Convolée de mesures aléatoires

Alain Boudou et Yves Romain
Laboratoire de Statistique et Probabilités, UMR CNRS C55830,
118, route de Narbonne
31062 Toulouse cedex.
boudou@cict.fr et romain@cict.fr

Résumé.
Pour deux mesures aléatoires (au sens de Azencott et Dacunha-Castelle (1984)), nous nous intéressons dans cet article aux produits tensoriel et de convolution de celles-ci. Une formule d'intégration de type Fubini est établie. Nous utilisons ensuite ces résultats dans le cadre des fonctions aléatoires continues stationnaires définies sur un groupe abélien localement compact.

Abstract.
For two random measures (in the Azencott et Dacunha-Castelle (1984) sense) the tensor and convolution products are defined and a Fubini type formula is given. The results are applied to stationary continuous Hilbertian random functions defined on an Abelian locally compact group.

Mots-clés : convolée, convolution de mesures, mesure aléatoire, mesure spectrale, intégrale stochastique, fonction aléatoire stationnaire, processus hilbertien, groupe abélien localement compact.
Keywords : measure convolution, random measure, spectral measure, stochastic integration, stationary random function, Hilbertian process, locally compact Abelian group.

Introduction

Lorsque $(X_n^1)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(X_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des séries stationnaires respectivement d'éléments de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}_1)$ et de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}_2)$, où $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des sous-tribus indépendantes, il est facile de vérifier que les séries $(X_n^1X_m^2)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ et $(X_n^1X_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnaires. De plus, il est bien connu que toute série stationnaire est définie de façon biunivoque par une mesure aléatoire (m.a.) (au sens de Azencott et Dacunha-Castelle (1984)) dont elle est la transformée de Fourier.

Un des objectifs de ce travail est de définir les m.a. associées aux processus $(X_n^1X_m^2)_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ et $(X_n^1X_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$en fonction de Z_1 et Z_2 m.a. associées à $(X_n^1)_{n\in\mathbb{Z}}$ et à $(X_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Notre étude se place dans le cas ou l'ensemble des indices est un groupe abélien localement compact G. Cela nous permet de traiter d'une façon simultanée le cas où G est égal à $\mathbb{R}^k$ ou $\mathbb{Z}^k$ pour $k \geq 1$.

Nous sommes alors amenés à définir le produit $Z_1 \otimes Z_2$ et la convolée $Z_1 * Z_2$ des m.a. Z_1 et Z_2. Pour cela, nous utilisons le produit et le produit de convolution de mesures spectrales introduits par Boudou (2000). Ceux- ci sont appliqués à des mesures spectrales que l'on qualifie d'ampliations fonctionnelles et dont la formulation est facilitée par les travaux de Romain (2000) car le produit tensoriel fonctionnel y joue un rôle central. Notons que l'on retrouve de la sorte le produit (tensoriel) de mesures spectrales de Birman et Solomjak (1996).

1. Rappels et notations

L'objet de ce paragraphe est de rappeler quelques outils mathématiques utilisés dans ce texte et de préciser quelques définitions et notations. Tous les espaces de Hilbert que l'on rencontrera seront supposés complexes et séparables. L'ensemble des projecteurs orthogonaux d'un espace de Hilbert H est noté $\mathcal{P}(H)$. Une isométrie est ici une bijection linéaire entre deux espaces de Hilbert qui conserve le produit scalaire. Dans le cas particulier où les deux espaces sont égaux, on parle d'opérateur unitaire.

Pour les différents points abordés dans ce paragraphe et pour d'autres compléments, on peut consulter Boudou (2000) ou Boudou et Romain (2000).

Mesure aléatoire et intégrale stochastique[1]**.** Une *mesure aléatoire* (m.a.) Z, définie sur $\mathcal{T}$ tribu de parties d'un ensemble F, à valeurs dans l'espace de Hilbert H est une application de $\mathcal{T}$ dans H telle que :

i) pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de $\mathcal{T}$:

$$Z(A \cup B) = Z(A) + Z(B) \quad \text{et}$$

$$< Z(A),\, Z(B) >= 0\,;$$

ii) pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ qui converge en décroissant vers $\emptyset$, on a :

$$lim_n Z(A_n) = 0.$$

[1]La terminologie utilisée suit celle de Azencott et Dacunha-Castelle (1984): ainsi, nous aurions pu aussi utiliser le vocable “champ aléatoire”.

On montre alors que l'application

$$\mu_Z \,:\, A \in \mathcal{T} \,\to\, \|Z(A)\|^2 \in \mathbb{R}^+$$

est une mesure bornée sur $(F, \mathcal{T})$.

L'*intégrale stochastique*, relativement à la m.a. Z, peut se définir comme l'unique isométrie de $L^2_{\mathbb{C}}(F, \mathcal{T}, \mu_Z)$ sur $H_Z = \overline{\text{vect}}\{Z(A);\, A \in \mathcal{T}\}$ (sous-espace de H) qui, pour tout A de $\mathcal{T}$, associe $Z(A)$ à $\mathbb{1}_A$.

Étant donné $(F', \mathcal{T}')$ un deuxième espace mesurable et f une application mesurable de F dans F', on appelle *m.a. image* de Z par f, que l'on note Z_f, l'application :

$$Z_f \,:\, A' \in \mathcal{T}' \,\mapsto\, Z\left(f^{-1}(A')\right) \in H.$$

On vérifie facilement que :

i) Z_f est effectivement une m.a.;

ii) μ_{Z_f}est la mesure image de μ_Z par f;

iii) lorsque φ est un élément de $L^2_{\mathbb{C}}(F', \mathcal{T}', \mu_{Z_f})$, $\varphi \circ f$ appartient à $L^2_{\mathbb{C}}(F, \mathcal{T}, \mu_Z)$ et :

$$\int \varphi dZ_f = \int \varphi \circ f dZ.$$

Une deuxième m.a. Z', définie sur $\mathcal{T}$ et à valeurs dans H, est dite *stationnairement corrélée* avec Z lorsque, pour tout couple d'éléments disjoints (A, B) de $\mathcal{T}$:

$$< Z(A),\, Z'(B) >= 0$$

(nota : cette terminologie peut surprendre; elle s'explique par la remarque 1.1. ci-dessous).

Fonction aléatoire continue stationnaire. Les fonctions aléatoires que l'on considèrent sont définies sur un groupe abélien localement compact G dont le dual[2] $\widehat{G}$ est supposé à base dénombrable; par $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ on désigne la tribu de Borel de ce dernier et par $S_{\widehat{G}}$ l'application $(\gamma_1, \gamma_2) \in \widehat{G} \times \widehat{G} \,\mapsto\, \gamma_1 + \gamma_2 \in \widehat{G}$. Celle-ci étant continue est mesurable par rapport aux tribus boréliennes. Etant donné que $\widehat{G}$ est à base dénombrable $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$ est la tribu de Borel de $\widehat{G} \times \widehat{G}$. Parfois nous considérons des fonctions définies sur le groupe abélien localement compact $G \times G$, son dual est identifiable à $\widehat{G} \times \widehat{G}$ et est également à base dénombrable. Tout élément de $\widehat{G} \times \widehat{G}$ est du type :

$$\left((\gamma_1,\, .)_{\widehat{G}G},\, (\gamma_2,\, .)_{\widehat{G}G}\right) : \, (g_1,\, g_2) \in G \times G \,\mapsto\, (\gamma_1,\, g_1)_{\widehat{G}G}\, (\gamma_2,\, g_2)_{\widehat{G}G} \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$$

Lorsque $G = \mathbb{Z}$, le dual est identifiable à $\Pi = [-\pi; \pi[$ qui est un groupe pour la loi : $\lambda_1 \oplus \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\pi \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \pi}{2\pi}\right]$ ($[x]$ désignant la partie entière d'un réel x).

Une *fonction aléatoire continue (f.a.c.) stationnaire* $(X_g)_{g \in G}$ peut être considérée comme une famille d'éléments de l'espace de Hilbert H telle que :

i) l'application $g \in G \,\mapsto\, X_g \in H$ est continue;

[2] rappel : le dual est l'ensemble des caractères, c'est-à-dire des homomorphismes continus définis sur G à valeurs dans $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

ii) pour tout couple (g_1, g_2) d'éléments de G :

$$< X_{g_1}, X_{g_2} >=< X_{g_1 - g_2}, X_0 > .$$

On montre alors qu'il existe une m.a. Z, et une seule, dite *m.a. associée* à $(X_g)_{g\in G}$ telle que $H_Z = \overline{\text{vect}}\,\{X_g;\, g \in G\}$ et telle que

$$X_g = \int_{\widehat{G}G} (.,\, g)\, dZ(.)$$

pour tout g de G.

Lorsque le groupe de référence est $G \times G$ (resp. $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), la m.a. Z associée à une f.a.c. stationnaire $(X_{g_1,g_2})_{(g_1,g_2)\in G^2}$ (resp. $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$; $(X_{n,m})_{(n,m)\in(\mathbb{Z})^2}$) est donc telle que

$$X_{g_1,g_2} = \int ((\gamma_1,\, g_1)_{\widehat{G}G}\,, (\gamma_2,\, g_2)_{\widehat{G}G}) dZ(\gamma_1, \gamma_2)$$

pour tout (g_1, g_2) de G^2 (resp. $X_n = \int e^{i\lambda n} dZ(\lambda)$ pour tout n de $\mathbb{Z}$; $X_{n,m} = \int e^{i(\lambda_1 n + \lambda_2 m)} dZ(\lambda_1, \lambda_2)$ pour tout (n, m) de $\mathbb{Z}^2$).

Deux f.a.c. stationnaires $(X_g)_{g\in G}$ et $(Y_g)_{g\in G}$, à valeurs dans l'espace de Hilbert H, sont *stationnairement corrélées* lorsque, pour tout couple (g_1, g_2) d'éléments de G :

$$< X_{g_1}, Y_{g_2} >=< X_{g_1 - g_2}, Y_0 > .$$

Remarque 1.1. On démontre que deux f.a.c. stationnaires sont stationnairement corrélées si et seulement si les m.a. qui leur sont associées le sont.

Mesures spectrales. Une *mesure spectrale* (m.s.) ε *sur* $\mathcal{T}$, tribu de parties de F, *pour l'espace de Hilbert* H est une application de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{P}(H)$ telle que :

1. pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de $\mathcal{T}$:

$$\varepsilon\,(A \cup B) = \varepsilon(A) + \varepsilon(B);$$

2. pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ qui converge en décroissant vers ϕ :

$$lim_n \varepsilon(A_n) X = 0$$

cela, quelque soit X de H ;

3. $\varepsilon(F) = I_H$.

Notons que le point 1 implique que les projecteurs $\varepsilon(A)$ et $\varepsilon(B)$ commutent nécessairement.

Etant donné $(F', \mathcal{T}')$ un deuxième espace mesurable et f une application mesurable de F dans F', on appelle *m.s. image* de ε par f, que l'on note ε_f l'application

$$A' \in \mathcal{T}' \mapsto \varepsilon(f^{-1} A') \in \mathcal{P}(H),$$

et *on vérifie que c'est une m.s. sur* $\mathcal{T}'$ *pour* H.

Relation entre mesure spectrale et mesure aléatoire. Une *famille de mesures aléatoires stationnairement corrélées (f.m.a.s.c.)* $\{Z^X;\, X \in H\}$ est un ensemble de m.a., définies sur $\mathcal{T}$, tribu de parties de F, à valeurs dans l'espace de Hilbert H, deux à deux stationnairement corrélées et telles que $Z^X(F) = X$ pour tout X de H.

On montre alors que

i) pour tout A de $\mathcal{T}$, l'application $\varepsilon(A) : X \in H \mapsto Z^X(A) \in H$, est un projecteur orthogonal;

ii) l'application $\varepsilon : A \in \mathcal{T} \mapsto \varepsilon(A) \in \mathcal{P}(H)$ est une m.s. sur $\mathcal{T}$ pour H, dite *m.s. associée à la f.m.a.s.c.* $\{Z^X;\, X \in H\}$.

À toute m.a. Z définie sur $\mathcal{T}$ à valeurs dans H, on peut faire correspondre une m.s. ε, et une seule, sur $\mathcal{T}$ pour H_Z, telle que

$$\varepsilon(A)(\int \varphi dZ) = \int \mathbb{1}_A \varphi dZ,$$

pour tout (A, φ) de $\mathcal{T} \times L^2_{\mathbb{C}}(F, \mathcal{T}, \mu_Z)$.

La m.s. ε est appelée *m.s. associée* à Z. Pour tout A de $\mathcal{T}$, il vient :

$$\varepsilon(A)(Z(F)) = Z(A).$$

On dit que deux m.s. ε_1 et ε_2 sur $\mathcal{T}$ pour H *commutent* lorsque

$$\varepsilon_1(A) \circ \varepsilon_2(B) = \varepsilon_2(B) \circ \varepsilon_1(A),$$

pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{T}$.

Mesures spectrale. Opérateur unitaire. Si U est un opérateur unitaire de l'espace de Hilbert H, il est facile de voir que, pour tout (X, Y) de $H \times H$, les séries $(U^n X)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(U^n Y)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnaires et stationnairement corrélées. Si l'on désigne par Z^X la m.a. associée à la série stationnaire $(U^n X)_{n\in\mathbb{Z}}$, il est clair que $\{Z^X;\, X \in H\}$ constitue une f.m.a.s.c.; on appelle alors *m.s. associée* à l'opérateur unitaire U la m.s. ε, sur $\mathcal{B}_\Pi$ pour H, associée à $\{Z^X;\, X \in H\}$.

Réciproquement, en quelque sorte, on démontre que lorsque ε est une m.s. sur $\mathcal{B}_\Pi$ pour H, alors :

i) pour tout X de H, l'application $Z^X : A \in \mathcal{B}_\Pi \mapsto \varepsilon(A)X \in H$ est une m.a.;

ii) l'application $U : X \in H \rightarrow \int e^{i.1}\, dZ^X(.) \in H$ est un opérateur unitaire de m.s. associée ε.

On appellera U l'*opérateur unitaire déduit* de ε et on vérifie que deux opérateurs unitaires ayant même m.s. associée sont égaux.

Produit de mesures spectrales. Comme précédemment, G désigne un groupe abélien localement compact dont le dual $\widehat{G}$ est supposé à base dénombrable. Pour tout (g,γ) de $G \times \widehat{G}$, on note $\overline{g}(\gamma)$ le seul élément de Π tel que $e^{i\,\overline{g}(\gamma)} = (\gamma,\, g)_{\widehat{G}G}$. On définit ainsi une application $\overline{g}$ de $\widehat{G}$ dans Π qui est mesurable par rapport aux tribus boréliennes $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ et $\mathcal{B}_\Pi$.

Soit ε_1 et ε_2 deux m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H, qui commutent. On démontre que :

i) pour tout (X, i) de $H \times \{1,2\}$, l'application $Z_i^X : A \in \mathcal{B}_{\widehat{G}} \mapsto \varepsilon_i(A)X \in H$ est une m.a.;

ii) pour tout (g, i) de $G \times \{1,2\}$, l'application

$$U_g^i : X \in H \rightarrow \int (.,g)_{\widehat{G}G}\, dZ_i^X(.) \in H$$

est un opérateur unitaire de m.s. associée $\overline{g}\varepsilon_i$;

iii) pour tout (i, g_1, g_2) de $\{1,2\} \times G \times G$, on a; $U_{g_1}^i \circ U_{g_2}^i = U_{g_1+g_2}^i$,

iv) pour tout (X, i) de $H \times \{1,2\}$, $(U_g^i X)_{g \in G}$ est une f.a.c. stationnaire de m.a. associée Z_i^X.

On démontre également que, pour tout X de H, $(U_{g_1}^i \circ U_{g_2}^i X)_{(g_1,g_2) \in G \times G}$ est une f.a.c. stationnaire et que, si l'on note Z^X la m.a. qui lui est associée, $\{Z^X;\, X \in H\}$ est une f.m.a.s.c.. De plus, si l'on désigne par $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2$ la m.s. associée à cette famille, c'est la seule m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour H, dite *mesure produit des mesures spectrales* ε_1 et ε_2, telle que :

$$\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2(A \times B) = \varepsilon_1(A) \circ \varepsilon_2(B),$$

pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$.

Éléments sur les produits tensoriels fonctionnels. Désignons par H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Lorsque A et B sont des endomorphismes bornés de H_1 et H_2 respectivement, on appelle produit tensoriel fonctionnel de A et B (cf. Dauxois *et al* (1994), Romain (2000), Boudou et Romain (2000)), que l'on note $A \overset{l}{\otimes} B$, l'application linéaire et bornée définie par :

$$K \in \sigma_2(H_1, H_2) \mapsto B \circ K \circ A^* \in \sigma_2(H_1, H_2).$$

L'adjoint de $A \overset{l}{\otimes} B$ est $A^* \overset{l}{\otimes} B^*$.

On vérifie facilement, avec des notations évidentes, que

$$A \overset{l}{\otimes} (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \lambda_1 A \overset{l}{\otimes} B_1 + \lambda_2 A \overset{l}{\otimes} B_2,$$

et que

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \overset{l}{\otimes} B = \overline{\lambda_1} A_1 \overset{l}{\otimes} B + \overline{\lambda_2} A_2 \overset{l}{\otimes} B.$$

Si A et B sont des projecteurs orthogonaux (resp. des opérateurs unitaires), $A \overset{l}{\otimes} B$ est un projecteur orthogonal (resp. un opérateur unitaire et, pour tout n de $\mathbb{Z}$, on a : $(A \overset{l}{\otimes} B)^n = A^n \overset{l}{\otimes} B^n$).

Par C_{H_1,H_2}(resp. C_{H_2,H_1}), on désigne l'application antilinéaire qui, à un élément K de $\sigma_2(H_1, H_2)$ (resp. de $\sigma_2(H_2, H_1)$) associe K^*. Il est facile de vérifier[3] que, pour tout couple (K, L) d'éléments de $\sigma_2(H_1, H_2)$ (resp. de $\sigma_2(H_2, H_1)$) :

[3]on rappelle que dans $\sigma_2(H_1, H_2)$, le p.s. dit de Hilbert-Schmidt est défini par $< L,\, K >= tr\, LK^*$.

$$< C_{H_1,H_2}K,\, C_{H_1,H_2}L >=< L,\, K >,$$

(resp. $< C_{H_2,H_1}K,\, C_{H_2,H_1}L >=< L,\, K >$). Ces opérateurs conservent donc la norme et de ce fait sont continus. Il est enfin facile de vérifier que

$$C_{H_1,H_2} \circ C_{H_2,H_1} = I_{\sigma_2(H_2,H_1)}$$

et que $C_{H_2,H_1} \circ C_{H_1,H_2} = I_{\sigma_2(H_1,H_2)}$.

2. Ampliation fonctionnelle de mesure spectrale

Dans ce paragraphe, $(F,\mathcal{T})$ désigne un espace mesurable. Éxaminons une première

Proposition 2.1. *Soit H et H' deux espaces de Hilbert et E une mesure spectrale sur $\mathcal{T}$ pour $\sigma_2(H,H')$. On peut affirmer que :*

i) pour tout A de $\mathcal{T}$, l'application $\widetilde{E}A = C_{H,H'} \circ EA \circ C_{H',H}$ est un projecteur orthogonal de $\sigma_2(H',H)$;

ii) l'application $\widetilde{E} : A \in \mathcal{T} \mapsto \widetilde{E}A \in \mathcal{P}(\sigma_2(H',H))$ est une m.s. sur $\mathcal{T}$ pour $\sigma_2(H',H)$ appelée m.s. commutée de E.

Démonstration. Soit A un élément quelconque de $\mathcal{T}$. La linéarité de $C_{H,H'} \circ EA \circ C_{H',H}$ provient de l'antilinéarité de $C_{H,H'}$ et $C_{H',H}$. Pour tout K de $\sigma_2(H',H)$, il vient :

$$\begin{aligned} \| \widetilde{E}A\,K \| &= \| C_{H,H'} \circ EA \circ C_{H',H}\, K \| \\ &= \| EA \circ C_{H',H}\, K \| \\ &\leq \| C_{H',H}\, K \| = \| K \|, \end{aligned}$$

d'où la continuité de $\widetilde{E}A$.

L'idempotence résulte des égalités :

$$\begin{aligned} \widetilde{E}A \circ \widetilde{E}A &= C_{H,H'} \circ EA \circ C_{H',H} \circ C_{H,H'} \circ EA \circ C_{H',H} \\ &= C_{H,H'} \circ EA \circ EA \circ C_{H',H} \\ &= C_{H,H'} \circ EA \circ C_{H',H} = \widetilde{E}A. \end{aligned}$$

De plus, pour tout (K,L) de $\sigma_2(H',H) \times \sigma_2(H',H)$, on a :

$$\begin{aligned} < \widetilde{E}A\,K,\, L > &= < C_{H,H'} \circ EA \circ C_{H',H}\, K,\, L > \\ &= < C_{H',H}\, L,\, EA \circ C_{H',H}\, K > \\ &= < EA \circ C_{H',H}\, L,\, C_{H',H}\, K > \\ &= < K,\, C_{H,H'} \circ EA \circ C_{H',H}\, L > \\ &= < K,\, \widetilde{E}A\, L >, \end{aligned}$$

donc $\widetilde{E}A$ est auto-adjoint, d'où l'appartenance de $\widetilde{E}A$ à $\mathcal{P}(\sigma_2(H',H))$.

Pour tout couple (A,B) d'éléments disjoints de $\mathcal{T}$, on vérifie facilement que $\widetilde{E}(A\cup B) = \widetilde{E}A+\widetilde{E}B$ et, de plus :

$$\widetilde{E}F = C_{H,H'}\circ E(F)\circ C_{H',H} \ = C_{H,H'}\circ C_{H',H} = I_{\sigma_2(H',H)}.$$

Enfin, lorsque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ qui converge en décroissant vers ϕ, pour tout K de $\sigma_2(H',H)$, il vient :

$$lim_n \parallel \widetilde{E}(A_n)\,K \parallel = lim_n \parallel E(A_n)\,K^* \parallel = 0,$$

ce qui achève la démonstration. □

En Boudou et Romain (2000), nous démontrons que, si ε est une m.s. sur $\mathcal{B}_\Pi$ pour H', alors :

- pour tout A de $\mathcal{B}_\Pi$, l'opérateur $EA = I_H \overset{l}{\otimes} \varepsilon A$ est un élément de $\mathcal{P}(\sigma_2(H,H'))$,
- l'application $E\,:\,A\in\mathcal{B}_\Pi \mapsto EA\in\mathcal{P}(\sigma_2(H,H'))$ est une m.s. sur $\mathcal{B}_\Pi$ pour $\sigma_2(H,H')$.

En substituant $(F,\mathcal{T}\ )$ à $(\Pi,\,\mathcal{B}_\Pi)$, d'une façon analogue on démontre la

Proposition 2.2. *Soit H et H' deux espaces de Hilbert et ε une mesure spectrale sur $\mathcal{T}$ pour H'. On peut alors affirmer que :*

i) pour tout A de $\mathcal{T}$, l'application $EA = I_H \overset{l}{\otimes} \varepsilon A$ est un élément de $\mathcal{P}(\sigma_2(H,H'))$,
ii) l'application $E\,:\,A\in\mathcal{T}\mapsto EA\in\mathcal{P}(\sigma_2(H,H'))$ est une m.s. sur $\mathcal{T}$ pour $\sigma_2(H,H')$ appelée ampliation fonctionnelle à gauche de ε relativement à H.

La m.s. commutée de E est une m.s sur $\mathcal{T}$ pour $\sigma_2(H',H)$ qui à A de $\mathcal{T}$ associe le projecteur orthogonal $C_{H,H'}\circ EA\circ C_{H',H}$ soit $C_{H,H'}\circ(I_H \overset{l}{\otimes} \varepsilon A)\circ C_{H',H}$ ou bien encore $\varepsilon A \overset{l}{\otimes} I_H$, d'où la

Proposition 2.3. *Soit H et H' deux espaces de Hilbert et ε une mesure spectrale sur $\mathcal{T}$ pour H'. On peut alors affirmer que :*

i) pour tout A de $\mathcal{T}$, l'application $\widetilde{E}A = \varepsilon A \overset{l}{\otimes} I_H$ est un élément de $\mathcal{P}(\sigma_2(H',H))$,
ii) l'application $\widetilde{E}\,:\,A\in\mathcal{T}\mapsto \widetilde{E}A\in\mathcal{P}(\sigma_2(H',H))$ est une m.s. sur $\mathcal{T}$ pour $\sigma_2(H',H)$ appelée ampliation fonctionnelle à droite de ε relativement à H.

Remarque : lorsque ε_1(resp. ε_2) est une m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, tribu de Borel de $\widehat{G}$, groupe dual à base dénombrable du groupe abélien localement compact G, pour l'espace de Hilbert H_1 (resp. H_2), l'ampliation à droite E_1 de ε_1 relativement à H_2 et l'ampliation à gauche E_2 de ε_2 relativement à H_1 commutent. En effet, pour tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, on a :

$$\begin{aligned} E_1A\circ E_2B &= (\varepsilon_1 A \overset{l}{\otimes} I_{H_2})\circ(I_{H_1} \overset{l}{\otimes} \varepsilon_2 B) = \varepsilon_1 A \overset{l}{\otimes} \varepsilon_2 B \\ &= (I_{H_1} \overset{l}{\otimes} \varepsilon_2 B)\circ(\varepsilon_1 A \overset{l}{\otimes} I_{H_2}) = E_2B\circ E_1A. \end{aligned}$$

La m.s. $E_1 \otimes E_2$ est donc la seule m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour $\sigma_2(H_1, H_2)$ telle que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, on ait :

$$E_1 \otimes E_2(A \times B) = \varepsilon_1 A \overset{l}{\otimes} \varepsilon_2 B.$$

Cette m.s. est appelée "produit tensoriel de mesures spectrales" par Birman et Solomjak (1996).

3. Produit de mesures aléatoires

Comme dans les paragraphes antérieurs, G désigne un groupe abélien localement compact dont le dual $\widehat{G}$ est à base dénombrable et $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ la tribu de Borel de ce dernier. Le paragraphe précédent nous permet d'énoncer la

Proposition 3.1. *Étant donné deux m. a. Z_1 et Z_2 définies sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ respectivement à valeurs dans les espaces de Hilbert H_1et H_2, il existe une m.a. et une seule , notée $Z_1 \otimes Z_2$ et appelée m.a. produit de Z_1 et Z_2 , définie sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$ à valeurs dans $\sigma_2(H_{Z_1}, H_{Z_2})$ telle que*

$$Z_1 \otimes Z_2(A \times B) = Z_1(A) \otimes Z_2(B)$$

pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$.

Démonstration. Notons ε_1 et ε_2 les m. s. respectivement associées aux m.a. Z_1et Z_2. Désignons par E_1 l'ampliation à droite de ε_1 relativement à H_{Z_2}et par E_2 l'ampliation à gauche de ε_2 relativement à H_{Z_1}.

Puisque $E_1 \otimes E_2$ est une m.s. sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$ pour $\sigma_2(H_{Z_1}, H_{Z_2})$, pour tout élément K de $\sigma_2(H_{Z_1}, H_{Z_2})$ (cf. Boudou 2000), l'application :

$$A \in \mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}} \mapsto E_1 \otimes E_2(A)(K) \in \sigma_2(H_{Z_1}, H_{Z_2})$$

est une m.a..

Donc en particulier l'application :

$$A \in \mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}} \mapsto E_1 \otimes E_2(A)(Z_1\widehat{G} \otimes Z_2\widehat{G}) \in \sigma_2(H_{Z_1}, H_{Z_2}).$$

Si l'on note $Z_1 \otimes Z_2$ cette m.a. pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, il vient[4] :

$$\begin{aligned} Z_1 \otimes Z_2(A \times B) &= E_1 \otimes E_2(A \times B)(Z_1\widehat{G} \otimes Z_2\widehat{G}) \\ &= \varepsilon_1(A) \overset{l}{\otimes} \varepsilon_2(B)(Z_1\widehat{G} \otimes Z_2\widehat{G}) \\ &= (\varepsilon_1 A\,(Z_1\widehat{G})) \otimes (\varepsilon_2 B\,(Z_2\widehat{G})) \\ &= Z_1 A \otimes Z_2 B. \end{aligned}$$

(nous rappelons que $\varepsilon_1$et ε_2 sont les m.s. respectivement associées aux m.a. Z_1 et Z_2).

---

[4]rappelons la propriété suivante qui "justifie" la notation tensorielle du produit $\overset{l}{\otimes}$: pour (u, v) de $(H_1 \times H_2)$, $(a \overset{l}{\otimes} b)(u \otimes v) = a(u) \otimes b(v)$

S'il existe une autre m.a. Z définie sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$ à valeurs dans $\sigma_2(H_{Z_1}, H_{Z_2})$ telle que :

$$Z(A \times B) = Z_1(A) \otimes Z_2(B)$$

pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, alors, pour tout (A, B) de $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$:

$$Z(A \times B) = Z_1 \otimes Z_2(A \times B).$$

Et donc (cf. Boudou (2000)) :

$$Z = Z_1 \otimes Z_2$$

d'où l'unicité de la m.a. $Z_1 \otimes Z_2$. □

Remarque : comme, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mu_{Z_1 \otimes Z_2}(A \times B) &= \| Z_1 \otimes Z_2(A \times B) \|^2 \\ &= \| Z_1(A) \otimes Z_2(B) \|^2 \\ &= \| Z_1(A) \|^2 \| Z_2(B) \|^2 \\ &= \mu_{Z_1}(A).\mu_{Z_2}(B) \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\mu_{Z_1 \otimes Z_2} = \mu_{Z_1} \otimes \mu_{Z_2}.$$

4. Une formule de type Fubini

Dans ce paragraphe nous nous proposons d'établir une formule qu'il est naturel de qualifier de type Fubini par analogie avec la théorie classique de la Mesure. Par Z_1 et Z_2 nous désignons deux m.a. définies sur $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ tribu de Borel de $\widehat{G}$ dual du groupe abélien localement compact G. Comme précédemment, $\widehat{G}$ est supposé à base dénombrable. Les m.a. Z_1 et Z_2 prennent leurs valeurs respectivement dans les espaces de Hilbert H_1 et H_2.

Commençons par examiner un premier

Lemme 4.1. *Lorsque φ est un élément de $L^2(\mu_{Z_1 \otimes Z_2})$:*

i) pour tout γ de $\widehat{G}$, l'application partielle $\varphi(., \gamma) : \gamma' \in \widehat{G} \mapsto \varphi(\gamma', \gamma) \in \mathbb{C}$ est un élément de $L^2(\mu_{Z_1})$;

ii) l'application : $\gamma \in \widehat{G} \mapsto \| \int \varphi(., \gamma) dZ(.) \|^2 \in \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$-mesurable et $\mu_{Z_2}-$intégrable.

Démonstration. Notons r l'application : $(\gamma_1, \gamma_2) \in \widehat{G} \times \widehat{G} \mapsto |\varphi(\gamma_1, \gamma_2)|^2 \in \mathbb{R}$. Cette application est $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$-mesurable et $\mu_{Z_1 \otimes Z_2}-$intégrable, donc $\mu_{Z_1} \otimes \mu_{Z_2}-$intégrable. D'après le théorème de Fubini, nous pouvons affirmer que:

a) pour tout γ de $\widehat{G}$, l'application : $\gamma' \in \widehat{G} \mapsto r(\gamma', \gamma) \in \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$-mesurable et $\mu_{Z_1}-$intégrable,

b) l'application : $\gamma \in \widehat{G} \mapsto \int r(\gamma', \gamma) d\mu_{Z_1}(\gamma') \in \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$-mesurable et $\mu_{Z_2}-$intégrable et

$$\int \Big(\int r(\gamma', \gamma)\, d\mu_{Z_1}(\gamma') \Big)\, d\mu_{Z_2}(\gamma) = \int r\, d\mu_{Z_1 \otimes Z_2}.$$

L'application φ, de $\widehat{G} \times \widehat{G}$ dans $\mathbb{C}$, étant $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$-mesurable, il est clair que, pour tout γ de $\widehat{G}$, l'application partielle $\varphi(.,\gamma)\ :\ \gamma' \in \widehat{G} \mapsto \varphi(\gamma',\gamma) \in \mathbb{C}$ est $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$-mesurable.

Si l'on remarque de plus que

$$\int |\varphi(\gamma',\gamma)|^2 d\mu_{Z_1}(\gamma') = \int r(\gamma',\gamma) d\mu_{Z_1}(\gamma') < +\infty,$$

compte tenu du point (a), on peut effectivement conclure que :

pour tout γ de $\widehat{G}$, l'application $\varphi(.,\gamma)\ :\ \gamma' \in \widehat{G} \mapsto \varphi(\gamma',\gamma) \in \mathbb{C}$, $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$-mesurable et de norme carrée $\mu_{Z_1}-$intégrable, est un élément de $L^2(\mu_{Z_1})$.

Pour tout γ de $\widehat{G}$, il vient :

$$\| \int \varphi(.,\gamma) dZ_1(.) \|^2 = \| \varphi(.,\gamma) \|^2_{L^2(\mu_{Z_1})} = \int |\varphi(.,\gamma)|^2 d\mu_{Z_1}(.) = \int r(\gamma',\gamma) d\mu_{Z_1}(\gamma')$$

D'après le (b), nous savons que l'application :

$$\gamma \in \widehat{G} \mapsto \int r(\gamma',\gamma) d\mu_{Z_1}(\gamma') \in \mathbb{R},$$

donc l'application :

$$\gamma \in \widehat{G} \mapsto \| \int \varphi(.,\gamma) dZ_1(.) \|^2 \in \mathbb{R}$$

est $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$-mesurable et $\mu_{Z_2}-$intégrable, ce qui achève la démonstration. $\square$

Ce résultat va nous permettre de démontrer le

Corollaire 4.2. *Si φ est un élément de $L^2(\mu_{Z_1 \otimes Z_2})$ et A de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, l'application*

$$\gamma \in \widehat{G} \mapsto < Z_1 A, \int \varphi(.,\gamma) dZ_1(.) > \in \mathbb{C}$$

appartient à $L^2(\mu_{Z_2})$.

Démonstration. Considérons $1\!\!1_{A\times\widehat{G}} + \varphi$, $1\!\!1_{A\times\widehat{G}} - \varphi$, $1\!\!1_{A\times\widehat{G}} + i\varphi$ et $1\!\!1_{A\times\widehat{G}} - i\varphi$, qui sont des éléments de $L^2(\mu_{Z_1\otimes Z_2})$ et que nous noterons respectivement W_1, W_2, W_3 et W_4. On vérifie facilement que, pour tout γ de $\widehat{G}$, les applications partielles $W_1(.,\gamma)$, $W_2(.,\gamma)$, $W_3(.,\gamma)$ et $W_4(.,\gamma)$ sont respectivement égales à $1\!\!1_A + \varphi(.,\gamma)$, $1\!\!1_A - \varphi(.,\gamma)$, $1\!\!1_A + i\varphi(.,\gamma)$ et $1\!\!1_A - i\varphi(.,\gamma)$.

Pour $j = 1,2,3,4$, d'après le premier lemme, d'une part, pour tout γ de $\widehat{G}$, l'application $W_j(.,\gamma)$ est un élément de $L^2(\mu_{Z_1})$, d'autre part, l'application :

$$\gamma \in \widehat{G} \mapsto \| \int W_j(.,\gamma) dZ_1(.) \|^2 \in \mathbb{R}$$

est un élément de $L^2(\mu_{Z_2})$ que nous notons V_j.

Pour tout γ de $\widehat{G}$, il vient :

$$\begin{aligned}
V_1(\gamma) = \| \int W_1(.,\gamma)dZ_1(.) \|^2 &= \| \int (\mathbb{1}_A + \varphi(.,\gamma))dZ_1(.) \|^2 = \| Z_1A + \int \varphi(.,\gamma)dZ_1(.) \|^2 \\
V_2(\gamma) = \| \int W_2(.,\gamma)dZ_1(.) \|^2 &= \| \int (\mathbb{1}_A - \varphi(.,\gamma))dZ_1(.) \|^2 = \| Z_1A - \int \varphi(.,\gamma)dZ_1(.) \|^2 \\
V_3(\gamma) = \| \int W_3(.,\gamma)dZ_1(.) \|^2 &= \| \int (\mathbb{1}_A + i\varphi(.,\gamma))dZ_1(.) \|^2 = \| Z_1A + i\int \varphi(.,\gamma)dZ_1(.) \|^2 \\
V_4(\gamma) = \| \int W_4(.,\gamma)dZ_1(.) \|^2 &= \| \int (\mathbb{1}_A - i\varphi(.,\gamma))dZ_1(.) \|^2 = \| Z_1A - i\int \varphi(.,\gamma)dZ_1(.) \|^2,
\end{aligned}$$

Donc, pour tout γ de $\widehat{G}$, on a :

$$\frac{1}{4}(V_1(\gamma) - V_2(\gamma) + iV_3(\gamma) - iV_4(\gamma)) = < Z_1A, \int \varphi(.,\gamma)dZ_1(.) > .$$

Comme $\frac{1}{4}(V_1 - V_2 + iV_3 - iV_4)$ est un élément de $L^2(\mu_{Z_2})$, il est clair que l'application $\gamma \in \widehat{G} \mapsto < Z_1A, \int \varphi(.,\gamma)dZ_1(.) > \in \mathbb{C}$ est $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$-mesurable et de module $\mu_{Z_2}-$intégrable, d'où le corollaire. $\square$

Il est maintenant naturel de souhaiter définir $\int < Z_1A, \int \varphi(.,\gamma)dZ_1(.) > dZ_2(\gamma)$. C'est l'objet du

Lemme 4.3. *Pour tout φ de $L^2(\mu_{Z_1\otimes Z_2})$ et tout A de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, on a l'égalité :*

$$(\int \overline{\varphi} dZ_1 \otimes Z_2)(Z_1A) = \int < Z_1A, \int \varphi(.,\gamma)dZ_1 > dZ_2(\gamma).$$

Démonstration. Soit donc φ un élément de $L^2(\mu_{Z_1\otimes Z_2})$ et A de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$. Pour tout B de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, à l'aide notamment du théorème "classique" de Fubini, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
< (\int \overline{\varphi} dZ_1 \otimes Z_2)(Z_1A),\, Z_2B > &= < (\int \overline{\varphi} dZ_1 \otimes Z_2),\, (Z_1A) \otimes (Z_2B) > \\
&= < (\int \overline{\varphi} dZ_1 \otimes Z_2),\, (Z_1 \otimes Z_2)(A \times B) > \\
&= < \overline{\varphi},\, \mathbb{1}_{A\times B} >_{L^2(\mu_{Z_1} \otimes \mu_{Z_2})} \\
&= \int \overline{\varphi} \mathbb{1}_{A\times B} d(\mu_{Z_1} \otimes \mu_{Z_2}) \\
&= \int (\int \mathbb{1}_A(\gamma') \mathbb{1}_B(\gamma) \overline{\varphi(\gamma', \gamma)} d\mu_{Z_1}(\gamma')) d\mu_{Z_2}(\gamma) \\
&= \int \mathbb{1}_B(\gamma) (\int \mathbb{1}_A \overline{\varphi(., \gamma)} d\mu_{Z_1}(.)) d\mu_{Z_2}(\gamma) \\
&= \int \mathbb{1}_B(\gamma) < \mathbb{1}_A,\, \varphi(., \gamma) >_{L^2(\mu_{Z_1})} d\mu_{Z_2}(\gamma) \\
&= \int \mathbb{1}_B(\gamma) < Z_1A,\, \int \varphi(., \gamma) dZ_1(.) > d\mu_{Z_2}(\gamma) \\
&= < \int < Z_1A,\, \int \varphi(., \gamma) dZ_1(.) > dZ_2(\gamma),\, Z_2B > .
\end{aligned}$$

Comme $\overline{\mathrm{vect}}\{Z_2B;\, B \in \mathcal{B}_{\widehat{G}}\} = H_{Z_2}$ et que $\int \overline{\varphi} dZ_1 \otimes Z_2$ est à valeurs dans H_{Z_2}, on en déduit effectivement que :

$$(\int \overline{\varphi} dZ_1 \otimes Z_2)(Z_1A) = \int < Z_1A,\, \int \varphi(., \gamma) dZ_1(.) > dZ_2(\gamma).$$

$\square$

Nous allons enfin étendre, en quelque sorte, nos résultats au cas où, à l'élément Z_1A, qui intervient dans les formules du corollaire précédent et du second lemme, on substitue un élément h quelconque de H_{Z_1}.

Lemme 4.4. *Pour tout* (φ, h) *de* $L^2(\mu_{Z_1 \otimes Z_2}) \times H_{Z_1}$*, l'application*

$$U_{\varphi,h} \,:\, \gamma \in \widehat{G} \mapsto < h,\, \int \varphi(., \gamma) dZ_1(.) > \in \mathbb{C},$$

appartient à $L^2(\mu_{Z_2})$ *et* $\| U_{\varphi,h} \|^2 \leq \| h \|^2 \| \varphi \|^2_{L^2(\mu_{Z_1 \otimes Z_2})}$.

Démonstration. Du fait que $H_{Z_1} = \overline{\mathrm{vect}}\{Z_1A;\, A \in \mathcal{B}_{\widehat{G}}\}$, h peut se mettre sous la forme :

$$h = \lim_m \sum_{j \in J_m} \alpha_{j_m} Z_1 A_{j_m}$$

(dans H_{Z_1}) avec $|J_m| < +\infty$ et $A_{j_m} \in \mathcal{B}_{\widehat{G}}$.

Pour tout γ de $\widehat{G}$, on a alors :

$$\begin{aligned} U_{\varphi,h}(\gamma) &= < h, \int \varphi(.,\gamma) dZ_1(.) > \\ &= < \lim_m \sum_{j\in J_m} \alpha_{j_m} Z_1 A_{j_m}, \int \varphi(.,\gamma) dZ_1(.) > \\ &= \lim_m \sum_{j\in J_m} \alpha_{j_m} < Z_1 A_{j_m}, \int \varphi(.,\gamma) dZ_1(.) >, \end{aligned}$$

et, comme les applications

$$\gamma \in \widehat{G} \mapsto < Z_1 A_{j_m}, \int \varphi(.,\gamma) dZ_1(.) > \in \mathbb{C}$$

sont $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$-mesurables, il en est de même de

$$\gamma \in \widehat{G} \mapsto \sum_{j\in J_m} \alpha_{j_m} < Z_1 A_{j_m}, \varphi(.,\gamma) dZ_1(.) > \in \mathbb{C},$$

et donc de $U_{\varphi,h}$, car limite ponctuelle d'applications mesurables.
De plus, il vient :

$$\begin{aligned} \int |U_{\varphi,h}(\gamma)|^2 d\mu_{Z_2}(\gamma) &= \int | < h, \int \varphi(.,\gamma) dZ_1(.) > |^2 d\mu_{Z_2}(\gamma) \\ &\leq \int \| h \|^2 \| \int \varphi(.,\gamma) dZ_1(.) \|^2 \, d\mu_{Z_2}(\gamma) \\ &= \| h \|^2 \int (\int |\varphi(\gamma',\gamma)|^2 d\mu_{Z_1}(\gamma')) d\mu_{Z_2}(\gamma) \\ &= \| h \|^2 \int |\varphi(\gamma',\gamma)|^2 d\mu_{Z_1\otimes Z_2}(\gamma',\gamma) \\ &= \| h \|^2 \| \varphi \|^2_{L^2(\mu_{Z_1\otimes Z_2})} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Terminons alors par la

Proposition 4.5. *Pour tout (φ, h) de $L^2(\mu_{Z_1\otimes Z_2}) \times H_{Z_1}$, on a :*

$$(\int \overline{\varphi} dZ_1 \otimes Z_2)(h) = \int < h, \int \varphi(.,\gamma) dZ_1(.) > dZ_2(\gamma).$$

Démonstration. Soit donc (φ, h) un élément de $L^2(\mu_{Z_1\otimes Z_2}) \times H_{Z_1}$. Il est facile de vérifier que, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, h_1, h_2)$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times H_{Z_1} \times H_{Z_1}$, on a :

$$U_{\varphi,\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2} = \lambda_1 U_{\varphi,h_1} + \lambda_2 U_{\varphi,h_2}.$$

Nous reprenons les notations précédentes et posons, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$h_m = \sum_{j \in J_m} \alpha_{j_m} Z_1 A_{j_m}.$$

Il vient alors

$$\| U_{\varphi,h} - U_{\varphi,h_m} \|^2 = \| U_{\varphi,h-h_m} \|^2 \leq \| h - h_m \|^2 \| \varphi \|^2$$

Comme $h = \lim_m h_m$, on a alors $U_{\varphi,h} = \lim_m U_{\varphi,h_m}$dans $L^2(\mu_{Z_2})$. D'où :

$$\begin{aligned}
\int < h, \int \varphi(.,\gamma) dZ_1(.) > dZ_2(\gamma) &= \int U_{\varphi,h} dZ_2 \\
&= \lim_m \int U_{(\varphi,h_m)} dZ_2 = \lim_m \int U_{(\varphi, \sum_{j \in J_m} \alpha_{j_m} Z_1 A_{j_m})} dZ_2 \\
&= \lim_m \int (\sum_{j \in J_m} \alpha_{j_m} U_{\varphi, Z_1 A_{j_m}}) \, dZ_2 \\
&= \lim_m \sum_{j \in J_m} \alpha_{j_m} (\int < Z_1 A_{j_m}, \int \varphi(.,\gamma) dZ_1(.) > dZ_2(\gamma)) \\
&= \lim_m \sum_{j \in J_m} \alpha_{j_m} (\int \overline{\varphi} dZ_1 \otimes Z_2)(Z_1 A_{j_m}) \\
&= (\int \overline{\varphi} dZ_1 \otimes Z_2)(\lim_m \sum_{j \in J_m} \alpha_{j_m} Z_1 A_{j_m}) \\
&= (\int \overline{\varphi} dZ_1 \otimes Z_2)(h).
\end{aligned}$$

□

Observons que lorsque l'on applique ces résultats aux indicatrices, on obtient le

Corollaire 4.6. *Pour tout A de $\mathcal{B}_{\widehat{G}} \otimes \mathcal{B}_{\widehat{G}}$ et tout h de H_{Z_1}, on peut affirmer que, pour tout γ de $\widehat{G}$, l'application : γ de $\widehat{G} \mapsto < h,\, Z_1(A.\gamma) > \in \mathbb{C}$ appartient à $L^2(\mu_{Z_2})$ et*

$$\int < h,\, Z_1(A.\gamma) > dZ_2(\gamma) = Z_1 \otimes Z_2 A\, h,$$

avec bien entendu : $A.\gamma = \{\gamma' \in \widehat{G} \,|\, (\gamma',\, \gamma) \in A\}$.

Remarque 4.7. Si Z_1et Z_2 sont les m.a. associées respectivement aux f.a.c. stationnaires $(X_g^1)_{g\in G}$ et $(X_g^2)_{g\in G}$ la formule du lemme 4.5 appliquée à $\varphi = ((.,-g_1)_{\widehat{G}G},\, (.,-g_2)_{\widehat{G}G})$

nous permet d'établir que

$$
\begin{aligned}
(\int ((.,g_1)_{\widehat{G}G},(.,g_2)_{\widehat{G}G})\,dZ_1\otimes Z_2)h &= (\int \overline{\varphi} dZ_1\otimes Z_2)h \\
&= \int <h,(\gamma,g_2)_{G\widehat{G}}X^1_{-g_1}> dZ_2(\gamma) \\
&= \int (\gamma,g_2)_{G\widehat{G}} <h,X^1_{-g_1}> dZ_2(\gamma) \\
&= <h,X^1_{-g_1}> X^2_{g_2} \\
&= (X^1_{-g_1}\otimes X^2_{g_2})h.
\end{aligned}
$$

D'où, pour tout (g_1, g_2) de $G\times G$:

$$\int ((.,g_1)_{\widehat{G}G},(.,g_2)_{\widehat{G}G})\,dZ_1\otimes Z_2 = X^1_{-g_1}\otimes X^2_{g_2},$$

ce qui permet d'affirmer (cf. Boudou (2000)) que $(X^1_{-g_1}\otimes X^2_{g_2})_{(g_1,g_2)\in G\times G}$ *est une f.a.c. stationnaire de m.a. associée* $Z_1\otimes Z_2$.

5. Produit de convolution de mesures aléatoires

Nous reprenons les notations et hypothèses du paragraphe précédent en ce qui concerne G, $\widehat{G}$, $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, H_1, H_2, Z_1 et Z_2. Comme nous avons défini la m.a. $Z_1\otimes Z_2$, il est naturel d'introduire la

Définition 5.1. On appelle *produit de convolution* de Z_1 et Z_2, que l'on note $Z_1 * Z_2$, l'image de $Z_1\otimes Z_2$ par $S_{\widehat{G}}$.

Examinons à quel type de processus peut correspondre une telle m.a.. Pour cela, nous allons utiliser le

Lemme 5.2. *Si* $(X_{g_1,g_2})_{(g_1,g_2)\in G\times G}$ *est une f.a.c. stationnaire de m.a. associée* Z, *alors* $Z_{S_{\widehat{G}}}$ *est la m.a. associée à la f.a.c. stationnaire* $(X_{g,g})_{(g\in G)}$.

Démonstration. D'après les règles d'intégration par rapport à une mesure image, nous avons :

$$\int (.,g)_{\widehat{G}G}\,dZ_{S_{\widehat{G}}}(.) = \int (.,g)_{\widehat{G}G}\circ S_{\widehat{G}}\,dZ(.) = \int ((.,g)_{\widehat{G}G},(.,g)_{\widehat{G}G})\,dZ(.,.) = X_{g,g};$$

d'où le résultat d'après Boudou (2000). □

Le lemme 5.2 et la propriété vue à la fin du paragraphe 4 permettent d'affirmer la

Proposition 5.3. *Soit* $(X^1_g)_{g\in G}$ *et* $(X^2_g)_{g\in G}$ *deux f.a.c. stationnaires à valeurs respectivement dans* H_1 *et* H_2 *de m.a. associée respectivement* Z_1 *et* Z_2. *On peut alors affirmer que* $(X^1_{-g}\otimes X^2_g)_{(g\in G)}$ *est une f.a.c. stationnaire de m.a. associée* $Z_1 * Z_2$.

Bien sûr la "formule de Fubini" établie dans le paragraphe précédent peut être utilisée pour obtenir une nouvelle écriture de $Z_1 * Z_2$. C'est l'objet du

Corollaire 5.4. *Pour tout A de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ et tout h de H_{Z_1}, l'application*

$$\gamma \in \widehat{G} \mapsto < h,\ Z_1(A-\gamma) > \in \mathbb{C}$$

appartient à $L^2_{\mathbb{C}}(\widehat{G}, \mathcal{B}_{\widehat{G}}, \mu_{Z_2})$ *et*

$$(Z_1 * Z_2 A)h = \int < h,\ Z_1(A-\gamma) > dZ_2(\gamma).$$

Démonstration. Si l'on remarque que $(S^{-1}_{\widehat{G}}A)_{.\gamma} = A - \gamma$, alors, pour tout γ de $\widehat{G}$, on a :

$$< h,\ Z_1(A-\gamma) > = < h,\ Z_1((S^{-1}_{\widehat{G}}A)_{.\gamma}) >,$$

d'où l'appartenance de l'application $\gamma \in \widehat{G} \mapsto < h,\ Z_1(A-\gamma) > \in \mathbb{C}$ à $L^2_{\mathbb{C}}(\widehat{G}, \mathcal{B}_{\widehat{G}}, \mu_{Z_2})$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int < h,\ Z_1(A-\gamma) > dZ_2(\gamma) &= \int < h,\ Z_1((S^{-1}_{\widehat{G}}A)_{.\gamma}) > dZ_2(\gamma) \\ &= Z_1 \otimes Z_2\,(S^{-1}_{\widehat{G}}A)h \\ &= (Z_1 * Z_2 A)h \end{aligned}$$

d'où la propriété. □

Habituellement, un produit de convolution est commutatif; ici, nous ne pouvons pas avoir de commutativité puisque $Z_1 * Z_2$ prend ses valeurs dans $\sigma_2(H_{Z_1}, H_{Z_2})$ et $Z_2 * Z_1$ dans $\sigma_2(H_{Z_2}, H_{Z_1})$. Cependant nous avons la

Proposition 5.5. *Si l'on note Γ l'application $(\gamma_1,\ \gamma_2) \in \widehat{G} \times \widehat{G} \mapsto (\gamma_2,\ \gamma_1) \in \widehat{G} \times \widehat{G}$, on démontre qu'elle est mesurable et que :*

$$i)\ C_{H_{Z_1}, H_{Z_2}} \circ (Z_1 \otimes Z_2) = (Z_2 \otimes Z_1)_{\Gamma},$$

$$ii)\ C_{H_{Z_1}, H_{Z_2}} \circ (Z_1 * Z_2) = (Z_2 * Z_1).$$

Démonstration. Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$, on a $\Gamma^{-1}(A \times B) = B \times A$, d'où la mesurabilité de Γ. De plus, il vient

$$\begin{aligned} C_{H_{Z_1}, H_{Z_2}} \circ (Z_1 \otimes Z_2)(A \times B) &= Z_2 B \otimes Z_1 A \\ &= Z_2 \otimes Z_1(B \times A) \\ &= Z_2 \otimes Z_1(\Gamma^{-1}(A \times B)) \\ &= (Z_2 \otimes Z_1)_{\Gamma}\,(A \times B), \end{aligned}$$

d'où l'égalité de $(Z_2 \otimes Z_1)_{\Gamma}$ et $C_{H_{Z_1}, H_{Z_2}} \circ (Z_1 \otimes Z_2)$ (il est facile de vérifier que si Z est une m.a. à valeurs dans $\sigma_2(H_{Z_1}, H_{Z_2})$, $C_{H_{Z_1}, H_{Z_2}} \circ Z$ est une m.a. à valeurs dans $\sigma_2(H_{Z_2}, H_{Z_1})$).

Enfin, si l'on remarque que $S_{\widehat{G}} \circ \Gamma = S_{\widehat{G}}$, il vient, pour tout A de $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$:

$$\begin{aligned} C_{H_{Z_1},H_{Z_2}} \circ (Z_1 * Z_2)A &= C_{H_{Z_1},H_{Z_2}}(Z_1 \otimes Z_2\, S_{\widehat{G}}^{-1} A) \\ &= (Z_2 \otimes Z_1)_\Gamma\, S_{\widehat{G}}^{-1} A \\ &= (Z_2 \otimes Z_1)_{S_{\widehat{G}} \circ \Gamma} A \\ &= Z_2 * Z_1 A. \end{aligned}$$

□

6. Un exemple de convolée

Dans ce paragraphe, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus indépendantes de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{U}$ la sous-tribu engendrée par $\{B_1 \cap B_2;\ B_1 \in \mathcal{B}_1,\ B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ famille de parties de Ω. bien entendu G est toujours un groupe abélien localement compact dont le dual $\widehat{G}$ est à base dénombrable. Étant donné deux f.a.c. stationnaires $(X_g^1)_{g\in G}$ et $(X_g^2)_{g\in G}$ à valeurs respectivement dans $L^2(\mathcal{B}_1)$ et $L^2(\mathcal{B}_2)$, nous nous proposons de définir les m.a. associées aux fonctions aléatoires $(X_{g_1}^1 X_{g_2}^2)_{(g_1,g_2)\in G^2}$ et $(X_g^1 X_g^2)_{g\in G}$ en fonction de Z_1, m.a. associée à $(X_g^1)_{g\in G}$, et de Z_2, m.a. associée à $(X_g^2)_{g\in G}$. Pour cela nous utilisons le

Lemme 6.1. *Soit Z une m.a. définie sur $\mathcal{T}$ tribu de parties d'un ensemble F, à valeurs dans l'espace de Hilbert H. Si $\Im$ est une isométrie de H sur l'espace de Hilbert H', alors*
i) $\Im \circ Z$ est une m.a.;
ii) $\mu_{\Im\circ Z} = \mu_Z$;
iii) pour tout φ de $L^2(\mu_Z)$, on a : $\Im(\int \varphi dZ) = \int \varphi d(\Im \circ Z)$.

Démonstration. Les points i) et ii) se vérifient facilement. En ce qui concerne le point iii), étant donné que $\overline{\mathrm{vect}}\{\mathbb{1}_A;\ A \in \mathcal{T}\} = L^2(\mu_Z) = L^2(\mu_{\Im\circ Z})$, tout φ de $L^2(\mu_Z)$ peut se mettre sous la forme :

$$\varphi = \lim_m \sum_{j\in J_m} \alpha_{j_m}\, \mathbb{1}_{A_{j_m}} \tag{6.6.1}$$

avec $|J_m| < +\infty$ et $A_{j_m} \in \mathcal{T}$.

En intégrant (6.6.1) par rapport à la m.a. $\Im \circ Z$, on obtient :

$$\int \varphi d(\Im \circ Z) = \lim_m \sum_{j\in J_m} \alpha_{j_m}\, \Im(Z(A_{j_m})) \tag{6.6.2}$$

En intégrant (6.6.1) par rapport à la m.a. Z, on a :

$$\int \varphi dZ = \lim_m \sum_{j\in J_m} \alpha_{j_m}\, Z(A_{j_m})$$

d'où

$$\Im\left(\int \varphi dZ\right) = \lim_m \sum_{j\in J_m} \alpha_{j_m}\, \Im\left(Z(A_{j_m})\right)$$

ce qui, combiné avec (6.6.2), nous donne le résultat voulu. $\square$

En Boudou (1986), on a établi une isométrie entre les espaces $\sigma_2(L^2(\mathcal{B}_1), L^2(\mathcal{B}_2))$ et $L^2(\mathcal{U})$ lorsque le corps de référence est $\mathbb{R}$. Nous inspirant de la démonstration de ce résultat, on démontre dans le cas du corps des complexes, le

Lemme 6.2. *Il existe une isométrie $\Im'$ de $\sigma_2(L^2(\mathcal{B}_1), L^2(\mathcal{B}_2))$ sur $L^2(\mathcal{U})$ qui, à $\overline{y_1} \otimes y_2$ associe $y_1.y_2$, cela pour tout (y_1, y_2) de $L^2(\mathcal{B}_1) \times L^2(\mathcal{B}_2)$.*

Examinons enfin un dernier résultat qui nous sera utile.

Lemme 6.3. *Si $(X_g)_{g\in G}$ est une f.a.c. stationnaire, de m.a. associée Z, à valeurs dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alors :*
i) l'application $\overline{Z} : A \in \mathcal{B}_{\widehat{G}} \mapsto \overline{ZA} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une m.a.;
ii) $\mu_{\overline{Z}} = \mu_Z$;
iii) $(\overline{X}_{-g})_{g\in G}$ est une f.a.c. stationnaire de m.a. associée $\overline{Z}$.

Démonstration. Bien entendu $\mathcal{B}_{\widehat{G}}$ désigne la tribu de Borel de $\widehat{G}$. Les points i) et ii) sont triviaux. Quant au point iii), il est démontré (cf. Boudou (2000)) dès lors que l'on a vérifié l'égalité $\overline{X}_{-g} = \int (., g)_{\widehat{G}G} d\overline{Z}(.)$, pour tout g de G.

Nous rappelons que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $L^2(F, \mathcal{T}, \mu)$ (où μ est une mesure bornée), qui converge vers f alors $\lim_n \overline{f_n} = \overline{f}$, car :

$$\| \overline{f_n} - \overline{f} \|^2 = \int |\overline{f_n} - \overline{f}|^2 d\mu = \int |f_n - f|^2 d\mu = \| f_n - f \|^2 .$$

Soit g un élément quelconque de G. Compte tenu des propriétés de densité des indicatrices dans $L^2(\widehat{G}, \mathcal{B}_{\widehat{G}}, \mu_Z)$, l'élément $(., -g)_{\widehat{G}G}$ peut se mettre, dans $L^2(\mu_Z)$, sous la forme

$$(., -g)_{\widehat{G}G} = \lim_m \sum_{j\in J_m} \alpha_{j_m}\, \mathbb{1}_{A_{j_m}}, \tag{6.6.3}$$

avec $|J_m| < +\infty$ et $A_{j_m} \in \mathcal{B}_{\widehat{G}}$.

En intégrant (6.6.3) par rapport à Z, on obtient :

$$X_{-g} = \lim_m \sum_{j\in J_m} \alpha_{j_m}\, Z(A_{j_m}),$$

et donc, par “passage au conjugué” :

$$\overline{X}_{-g} = \lim_m \sum_{j\in J_m} \overline{\alpha}_{j_m}\, \overline{Z}(A_{j_m}). \tag{6.6.4}$$

Toujours par “passage au conjugué” (6.6.3) devient dans $L^2(\mu_Z)$, donc dans $L^2(\mu_{\overline{Z}})$:

$$\overline{(.,\,-g)_{\widehat{G}G}} = \lim_m \sum_{j\in J_m} \overline{\alpha}_{jm}\, \mathbb{1}_{A_{jm}},$$

ou bien, si l'on remarque que $\overline{(.,\,-g)_{\widehat{G}G}} = (.,\,g)_{\widehat{G}G}$:

$$(.,\,g)_{\widehat{G}G} = \lim_m \sum_{j\in J_m} \overline{\alpha}_{jm}\, \mathbb{1}_{A_{jm}}.$$

D'où, en intégrant par rapport à $\overline{Z}$:

$$\int (.,\,g)_{\widehat{G}G} d\overline{Z} = \lim_m \sum_{j\in J_m} \overline{\alpha}_{jm}\, \overline{Z}(A_{jm}),$$

et donc, compte tenu de (6.6.4) :

$$\int (.,\,g)_{\widehat{G}G} d\overline{Z} = \overline{X}_{-g},$$

ce qui achève la démonstration. □

D'après ce dernier résultat,

$\overline{Z}_1$ *est la m.a. associée à la f.a.c. stationnaire* $(\overline{X^1}_{-g})_{g\in G}$.

Donc, d'après la remarque du paragraphe 4,

$\overline{Z}_1 \otimes Z_2$ *est la m.a. associée à la f.a.c. stationnaire* $(\overline{X^1_{g_1}} \otimes X^2_{g_2})_{(g_1,g_2)\in G^2}$ et, d'après le lemme 5.2

$\overline{Z}_1 * Z_2$ *est la m.a. associée à la f.a.c. stationnaire* $(\overline{X^1_g} \otimes X^2_g)_{(g\in G)}$.

L'application du lemme 6.1 à l'isométrie $\Im'$ (définie par le lemme 6.2) permet d'énoncer la

Proposition 6.4. *i)* $\Im\circ(\overline{Z}_1 \otimes Z_2)$ *est la m.a. associée à la f.a.c. stationnaire* $(X^1_{g_1}.X^2_{g_2})_{(g_1,g_2)\in G^2}$
ii) $\Im\circ(\overline{Z}_1 * Z_2)$ *est la m.a. associée à la f.a.c. stationnaire* $(X^1_g.X^2_g)_{(g\in G)}$.

Références

[1] Azencott, R. et Dancunha-Castelle, D. (1984). *Séries d'observations irrégulières. Modélisation et prévision.* Techniques stochastiques. Masson.

[2] Birman, M. et Solomjak, M. (1996). Tensor product of a finite number of spectral measures is always a spectral measure. *Integr. Equat. Oper. Th.* **24**, *179-187.*

[3] Boudou, A. (1986). Analyses en composantes principales de données aléatoires. Cahiers du C. E. R. O., **28**, 265-281.

[4] Boudou, A. (2000). Produits de mesures et produits de convolution de mesures spectrales. *Publi. Labo. Stat. Proba.* , **14**-00, 1-19. Univ. P. Sabatier, Toulouse.

[5] Boudou, A. et Dauxois, J. (1995). Principal component analysis for stationary random function defined on locally compact abelian group. *J. Mult. Anal.* , **51** *1-16.*

[6] Boudou, A. et Romain, Y. (2000). Produits de mesures spectrales et produit tensoriel fonctionnel. *Publi. Labo. Stat. Proba.* , **19**-00, 1-*24.* Univ. P. Sabatier, Toulouse.

[7] Dancunha-Castelle, D. et Duflo, M. (1983). *Probabilités et Statistiques. Problèmes à temps mobile.* Masson.

[8] Dauxois, J. , Romain, Y. et Viguier, S. (1994). Tensor products and Statistics. *Lin. Alg. Appl.,* **210** *59-88.*

[9] Romain, Y. (2000). Etude des somme, différence et produit tensoriels fonctionnels de deux endomorphismes. *Publi. Labo. Stat. Proba.* , **2**-00, *1-65.* Univ. P. Sabatier, Toulouse.