertienne" (ou "somme directe continue") d'espaces de Hilbert $H(x)$, relativement à une mesure positive μ sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{H} = \int^{\oplus} H(x) d\mu(x).$$

De plus, il est possible d'obtenir une telle représentation de H de sorte que le support de μ soit le spectre de l'opérateur hermitien positif borné de $\mathcal{L}(H)$:

$$A = (P_1 + P_2 - I)^2.$$

Cette représentation en induit une pour H_i, i=1, 2 :

$$\mathcal{H}_i = \int_{X_i}^{\oplus} H_i(x) d\mu(x),$$

où X_i est le spectre de la restriction de A à H_i, notée V_i. Notons que V_1 et V_2 sont des opérateurs positifs et ont leur spectre contenu dans l'intervalle [0,1]. On montre que

$$X_1 \cup \{0\} = X_2 \cup \{0\},$$

et si on note $X = X_1 \cup \{0\}$, on peut représenter isométriquement H_i par l'intégrale hilbertienne $\int_X^{\oplus} H_i(x)d\nu(x)$, où ν est la restriction de μ à X. On propose alors la définition suivante :

Définition 2.3. On appelle analyse canonique complexe des sous-espaces hilbertiens H_1et H_2 tout quadruplet $(X,\, \mu,\, H_1(x)_{x\in X},\, H_2(x)_{x\in X})$ ainsi obtenu. Cette analyse est obtenue par la décomposition spectrale de l'opérateur hermitien V_1 (ou de l'opérateur V_2).

Nous nous intéressons au cas particulier de l'analyse canonique compacte.

Définition 2.4. L'analyse canonique de H_1et H_2 est dite compacte si V_1 est un opérateur (hermitien) compact de $\mathcal{L}(H_1)$.

Notons que V_1 est aussi la restriction de P_1P_2 à H_1, et V_2 la restriction de P_2P_1 à H_2. Désignons par B la restriction de P_1+P_2-I à la fermeture de $H_1 + H_2$ dans H. Il est équivalent de dire (cf. la proposition 1 de Dauxois et Pousse, (1975)) que l'un ou l'autre des opérateurs V_1, V_2, P_1P_2, $P_{1|H_2}$, $P_{2|H_1}$, ou B, est compact.

Dans le cas de l'analyse canonique compacte, les spectres respectifs de V_1 et V_2 (qui sont identiques, à l'élément 0 près) sont dénombrables, avec 0 comme unique point d'accumulation possible. L'intégrale hilbertienne indiquée plus haut est alors une somme discrète, et on a alors une véritable décomposition de $H_i\,(i = 1,\, 2)$ et non, seulement, une représentation isométrique. On a la définition/proposition suivante :

Définition 2.5. On appelle analyse canonique complexe compacte des sous-espaces fermés H_1 et H_2, l'analyse obtenue par la décomposition spectrale de l'opérateur hermitien V_1 (ou encore de V_2, $P_{1|H_2}$, $P_{2|H_1}$, B ou $P_1P_2P_1$).

Cette analyse est caractérisée par le triplet

$$(\rho_i)_{i\in I},\, (f_i)_{i\in I_1},\, (g_i)_{i\in I_2},$$

où $\rho_i = \sqrt{\lambda_i}$, $(\lambda_i)_{i\in I}$ est la suite des valeurs propres réelles de l'opérateur compact hermitien V_1; $(f_i)_{i\in I_1}$ est une base orthonormale de H_1 formée de vecteurs propres de V_1; $(g_i)_{i\in I_2}$ est une base orthonormale de H_2 formée de vecteurs propres de V_2; $(f_i)_{i\in I_1\setminus I}$ est une base du noyau de V_1; $(g_i)_{i\in I_2\setminus I}$ est une base du noyau de V_2.

Les valeurs propres de V_1 sont réelles et peuvent être rangées par ordre décroissant. Nous considérons par la suite uniquement la plus grande valeur propre et on donne la

Définition 2.6. On appelle coefficient canonique maximal des sous-espaces H_1 et H_2 de l'espace de Hilbert complexe H la racine carrée de la plus grande valeur propre de l'opérateur hermitien compact V_1.

On note cet élément ρ_{max} et il est caractérisé par les propriétés suivantes qui se vérifient aisément ($\| \ \|$ note classiquement la norme de la convergence uniforme) :

Proposition 2.7. *Le coefficient canonique maximal ρ_{max} vérifie :*

$$\begin{aligned} \rho^2_{max} &= \|V_1\| = \|P_1 P_2 P_1\| = \|P_1 P_2\|^2 \\ &= (\sup\{|\langle f, g\rangle|;\ f \in H_1,\ g \in H_2, \|f\| \leq 1,\ \|g\| \leq 1)^2 \end{aligned}$$

Nota : l'interprétation géométrique du coefficient ρ_{max} nécessiterait de faire des choix quant à une notion, non unique a priori, d'angle (et d'opérateur d'angle) entre deux sous-espaces hilbertiens complexes. Ce développement, ainsi que l'approfondissement de toutes les propriétés de l'analyse définie ici méritent, de notre point de vue, une attention particulière à venir (cf. 3.2).

2.3. **Principe d'incertitude et coefficient canonique maximal.** Le lien entre le principe d'incertitude de type II et l'analyse canonique réside dans la proposition 2.8 ci-dessous et concerne le coefficient canonique maximal de deux sous-espaces "conjugués" qu'on explicite d'abord dans une proposition préliminaire.

Proposition 2.8. *Soit S et Σ deux éléments de la tribu de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$. Désignons par H_1 l'ensemble des éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont le support essentiel est contenu dans S et par H_2 l'ensemble des éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont le spectre essentiel est contenu dans Σ.*

Alors H_1 et H_2, qui sont dénommés "conjugués" de par leur définition, sont des sous-espaces fermés de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soit (f_n) une suite d'éléments de H_1 qui converge vers une limite f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Il existe une sous-suite (f_{n_k}) de la suite (f_n), telle que (f_{n_k}) converge ponctuellement λ-presque partout vers f. Soit alors A l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R}^d$ tels que $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$. Définissons aussi

$$B = \{x \in \mathbb{R}^d \setminus S;\ f(x) \neq 0\}$$

et, pour tout entier $n \geq 0$,

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^d \setminus S;\ f_n(x) \neq 0\}.$$

Alors, puisque $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$, on a

$$A \cap B \subset \liminf_{k\to\infty} B_{n_k}.$$

Or, $\lambda(B_{n_k}) = 0$ pour tout $k \geq 0$ (car $f_{n_k} \in H_1$), donc

$$\lambda(A \cap B) = 0.$$

Si A^c désigne le complémentaire de A dans $\mathbb{R}^d$, on a $\lambda(A^c) = 0$ par définition de A. Donc

$$\lambda(A^c \cap B) \leq \lambda(A^c) = 0.$$

Par suite, $\lambda(B) = \lambda(A^c \cap B) + \lambda(A \cap B) = 0$ et donc f a son support essentiel contenu dans S, c'est-à-dire que $f \in H_1$, et donc H_1 est fermé.

On en déduit alors que H_2 est fermé. En effet, si l'ensemble H_1 (des éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont le support essentiel est contenu dans S) est noté E_S, on a

$$H_2 = \mathcal{F}^{-1}(E_\Sigma)$$

et $\mathcal{F}$ est une isométrie.

□

Nous présentons maintenant le résultat principal qui permet de lier le P.I. de type II à une condition simple sur le coefficient canonique maximal des deux sous-espaces conjugués.

Proposition 2.9. *Soit P_1 et P_2 les projections orthogonales d'images H_1 et H_2 respectivement. Si les mesures de Lebesgue de S et de Σ sont simultanément finies, alors :*

(i). *L'opérateur P_1P_2 est compact,*

(ii). $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, *et*

(iii). *Le coefficient canonique maximal ρ_{max} de l'analyse canonique complexe compacte de H_1 et H_2 est strictement inférieur à 1.*

La preuve de la proposition repose sur les trois lemmes suivants. Les démonstrations que nous proposons sont entièrement inspirées de celles données par Havin et Jöricke (1991, 1995), que nous complétons, voire rectifions (en corrigeant une légère erreur au niveau de la constante figurant dans la partie (iv)→ (ii) de la démonstration du lemme suivant).

Lemme 2.10. *Soit H un espace de Hilbert complexe. Soit H_1et H_2 des sous-espaces fermés de H, P_1 et P_2 les projections orthogonales sur H_1 et H_2 respectivement. On pose $\theta := \sup\{|\langle h_1, h_2\rangle|;\ h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2, \|h_1\| \leq 1,\ \|h_2\| \leq 1\}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i). $\|P_1P_2\| < 1$.

(ii). $\theta < 1$.

(iii). *Il existe $c > 0$ tel que, pour tout v de H, $\|\|v\| \leq c(\|v - P_1v\| + \|v - P_2v\|)$.*

(iv). *$H_1 \cap H_2 = \{0\}$ et $H_1 + H_2$ est fermé.*

Une condition suffisante pour que ces propositions soient vraies est que $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ et que P_1P_2 soit un opérateur compact.

Démonstration. (i)→ (ii)
$\langle m, n\rangle$ est le produit scalaire de m et n dans H. En utilisant le fait que P_1 est autoadjoint, on a pour tout $(m, n) \in H_1 \times H_2$,
$|\langle m, n\rangle| = |\langle P_1 m, P_2 n\rangle| = |\langle m, P_1P_2 n\rangle| \leq \|P_1P_2\|\|m\|\|n\|$.

(ii)→ (i)
Pour tout u, $v \in H$,
$|\langle P_1P_2u, v\rangle| = |\langle P_1 u, P_2 v\rangle| \leq \theta\|u\|\|v\|$.

(i)→ (iii)
Soit G_1 (resp. G_2) l'orthogonal de H_1 (resp. de H_2) dans H. Soit Q_1 (resp. Q_2) la projection orthogonale sur G_1 (resp. sur G_2). Alors, pour tout $v \in H$,

$$\|P_1P_2v\|^2 = \|P_1P_2\, P_2v\|^2 \leq \|P_1P_2\|^2\|P_2v\|^2. \tag{2.1}$$

En utilisant (2.1) et le fait que

$$\|P_2v\|^2 = \|P_1P_2v\|^2 + \|Q_1P_2v\|^2,$$

on a, en posant $\alpha = \sqrt{1 - \|P_1P_2\|^2}$,

$$\alpha^2\|P_2v\|^2 \leq \|Q_1P_2v\|^2$$

et donc, puisque $\alpha > 0$ par (i),

$$\begin{aligned}
\|v\| = \|P_2v + Q_2v\| &\leq \|P_2v\| + \|Q_2v\| \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\|Q_1P_2v\| + \|Q_2v\| \\
&= \frac{1}{\alpha}\|Q_1(v - Q_2v)\| + \|Q_2v\| \\
&\leq \frac{1}{\alpha}(\|Q_1v\| + \|Q_1Q_2v\|) + \|Q_2v\| \\
&\leq \frac{1}{\alpha}\|Q_1v\| + (\frac{1}{\alpha} + 1)\|Q_2v\|.
\end{aligned}$$

(iii)→ (iv)
Si $v \in H_1 \cap H_2$, alors $v = 0$ d'après (iii). Soit (v_n) une suite d'éléments de $H_1 + H_2$ qui converge vers $v \in H$. Ecrivons $v_n = x_n + y_n$ et $v = x + y$, avec $x_n \in H_1$, $y_n \in H_2$. En appliquant (iii) à x_n, on a

$$\|x_n\| \leq c\|x_n - P_2x_n\| = c\|v_n - P_2v_n\| \leq c\|v_n\|,$$

d'où il découle que (x_n) est une suite de Cauchy dans H_1. Elle converge donc (H étant complet et H_1 fermé dans H) vers un élément x de H_1. De même, (y_n) converge vers un élément y de H_2 et $v = x+y \in H_1+H_2$, et $H_1 + H_2$ est fermé.

(iv)→ (ii)
L'application T: $H_1 \times H_2 \to H_1 + H_2$; $(x, y) \mapsto x + y$ est bijective (car $H_1 \cap H_2 = \{0\}$) et son image est fermée. D'après le théorème de

Banach, T est une application ouverte; sa réciproque est continue et donc il existe $c_1 > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in H_1 \times H_2$,

$$c_1(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq \|x + y\|^2.$$

Notons que l'inégalité précédente implique que $c_1 < 2$. De plus elle se réécrit sous la forme

$$(1 - c_1)(\|x\|^2 + \|y\|^2) + 2Re\,\langle x, y\rangle \geq 0, \tag{2.2}$$

Si ϕ est un argument du nombre complexe $\langle x, y\rangle$ et si on remplace, dans (2.2), y par $\tau e^{-i\phi} y$, on obtient, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$,

$$(1 - c_1)(\|x\|^2 + \tau^2\|y\|^2) + 2|\langle x, y\rangle|\tau \geq 0,$$

d'où

$$|\langle x, y\rangle| \leq |1 - c_1|\|x\|\|y\|.$$

Puisque $0 < c_1 < 2$, on a $|1 - c_1| < 1$ et (ii) est prouvé.

Montrons maintenant la dernière assertion du lemme. Si $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ et si P_1P_2 est un opérateur compact, supposons que (i) ne soit pas vérifié, i.e. $\|P_1P_2\| = 1$. Par compacité de P_1P_2, il existerait alors $v \in H$, de norme 1 tel que $\|P_1P_2v\| = \|v\|$. On aurait alors $\|P_2v\| = \|v\|$ et donc $P_2v = v$ (P_2 est un projecteur orthogonal), d'où $v \in H_2$. De même, $v \in H_1$, ce qui contredirait $H_1 \cap H_2 = \{0\}$.

□

L'idée du lemme suivant est qu'on peut toujours translater un élément S_0 de la tribu de Lebesgue, contenu dans un autre, S, de telle sorte que la partie de S_0 qui "sort" de S soit de mesure de Lebesgue arbitrairement petite.

Lemme 2.11. *Soit S_0 et S des éléments de la tribu de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$, tels que $S_0 \subset S$ et $0 < |S_0| < |S| < \infty$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a \in \mathbb{R}^d$ tel que*

$$|S| < |S \cup (S_0 - a)| < |S| + \epsilon.$$

Démonstration. Considérons l'application h définie de $\mathbb{R}^d$ dans $]0, +\infty[$ par $h(a) = \lambda(S \cup (S_0 - a))$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}^d$,

$$h(a) = \lambda(S) + \lambda(S_0) - g(a),$$

avec $g(a) = \lambda(S \cap (S_0 - a))$.

Montrons d'abord que g est continue. En effet, on peut écrire

$$g(a) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_S(x)\mathbb{1}_{S_0}(x + a)\,dx,$$

et si (a_n) est une suite convergeant vers a dans $\mathbb{R}^d$, on a

$$|g(a_n) - g(a)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_{S_0}(x + a) - \mathbb{1}_{S_0}(x + a_n)|\,dx.$$

Le second membre de cette inégalité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En effet, $\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{1}_{S_0}(x+a) - \mathbb{1}_{S_0}(x+a_n)|\, dx$ est la mesure de Lebesgue de la différence symétrique de $S_0 - a$ et $S_0 - a_n$, et donc tend vers 0 puisque (a_n) converge vers a. D'où la continuité de g.

Ensuite, montrons que $\lim_{|a|\to\infty} g(a) = 0$. Si S est borné, c'est évident puisque l'intersection $S \cap (S_0 - a)$ finit par être vide si $|a|$ est assez grand. Pour S quelconque, et pour tout $\delta > 0$, il existe un ensemble mesurable borné S^δ contenu dans S et tel que $\lambda(S \setminus S^\delta) < \delta$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, on a

$$g(a) \leq \int_{S^\delta} \mathbb{1}_{S_0}(x+a)\, dx \ + \delta.$$

Comme S^δ est borné, on a $\lim_{|a|\to\infty} \mathbb{1}_{S_0}(x+a) = 0$ pour tout $x \in S^\delta$. En utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on a

$$\lim_{|a|\to\infty} \int_{S^\delta} \mathbb{1}_{S_0}(x+a)\, dx \ = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $\delta > 0$, on a la conclusion.

On a donc h continue, $\lim_{|a|\to\infty} h(a) = \lambda(S) + \lambda(S_0)$ et $h(0) = \lambda(S)$. L'image de h contient donc l'intervalle $]\lambda(S), \lambda(S) + \lambda(S_0)[$, ce qui termine la démonstration du second lemme. $\square$

Le lemme suivant majore la dimension de l'intersection des sous-espaces H_1 et H_2 par une constante dépendant des mesures de Lebesgue de S et de Σ.

Lemme 2.12. *Les hypothèses sont celles de la proposition 2.8.*

Si $|S| + |\Sigma| < \infty$, alors $H_1 \cap H_2$ est de dimension finie. Plus précisément,

$$dim\ (H_1 \cap H_2) \leq (2\pi)^{-2d}(|S|\,|\Sigma|)^2.$$

Démonstration. On peut identifier H_1 à $L^2(S)$ et dire que tout $f \in H_1 \cap H_2$ s'écrit

$$f(x) = \int_S K(x,y) f(y)\, dy,$$

où, pour tout $(x,y) \in S^2$,

$$K(x,y) = (2\pi)^{-d} \int_\Sigma e^{i\langle x,\xi\rangle} e^{-i\langle y,\xi\rangle}\, d\xi. \tag{2.3}$$

Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille orthonormale finie de $H_1 \cap H_2$. Soit, pour $k = 1, \ldots, n$ et $(x,y) \in S^2$,

$$g_k(x,y) = f_k(x)\overline{f_k(y)}.$$

Alors (g_k) est une famille orthonormale dans $L^2(S^2)$. D'après l'inégalité de Bessel-Parseval,

$$\sum_{k=1}^n |K \cdot g_k| \leq \|K\|^2_{L^2(S^2)}, \tag{2.4}$$

où $\cdot$ est le produit scalaire dans $L^2(S^2)$. Un calcul immédiat donne $|K \cdot g_k| = 1$ pour tout $k = 1, \ldots, n$. En outre, (2.3) entraîne

$$|K(x,y)| \leq (2\pi)^{-d}|\Sigma|$$

et donc

$$\|K\|^2_{L^2(S^2)} \leq (2\pi)^{-2d}|\Sigma|^2|S|^2,$$

de sorte que (2.4) mène à

$$n \leq (2\pi)^{-2d}|\Sigma|^2|S|^2.$$

Il n'existe donc pas de famille orthonormale de $H_1 \cap H_2$ de cardinal plus grand que $(2\pi)^{-2d}|\Sigma|^2|S|^2$.

□

En utilisant les lemmes énoncés ci-dessus, nous sommes maintenant en mesure de donner la preuve de la proposition 2.9.

Démonstration. Pour démontrer (i), nous reprenons et complétons la preuve donnée dans Havin et Jöricke (1995), qui nous semble rapide sur certains points. L'idée est de montrer d'abord que P_1P_2 est un opérateur intégral dont le noyau N vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} N^2(x,y)\, dx\, dy = (2\pi)^{-d}|S||\Sigma|. \tag{2.5}$$

Ceci entraînera, si S et Σ sont de mesures de Lebesgue finies, que P_1P_2 est un opérateur de Hilbert-Schmidt, donc compact.

Pour montrer que P_1P_2 est un opérateur intégral, on remarque d'abord que P_1 et P_2 ont les expressions suivantes : pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$P_1 f = 1\!\!1_S f, \quad P_2 f = \mathcal{F}^{-1}(1\!\!1_\Sigma \hat{f}).$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ et si $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}
(P_1P_2f)(x) &= 1\!\!1_S(x) P_2 f(x) \\
&= 1\!\!1_S(x)\mathcal{F}^{-1}(1\!\!1_\Sigma \hat{f})(x) \\
&= 1\!\!1_S(x)(2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} 1\!\!1_\Sigma(\xi)\hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi \\
&= 1\!\!1_S(x)(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} 1\!\!1_\Sigma(\xi)(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle y,\xi\rangle}\, f(y)\, dy)\, e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)N(x,y)\, dy, \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

avec $N(x,y) = (2\pi)^{-d/2} 1\!\!1_S(x) 1\!\!1_\Sigma(y-x)$

et un calcul immédiat donne

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |N(x,y)|^2 dx\, dy = (2\pi)^{-d}|S||\Sigma|.$$

Considérons l'opérateur T défini sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ par

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)N(x,y)\,dy.$$

T est continu. En effet, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |T(f)(x)|^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} (\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)N(x,y)|)^2 dy) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} (\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^2 dy)(\int_{\mathbb{R}^d} |N(x,y)|)^2 dy) dx \\
(&= \|f\|_{L^2}^2 \,(2\pi)^{-d}|S||\Sigma|).
\end{aligned}$$

Ainsi, les opérateurs P_1P_2 et T, définis et continus sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, coïncident sur $L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. Par densité de $L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, ces opérateurs sont égaux, et donc P_1P_2 est un opérateur intégral de noyau N, et (i) est montré.

Montrons (ii). Supposons qu'il existe un élément ϕ_0 non nul de $H_1 \cap H_2$. Soit $(a_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^d$, avec $a_0 = 0$. Soit $S_0 =$ supp (ϕ_0). Soit, pour tout entier $k \geq 1$,
$S_0^k = S_0 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$, $S_1 = S$, $S_{k+1} = S_k \cup S_0^k$ et enfin

$$S^* = \cup_{k=1}^{\infty} S_k.$$

D'après le lemme 2.10, la suite (a_k) peut être choisie de telle sorte que, pour tout $k \geq 1$,

$$|S_k| < |S_{k+1}| < |S_k| + \frac{1}{2^{k-1}},$$

et donc

$$|S^* \setminus S| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |S_{k+1} \setminus S_k| < 1,$$

ce qui implique que $|S^*| < \infty$. Soit G_1 l'ensemble des éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dont le support est contenu dans S^*. D'après le lemme 2.11, $G_1 \cap H_2$ est de dimension finie.

Considérons la suite $(\phi_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$\phi_{k+1}(x) = \phi_0(x + a_{k+1}), \quad k \geq 0.$$

Pour tout $k \geq 0$, le support de ϕ_k, i.e. S_0^k, est contenu dans S^*; le spectre de ϕ_k est celui de ϕ_0, donc contenu dans Σ. Par suite $\phi_k \in G_1 \cap H_2$. La suite $(\phi_k)_{k\geq 0}$ est alors une famille indépendante d'éléments de $G_1 \cap H_2$. Ceci contredit le fait que $G_1 \cap H_2$ est de dimension finie. (ii) est prouvé.

Preuve de (iii): Puisque (i) et (ii) sont vérifiés, on en déduit, par la dernière assertion du lemme 2.10, que $\|P_1P_2\| < 1$, ce qui équivaut, toujours par le même lemme, à

$$\sup\{|\langle h_1, h_2\rangle|;\ h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2, \|h_1\| \leq 1,\ \|h_2\| \leq 1\} < 1.$$

Par la proposition 2.7, l'inégalité précédente s'écrit alors :

$$\rho_{max} < 1.$$

□

3. Remarques et perspectives

Cette dernière partie propose des éléments de réflexion pour de futurs développements à cette première approche.

3.1. **Sur les principes d'incertitude.**

3.1.1. *Remarque générale.* Les deux grands types de principe d'incertitude sont distingués par leur formulation mathématique. On a vu que le premier type est valable sous des conditions de régularité (pour le cas "fonctionnel", l'espace des fonctions régulières est souvent nommé espace de Schwarz) alors que le second l'est dans des espaces plus généraux de type L^2. Pour le type I, nous avons explicitement créé deux catégories de relation d'incertitude : celles, qu'on pourrait appeler de type I_1, qui s'expriment à l'aide du commutateur des deux opérateurs considérés (c'est alors la non commutativité de ces opérateurs qui engendre le principe, comme par exemple celui d'Heisenberg) et celles, qu'on pourrait nommer de type I_2, qui s'expriment à l'aide de l'anticommutateur des opérateurs étudiés (et dont fait partie l'inégalité quantique de Cramer-Rao). Cet éclairage est, à notre connaissance, nouveau et nous invite à approfondir les liens qui existent entre les commutateurs et les produits tensoriels fonctionnels d'une part (cf. Romain (2000)), la dérivation opératorielle et la transformation de Fourier, d'autre part, de telle sorte qu'on puisse envisager une autre classification (pour une meilleure compréhension) des types de relation d'incertitude.

En fait, on peut aussi trouver, en Beckner (1995) par exemple, des inégalités "de type Cramer-Rao" construites à partir d'une information fonctionnelle "de type Fisher" (il n'y a pas de paramétrage au sens statistique et le gradient porte sur l'argument d'intégration). Ce type d'inégalités fonctionnelles admet des liens avec d'autres inégalités connues en calcul des probabilités, comme, par exemple, celles dites de Sobolev logarithmiques qui génèrent des développements récents importants (cf. Ané *et al* (2000)).

Toutes ces différentes formulations sont intéressantes à comparer et on peut poser la question suivante en guise de futures investigations :

Peut-on considérer que tous les P.I. rencontrés dans la littérature peuvent être soit du type A formé de la réunion des types I_1 et II (qui mettent en relation un objet et son conjugué ou une fonction et sa transformée de Fourier), soit d'un autre type B, qui contient notamment le type I_2?

3.1.2. *Sur le principe d'incertitude de type II.* Le principe d'incertitude de type II a fait l'objet de généralisations et peut être considéré, dans un premier temps, comme contenu dans un théorème plus fort dû à AMREIN-BERTHIER (1977). En effet, on a la

Proposition 3.1. *Soit S et Σ des éléments de la tribu de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$, tels que les mesures de Lebesgue de S et de Σ soient simultanément finies. Alors il existe $c > 0$ tel que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,*

$$\|f\|_2^2 \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus S} |f|^2 \, d\lambda + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma} |\hat{f}|^2 \, d\lambda \right).$$

La démonstration de ce théorème est obtenue à partir de la proposition 2.9 et du point iii) du lemme 2.10.

Ensuite, le résultat d'Amrein-Berthier (voir aussi BENEDICKS (1985)) a été étendu notamment au cas où $\mathbb{R}^d$ est remplacé par un groupe abélien localement compact et la mesure de Lebesgue par la mesure de Haar associée (cf. HOGAN (1988), KUMAR (1990) SMITH (1990)). Notons aussi que MATOLCSI ET SZÜCS (1973) ont établi une version plus faible du théorème d'Amrein-Berthier, mais dans des espaces plus généraux ou encore WOLF (1992) qui a proposé une version pour une paire de Gel'fand... Ce type de P.I. continue à être la source de divers développements et nous pouvons poser la question suivante :

A quelle analyse canonique particulière chacune des extensions du P.I. de type II correspond-elle?

3.2. **Sur l'analyse canonique complexe.** Sur le plan statistique, plusieurs travaux sont à placer dans le champ de l'analyse canonique complexe mais dans différents contextes et sous diverses formulations. Les articles précurseurs sont ceux de GEL'FAND ET YAGLOM (1957), présentés à partir de l'information d'une fonction aléatoire contenue dans une autre, et de HANNAN (1961) pour un formalisme général. En MIYATA (1970), on peut trouver un exemple d'application à l'étude des niveaux de mer d'une analyse canonique "dans le domaine des fréquences". D'autres travaux comme les études entre le passé et le futur, voir par exemple JEWELL ET BLOOMFIELD (1983) ou VANIINSKI ET YAGLOM (1990), sont autant de méthodes à associer à ce type d'analyse. Enfin, en traitement du signal, une comparaison "d'espaces conjugués", concernant l'études d'ondes sphéroïdales, est proposée dans des espaces de type L^2 par LANDAU ET POLLAK (1961) et peut être considérée comme une "analyse canonique complexe complète" (nota : d'autres méthodes statistiques multidimensionnelles ont ces dernières années été étendues au cas complexe (voir, par exemple, GRORUD (1978), CHAKAK *et al* (1986), BOUDOU ET DAUXOIS (1995) pour l'analyse en composantes principales et KOBILINSKI (1990) pour le modèle linéaire)).

Dans le cas réel, les différents opérateurs mis en jeu par l'analyse canonique de deux sous-espaces peuvent s'exprimer de plusieurs façons à partir des deux projecteurs concernés et de leurs surjections et restrictions associées; on peut voir en DAUXOIS *et al* (2000a) une récapitulation des propriétés de ces opérateurs. L'extension au cas complexe de cette étude sera intéressante à développer prochainement afin de mieux maîtriser un cadre synthétique nécessaire à l'étude asymptotique des approximations par échantillonnage de cette méthode. Nous pourrions alors peut-être répondre notamment à la question : *peut-on proposer des approximations stochastiques du P.I. de type II*?

Sur un plan mathématique plus général, on peut considérer que l'analyse canonique complexe de deux sous-espaces fermés a des connexions fortes avec l'étude de l'algèbre de von Neumann engendrée par deux projecteurs (cf. LENARD (1972) ou SUNDER (1987) par exemple) ou encore avec l'étude comparative de deux événements quantiques (voir MEYER (1993)). En résumé, l'analyse canonique de deux sous-espaces fermés, c'est à dire l'extension complexe du cas réel fondamental proposé par DAUXOIS ET POUSSE (1975), est à l'intersection de nombreux domaines différents qui sont algébrique, géométrique, analytique et stochastique (voir la partie "La Statistique par les projecteurs" de ROMAIN (1997)) et apparaît comme une méthode pivotale qui mérite, selon nous, attention et approfondissements futurs particuliers.

RÉFÉRENCES

[1] Amrein, W. O. et Berthier, A. M. (1977). On support properties of L^p-functions and their Fourier Transforms. *J. of Functional Analysis* **24**, 258-267.

[2] Ané, C. , Blachère, S., Chafaï, D., Fougères, P., Gentil, I., Malrieu, F., Roberto, C. et Scheffer, G. (2000). *Autour de l'inégalité de Sobolev logarithmique.* Coll. Panoramas et Synthèses. S.M.F. (à paraître).

[3] Beckner,W. (1995). Pitt's inequalities and the uncertainty principle. *Proc. Am. Math. Soc.* **123**, 1897-1905.

[4] Benedicks, M. (1985). Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure. *J. Math. Anal. Appl.* **106**, 180-183.

[5] Biane, P. (1995). Calcul stochastique non-commutatif. In *Lecture on probability theory, Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour* 23-1993 (Bernard, Ed), **1668**, 1-96.

[6] Boudou, A. et Dauxois, J. (1995). Principal component analysis in the frequency domain. *J. Multivariate Anal.*

[7] Chakak, A., Dossou-Gbete, S. et Pousse, A. (1986). Une formalisation de l'analyse en composantes principales de variables aléatoires complexes. *Stat. Anal. Données* **11**, 1-18.

[8] Dauxois, J. et Pousse, A. (1975). Une extension de l'analyse canonique. Quelques applications. *Ann. de l'Inst.H.Poincaré*, **XI**, 355-379.

[9] Dauxois, J., Kniet, G.M. et Romain.Y. (2000a). Projecteurs orthogonaux et opérateurs associés utiles en Statistique multidimensionnelle. *Publi. Labo. Stat. et Proba.,* **15-00**, Univ. P. Sabatier, Toulouse, **.**

[10] Donoho, D. L. et Stark, P. B. (1989). Uncertainty principles and signal recovery. *Siam J. Appl. Math.* **49**, 906-931.

[11] Gel'fand, I. M. et Yaglom, A. M. (1957). Calculation of the amount of information about a random function contained in another such function. *Ann. Math. Soc. Transl.* **12**, 192-246.

[12] De Jeu, M.F.E. (1994). An uncertainty principle for integral operators. *J. Funct. Anal.*, **122**, 247-253.

[13] Gleason, M.A. (1957). Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. *J.Math. Mech.*, **6** 885-893.

[14] Grorud, A.(1978). Analyses factorielles de données complexes. Thèse de troisième cycle, Université des sciences et techniques du Languedoc, Montpellier.

[15] Hannan, E. J. (1961). The general theory of canonical correlation and its relation to functional analysis. *J. of the Austral. Math. Soc.,* **2**, 229-242.

[16] Havin, V. et Jöricke, B. (1991). *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis.* Springer, Berlin.

[17] Havin, V. et Jöricke, B. (1995). The uncertainty principle in harmonic analysis. In *Commutative Harmonic Analysis 3, Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* **12**, (Havin, V. *et al*, Eds). Springer, Berlin.

[18] Hogan, J. A. (1988). A qualitative uncertainty principle for locally compact abelian groups. *Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ.*, **16**, 133-142.

[19] Holevo, A. S. (1976). Non commutative analogues ot the Cramer-Rao inequality in the quantum measurement theory. *Lecture Notes in Maths.* vol **550**, Springer, Berlin.

[20] Holevo, A. S. (1982). *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory.* North Holland, Amsterdam.

[21] Jewell, N. P. et Bloomfield, P. (1983). Canonical correlation of past and future for time series : definition and theory. *Ann. Statist.*, **11** 837-847.

[22] Kobilinski, A. (1990). Complex linear models and cyclic designs. *Linear Algebra and its applications*, **127**, 227-282.

[23] Kumar, A. (1990). A qualitative uncertainty principle for hypergroups. In *Lecture Notes in Math., Funct. Anal. and Oper. Th.* **1511**, 1-9.

[24] Landau & Pollack (1961). Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty-I. *Bell System Tech. J.,* janvier 61, **40** 65-84.

[25] Lenard, A. (1972). The numerical range of a pair of projections. *J. Funct. Anal.*, **10**, 410-423.

[26] Matolcsi, T. et Szücs, J. (1973). Intersection des mesures spectrales conjuguées. *C. R. Acad. Sci. Paris* **A277**, 841-843.

[27] Malley, J. D. et Hornstein, J. (1993). Quantum statistical inference. *Statistical Science*, **8**, 433-457.

[28] Meyer, P.A. (1993). Quantum probability for probabilists. L.N.M., Springer, New-York.

[29] Meyer, Y. (1986). Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs. *Séminaire Bourbaki*, **662**, 209-223.

[30] Miyata, M. (1970). Complex generalization of canonical correlation and its application to a sea-level study. *J. of Marine Research,* **28**-2, 202-214.

[31] Parthasarathy, K. R. (1992). *An Introduction to Quantum Stochastics Calculus.* Birkhäuser Verlag, Basel.

[32] Romain, Y. (1997). Une introduction à l'approche fonctionnelle stochastique de la Statistique. *Publi. Labo. Stat. Proba.*, Univ. P. Sabatier, Toulouse, **09**-97, 1-27

[33] Romain, Y. (2000). Etude des somme, différence et produit tensoriels fonctionnels de deux endomorphismes. *Pub. Lab. Stat. Proba.*, **02**-00, 1-65, Université Paul Sabatier, Toulouse.

[34] Smith, K. T. (1990). The uncertainty principle on groups. *Siam J. Appl. Math.* **50**, 876-882.

[35] Sunder, V. S. (1987). *An Invitation to von Neumann Algebras.* Springer-Verlag, Paris

[36] Vaninskii, K. L. et Yaglom, A. M. (1990). Stationary processes with a finite number of non-zero canonical correlations between future and past. *J. Time Series Analysis* **11**, 361-375.

[37] Wolf, J.A. (1992). The uncertainty principle for Gel'fand pairs. *Nova J. Alg. Geom.*, **1**, 4 383-396.