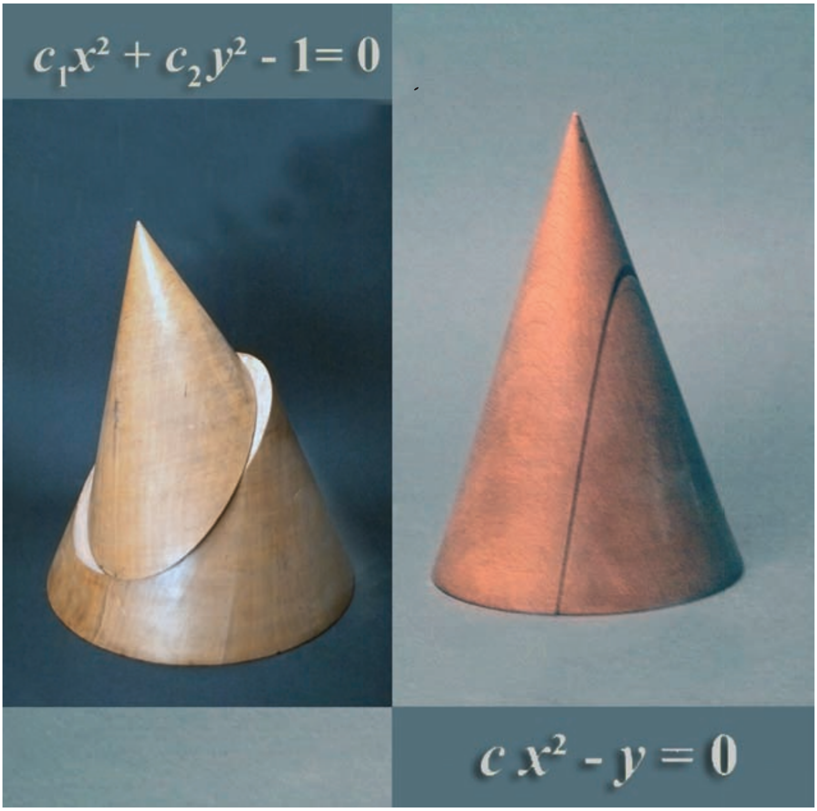
Ina Kersten

Analytische Geometrie und Lineare Algebra 1

LATEX–Bearbeitung von Stefan Wiedmann



Universitätsdrucke Göttingen

Ina Kersten

Analytische Geometrie und Lineare Algebra 1

erschienen in der Reihe der Universitätsdrucke
im Universitätsverlag Göttingen 2005

Ina Kersten

Analytische Geometrie und Lineare Algebra 1

LaTeX-Bearbeitung von
Stefan Wiedmann

Universitätsverlag Göttingen
2005

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet
über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Anschrift der Autorin
Prof. Dr. Ina Kersten
Bunsenstraße 3–5
37073 Göttingen
http://www.uni-math.gwdg.de/kersten/
kersten@uni-math.gwdg.de

Satz und Layout: Stefan Wiedmann und Ben Müller
Titelabbildung: Modellsammlung Mathematisches Institut, Universität Göttingen
Fotos Jan-Philipp Hoffmann,
Bildbearbeitung Claudia Gabler und Christian Herrmann

ISBN 10: 3-938616-26-1
ISBN 13: 978-3-938616-26-0

Vorwort

Dieser Universitätsdruck enthält den Stoff der Vorlesung *Analytische Geometrie und Lineare Algebra I* (AGLA I), die ich im WS 1999/2000 an der Universität Göttingen gehalten habe. Es werden hier gegenüber dem Vorlesungsmanuskript einige Umstellungen und Veränderungen vorgenommen, die sich auch daraus ergeben, dass das Wintersemester nun zwei Wochen kürzer und dafür das Sommersemester zwei Wochen länger als damals ist.

Im Wintersemester 2005/06 starte ich einen neuen Lehrveranstaltungsszyklus beginnend mit der Vorlesung AGLA I und den zugehörigen Übungen. Der neue Zyklus ist im Rahmen einer umfassenden Studienreform an der Universität Göttingen zu sehen. Das beinhaltet auch eine Reform der Lehre, die ihren Schwerpunkt in dem *Lernerfolg* bei den Studierenden sieht.

Zum *AGLA-Reformprojekt 05/06* gehört eine elektronische Präsentation des Lernstoffs in den Vorlesungsstunden. Dabei dient dieser Universitätsdruck als Begleittext zum Vor- und Nacharbeiten. Wesentliches Reformelement ist die Restrukturierung des Übungsbetriebes. Es wird ein Aufgabenpool bereitgestellt mit verschiedenen Aufgabentypen wie Anwendungs-, Test-, Rechen- und Beweisaufgaben, von denen sich die Studierenden auf elektronischem Wege Aufgaben aussuchen, um so einen Lernerfolg auch durch die Methode "learning by doing" erzielen zu können. Falls intensive Lösungsversuche nicht erfolgreich sind, können Hinweise abgerufen werden und schließlich auch Lösungen.

Danken möchte ich an dieser Stelle den Studierenden und der Assistentin Charlotte Wahl, die an dem AGLA-Kurs 1999/2000 mit Interesse, vielen Fragen und Diskussionsbeiträgen teilgenommen haben, dem wissenschaftlichen Mitarbeiter Stefan Wiedmann, der 2000 aus dem handgeschriebenen Manuskript eine schöne LaTeX-Version erstellt hat, dem wissenschaftlichen Mitarbeiter Ben Müller, der die elektronische Präsentation vorbereitet und den Aufgabenpool erarbeitet, dem Ministerium für Wissenschaft und Kultur des Landes Niedersachsen für die Unterstützung des AGLA-Reformprojektes im Rahmen von ELAN (E-Learning Academic Network) sowie dem Kollegen Detlev Buchholz von der Fakultät für Physik, der etliche inhaltliche Tipps für diesen Universitätsdruck gegeben hat.

September 2005 *Ina Kersten*

Schreibweisen und Bezeichnungen

Abkürzende Schreibweisen

$A := B$	A ist definitionsgemäß gleich B
$\exists$	es gibt
$\forall$	für alle
$\Longrightarrow$	folgt
$\Longleftrightarrow$	genau dann, wenn
$\setminus$	ohne
$\square$	Ende des Beweises
$\lvert M\rvert$	Anzahl der Elemente einer Menge M
$m \in M$	m ist Element der Menge M
$M \subset N$	M ist Teilmenge von N (d.h. $m \in M \Longrightarrow m \in N$)
$a \leqslant b$	a ist kleiner oder gleich b
$a < b$	a ist kleiner als b

Standardbezeichnungen

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm, \ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen
$\varnothing$ Leere Menge (besitzt kein Element)

K bezeichne einen beliebigen Körper (sofern nichts anderes gesagt wird)

Das griechische Alphabet

A α Alpha, B β Beta, Γ γ Gamma, Δ δ Delta, E ε Epsilon, Z ζ Zeta, H η Eta, Θ θ Theta, I ι Jota, K κ Kappa, Λ λ Lambda, M μ My, N ν Ny, Ξ ξ Xi, O o Omikron, Π π Pi, P ϱ Rho, Σ σ ς Sigma, T τ Tau, Υ υ Ypsilon, Φ φ Phi, X χ Chi, Ψ ψ Psi, Ω ω Omega

Inhaltsverzeichnis

Voraussetzungen

> Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.
> Die wohlunterschiedenen Objekte heißen *Elemente* der Menge.
> G. Cantor: *Beiträge zur Begründung der Mengenlehre 1895*

Für ein Element m einer Menge M schreiben wir $m \in M$, zum Beispiel $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, wobei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen bezeichnet und $\sqrt{2}$ diejenige positive reelle Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist.

Beispiele für verschiedene Schreibweisen von Mengen

- $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} = \mathbb{N}$, Menge der natürlichen Zahlen
- $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$, Menge der Quadratzahlen in $\mathbb{N}$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid \text{n ist einstellige Primzahl}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$, leere Menge, da die Gleichung $X^2 + 1 = 0$ keine Lösung in $\mathbb{R}$ hat (vgl. Abschnitt 1.1).

Die *reellen Zahlen* werden hier als bekannt vorausgesetzt. Geometrisch gesehen sind die reellen Zahlen genau die Punkte der Zahlengeraden.

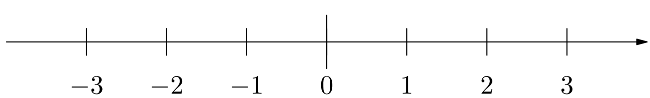


Abbildung 1: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ (1-dimensionaler Raum)

Man kann in $\mathbb{R}$ addieren, subtrahieren, multiplizieren und durch jede Zahl $\neq 0$ dividieren. Die Menge $\mathbb{R}$ ist damit ein „Körper“ (vgl. Abschnitt 1.3).

Wir betrachten geordnete Paare (x, y) von reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$. Hierbei bedeutet „geordnet“, dass $(x, y) = (x', y')$ genau dann gilt, wenn $x = x'$ und $y = y'$. Diese Paare bilden den *2-dimensionalen reellen Raum*

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

und können veranschaulicht werden als Punkte in der Ebene:

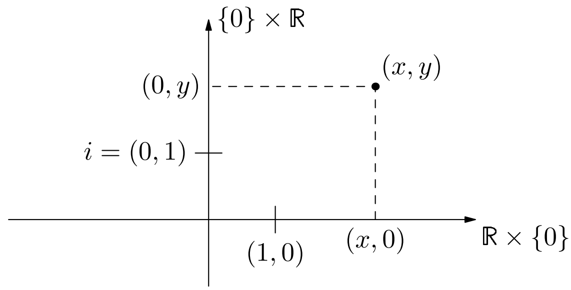


Abbildung 2: Die Ebene $\mathbb{R}^2$

Allgemein definieren wir das *kartesische Produkt* zweier Mengen A und B als

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

wiederum mit $(a, b) = (a', b')$ genau dann, falls $a = a'$ und $b = b'$. Es ist also $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Auch in $\mathbb{R}^2$ kann man addieren, multiplizieren und durch jede Zahl $\neq 0$ dividieren, wie wir im Folgenden sehen werden.

1 Einige Grundbegriffe

Lernziel.
Fertigkeiten: Rechnen mit komplexen Zahlen und Lösen von linearen Gleichungssystemen mit 2 Unbekannten.
Kenntnisse: $\mathbb{R}^n$, Gerade, Ebene, Hyperebene, Körper, Gruppe

1.1 Die komplexen Zahlen

Wir suchen nach einem Bereich, in dem die Gleichung $X^2 + 1 = 0$ lösbar ist. Da die Zahlengerade durch die reellen Zahlen besetzt ist, weichen wir in die Ebene aus.

Wir definieren eine Addition und eine Multiplikation in $\mathbb{R}^2$ wie folgt:

$$(*) \qquad \begin{aligned} (x,y) + (x',y') &:= (x+x', y+y') \\ (x,y)\cdot(x',y') &:= (xx'-yy', xy'+x'y) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} (x,0) + (x',0) &= (x+x',0) \\ (x,0)\cdot(x',0) &= (xx',0) \end{aligned}$$

Man kann also die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ unter Erhalt von Addition und Multiplikation mit $\mathbb{R}\times\{0\} = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ identifizierten.
Setze:

$$\boxed{i := (0,1)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{i^2 = (-1,0) = -1}$$

Die Gleichung $X^2+1=0$ hat also in $\mathbb{R}^2$ eine Lösung, wenn man $\mathbb{R}^2$ mit obiger Addition und Multiplikation versieht und $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}\times\{0\}$ identifiziert. Man schreibt dann $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}^2$ und nennt $\mathbb{C}$ den *Körper der komplexen Zahlen*. Anstatt $(x,y)\in\mathbb{C}$ schreiben wir auch $z\in\mathbb{C}$. Die komplexe Zahl i heißt *imaginäre Einheit*.

Eigenschaften der komplexen Zahlen

1. Es ist $(x,y)\cdot(1,0) = (x,y)$, also ist $(1,0) = 1$ „neutrales Element" der Multiplikation.

2. Es ist $(x,y)\cdot(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}) = (1,0)$, falls $(x,y)\neq(0,0)$, d.h. jedes Element $0\neq z\in\mathbb{C}$ besitzt bezüglich der Multiplikation $(*)$ ein inverses Element $z^{-1}\in\mathbb{C}$.

3. Jedes Element $z\in\mathbb{C}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$z = x + yi \quad \text{mit} \quad x,y\in\mathbb{R}$$

   denn $z = (x,y) = (x,0)+(0,y) = (x,0)+(y,0)\cdot(0,1) = x+yi$. Man sagt hierfür: „$\mathbb{C}$ ist ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\{1,i\}$".

   Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen lassen sich nun auch schreiben als (beachte $i^2=-1$)

$$\begin{aligned} z+z' &= (x+yi)+(x'+y'i) = x+x'+(y+y')i \\ zz' &= (x+yi)\cdot(x'+y'i) = xx'-yy'+(xy'+x'y)i \end{aligned}$$

   Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich die folgenden Eigenschaften einfach nachrechnen:

4. $zz' = z'z$ (Kommutativität)
5. $z(z'z'') = (zz')z''$ (Assoziativität)
6. $z(z' + z'') = zz' + zz''$ (Distributivität)

Betrag einer komplexen Zahl

Ist $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so nennen wir $\bar{z} := x - yi$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*. Es gilt:

$$\boxed{z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2}$$

Dies ist genau das Quadrat des „euklidischen Abstands“ des Punktes (x, y) zum Ursprung. Wir definieren deshalb den *Betrag einer komplexen Zahl*

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

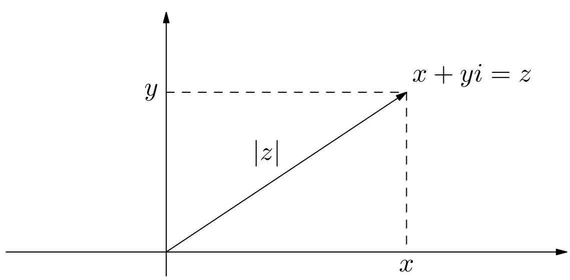


Abbildung 3: Die Zahl $|z|$ ist der Abstand von Nullpunkt

Mit Hilfe des Betrages lässt sich das Inverse einer komplexen Zahl $z \neq 0$ einfach bestimmen: $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$, also $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
In der eindeutigen Darstellung $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $\Re(z) := x$ *Realteil* und $\Im(z) := y$ *Imaginärteil* von z.

Beispiel.
Man stelle $z = \frac{2+3i}{1-2i}$ in der Form $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar. Benutze dabei die Gleichungen $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ und $i^2 = -1$. Dann ist

$$z = \frac{2 + 3i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{2 + 7i - 6}{1 + 4} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

1.2 Der n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$

Der n-dimensionale Raum $\mathbb{R}^n$ besteht aus der Gesamtheit von geordneten *n-Tupeln* reeller Zahlen, also $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_k \in \mathbb{R} \text{ für } k = 1, \ldots, n\}$. „Geordnet" bedeutet dabei, dass $(x_1, \ldots, x_n) = (x'_1, \ldots, x'_n)$ genau dann gilt, wenn $x_1 = x'_1, \ldots, x_n = x'_n$ ist. Die Elemente des $\mathbb{R}^n$ lassen sich addieren und mit einem *Skalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ multiplizieren:

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) &:= (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)\\ \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) &:= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass es für $n > 2$ keine zu $(*)$ in 1.1 analoge Multiplikation $(x_1, \ldots, x_n) \cdot (x'_1, \ldots, x'_n)$ gibt, die alle Axiome eines „Körpers" erfüllt (vgl. 1.4 für den Begriff des Körpers).
Es ist $\mathbb{R}^n$ ein „n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum". Die „Standardbasis" besteht aus den Vektoren: $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 0, 1)$.

Geraden in der Ebene

Eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ ist gegeben als Lösungsmenge einer „linearen Gleichung in zwei Unbekannten". Genauer definieren wir: Eine Teilmenge L von $\mathbb{R}^2$ heißt *Gerade*, wenn es $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ so gibt, dass $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$ gilt.

Beispiel.
Gegeben seien zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$ durch $4x - y = 3$ und $x + y = 2$.

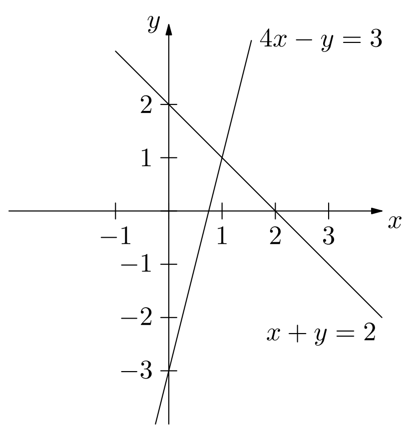


Abbildung 4: Schnittpunkt der beiden Geraden

Wie berechnet man den Schnittpunkt? Man hat das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x - y &= 3 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

zu lösen. Als gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen ergibt sich $x = 1$, $y = 1$, d.h. der Schnittpunkt ist $(1, 1)$.

Ebenen im 3-dimensionalen Raum

Eine Teilmenge E von $\mathbb{R}^3$ heißt *Ebene*, wenn es $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ gibt mit $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ derart, dass gilt:

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$$

Hyperebenen im n-dimensionalen Raum

Allgemein definiert man *Hyperebenen* in $\mathbb{R}^n$ durch

$$E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\}$$

mit $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots 0)$. Eine Hyperebene in $\mathbb{R}^1$ ist dann ein Punkt und in $\mathbb{R}^2$ eine Gerade!!

1.3 Lineare Gleichungssysteme in zwei Unbekannten

Wir betrachten zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$

$$L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = e\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid cx + dy = f\}$$

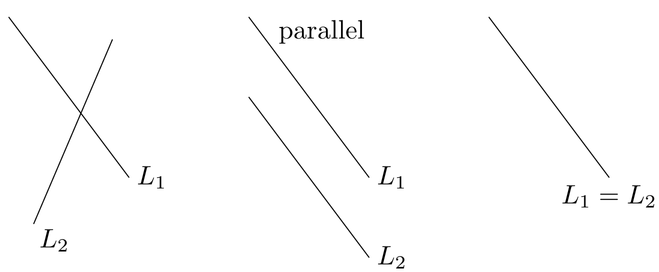


Abbildung 5: Zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$

Wie im Beispiel in 1.2 ist das Gleichungssystem

$$(1) \qquad ax + by = e$$

$$(2) \qquad cx + dy = f$$

wobei $(a, b) \neq (0, 0)$ und $(c, d) \neq (0, 0)$ sind, zu lösen.
Multiplizieren wir (1) mit d und (2) mit $-b$ sowie (1) mit $-c$ und (2) mit a, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} adx + bdy &= de \\ -bcx - bdy &= -bf \end{aligned} \quad \text{sowie} \quad \begin{aligned} -acx - bcy &= -ce \\ acx + ady &= af \end{aligned}$$

Addition ergibt

$$\boxed{(ad - bc)x = de - bf} \quad \text{sowie} \quad \boxed{(ad - bc)y = af - ce}$$

Wir betrachten die Gleichungssystem (1), (2) gehörige „Determinante“

$$D := \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc$$

und unterscheiden zwischen den folgenden drei Fällen

Fall I) $D \neq 0$.
Dann hat das Gleichungssystem genau eine Lösung (den Schnittpunkt der Geraden):

$$\boxed{x = \frac{de - bf}{D}, \quad y = \frac{af - ce}{D}}$$

Fall II) $D = 0$ und $af - ce \neq 0$ oder $de - bf \neq 0$.
Dann hat das Gleichungssystem keine Lösung, und die beiden Geraden L_1, L_2 sind parallel, wobei $L_1 \neq L_2$.

Fall III) $D = 0$ und $af - ce = de - bf = 0$.
Ist $a \neq 0$, so ist $c \neq 0$, denn wäre $c = 0$, so wäre wegen $D = ad - bc = 0$ auch $d = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $(c, d) \neq (0, 0)$. Durch Multiplikation mit $\frac{c}{a}$ geht die Gleichung (2) über in

$$\frac{ca}{a}x + \frac{cb}{a}y = \frac{ce}{a},$$

und das ist Gleichung (1), da $ad = cb$ und $af = ce$ gilt. Es ist also $L_1 = L_2$.

Ist $b \neq 0$, so ist $d \neq 0$, denn wäre $d = 0$, so wäre wegen $D = ad - bc = 0$ auch $c = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung $(c, d) \neq (0, 0)$. Durch Multiplikation mit $\frac{b}{d}$ geht die Gleichung (2) in die Gleichung (1) über. Es ist also wiederum $L_1 = L_2$.

1.4 Körper

Wir führen zunächst den Begriff einer Abbildung ein. Eine *Abbildung* einer Menge M in eine Menge N ist eine Vorschrift f, die jedem Element $m \in M$ **genau ein** Element $f(m) \in N$ zuordnet. Schreibweise:

$$\boxed{f : M \longrightarrow N, \quad m \longmapsto f(m)}$$

Definition.
Ein *Körper* K ist eine Menge, auf der eine *Addition*

$$+ : K \times K \longrightarrow K, \quad (a, b) \longmapsto a + b$$

und eine *Multiplikation*

$$\cdot : K \times K \longrightarrow K, \quad (a, b) \longmapsto ab$$

gegeben sind derart, dass folgende Regeln gelten:

(A1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in K$ *(Assoziativgesetz)*

(A2) Es gibt ein Element $0 \in K$ so, dass $0 + a = a$ für alle $a \in K$ gilt

(A3) Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $-a \in K$ mit $(-a) + a = 0$

(A4) $a + b = b + a$ für alle $a, b \in K$ *(Kommutativgesetz)*

(M1) $(ab)c = a(bc)$ für alle $a, b, c \in K$ *(Assoziativgesetz)*

(M2) Es gibt ein Element $1 \in K$ mit $1a = a$ für alle $a \in K$ und $1 \neq 0$

(M3) Zu jedem $a \in K$, $a \neq 0$, gibt es ein Element $a^{-1} \in K$ mit $a^{-1}a = 1$

(M4) $ab = ba$ für alle $a, b \in K$ *(Kommutativgesetz)*

(D) $(a + b)c = ac + bc$ für alle $a, b, c \in K$ *(Distributivgesetz)*

Beispiele.

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind Körper
- Sei $K = \{0, 1\}$. Setze

  $$\begin{array}{lll} 0 + 0 = 0 & 0 + 1 = 1 + 0 = 1 & \\ 1 + 1 = 0 & 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 = 0 & 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

  Dann ist K ein Körper.
- Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist kein Körper, da (M3) nicht gilt, zum Beispiel ist $\frac{1}{5} = 5^{-1} \notin \mathbb{Z}$. Die Axiome (A1) — (A4) sind in $\mathbb{Z}$ alle erfüllt, $\mathbb{Z}$ ist bezüglich der Addition eine „Gruppe“.

1.5 Gruppen

Eine Gruppe ist eine Menge, auf der nur eine Verknüpfung definiert ist. Das kann z.B. eine Addition oder Multiplikation oder die Hintereinanderausführung von Drehungen einer Ebene um einen festen Punkt sein. Wir benutzen daher ein neues Zeichen $\circ$ für die Verknüpfung in einer Gruppe.

Definition.
Eine Menge G heißt *Gruppe*, falls auf G eine *Verknüpfung*

$$\circ : G \times G \longrightarrow G, \quad (a,b) \longmapsto a \circ b$$

definiert ist derart, dass die folgenden Regeln gelten:

(G1) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in G$ *(Assoziativgesetz)*

(G2) Es gibt ein *neutrales Element* $e \in G$ so, dass $e \circ a = a$ für alle $a \in G$ gilt. Man nennt e auch *linksneutral.*

(G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein *inverses Element* $a^{-1} \in G$ so, dass $a^{-1} \circ a = e$ gilt. Man nennt a^{-1} auch *Linksinverses* zu a.

Gilt in einer Gruppe zusätzlich $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$, so heißt G *abelsch* oder *kommutativ.* Eine Abbildung $f : G \longrightarrow G'$ einer Gruppe G mit Verknüpfung $\circ_G$ in eine Gruppe G' mit Verknüpfung $\circ_{G'}$ heißt *Homomorphismus*, wenn $f(a \circ_G b) = f(a) \circ_{G'} f(b)$ für alle $a, b \in G$ gilt.

Beispiele.
• Jeder Körper ist bezüglich Addition eine abelsche Gruppe. Neutrales Element ist 0, und $-a$ ist invers zu a.
• Ist K ein Körper, so ist $K^\star := K \setminus \{0\} = \{a \in K \mid a \neq 0\}$ bezüglich Multiplikation eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1.

Wir kommen nun zu einem ersten mathematischen Beweis. Wir zeigen, dass in einer Gruppe G jedes neutrale Element auch *rechtsneutral* ist und dass alle zu $a \in G$ inversen Elemente auch *Rechtsinverse* zu a sind. Daraus ergibt sich dann, dass es überhaupt nur ein neutrales Element in einer Gruppe gibt und dass auch das inverse Element eindeutig bestimmt ist.

Satz.
Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e. Dann gelten:

1. $a \circ a^{-1} = e$ *und* $a \circ e = a$ *für alle* $a \in G$
2. *Es gibt genau ein* $e \in G$ *mit* $e \circ a = a \ \forall a \in G$ *, und zu jedem* $a \in G$ *gibt es genau ein inverses Element* a^{-1} *mit* $a^{-1} \circ a = e$

Beweis. 1. Sei $(a^{-1})^{-1}$ ein Inverses von a^{-1}. Dann folgt

$$\begin{aligned} a \circ a^{-1} &\underset{(G2)}{=} e \circ (a \circ a^{-1}) \underset{(G3)}{=} ((a^{-1})^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ a^{-1}) \\ &\underset{(G1)}{=} (a^{-1})^{-1} \circ (a^{-1} \circ a) \circ a^{-1} \underset{(G3)}{=} (a^{-1})^{-1} \circ (e \circ a^{-1}) \\ &\underset{(G2)}{=} (a^{-1})^{-1} \circ a^{-1} \\ &\underset{(G3)}{=} e \end{aligned}$$

Hieraus folgt $a \circ e = a \circ (a^{-1} \circ a) = (a \circ a^{-1}) \circ a = e \circ a = a$ und damit Teil 1.

2. Seien $e, e' \in G$ mit $e \circ a = a = e' \circ a \ \forall a \in G$, dann gilt

$$e' \underset{(G2)}{=} e \circ e' \underset{1.}{=} e$$

Ist $a^{-1} \circ a = a' \circ a = e$, dann folgt

$$a' \underset{(G2)}{=} e \circ a' \underset{(G3)}{=} (a^{-1} \circ a) \circ a' \underset{(G1)}{=} a^{-1} \circ (a \circ a') \underset{1.}{=} a^{-1}$$

□

Lernerfolgstest.
- Berechnen Sie $(3+i)(3-i)$.
- Warum ist die Gleichung $x^2 = r$ für $r < 0$ nicht in $\mathbb{R}$ lösbar?
- Ist jedes lineare Gleichungssystem mit 2 Unbekannten lösbar?
Welche geometrische Vorstellung verbinden Sie mit Ihrer Antwort?
- Was können Sie über Geraden in $\mathbb{R}^3$ aussagen?
- Welche Gleichung erfüllt eine Hyperebene in $\mathbb{R}^4$?
- Konstruieren Sie einen Körper mit 3 Elementen.
- Warum gilt in einer Gruppe $(a^{-1})^{-1} = a$ für jedes Element a und
$e^{-1} = e$ für das neutrale Element?
- Aufgaben 1–6, im Aufgabenpool Abschnitt 1.

1.6 Übungsaufgaben 1 – 6

Aufgabe 1.

Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:

$$\frac{2+i}{4-5i}, \qquad \frac{i-1}{i+1}, \qquad \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)^3, \qquad \frac{1}{i}$$

Aufgabe 2.
Man zeichne die folgenden komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 als Punkte der Ebene

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}\, i \;, \quad z_2 = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 \;, \quad z_3 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{4} \;, \quad z_4 = -2 - \frac{3}{2} i$$

und berechne ihre Beträge.

Aufgabe 3.
Man untersuche das Schnittverhalten der beiden Geraden L_1 und L_2 , falls

a) $L_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6x + 3y = 10 \}$, $L_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7x - 2y = -1 \}$

b) $L_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 6y = 8 \}$, $L_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x + \frac{15}{2} y = 10 \}$

c) $L_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{3}\, x - 3y = 0 \}$, $L_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - \sqrt{3}\, y = 1 \}$.

Aufgabe 4.
Man löse das lineare Gleichungssystem
$(3 + 5i)z_1 + (4 - 7i)z_2 = 22 + 9i$
$(2 - 6i)z_1 + (5 - 3i)z_2 = 33 + 7i.$
(Gesucht sind zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + y_1\, i$ und $z_2 = x_2 + y_2\, i$ mit $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, welche die beiden Gleichungen erfüllen.)

Aufgabe 5.
Man zeige, dass die Menge $G := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ bezüglich der durch

$$a \circ b := a + b + ab$$

für $a, b \in G$ definierten Verknüpfung eine Gruppe ist. Man löse in G die Gleichung $5 \circ x \circ 6 = 17$.
Hinweis. Um zu zeigen, dass G eine Gruppe ist, verifiziere man die vier Bedingungen:
(G0) Sind $a, b \in G$, so ist auch $a \circ b \in G$.
(G1) Es ist $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in G$.
(G2) Es gibt ein Element $e \in G$ so, dass $e \circ a = a$ für alle $a \in G$ gilt.
(G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein Element $a^{-1} \in G$ so, dass $a^{-1} \circ a = e$ gilt.

Aufgabe 6.
Es sei G eine nicht leere Menge mit einer Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a \circ b$, die das Assoziativgesetz (G1) erfüllt. Man zeige, dass G genau dann eine Gruppe ist, wenn die Gleichungen $b \circ x = a$ und $y \circ d = c$ Lösungen in G besitzen, wobei a, b, c, d beliebige Elemente aus G sind.

Vektorraumtheorie

In 1.2 haben wir schon ein Beispiel eines Vektorraumes kennengelernt, nämlich den n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$. Statt des Körpers $\mathbb{R}$ kann man aber auch einen beliebigen Körper K zugrunde legen und dann den n-dimensionalen Raum K^n analog einführen. Schließlich abstrahiert man auch davon und führt einen beliebigen K-Vektorraum ein als Menge, die mit einer Addition und einer Skalarmultiplikation versehen ist, wobei gewisse Regeln erfüllt sein müssen. Ein Vektorraum besteht dann nicht unbedingt aus n-Tupeln von Zahlen wie in 1.2, sondern kann z.B. aus „Funktionen“ bestehen, was in Mathematik und Physik häufig vorkommt.

2 Vektorräume

Lernziel.
Fertigkeiten: Rechnen mit Vektoren und elementare Beweistechniken
Kenntnisse: Beispiele für Vektorräume, Teilräume, Erzeugendensystem, Summe und direkte Summe von Vektorräumen

2.1 Definition und Rechenregeln

Definition.
Ein *K-Vektorraum V* ist eine abelsche Gruppe bezüglich einer Addition

$$+ : V \times V \longrightarrow V, \quad (v, w) \longmapsto v + w\,,$$

und zusätzlich ist eine *Skalarmultiplikation*

$$K \times V \longrightarrow V, \quad (\lambda, v) \longmapsto \lambda v$$

gegeben derart, dass die folgenden Regeln gelten:

(SM1) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ für alle $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$

(SM2) $1v = v$ für alle $v \in V$

(D1) $\lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$ für alle $\lambda \in K$, $v, w \in V$

(D2) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ für alle $\lambda, \mu \in K, v \in V$

Die Elemente eines K-Vektorraumes nennen wir auch *Vektoren*. Statt K-Vektorraum sagen wir auch *Vektorraum über* K.

Rechenregeln in Vektorräumen

Sei V ein K-Vektorraum. Das neutrale Element der Addition in V bezeichnen wir mit $\vec{0}$ und nennen diesen Vektor den *Nullvektor*. Wir schreiben $-v$ für das Inverse von v. Nach 1.5, (G3) und Satz, folgen

$$\boxed{-v + v = \vec{0}} \qquad \text{und} \qquad \boxed{v + (-v) = \vec{0}}$$

für alle $v \in V$. Nach 1.5 gilt ferner

$$\boxed{\vec{0} + v = v = v + \vec{0} \quad \forall\, v \in V}$$

Es folgen die Regeln:

1. Für das neutrale Element der Addition $0 \in K$ ist $0v = \vec{0} \quad \forall v \in V$
2. $\lambda\vec{0} = \vec{0} \quad \forall \lambda \in K$
3. $(-1)v = -v \quad \forall v \in V$

Beweis. 1. Es ist $0v = (0+0)v = 0v + 0v$. Addition von $-0v$ ergibt $\vec{0} = 0v$.

2. Es ist $\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda\vec{0} + \lambda\vec{0}$. Addition von $-\lambda\vec{0}$ ergibt $\vec{0} = \lambda\vec{0}$.
3. Es ist $\vec{0} = 0v = (-1+1)v = (-1)v + 1v = (-1)v + v$, also $-v = (-1)v$.

□

Geometrische Anschauung

Sei $V = \mathbb{R}^n$ und $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\vec{0} = 0v = (0, \ldots, 0)$$

und

$$-v = (-1)v = (-x_1, \ldots, -x_n)$$

Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda v = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$

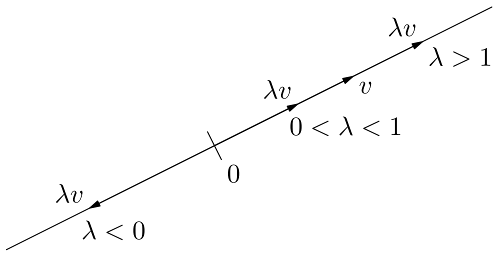


Abbildung 6: Beispiele für λv

Ist $w = (x_1', \dots, x_n')$, so ist $v - w = v + (-w) = (x_1 - x_1', \dots, x_n - x_n')$
Beispiel in $\mathbb{R}^2$:
$v = (2,1),\ w = (1,2) \quad \Longrightarrow \quad v + w = (3,3) \quad \text{und} \quad v - w = (1,-1)$

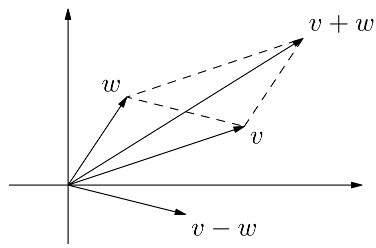


Abbildung 7: Diagonale des von v und w aufgespannten Parallelogramms

Ist $w = \lambda v$, so sind v und w „linear abhängig". Ist $\lambda v + \mu w = \vec{0}$ nur für $\lambda = \mu = 0$ möglich, so sind v und w „linear unabhängig".

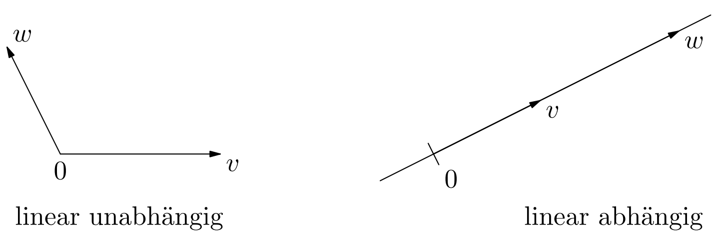


Abbildung 8: „linear unabhängig" und „linear abhängig"

2.2 Beispiele für Vektorräume

1. $\{\vec{0}\}$ mit $\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$ und $\lambda\vec{0}=\vec{0}\quad\forall\,\lambda\in K$ ist ein K-Vektorraum.

2. $\mathbb{R}^n$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum (vgl. 1.2)

3. Analog ist K^n ein K-Vektorraum mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation. Auch ist $K=K^1$ ein K-Vektorraum.

4. Sei X eine nicht leere Menge, und sei $V:=\{f:X\longrightarrow K\}$ die Menge aller Abbildungen von X mit Werten in K.
   Definiere für $f,g\in V$ und $\lambda\in K$

   (Addition) $\quad f+g:X\longrightarrow K,\quad x\longmapsto f(x)+g(x)$
   (Skalarmultiplikation) $\quad \lambda f:X\longrightarrow K,\quad x\longmapsto \lambda f(x)$

   Dann wird V dadurch zu einem K-Vektorraum.

   Das neutrale Element der Addition ist die *Nullabbildung*, die jedes Element aus X auf 0 abbildet, $X\longrightarrow K,\quad x\longmapsto 0$.
   Die zu $f\in V$ inverse Abbildung ist $-f:X\longrightarrow K,\quad x\longmapsto -f(x)$.

   Dass V ein K-Vektorraum ist, zeigt man durch Rückführung auf die entsprechenden Vektorraumeigenschaften von K.

   Wir nennen $V=\{f:X\longrightarrow K\}$ einen *Funktionenraum mit Werten in* K und bezeichnen diesen Vektorraum auch als

   $$\boxed{\mathrm{Abb}(X,K)=\{f:X\longrightarrow K\}}$$

5. Ist allgemeiner W ein K-Vektorraum und

   $$\boxed{\mathrm{Abb}(X,W):=\{f:X\longrightarrow W\}}$$

   so ist $\mathrm{Abb}(X,W)$ analog wie oben ein K-Vektorraum. Speziell nennen wir für $X=\mathbb{R}^n$ und $W=\mathbb{R}^m$ den Vektorraum $\{f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m\}$ den Raum der *vektorwertigen Funktionen in n Veränderlichen.*

6. $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, wie aus den Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$ folgt. Ebenso ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

   Allgemein gilt: Ist L ein Körper, der K als „Teilkörper“ enthält, so ist L ein K-Vektorraum.

2.3 Untervektorräume

Definition.
Sei V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge U von V heißt *Teilraum* oder *Untervektorraum* von V, wenn folgendes gilt:

(UV1) $U \neq \varnothing$
U enthält mindestens ein Element

(UV2) $u, v \in U \Longrightarrow u + v \in U$
U ist abgeschlossen gegenüber der Addition

(UV3) $u \in U$ und $\lambda \in K \Longrightarrow \lambda u \in U$
U ist abgeschlossen bezüglich der Skalarmultiplikation

Bemerkung.
Ein Teilraum U von V ist selbst ein K-Vektorraum

Beweis. Wir müssen nur prüfen, dass $\vec{0} \in U$ und dass mit $u \in U$ auch $-u \in U$ ist. Alle anderen Vektorraumaxiome sind dann erfüllt, da sie in V gelten.
Nach (UV1) gibt es ein $u \in U$ und es folgt: $\vec{0} = 0u \underset{(\text{UV3})}{\in} U$
Für beliebiges $u \in U$ gilt: $-u = (-1)u \underset{(\text{UV3})}{\in} U$ $\square$

2.4 Beispiele und Gegenbeispiele

1.
   - $\{\vec{0}\}$ ist ein Teilraum von V, da $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ und $\lambda\vec{0} = \vec{0} \quad \forall\, \lambda \in K$
   - V ist Teilraum von V

2.
   - Sind U_1, U_2 Untervektorräume von V, dann ist auch

     $$U_1 \cap U_2 := \{v \in V \mid v \in U_1 \text{ und } v \in U_2\}$$

     ein Untervektorraum von V.
   - Allgemein gilt: Ist J eine beliebige Indexmenge und sind U_j, $j \in J$ Untervektorräume von V, so ist auch

     $$U := \bigcap_{j \in J} U_j := \{v \in V \mid v \in U_j \ \forall j \in J\}$$

     ein Untervektorraum von V.

     Beweis. Liegen u, v in allen U_j, so auch $u + v$ und λu, da die U_j Untervektorräume sind. $\square$

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $(a, b) \neq (0, 0)$. Dann ist
$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$$
ein Untervektorraum.

Beweis. **(UV1)** Es ist $\vec{0} = (0, 0) \in U$, da $a0 + b0 = 0$. Insbesondere ist $U \neq \emptyset$.

(UV2) Seien $(x, y), (x', y') \in U$, dann gilt
$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ ax' + by' &= 0 \end{aligned}$$
Addition ergibt: $a(x + x') + b(y + y') = 0$ und damit ist
$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \in U$$

(UV3) Seien $(x, y) \in U$ und $\lambda \in K$, dann gilt
$$\begin{aligned} & ax + by = 0 \\ \Longrightarrow \quad & \lambda ax + \lambda by = 0 \end{aligned}$$
und damit ist
$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in U$$
□

4. Behauptung: $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

Beweis. Für $x, y \in \mathbb{R} \setminus 0$ ist stets $x^2 > 0$ und $y^4 > 0$, also wird die „nicht lineare" Gleichung $x^2 + y^4 = 0$ in $\mathbb{R}^2$ nur von $\vec{0} = (0, 0)$ erfüllt. Es folgt $U = \{\vec{0}\}$ und somit ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$. □

5. Seien U_1, U_2 Untervektorräume von V, dann ist
$$U_1 \cup U_2 := \{v \in V \mid v \in U_1 \text{ oder } v \in U_2\}$$
im Allgemeinen **kein** Untervektorraum von V:

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 0\}$, $U_2 = \{(x, y) \mid 5x + 3y = 0\}$. U_1, U_2 sind Untervektorräume nach 3.), aber $U_1 \cup U_2$ nicht:

Sei $(x, y) = (3, -2)$ und $(x', y') = (-3, 5)$, dann ist $(x, y) \in U_1$ und $(x', y') \in U_2$. Es ist $(x, y) + (x', y') = (0, 3)$, aber $(0, 3) \notin U_1$ und $(0, 3) \notin U_2$ also ist $(0, 3) \notin U_1 \cup U_2$. Axiom (UV2) gilt nicht, und damit ist $U_1 \cup U_2$ kein Untervektorraum.

6. $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ist **kein** Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

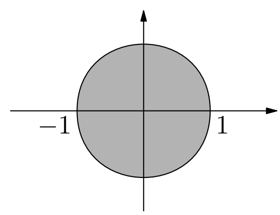


Abbildung 9: Kein Untervektorraum

Beweis. Es ist $u = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in S$, da $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 \leqslant 1$, aber $2u = (1,1) \notin S$, da $1^2 + 1^2 = 2 > 1$. Die Regel (UV3) gilt also nicht. □

2.5 Der von einer Teilmenge aufgespannte Teilraum

Sei V ein K-Vektorraum und $S \subset V$ eine beliebige Teilmenge von V. Dann ist

$$\operatorname{Span}(S) := \bigcap_{\substack{U \text{ Teilraum} \\ \text{von } V \text{ mit } S \subset U}} U \quad = \begin{cases} \text{Durchschnitt aller Teilräume, die } S \\ \text{enthalten} \end{cases}$$

ein Untervektorraum von V nach 2. in 2.4. Wir nennen $\operatorname{Span}(S)$ den von S *erzeugten* oder den von S *aufgespannten Untervektorraum* von V. Es ist $\operatorname{Span}(S)$ der kleinste Unterraum von V, der S enthält („kleinste" bezüglich „$\subset$").

Definition.

a) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Dann heißt der Vektor

$$v := \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

aus V eine *Linearkombination von* $v_1, \ldots, v_n$.

b) Sei $S \subset V$ eine beliebige Teilmenge. Ein Vektor $v \in V$ heißt *Linearkombination von Vektoren aus* S, falls es **endlich viele** Elemente $v_1, \ldots, v_n \in S$ gibt so, dass v Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ ist.

Satz.
Seien V ein K-Vektorraum, $S \subset V$ und $\operatorname{Span}(S)$ *der von S erzeugte Untervektorraum von V. Dann besteht* $\operatorname{Span}(S)$ *aus allen $v \in V$, die Linearkombinationen von Vektoren aus S sind.*

Beweis. Sei $U := \{v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination von Vektoren aus } S\}$.
Zu zeigen: $U = \text{Span}(S)$

$\subseteq$ Sei $v \in U$

$$\begin{array}{rc} \Longrightarrow & v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K, v_1, \ldots, v_n \in S \\ \Longrightarrow & v \text{ liegt in jedem Teilraum von } V\text{, der } v_1, \ldots, v_n \text{ enthält} \\ \Longrightarrow & v \in \text{Span}(S) \end{array}$$

$\supseteq$ Da U selbst ein Untervektorraum von V ist, der S enthält, folgt $U \supseteq \text{Span}(S)$.

□

Ist insbesondere $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine endliche Teilmenge von V, so gilt

$$\text{Span}(S) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\} \subset V$$

2.6 Erzeugendensysteme

Sei V ein K-Vektorraum und $S \subset V$. Ist $\text{Span}(S) = V$, so heißt S ein *Erzeugendensystem von V*.
Ist also S ein Erzeugendensystem, dann gibt es zu jedem $v \in V$ ein $m \in \mathbb{N}$ sowie Elemente $v_1, \ldots, v_m \in S$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m$
Wenn V eine endliche Teilmenge $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ als Erzeugendensystem besitzt, so heißt V *endlich erzeugt*. Es ist dann

$$V = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$$

Zum Beispiel

$$\boxed{\mathbb{R}^2 = \{\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}}$$

Beispiele.

- Seien $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \{0\} \times \mathbb{R}$ und $U_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$. Dann sind U_1 und U_2 Teilräume von $\mathbb{R}^2$, aber $U_1 \cup U_2$ ist kein Vektorraum, denn $(1,0) \in U_1$, $(0,1) \in U_2$ aber $(1,0) + (0,1) = (1,1) \neq U_1 \cup U_2$.

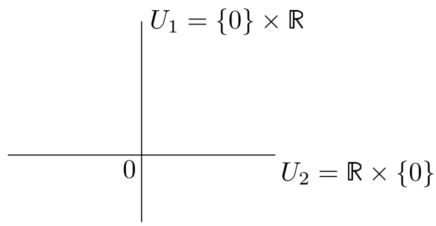


Abbildung 10: $U_1 \cup U_2$ ist kein Untervektorraum

Der von $S = U_1 \cup U_2$ aufgespannte Teilraum von $\mathbb{R}^2$ ist die Summe

$$\boxed{U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}}$$

Hier gilt zusätzlich noch $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$.

- Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0, b \neq 0$, dann bilden $v_1 = (a, 0), v_2 = (0, b)$ und $v_3 = (3, 5)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$.

  Beweis. Sei $v \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Nach 1.2 ist $v = (x, y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Es folgt

  $$\begin{aligned} v = (x, y) &= \frac{x}{a}(a, 0) + \frac{y}{b}(0, b) + 0(3, 5) \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \end{aligned}$$

  mit $\lambda_1 = \frac{x}{a}$, $\lambda_2 = \frac{y}{b}$ und $\lambda_3 = 0$. □

  Man sieht insbesondere, dass $v_3 = (3, 5)$ entbehrlich ist.

- Bilden $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (1, -1)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$?
  Ansatz:

  $$\begin{aligned} (x, y) &\overset{!}{=} \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(1, -1) = (\lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, -\lambda_2) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2) \end{aligned}$$

  also

  $$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 - \lambda_2 = y \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \frac{x + y}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{x - y}{2}$$

Die Vektoren $(1,1)$ und $(1,-1)$ bilden also ein Erzeugendensystem, da

$$(x,y) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1)$$

mit $\lambda_1 = \frac{x+y}{2}, \lambda_2 = \frac{x-y}{2} \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

- Bilden $v_1 = (-3,3)$, $v_2 = (1,-1)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$? Ansatz:

$$\begin{aligned}(x,y) &\overset{!}{=} \lambda_1(-3,3) + \lambda_2(1,-1) = (-3\lambda_1, 3\lambda_1) + (\lambda_2, -\lambda_2)\\ &= (-3\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 - \lambda_2)\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}-3\lambda_1 + \lambda_2 &= x\\ 3\lambda_1 - \lambda_2 &= y\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist aber nicht für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lösbar, denn setze z.B. $(x,y) = (0,1)$, dann ist das System

$$\begin{aligned}-3\lambda_1 + \lambda_2 &= 0\\ 3\lambda_1 - \lambda_2 &= 1\end{aligned} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{aligned}3\lambda_1 - \lambda_2 &= 0\\ 3\lambda_1 - \lambda_2 &= 1\end{aligned}$$

nicht lösbar. Insbesondere ist $v = (0,1)$ keine Linearkombination von v_1 und v_2 .

2.7 Summen von Vektorräumen

Summen von Teilräumen

Sind $U_j, j \in J$ (Indexmenge) Teilräume eines K-Vektorraumes V, so heißt der von der Vereinigung $S = \bigcup_{j\in J} U_j$ erzeugte Teilraum von V die *Summe der* U_j. Wir schreiben

$$\sum_{j\in J} U_j$$

Mit Hilfe des Satzes in 2.5 folgt:

$$\sum_{j\in J} U_j = \left\{ \sum_{j\in J} u_j \;\middle|\; u_j \in U_j,\ u_j \neq \vec{0} \text{ für nur endlich viele } j \in J \right\}$$

Speziell: Sind U_1, U_2 Teilräume von V, so ist

$$\boxed{U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}}$$

Satz.
Seien U_1, U_2 Teilräume eines K-Vektorraumes V, und sei $U = U_1 + U_2$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. *Ist $u_1 + u_2 = \vec{0}$ für $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$, dann ist $u_1 = u_2 = \vec{0}$*

2. *Für jedes $u \in U$ ist die Darstellung $u = u_1 + u_2$ eindeutig*

3. *$U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$*

Beweis. $1 \Longrightarrow 2$ Seien $u = u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$ mit $u_1, u_1' \in U_1$, $u_2, u_2' \in U_2$ zwei Darstellungen von u. Zu zeigen: $u_1 = u_1'$ und $u_2 = u_2'$. Da

$$\begin{array}{llcccc} & & & u_1 + u_2 = u_1' + u_2' & & \\ \Longrightarrow & & & \underbrace{u_1 - u_1'}_{\in U_1} + \underbrace{u_2 - u_2'}_{\in U_2} = \vec{0} & & \\ \overset{1.}{\Longrightarrow} & & u_1 - u_1' = \vec{0} & \text{und} & u_2 - u_2' = \vec{0} \\ \Longrightarrow & & u_1 = u_1' & \text{und} & u_2 = u_2' \end{array}$$

$2 \Longrightarrow 3$ Sei $u \in U_1 \cap U_2$. Zu zeigen: $u = \vec{0}$

$$\text{Es ist} \quad u = u + \vec{0} = \vec{0} + u \quad \overset{\text{nach 2.}}{\Longrightarrow} u = \vec{0}$$

$3 \Longrightarrow 1$ Sei $u_1 + u_2 = \vec{0}$. Zu zeigen $u_1 = u_2 = \vec{0}$

$$\begin{array}{ll} \text{Da} \quad u_1 + u_2 = \vec{0} & \Longrightarrow \quad u_1 = -u_2 \in U_2 \quad \Longrightarrow \quad u_1 \in U_1 \cap U_2 \\ & \Longrightarrow \quad u_1 = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad u_2 = \vec{0} \end{array}$$

□

Definition.

- Seien U_1, U_2 Teilräume eines K-Vektorraumes. Dann heißt die Summe $U_1 + U_2$ die *(innere) direkte Summe* von U_1 und U_2, falls eine der Bedingungen (und damit alle) aus obigem Satz erfüllt sind. Wir schreiben dann:

$$U_1 \oplus U_2$$

- Seien V_1, V_2 beliebige K-Vektorräume. Wir definieren die *(äußere) direkte Summe* als

$$V_1 \oplus V_2 := \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

Beispiel.
Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $U_1 = \{0\} \times \mathbb{R}$ und $U_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$. Dann ist $\mathbb{R}^2 = U_1 \oplus U_2$ die innere direkte Summe, da $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$.
Sei $V_1 = \mathbb{R}$ und $V_2 = \mathbb{R}$. Dann ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ die äußere direkte Summe. Analog ist $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{n\text{-Stück}}$ eine äußere direkte Summe.

Lernerfolgstest.
- Sei v ein Vektor in $\mathbb{R}^2$. Sind v und $-v$ linear abhängig oder linear unabhängig?
- Seien X, Y zwei nichtleere Mengen. Ist die Menge $\{f : X \longrightarrow Y\}$ aller Abbildungen von X mit Werten in Y ein K-Vektorraum? Falls ja, wie sind Addition und Skalarmultiplikation definiert?
- Zeigen Sie, dass $V := \{f : X \longrightarrow K\}$ mit der in 2.2.4 definierten Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum ist.
- Was ist der von Menge in 2.4.6. (vgl. Abbildung 9) aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$?
- Aufgaben 7–11, im Aufgabenpool Abschnitt 2.

2.8 Übungsaufgaben 7 – 11

Aufgabe 7.
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Man zeige:

a) Wenn für $\lambda \in K$ und $v \in V$ die Gleichung $\lambda v = \vec{0}$ gilt, dann ist $\lambda = 0$ oder $v = \vec{0}$.

b) Wenn für zwei Untervektorräume U_1, U_2 von V auch deren Vereinigung $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum ist, dann gilt $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

Aufgabe 8.

a) Man untersuche, für welche $c \in \mathbb{R}$ die Menge

$$U_c := \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = c \,\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Sei $V := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Dabei seien $f + g$ und λf für $f, g \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f(x) + g(x)\,, \quad \text{und} \quad \lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \lambda\, f(x)\,.$$

Man prüfe, ob $U := \{ f \in V \mid f(x) = f(-x)\ \forall\ x \in \mathbb{R} \}$ ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 9.
Man untersuche, welche der folgenden vier Mengen Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind:
$U_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}$
$U_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y \}$
$U_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \}$
$U_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 0 \}$

Aufgabe 10.
Man stelle den Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ jeweils als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 dar:

a) $\quad w = (3, 2, 1)\,,\ \ v_1 = (1, 0, 1)\,,\ \ v_2 = (7, 3, 1)\,,\ \ v_3 = (4, 3, -1)$

b) $\quad w = (-8, 17, -14)\,,\ \ v_1 = (2, 1, 0)\,,\ \ v_2 = (3, 0, 5)\,,\ \ v_3 = (-1, 4, -1)\,.$

Aufgabe 11.
Seien $U_1, \ldots, U_n$ Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Dann ist auch

$$U := U_1 + \cdots + U_n := \{ u_1 + \cdots + u_n \ \mid u_j \in U_j \text{ für alle } j = 1, \ldots, n \}$$

ein Untervektorraum von V. Man beweise, dass folgende drei Bedingungen äquivalent sind:

(1) Ist $u_1 + \cdots + u_n = \vec{0}$ in U, so folgt $u_j = \vec{0}$ für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$.

(2) Für jedes $u \in U$ ist die Darstellung $u = u_1 + \cdots + u_n$ mit $u_j \in U_j$ eindeutig.

(3) Es ist $U_i \cap (U_{i+1} + \cdots + U_n) = \{\vec{0}\}$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Man zeige dann anhand eines Gegenbeispiels, dass die obigen Bedingungen für $n > 2$ im allgemeinen nicht äquivalent sind zu $U_1 \cap \cdots \cap U_n = \{\vec{0}\}$.

Bemerkung.
Aufgabe 11 ist eine Verallgemeinerung des Satzes in 2.7 auf endlich viele Teilräume $U_1, \ldots, U_n$ von V.

3 Basis und Dimension

Lernziel.
Fertigkeiten: Lineare Abhängigkeit testen, Konstruktion von Basen
Kenntnisse: Beweisidee für die Existenz einer Basis und wie man zum Dimensionsbegriff kommt

3.1 Lineare Unabhängigkeit

Definition.
Sei V ein K-Vektorraum. Dann heißen $v_1, \ldots, v_m \in V$ *linear unabhängig*, wenn aus

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \vec{0}, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$$

stets folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Andernfalls heißen $v_1, \ldots, v_m \in V$ *linear abhängig*.
Eine Teilmenge $S \subset V$ heißt *linear unabhängig*, wenn **jede endliche** Teilmenge von S aus linear unabhängigen Vektoren besteht.

Beispiele.

- $\vec{0}$ ist linear abhängig, da $1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$. Ebenso ist jede Menge, die den Nullvektor enthält, linear abhängig.
- Die beiden Vektoren $v_1 = (-3, 3)$, $v_2 = (1, -1)$ sind linear abhängig in $\mathbb{R}^2$, denn $v_1 + 3v_2 = \vec{0}$.
- $v \in V, v \neq \vec{0}$, ist linear unabhängig, da nach Aufgabe 7a aus $\lambda v = \vec{0}$ folgt, $\lambda = 0$
- Im Gegensatz dazu ist v linear abhängig von v, da $1v + (-1)v = \vec{0}$
- $\varnothing$ ist linear unabhängig
- In K^n sind die Vektoren

$$\begin{aligned} e_1 &:= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &:= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &:= (0, 0, \ldots, 0, 1) \end{aligned}$$

linear unabhängig.

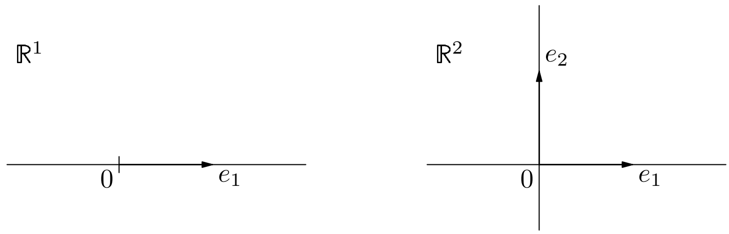


Abbildung 11: linear unabhängige Vektoren

3.2 Kriterium für lineare Abhängigkeit

Satz.
Sei $m \in \mathbb{N}, m > 1$. Dann sind für $v_1, \ldots, v_m \in V$ die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

1. *$v_1, \ldots, v_m$ sind linear abhängig*
2. *Es gibt (mindestens) ein j mit $1 \leqslant j \leqslant m$ so, dass v_j Linearkombination der übrigen Vektoren $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_m$ ist.*

Beweis. $1 \Longrightarrow 2$ Seien $v_1, \ldots, v_m$ linear abhängig.
Dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ so, dass $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = 0$ gilt und $\lambda_j \neq 0$ für mindestens ein j. Es folgt

$$v_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} v_{j-1} - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j} v_{j+1} - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda_j} v_m$$

$2 \Longrightarrow 1$ Da die Definition 3.1 der linearen Unabhängigkeit nicht von der Reihenfolge der Vektoren abhängt, sei ohne Einschränkung $j = 1$. Es folgt $v_1 = \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$ und daher

$$\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_m v_m = \vec{0} \quad \text{mit } \lambda_1 = 1 \neq 0$$

□

3.3 Definition einer Basis und Beispiele

Definition.
Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset V$ heißt *Basis* eines K-Vektorraumes V, falls gelten:

(B1) $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig

(B2) $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V

Beispiel.

- $\varnothing$ ist eine Basis von $\{\vec{0}\}$
- Es ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ mit

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)\,, e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)\,, \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

  eine Basis von K^n. Sie heißt die *Standardbasis* des K^n.

- $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$, denn wie bereits in 2.6 gezeigt, ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$. Zu zeigen bleibt die lineare Unabhängigkeit. Sei also $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}(0,0) &= \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1)\\ &= (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)\end{aligned}$$

  Es folgt

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 = 0\\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0\end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad 2\lambda_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0$$

  Diese Rechnung hätten wir uns eigentlich sparen können, denn ein Erzeugendensystem mit 2 Elementen von $\mathbb{R}^2$ ist stets eine Basis, wie wir in 3.11.3 sehen werden.

- Aus dem Beispiel in 2.6 wissen wir, dass $\mathcal{B} = \{(-3,3),(1,-1)\}$ kein Erzeugendensystem und damit auch keine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist. Die Vektoren v_1 und v_2 sind wegen $v_1 + 3v_2 = \vec{0}$ linear abhängig. Das muss auch so sein, denn in 3.11.4 werden wir sehen, dass zwei linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$ stets eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

3.4 Eindeutigkeit der Basisdarstellung

Satz.
Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum, der eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ besitzt. Dann lässt sich jeder Vektor $v \in V$ ***eindeutig*** *schreiben als Linearkombination*

$$(*) \qquad v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \quad \textit{mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

Beweis. Da $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V bilden, gibt es Elemente $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Sei $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$ mit $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$ eine weitere Darstellung von v. Es folgt

$$\vec{0} = v - v = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n$$

Da $v_1, \dots, v_n$ auch linear unabhängig sind, folgt

$$\lambda_j - \mu_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

also $\lambda_j = \mu_j \quad \forall j = 1, \dots, n$. □

Besitzt ein Vektorraum V eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, dann können wir also jeden Vektor $v \in V$ eindeutig schreiben als Linearkombination $(*)$. Insbesondere gibt es also zu jedem $v \in V$ genau einen Vektor $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Wir nennen $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ den *Koordinatenvektor* von v bezüglich $\mathcal{B}$. Die Reihenfolge der Vektoren $v_1, \dots, v_n$ ist dabei fest gewählt. Wir sprechen dann auch von einer *geordneten Basis* und schreiben $(v_1, \dots, v_n)$ statt $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Beispiel.
Sei $V = \mathbb{R}^2$. Dann schreiben wir $v \in \mathbb{R}^2$ als $v = (x, y)$, also als Koordinatenvektor zur Standardbasis (e_1, e_2), denn $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$.

3.5 Charakterisierende Eigenschaften einer Basis

Definition.
Sei V ein K-Vektorraum und $B \subset V$ eine Teilmenge.

- B heißt *minimales Erzeugendensystem*, falls B ein Erzeugendensystem von V ist, aber jede echte Teilmenge $A \subsetneq B$ kein Erzeugendensystem von V mehr ist.
- B heißt *maximale linear unabhängige Teilmenge*, falls B linear unabhängig ist, aber jede echte Obermenge $C \supsetneq B$ in V nicht mehr linear unabhängig ist.

Satz.
Für eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset V$ sind äquivalent

1. *$\mathcal{B}$ ist eine Basis*
2. *$\mathcal{B}$ ist ein minimales Erzeugendensystem*
3. *$\mathcal{B}$ ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge*

Beweis. $1 \Longrightarrow 2$ Sei $A \subsetneq \mathcal{B}$ und $v \in \mathcal{B} \setminus A$. Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist, gibt es nach Satz 3.2 keine Linearkombination von v mit Elementen aus $(\mathcal{B} \setminus \{v\}) \supset A$. Insbesondere ist A kein Erzeugendensystem von V

$2 \Longrightarrow 3$ Angenommen, $\mathcal{B}$ wäre nicht linear unabhängig, dann gäbe es nach Satz 3.2 ein $v \in \mathcal{B}$ derart, dass v Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{B} \setminus \{v\}$ wäre und also $\mathcal{B} \setminus \{v\}$ ein Erzeugendensystem wäre im Widerspruch zur Voraussetzung 2. Also ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig. Nach Satz 3.2 ist $\mathcal{B}$ auch maximal, da $\mathcal{B}$ Erzeugendensystem ist und sich damit jedes $v \notin \mathcal{B}$ als Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{B}$ darstellen lässt.

$3 \Longrightarrow 1$ Sei $\mathcal{B}$ eine maximale linear unabhängige Teilmenge. Zu zeigen: $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem.

Ist $v \in \mathcal{B}$, dann ist $v = 1v$ eine Linearkombination. Sei also $v \notin \mathcal{B}$. Dann ist $\mathcal{B} \cup \{v\}$ nicht linear unabhängig nach Voraussetzung. Es gibt also $v_1, \ldots, v_m \in \mathcal{B}$ und $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$, nicht alle gleich Null, mit

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \vec{0}$$

Es ist dabei $\lambda \neq 0$, da sonst $v_1, \ldots, v_m$ und damit auch $\mathcal{B}$ nicht linear unabhängig wären. Es folgt

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda} v_m$$

und damit ist v eine Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{B}$.

□

3.6 Existenzsatz

Lemma.
Sei V ein K-Vektorraum und sei $M \subset S \subset V$, wobei M linear unabhängig und S ein Erzeugendensystem sei. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $M \subset \mathcal{B} \subset S$.

Beweis. Wir suchen unter allen Teilmengen X von V mit $M \subset X \subset S$ eine maximal linear unabhängige. Diese ist nach 3.5 eine Basis. Wenn S endlich ist, gibt es also sicher eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $M \subset \mathcal{B} \subset V$. Hat S unendlich viele Elemente, so ist nicht klar, ob es unter den obigen Mengen X eine maximale gibt. Die Schwierigkeiten werden durch ein *Axiom* der Mengenlehre behoben, das sogenannte *Lemma von Zorn*, (vgl. z. B. Algebra-Vorlesung [11, 7.5]). Dies garantiert die Existenz einer Basis $\mathcal{B}$ mit $M \subset \mathcal{B} \subset S$. □

Satz.
Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Beweis. Wähle im Lemma $M = \varnothing$ und $S = V$. $\square$

3.7 Basisergänzungssatz

Satz.
Sei V ein K-Vektorraum, M eine linear unabhängige Teilmenge und E ein Erzeugendensystem von V. Dann lässt sich M durch Elemente aus E zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis. Wende Lemma 3.6 auf M und $S = M \cup E$ an. $\square$

Beispiel.
Man finde eine Basis für den von

$$v_1 = (1,0,1), \qquad v_2 = (2,1,0), \qquad v_3 = (1,-1,3)$$

erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ und ergänze diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

Zunächst wird nachgeprüft, ob die Vektoren v_1 , v_2 , v_3 linear unabhängig sind: Der Ansatz $(0,0,0) \overset{!}{=} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (\lambda_1, 0, \lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, 0) + (\lambda_3, -\lambda_3, 3\lambda_3) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 + 3\lambda_3)$ führt zu den Gleichungen $\lambda_2 = \lambda_3$ und $\lambda_1 = -3\lambda_3$. Setzt man zum Beispiel $\lambda_3 = 1$ ein, so folgt $\boxed{-3v_1 + v_2 + v_3 = \vec{0}}$, also sind v_1 , v_2 , v_3 linear abhängig.

Wir machen den Ansatz $(0,0,0) \overset{!}{=} \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = (\mu_1, 0, \mu_1) + (2\mu_2, \mu_2, 0) = (\mu_1 + 2\mu_2, \mu_2, \mu_1)$ und erhalten $\mu_1 = 0 = \mu_2$. Also sind v_1, v_2 linear unabhängig und bilden daher eine Basis des von v_1, v_2, v_3 erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
Nun muss $\{v_1, v_2\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden. Ein Kandidat für einen weiteren Basisvektor ist $e_3 = (0,0,1)$. Sei $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Der Ansatz $(x_1, x_2, x_3) \overset{!}{=} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 e_3 = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3)$ führt zu $\lambda_2 = x_2$, $\lambda_1 = x_1 - 2x_2$ und $\lambda_3 = x_3 - x_1 + 2x_2$. Es ist also $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, e_3\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$. Speziell für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ folgt $\lambda_2 = 0 = \lambda_1 = \lambda_3$, also ist $\mathcal{B}$ auch linear unabhängig und damit eine Basis von $\mathbb{R}^3$. (In 3.11 werden wir feststellen, dass jedes Erzeugendensystem mit drei Elementen eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet.)

3.8 Austauschsatz

Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Nach 3.6 besitzt V dann eine endliche Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dann gibt es eine konstruktive Methode um eine Basis $\mathcal{B}$ zu finden. Wir wählen einen Vektor $v \neq 0$ aus einem endlichen Erzeugendensystem S von V. Wir fügen so lange Vektoren aus S zu $\mathcal{B}$ hinzu, bis die Aufnahme eines jeden weiteren Vektors aus S zu linearer Abhängigkeit führt. Offensichtlich hängt $\mathcal{B}$ dann aber von der konkreten Wahl der Vektoren ab. Ist aber wenigstens die Anzahl der Elemente in verschiedenen Basen immer gleich? Auf diese Frage wollen wir im Folgenden eine Antwort finden.

Satz.
Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$. Ist $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, dann gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ so, dass auch die Vektoren

$$\{v_1, \dots, v_{j-1}, v, v_{j+1}, \dots, v_n\}$$

eine Basis von V bilden. Dabei kann man als j jeden Index wählen, für den $\lambda_j \neq 0$ ist in der Basisdarstellung $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

Beweis. Da $v \neq \vec{0}$ gibt es (mindestens) ein j mit $\lambda_j \neq 0$. Ohne Einschränkung sei $j = 1$, ansonsten vertauschen wir einfach v_1 und v_j. Zu zeigen ist nun, dass $v, v_2, \dots, v_n$ eine Basis von V bilden.

Unabhängigkeit. Sei $\mu_1 v + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n = \vec{0}$ mit $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$. Setzen wir hierin die obige Basisdarstellung für v ein, so folgt

$$\mu_1 \lambda_1 v_1 + (\mu_1 \lambda_2 + \mu_2) v_2 + \cdots + (\mu_1 \lambda_n + \mu_n) v_n = \vec{0}$$

Da $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, folgt

$$\begin{aligned} \mu_1 \lambda_1 = 0 \text{ und } \mu_1 \lambda_i + \mu_i = 0 \text{ für } i = 2, \dots, n \\ \Longrightarrow \quad \mu_1 = 0, \text{ da } \lambda_1 \neq 0 \\ \Longrightarrow \quad \mu_2 = \cdots = \mu_n = 0\,. \end{aligned}$$

Also sind $v, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig.

Erzeugendensystem. Da $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ und $\lambda_1 \neq 0$ gilt, folgt

$$(*) \qquad v_1 = \frac{1}{\lambda_1}(v - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n)$$

Ist $w \in V$ beliebig, so ist $w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$ mit $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$, da $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis bilden. Einsetzen von $(*)$ ergibt

$$\begin{aligned} w &= \mu_1 \left(\frac{1}{\lambda_1}(v - \lambda_2 v_2 - \cdots - \lambda_n v_n) \right) + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} v + \left(\mu_2 - \frac{\mu_1 \lambda_2}{\lambda_1} \right) v_2 + \cdots + \left(\mu_n - \frac{\mu_1 \lambda_n}{\lambda_1} \right) v_n \end{aligned}$$

Damit ist w eine Linearkombination von $v, v_2, \ldots, v_n$.

□

3.9 Folgerung aus dem Austauschsatz

Korollar.
Besitzt V eine Basis, die aus n Vektoren besteht, dann sind je m Vektoren aus V mit $m > n$ linear abhängig.
Insbesondere gilt: *In einem endlich erzeugten K-Vektorraum V haben je zwei Basen dieselbe Anzahl von Elementen.*

Beweis. Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Der Beweis wird indirekt geführt. Annahme: $w_1, \ldots, w_m \in V$ mit $m > n$ sind linear unabhängig.
Wendet man 3.8 mit $v = w_1$ an, erhält man eine neue Basis

$$\{v_1, \ldots, v_{j-1}, w_1, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$$

Man kann dann w_2 schreiben als $w_2 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \mu_1 w_1 + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \lambda_n v_n$ mit $\lambda_i, \mu_1 \in K$. Dabei gibt es einen Index k, für den $\lambda_k \neq 0$ gilt (denn sonst wäre $w_2 - \mu_1 w_1 = \vec{0}$ im Widerspruch zur Annahme). Wendet man 3.8 auf die neue Basis mit $v = w_2$ und $j = k$ an, so bekommt man eine Basis von V, die w_1, w_2 und nur noch $n - 2$ Vektoren aus $\mathcal{B}$ enthält. So fortfahrend erhält man eine Basis $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ von V, in der alle n Vektoren der Basis $\mathcal{B}$ ausgetauscht sind gegen Elemente von $\{w_1, \ldots, w_n, \ldots, w_m\}$.
Da $m > n$ ist, kann man w_m als Linearkombination der Elemente von $\mathcal{B}'$ schreiben und erhält einen Widerspruch zur Annahme.
Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der ersten. □

3.10 Dimension eines *K*-Vektorraums

Definition.
Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann heißt die Anzahl der Elemente einer Basis von V die *Dimension* von V. Wir schreiben für die Dimension $\dim_K V$ und nennen V einen *endlich dimensionalen Vektorraum.*

In diesem Fall schreiben wir auch $\dim_K V < \infty$. Ist V nicht endlich erzeugt, dann schreiben wir $\dim_K V = \infty$.

Beispiele.

- $\dim_K K^n = n$ (vgl. 3.3)
- $\dim_K\{\vec{0}\} = 0$ (eine Basis des Nullvektorraums $\{\vec{0}\}$ hat 0 Elemente)
- $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, denn $\{1, i\}$ ist eine Basis
- $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ und $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \infty$

3.11 Weitere Folgerungen aus dem Austauschsatz

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Dann gelten:

1. Weniger als n Vektoren können kein Erzeugendensystem bilden (nach Satz 3.5)
2. Mehr als n Vektoren sind linear abhängig (nach 3.9)
3. Jedes Erzeugendensystem mit n Vektoren ist linear unabhängig und damit eine Basis (nach 1. und 3.2)
4. Jede linear unabhängige Teilmenge mit n Vektoren ist auch ein Erzeugendensystem und damit ebenfalls eine Basis (nach 3.7 und 3.9)

Haben wir zum Beispiel im $\mathbb{R}^3$ drei linear unabhängige Vektoren gefunden, so wissen wir, dass diese eine Basis bilden. Die zweite Basiseigenschaft brauchen wir dann nicht mehr nachzuweisen.

3.12 Dimension eines Untervektorraums

Satz.
Sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und sei $U \subset V$ ein Untervektorraum von V. Dann ist auch U endlich erzeugt und es gilt $\dim_K U \leqslant \dim_K V$. Ist $\dim_K U = \dim_K V$, dann ist $U = V$.

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ eine Basis von U. Dann besteht $\mathcal{M}$ aus linear unabhängigen Elementen von V. Diese kann man nach 3.7 zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V ergänzen. Da $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$ und $\mathcal{B}$ eine endliche Menge ist, ist auch $\mathcal{M}$ endlich und also $\dim_K U \leqslant \dim_K V$.
Ist $U \subsetneq V$ und $v \in V \setminus U$. Dann ist v keine Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{M}$, also $\mathcal{M} \cup \{v\}$ linear unabhängig nach 3.2. Es folgt $\dim_K U < \dim_K V$. □

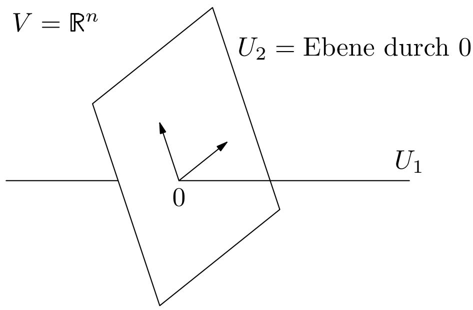


Abbildung 12: Geraden und Ebenen

3.13 Dimensionssatz

Satz.
Sind U_1, U_2 Teilräume eines endlich dimensionalen K-Vektorraumes V, so gilt

$$\boxed{\dim_K(U_1 + U_2) = \dim_K U_1 + \dim_K U_2 - \dim_K(U_1 \cap U_2)}$$

Beweis. Wähle Basis $\{u_1, \dots, u_r\}$ von $U_1 \cap U_2$. Ergänze diese mit Elementen aus U_1 zu $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$, einer Basis von U_1 und durch Elemente aus U_2 zu $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_t\}$, einer Basis von U_2 (vgl. 3.7). Wir zeigen, dass $\mathcal{B} := \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s, w_1, \dots, w_t\}$ eine Basis von $U_1 + U_2$ ist. Da $\mathcal{B}$ offensichtlich ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$ bildet, müssen wir noch die lineare Unabhängigkeit prüfen. Sei also

$$(*) \qquad \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_s v_s + \mu'_1 w_1 + \dots + \mu'_t w_t = \vec{0}$$

Es folgt

$$\tilde{u} := \underbrace{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_s v_s}_{\in U_1} = \underbrace{-\mu'_1 w_1 - \dots - \mu'_t w_t}_{\in U_2}$$

also $\tilde{u} \in U_1 \cap U_2$.
Insbesondere gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ mit $\tilde{u} = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r$. Es folgt

$$\tilde{u} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + 0v_1 + \ldots + 0v_s = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_s v_s$$

Da $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ eine Basis von U_1 bildet, ist die Darstellung von $\tilde{u}$ eindeutig, und Koeffizientenvergleich ergibt $\mu_i = 0$ für $1 \leqslant i \leqslant s$. Eingesetzt in $(*)$ folgt dann

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r + \mu'_1 w_1 + \dots + \mu'_t w_t = \vec{0}$$

Da $\{u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_t\}$ eine Basis von U_2 bilden folgt $\lambda_i = 0$ für $1 \leqslant i \leqslant r$ und $\mu'_j = 0$ für $1 \leqslant j \leqslant t$. Damit ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig und bildet eine Basis von $U_1 + U_2$. Es folgt

$$\begin{aligned}\dim_K(U_1 + U_2) &= r + s + t = (r+s) + (r+t) - r \\ &= \dim_K U_1 + \dim_K U_2 - \dim_K(U_1 \cap U_2)\end{aligned}$$

$\square$

Lernerfolgstest.
- Wie lautet die Bedingung in 3.2.2 für $m = 2$?
- Wie wird die Existenz einer Basis und der Basisergänzungssatz bewiesen?
- Referieren Sie, wieso in einem endlich erzeugten K-Vektorraum je zwei Basen dieselbe Anzahl von Elementen haben.
- Aufgaben 12–19, im Aufgabenpool Abschnitt 3.

3.14 Übungsaufgaben 12 – 19

Aufgabe 12.

a) Man prüfe, ob die Vektoren $v_1 = (4,4,4)$, $v_2 = (2,4,6)$ und $v_3 = (3,4,5)$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Man untersuche, für welche $t \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$v_1 = (1,3,4)\,,\ \ v_2 = (3,t,11)\,,\ \ v_3 = (-4,-4,0)$$

linear abhängig in $\mathbb{R}^3$ sind.

Aufgabe 13.
Man prüfe, ob die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig in $\mathbb{R}^4$ sind, wenn

a) $v_1 = (1,1,-1,0)$, $v_2 = (0,1,1,-2)$ und $v_3 = (3,1,-5,4)$,

b) $v_1 = (1,1,-1,0)$, $v_2 = (0,1,1,-2)$ und $v_3 = (3,-1,-5,4)$.

Aufgabe 14.
Man konstruiere eine Basis für den von

$$v_1 = (1,-2,0,1)\,,\ \ v_2 = (0,0,2,5)\,,\ \ v_3 = (-2,4,2,3)$$

erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ und ergänze diese Basis dann zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 15.
Es sei $\{v_1, v_2\}$ eine Basis eines 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Man untersuche, für welche Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$ die beiden Vektoren $w_1 = rv_1 + v_2$ und $w_2 = v_1 + sv_2$ ebenfalls eine Basis von V bilden.

Aufgabe 16.
Man konstruiere für die folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume jeweils eine Basis:

$$U_1 = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \,\},$$

$$U_2 = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\,,\ \ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \,\}\,.$$

Aufgabe 17.
Es sei $t \in \mathbb{R}$. Man bestimme die Dimension des von den Vektoren

$$v_1 = (1, 2, t+2), \quad v_2 = (-1, t+1, t), \quad v_3 = (0, t, 1)$$

erzeugten Untervektorraums U_t von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 18.
Ist für Teilräume $U_1, \ldots, U_n$ eines K-Vektorraums V eine der Bedingungen aus Aufgabe 11 erfüllt, so nennt man den Teilraum $U_1 + \cdots + U_n$ eine *direkte Summe von Teilräumen* und schreibt dafür $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.

Man nennt zwei Teilräume U_1 und U_2 eines K-Vektorraums V *komplementäre Teilräume*, wenn $U_1 + U_2 = V$ und $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$ gelten (d. h. wenn $V = U_1 \oplus U_2$ gilt).

Man beweise für einen n-dimensionalen K-Vektorraum V die folgenden beiden Aussagen:

a) Ist U_1 ein p-dimensionaler Teilraum von V, dann gibt es einen zu U_1 komplementären Teilraum U_2, und jeder solche Teilraum U_2 hat die Dimension $n - p$.

b) Es ist V eine direkte Summe von 1-dimensionalen Teilräumen:
$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ mit $\dim_K U_i = 1$ für $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 19.
Sei U_1 der von den Vektoren

$$v_1 = (1, 0, 0, 1), \quad v_2 = (-2, -1, 1, 1), \quad v_3 = (-3, -2, 2, 3)$$

und U_2 der von den Vektoren

$$v_4 = (2, 1, 0, 3), \quad v_5 = (-1, -1, 0, -2), \quad v_6 = (7, 4, 0, 11)$$

erzeugte Teilraum von $\mathbb{R}^4$. Man berechne die Dimensionen $\dim_{\mathbb{R}} U_1$, $\dim_{\mathbb{R}} U_2$, $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2)$.

4 Lineare Abbildungen

Lernziel.
Fertigkeiten: Linearität testen
Kenntnisse: Kriterien für Injektivität und Surjektivität linearer Abbildungen, Formel für die Dimension von Kern und Bild

4.1 Definitionen

Seien M und N nichtleere Mengen.

1. Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N, \quad m \longmapsto f(m)$, heißt *injektiv*, wenn aus $m, m' \in M$ und $f(m) = f(m')$ stets folgt $m = m'$.

2. Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N, \quad m \longmapsto f(m)$, heißt *surjektiv*, wenn es zu jedem $n \in N$ ein $m \in M$ gibt so, dass $f(m) = n$ gilt.

3. Eine Abbildung $f : M \longrightarrow N, \quad m \longmapsto f(m)$, heißt *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Seien V, W zwei K-Vektorräume, und sei $f : V \longrightarrow W$ eine Abbildung. Dann heißt f eine *K-lineare Abbildung* oder ein *Vektorraumhomomorphismus*, falls gelten:

(L1) $f(v + w) = f(v) + f(w)$ für alle $v, w \in V$

(L2) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ für alle $\lambda \in K$ und alle $v \in V$

Eine K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ nennen wir auch einen *Endomorphismus von V*.

4.2 Beispiele

1. Die Nullabbildung $V \longrightarrow W$, $v \longmapsto \vec{0}$, ist K-linear

2. Die komplexe Konjugation $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \bar{z}$, ist $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear:

   Ist $z = x + yi$, $z' = x' + y'i \in \mathbb{C}$ mit $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, dann ist $f(z) = x - yi$ und damit

$$\begin{aligned} f(z + z') &= (x + x') - (y + y')i = x - yi + x' - y'i = f(z) + f(z') \\ f(\lambda z) &= \lambda x - \lambda yi = \lambda(x - yi) = \lambda f(z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

   Damit ist f eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Aber f ist nicht $\mathbb{C}$-linear, da $f(ii) = f(i^2) = f(-1) = -1$, aber $if(i) = i(-i) = -(ii) = 1 \neq -1$

3. Sei $I = [a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, und seien

$$\mathcal{C}^0(I) := \{g : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ stetig}\}$$
$$\mathcal{C}^1(I) := \{g : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ stetig differenzierbar}\}$$

Teilräume von $\mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$. Die beiden Abbildungen

$$\mathcal{D} : \mathcal{C}^1(I) \longrightarrow \mathcal{C}^0(I) \qquad g \longmapsto g' \quad \text{„Ableitung“}$$
$$\mathcal{I} : \mathcal{C}^0(I) \longrightarrow \mathcal{C}^1(I) \qquad g \longmapsto \int_a^x g(t)\,dt \quad \text{„Stammfunktion“}$$

sind $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen.

4. Sei X eine Menge und K ein Körper, dann ist für jedes $x_0 \in X$ die Abbildung $F : \mathrm{Abb}(X, K) \longrightarrow K$, $f \longmapsto f(x_0)$ eine K-lineare Abbildung. Sie heißt *Auswertungsabbildung* an der Stelle x_0.

4.3 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Satz.
Seien V, W zwei K-Vektorräume, und sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Dann gibt es zu beliebig vorgegebenen Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in W$ genau eine K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$.

Beweis. Da $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist, gibt es zu jedem $v \in V$ eindeutig betimmte Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, vgl. 3.4.

Eindeutigkeit Ist f eine K-lineare Abbildung wie oben, so folgt

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\ &\underset{(L1),(L2)}{=} \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) \\ &= \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n \end{aligned}$$

Damit ist aber das Bild von v eindeutig festgelegt.

Existenz Setzen wir $f(v) := \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$, so erhalten wir eine K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$.

□

4.4 Eigenschaften von linearen Abbildungen

Seien V, W zwei K-Vektorräume, und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Dann gelten

1. $f(\vec{0}) = \vec{0}$, da $f(\vec{0}) = f(0\vec{0}) = 0f(\vec{0}) = \vec{0}$ nach 2.1

2. $f(-v) = -f(v)$, da $f(-v) = f(-1v) = (-1)f(v) = -f(v)$

3. Ist U ein Teilraum von V, dann ist $f(U) := \{f(u) \mid u \in U\}$ ein Teilraum von W, denn

   UV1 Aus $U \neq \varnothing$ folgt auch $f(U) \neq \varnothing$ nach Definition von $f(U)$

   UV2 Sei $w_1, w_2 \in f(U)$, also $w_1 = f(u_1),\ w_2 = f(u_2)$ mit $u_1, u_2 \in U$. Dann ist $w_1 + w_2 = f(u_1) + f(u_2) = f(u_1 + u_2) \in f(U)$.

   UV3 Sei $w \in f(U)$, $\lambda \in K$ und $w = f(u)$ für ein $u \in U$. Dann ist $\lambda w = \lambda f(u) = f(\lambda u) \in f(U)$.

   Insbesondere ist

   $$\boxed{\mathrm{bild}(f) := f(V) = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ mit } f(v) = w\}}$$

   ein Teilraum von W und heißt das *Bild von f*.

4. Sei $\mathrm{kern}(f) := \{v \in V \mid f(v) = \vec{0}\}$ der *Kern von f*. Dann ist $\mathrm{kern}(f)$ ein Teilraum von V, denn

   UV1 $\vec{0} \in \mathrm{kern}(f)$ nach 1.

   UV2 Sind $u, v \in \mathrm{kern}\, f$, dann ist $f(u+v) = f(u) + f(v) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ und damit ist auch $u + v \in \mathrm{kern}(f)$

   UV3 Ist $u \in \mathrm{kern}(f)$ und $\lambda \in K$, dann ist $f(\lambda u) = \lambda f(u) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$ und deshalb ist mit u auch $\lambda u \in \mathrm{kern}(f)$.

Satz.
Seien V, W zwei K-Vektorräume, und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung, dann gilt:

$$f : V \longrightarrow W \textit{ ist injektiv genau dann, wenn } \mathrm{kern}(f) = \{\vec{0}\}$$

Beweis. $\Longrightarrow$ Sei f injektiv. Zu zeigen ist, dass $\mathrm{kern}(f) = \{\vec{0}\}$ gilt.
Für jedes $v \in \mathrm{kern}(f)$ gilt $f(v) = \vec{0} = f(\vec{0})$ und also $v = \vec{0}$.

$\Longleftarrow$ Seien $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$. Zu zeigen ist $v = v'$.
Aus $f(v) = f(v')$ folgt:

$$\vec{0} = f(v) - f(v') = f(v - v') \text{ und also } v - v' \in \operatorname{kern}(f)$$

Da $\operatorname{kern}(f) = \{\vec{0}\}$ vorausgesetzt ist, folgt $v - v' = \vec{0}$ und damit $v = v'$.
$\square$

Trivialerweise gilt:
$f : V \longrightarrow W$ ist *surjektiv* genau dann, wenn $\operatorname{bild}(f) = W$.

4.5 Isomorphismen von K-Vektorräumen

Definition.
Seien V, W zwei K-Vektorräume und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Ist f bijektiv, dann nennen wir f einen *Isomorphismus.*

Ist $f : V \longrightarrow W$ bijektiv, so gibt es eine *Umkehrabbildung* $g : W \longrightarrow V$ mit

$$(*) \qquad g(f(v)) = v \quad \forall v \in V$$

$$(**) \qquad f(g(w)) = w \quad \forall w \in W$$

Oft wird dafür auch $g = f^{-1}$ geschrieben.

Satz.
Wenn $f : V \longrightarrow W$ ein Isomorphismus ist, dann ist die Umkehrabbildung $g : W \longrightarrow V$ auch K-linear und damit ebenfalls ein Isomorphismus.

Beweis. Für $w, w' \in W$ gilt

$$\begin{aligned} g(w + w') &= g(f(g(w)) + f(g(w'))) \quad &&\text{nach } (**) \\ &= g\big(f\big(g(w) + g(w')\big)\big) &&\text{da } f \ K\text{-linear} \\ &= g(w) + g(w') &&\text{nach } (*) \end{aligned}$$

Analog gilt für $w \in W$, $\lambda \in K$

$$\begin{aligned} g(\lambda w) &= g(\lambda f(g(w))) \quad &&\text{nach } (**) \\ &= g\big(f\big(\lambda g(w)\big)\big) &&\text{da } f \ K\text{-linear} \\ &= \lambda g(w) &&\text{nach } (*) \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung.
Ist V ein K-Vektorraum, so ist die Menge

$$\mathrm{Aut}(V) := \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ ist ein Isomorphismus}\}$$

eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung $f \circ g$ von Abbildungen, definiert durch $(f \circ g)(v) := f(g(v)) \ \forall \ v \in V$. Neutrales Element ist die Identität $\mathrm{id} : v \mapsto v$. (Einen Isomorphismus von V auf V nennt man auch *Automorphismus*.)

4.6 Klassifikationssatz für endlich dimensionale Vektorräume

Seien V, W zwei K-Vektorräume. Wir nennen V *isomorph* zu W und schreiben dafür $V \simeq W$, falls es (mindestens) einen Isomorphismus $f : V \longrightarrow W$ gibt. Ist V isomorph zu W, dann ist nach Satz 4.5 auch W isomorph zu V.

Satz.
Seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume. Dann gilt

$$\boxed{\dim_K V = \dim_K W} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{V \simeq W}$$

Insbesondere ist ***jeder*** *n-dimensionale K-Vektorraum isomorph zu K^n.*

Beweis. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.

$\Longrightarrow$ Sei $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von W. Nach 4.3 gibt es eine K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Da $\mathcal{C}$ ein Erzeugendensystem von W ist, gibt es zu jedem $w \in W$ Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ so, dass $w = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$ gilt. Es folgt $w = f(v)$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, und also ist f surjektiv. Ist $w = \vec{0}$, so folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, also $v = \vec{0}$, da $\mathcal{C}$ linear unabhängig ist. Nach 4.4 folgt, dass f injektiv ist. Es gilt also $V \simeq W$.

$\Longleftarrow$ Sei $f : V \longrightarrow W$ ein Isomorphismus. Ist $w \in W$, so ist $w = f(v)$ mit einem $v \in V$, da f surjektiv ist. Es gilt $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, da $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von V ist. Hieraus folgt $w = f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)$, und $\mathcal{B}' := (f(v_1), \ldots, f(v_n))$ ist also ein Erzeugendensystem von W. Ist $f(v) = \vec{0}$, so ist auch $v = \vec{0}$, da f injektiv ist. Da $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist, muss also auch $\mathcal{B}'$ linear unabhängig sein. Es folgt $\dim_K W = n = \dim_K V$.

□

Die Koordinatenabbildung $k_{\mathcal{B}}$

Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum, so erhält man einen Isomorphismus $k_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow K^n$ durch Wahl einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ wie folgt. Nach 3.4 besitzt jeder Vektor $v \in V$ eine eindeutige Darstellung

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$$

Man setzt $k_{\mathcal{B}}(v) := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ und nennt $k_{\mathcal{B}}$ die *Koordinatenabbildung von V bezüglich $\mathcal{B}$*.

4.7 Dimensionsformel

Seien V ein endlich dimensionaler und W ein beliebiger K-Vektorraum. Dann ist für jede K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ der Untervektorraum $\operatorname{bild}(f)$ endlich dimensional, und es gilt die *Dimensionsformel*

$$\boxed{\dim_K V = \dim_K \operatorname{kern}(f) + \dim_K \operatorname{bild}(f)}$$

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ eine Basis von V, dann wird $\operatorname{bild}(f)$ von $\{f(b) \mid b \in \mathcal{M}\}$ erzeugt. Damit ist $\operatorname{bild}(f)$ nach 3.5 ein endlich dimensionaler Untervektorraum, und die Behauptung ergibt sich aus dem folgenden Lemma. □

Lemma.
Sei $\{u_1, \ldots, u_r\}$ eine Basis von $\operatorname{kern}(f)$. *Wähle $v_1, \ldots, v_s \in V$ so, dass $f(v_1), \ldots, f(v_s)$ eine Basis von* $\operatorname{bild}(f)$ *bilden. Dann ist*

$$\mathcal{B} := \{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s\}$$

eine Basis von V.

Beweis. **Unabhängigkeit** Sei

$$\vec{0} = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r + \mu_1 v_1 + \cdots \mu_s v_s \text{ mit } \lambda_i, \mu_j \in K \ \forall i, j$$

$$\overset{f}{\Longrightarrow} \quad \vec{0} = f(\vec{0}) = \mu_1 f(v_1) + \cdots + \mu_s f(v_s), \text{ da } u_1, \ldots, u_r \in \operatorname{kern}(f),$$

$$\Longrightarrow \quad \mu_1 = \cdots = \mu_s = 0, \text{ da } f(v_1), \ldots f(v_s) \text{ linear unabhängig sind}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0, \text{ da } u_1, \ldots, u_r \text{ linear unabhängig sind}$$

$\mathcal{B}$ ist also linear unabhängig.

Erzeugendensystem Sei $v \in V$, dann gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_s \in K$ mit

$$f(v) = \mu_1 f(v_1) + \cdots + \mu_s f(v_s), \text{ da } f(v_1), \ldots, f(v_s) \text{ Basis von } \operatorname{bild}(f),$$

$$\Longrightarrow \quad f(v) = f(\mu_1 v_1 + \cdots \mu_s v_s), \text{ da } f \ K\text{-linear}$$

$$\Longrightarrow \quad v - \mu_1 v_1 - \cdots - \mu_s v_s \in \operatorname{kern}(f)$$

$$\Longrightarrow \quad v - \mu_1 v_1 - \cdots - \mu_s v_s = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_r u_r \text{ mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K,$$

da $u_1, \dots, u_r$ Basis von $\mathrm{kern}(f)$ ist. Damit ist v Linearkombination der Elemente aus $\mathcal{B}$.

□

4.8 Folgerung aus der Dimensionsformel

Korollar.
Seien V und W zwei ***endlich dimensionale*** *K-Vektorräume, und es gelte $\dim_K V = \dim_K W$. Dann sind für jede K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ äquivalent*

1. *f ist injektiv (Monomorphismus)*
2. *f ist surjektiv (Epimorphismus)*
3. *f ist bijektiv (Isomorphismus)*

Beweis. $1 \Longrightarrow 2$

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv } &\Longrightarrow \mathrm{kern}(f) = \{\vec{0}\} \text{ nach Satz 4.4} \\ &\Longrightarrow \dim_K \mathrm{bild}(f) \underset{4.7}{=} \dim_K V \underset{\text{Vor.}}{=} \dim_K W \\ &\Longrightarrow \mathrm{bild}(f) = W \text{ nach 3.12} \\ &\Longrightarrow f \text{ surjektiv} \end{aligned}$$

$2 \Longrightarrow 1$

$$\begin{aligned} f \text{ surjektiv } &\Longrightarrow \dim_K \mathrm{bild}(f) = \dim_K W \underset{\text{Vor.}}{=} \dim_K V \\ &\Longrightarrow \dim_K \mathrm{kern}(f) = 0 \text{ nach 4.7} \\ &\Longrightarrow f \text{ injektiv nach Satz 4.4} \end{aligned}$$

$3 \Longleftrightarrow 1$ klar nach Obigem und da “bijektiv = injektiv + surjektiv” gilt.

□

4.9 Beispiele für unendlich dimensionale Vektorräume

Viele Begriffsbildungen für endlich-dimensionale Vektorräume lassen sich ohne Mühe auf unendlich-dimensionale Vektorräume übertragen. Allerdings muss man wachsam sein, denn z.B. lassen sich einige der hier hergeleiteten Eigenschaften für lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen **nicht** übertragen, wie sich im Folgenden zeigt.

Beispiel.
Eine *Folge* ist eine Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow K$. Jedem $n \in \mathbb{N}$ ist also ein $a_n \in K$ zugeordnet, wir schreiben $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, \ldots)$. Im *Folgenraum* $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$ ist $U := \{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid b_1 = 0\}$ ein echter Teilraum ($U \subsetneq V$), und dennoch ist $V \longrightarrow U$, $(a_1, a_2, \ldots) \longmapsto (0, a_1, a_2, \ldots)$, ein Isomorphismus. (Nach 3.12 und 4.6 kann ein endlich dimensionaler K-Vektorraum niemals zu einem echten Teilraum isomorph sein, denn ist $\dim_K V < \infty$ und $U \subsetneq V$, dann ist $\dim_K U < \dim_K V$ und damit $V \not\simeq U$.)

Beispiel.
Sei $K = \mathbb{R}$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $V := \mathcal{C}^0([a, b])$ und $U := \{F \in \mathcal{C}^1([a, b]) \mid F(a) = 0\} \subsetneq V$ (vgl. 4.2.3). Dann besagt der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*: Die Abbildung

$$\mathcal{I} : V \longrightarrow U, \quad f \longmapsto F, \text{ mit } F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\mathcal{D} : U \longrightarrow V, \quad F \longmapsto F'$

Beispiel.
Auch Korollar 4.8 gilt nicht für unendlich dimensionale Vektorräume, das zeigen die folgenden Abbildungen:

- $f_1 : \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K) \longrightarrow \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K), \quad (a_1, a_2, \ldots) \longmapsto (0, a_1, a_2, \ldots)$ ist injektiv, aber nicht surjektiv
- $f_2 : \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K) \longrightarrow \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K), \quad (a_1, a_2, \ldots) \longmapsto (a_2, a_3, \ldots)$ ist surjektiv, aber nicht injektiv
- $\mathcal{D} : \mathcal{C}^1([a, b]) \longrightarrow \mathcal{C}^0([a, b])$ ist surjektiv, aber nicht injektiv
- $\mathcal{I} : \mathcal{C}^0([a, b]) \longrightarrow \mathcal{C}^1([a, b])$ ist injektiv, aber nicht surjektiv

4.10 Rechenregeln für lineare Abbildungen

Sei $\mathrm{Hom}_K(V, W) := \{f : V \longrightarrow W \mid f \text{ ist } K\text{-linear}\}$ mit K-Vektorräumen V und W. Es sei $f \circ g$ definiert durch $(f \circ g)(v) := f(g(v))\ \forall\, v \in V$.

Satz.
Sind U, V, W drei K-Vektorräume, so ist die Verknüpfung

$$\mathrm{Hom}_K(U, V) \times \mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(U, W), \quad (g, f) \longmapsto f \circ g$$

assoziativ und bilinear. Letzteres heißt, dass für $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, $g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\begin{aligned} f \circ (g_1 + g_2) &= f \circ g_1 + f \circ g_2 & \qquad f \circ \lambda g &= \lambda(f \circ g) \\ (f_1 + f_2) \circ g &= f_1 \circ g + f_2 \circ g & \qquad \lambda f \circ g &= \lambda(f \circ g) \end{aligned}$$

Beweis. Assoziativität ist trivial. Für $u \in U$ ist

$$\begin{aligned}(f \circ (g_1 + g_2))(u) &= f((g_1 + g_2)(u)) = f(g_1(u) + g_2(u)) \\ &= f(g_1(u)) + f(g_2(u)) \\ &= (f \circ g_1)(u) + (f \circ g_2)(u) = (f \circ g_1 + f \circ g_2)(u)\end{aligned}$$

Die anderen Eigenschaften folgen analog. □

Lernerfolgstest.
- Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear?
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 3x + y$
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x^2, y^2)$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (0, 0)$
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + 2, y + 2)$.
- Zeigen Sie, dass die Auswertungsabbildung $F : \mathrm{Abb}(X, K) \to K$, $f \mapsto f(x_0)$, eine K-lineare Abbildung ist.
- Sei V ein K-Vektorraum. Mit welchen Verknüpfungen können Sie die Menge $\mathrm{End}_K(V)$ der K-linearen Abbildungen $V \to V$ versehen? (Wir haben schon 3 Verknüpfungen kennengelernt.)
- Ist $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$ (vgl. 2.2)?
- Wieso ist die Koordinatenabbildung aus 4.6 ein Isomorphismus?
- Aufgaben 20 und 21, im Aufgabenpool Abschnitt 4.

4.11 Übungsaufgaben 20 und 21

Aufgabe 20.
Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis eines K-Vektorraums V, und sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung von V in einen K-Vektorraum W. Dann ist f eindeutig bestimmt durch die n Vektoren $w_1 = f(v_1), \ldots, w_n = f(v_n)$ aus W. Man beweise die folgenden beiden Aussagen:

(a) f ist injektiv $\iff$ $w_1, \ldots, w_n$ sind linear unabhängig in W.

(b) f ist surjektiv $\iff$ $w_1, \ldots, w_n$ bilden ein Erzeugendensystem von W.

(c) f ist bijektiv $\iff$ $w_1, \ldots, w_n$ bilden eine Basis von W.

Aufgabe 21.
Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f(1, 0, 0) = (-1, 1, 3), \quad f(0, 1, 0) = (0, 6, 3), \quad f(0, 0, 1) = (2, 4, -3)\,.$$

Man konstruiere jeweils eine Basis von $\mathrm{kern}(f)$ und $\mathrm{bild}(f)$.

Matrizenkalkül

Eine *Matrix* ist eine Anordnung von Zahlen oder anderen mathematischen Objekten in einem rechteckigen Schema, wie zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & \mathbf{15} & \mathbf{14} & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix taucht als Tafel im Kupferstich *Melancholia* von A. Dürer aus dem Jahr **1514** auf. Das Besondere an diesem Beispiel ist, dass die Summe der Zahlen in jeder Zeile und Spalte und in der Diagonalen immer 34 ergibt. Auch weitere Konstellationen ergeben die Summe 34.
In der Linearen Algebra beschäftigt man sich mit der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen. Das sind Gleichungssysteme mit m Gleichungen und n Unbekannten der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Einem solchen Gleichungssysten kann man folgende "Koeffizientenmatrix" zuordnen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Das Matrizenkalkül erweist sich als ein konkretes Werkzeug für das Auffinden von Lösungen. Grundsätzliche Bedeutung kommt der Tatsache zu, dass man lineare Abbildungen durch Matrizen darstellen kann.

5 Matrizen und lineare Abbildungen

Lernziel.
Fertigkeiten: Matrizenmultiplikation, Darstellung einer linearen Abbildung durch eine Matrix
Kenntnisse: Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen, Basiswechselphänomene, inverse Matrix, Rang

5.1 Matrizen

Beispiel.
Sei $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$, und sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Dann ist f durch Angabe von $f(e_1)$ und $f(e_2)$ eindeutig bestimmt (vgl. Satz 4.3). Es ist

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 = (a_{11}, a_{21}) \\ f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 = (a_{12}, a_{22}) \end{aligned}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i, j \leqslant 2$.
Benutzen wir die „Spaltenschreibweise“

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad f(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \text{ und } f(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Dann wird f bezüglich der Standardbasis beschrieben durch ein rechteckiges Schema $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Dies nennen wir eine 2×2-Matrix.

Definition.
Sei K ein Körper. Eine *$m \times n$-Matrix über K* ist eine Anordnung von mn Elementen aus K nach folgendem Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Wir schreiben auch einfach

$$(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \quad \text{oder} \quad (a_{ij})$$

und nennen die waagrecht geschriebenen n-Tupel $\begin{pmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix}$ die *Zeilen* und die senkrecht geschriebenen m-Tupel $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ die *Spalten* der Matrix.

Es ist dann m die Anzahl der Zeilen und n ist die Anzahl der Spalten. Eine $m \times n$-Matrix heißt *quadratisch*, wenn $m = n$ gilt.
Mit $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ bezeichnen wir die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K. Zum Beispiel

$$\mathrm{M}_{2\times 3}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in K \text{ für } {}^{i=1,2}_{j=1,2,3} \right\}$$

$$\mathrm{M}_{3\times 2}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{ij} \in K \text{ für } {}^{i=1,2,3}_{j=1,2} \right\}$$

Es ist $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ ein mn-dimensionaler K-Vektorraum bezüglich komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}) \quad \lambda(a_{ij}) := (\lambda a_{ij})$$

Eine Basis bilden die Matrizen $\vec{e}_{ij}$, die am Kreuzungspunkt der i-ten Zeile mit der j-ten Spalte eine 1 haben und sonst nur aus Nullen bestehen. Zum Beispiel für $m = n = 2$ bilden

$$\vec{e}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathrm{M}_{2\times 2}(K)$.

5.2 Produkt von Matrizen

Das Produkt $A \cdot B$ zweier Matrizen A, B ist nur definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist.

Definition.
Sei $A = (a_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$ eine $m \times n$-Matrix und $B = (b_{kj})_{\substack{k=1,\dots,n \\ j=1,\dots\ell}}$ eine $n \times \ell$-Matrix. Dann heißt die Matrix $C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,\ell}}$ mit

$$\boxed{\begin{aligned} c_{ij} &:= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \end{aligned}}$$

das *Produkt* von $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $B \in \mathrm{M}_{n\times \ell}(K)$. Es ist $C \in \mathrm{M}_{m\times \ell}(K)$. Wir schreiben $C = A \cdot B$ oder einfach $C = AB$.

Bemerkung (Merkregel).
Es ist c_{ij} als Produkt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B, wenn man Zeile und Spalte jeweils als Matrix auffasst:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ &= (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \qquad \text{für } {}^{i=1,\ldots,m}_{j=1,\ldots,\ell} \\ &= \underbrace{(i\text{-te Zeile von } A)}_{\in \mathrm{M}_{1\times n}(K)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} j\text{-te} \\ \text{Spalte} \\ \text{von } B \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{M}_{n\times 1}(K)} \end{aligned}$$

Beispiele.

1.

$$\underset{\text{3 Spalten}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}} \underset{\text{3 Zeilen}}{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \text{1. Zeile mal 1. Spalte, 1. Zeile mal 2. Spalte} \\ \text{2. Zeile mal 1. Spalte, 2. Zeile mal 2. Spalte} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+5+7, & 4+6+8 \\ 6+10+14, & 8+12+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 18 \\ 30 & 36 \end{pmatrix}$$

2.

$$\underset{\text{2 Spalten}}{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}} \underset{\text{2 Zeilen}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3+8, & 3+8, & 3+8 \\ 5+12, & 5+12, & 5+12 \\ 7+16, & 7+16, & 7+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 17 & 17 & 17 \\ 23 & 23 & 23 \end{pmatrix}$$

3.

$$\underset{\text{3 Spalten}}{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}} \underset{\text{3 Zeilen}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3+5+7, & 6+10+14 \\ 4+6+8, & 8+12+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 18 & 36 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 \\ a_{12} \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \qquad (= \text{1. Spalte})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 \\ a_{12} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \quad (= 2.\ \text{Spalte})$$

Hierdurch wird eine K-lineare Abbildung $f : K^2 \longrightarrow K^2$ definiert (vgl. 4.3).

5. Produkt von Diagonalmatrizen $\in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$$

heißt *Diagonalmatrix*. Die Multiplikation zweier Diagonalmatrizen ist besonders einfach

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2b_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

5.3 Transponierte Matrix

Ist $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, so heißt

$${}^tA := (a_{ji}) \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$$

die *zu A transponierte Matrix*. Es gelten die Regeln:

1. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ für $A, B \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$
2. ${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$ für $\lambda \in K$
3. ${}^t({}^tA) = A$ für $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$
4. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ für $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{n\times \ell}(K)$ (vgl. Beispiele 5.2 1. und 3.).

Wir erhalten ${}^tA$, indem wir die Zeilen von A als Spalten schreiben. Ist speziell $m = n$, so entsteht ${}^tA$ durch Spiegelung an der Diagonalen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

5.4 Die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ einer linearen Abbildung f

Seien V, W zwei endlich dimensionale K-Vektorräume und sei

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) := \{f : V \longrightarrow W \mid f \text{ ist } K\text{-linear}\}$$

Dann ist $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ ein Teilraum von $\mathrm{Abb}(V,W)$, also insbesondere selbst ein K-Vektorraum. Sei $\dim_K V = n$ und $\dim_K W = m$. Wir wählen eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und eine Basis $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ von W. Dann ordnen wir jedem $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ eine von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ abhängige Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, genannt *Darstellungsmatrix*, wie folgt zu:
Sei für $j = 1, \dots, n$

$$\boxed{f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m}$$

die gemäß 3.4 eindeutige Basisdarstellung von $f(v_j) \in W$. Die Koeffizienten $a_{1j}, \dots, a_{mj} \in K$ schreiben wir nun als j-**Spalte** ($j = 1, \dots, n$) der Matrix

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Satz.
Die Abbildung

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} : \mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \mathrm{M}_{m\times n}(K), \quad f \longmapsto \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beweis. K-**Linearität** Seien $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ zwei K-lineare Abbildungen und seien für $j = 1, \dots n$

$$f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m$$
$$g(v_j) = b_{1j}w_1 + b_{2j}w_2 + \cdots + b_{mj}w_m$$

die Basisdarstellungen von $f(v_j)$ und $g(v_j)$. Es folgt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f+g) = (a_{ij} + b_{ij}) = (a_{ij}) + (b_{ij}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) + \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(g)$$
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\lambda f) = (\lambda a_{ij}) = \lambda(a_{ij}) = \lambda \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \quad \forall \lambda \in K$$

und $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ist damit K-linear.

Bijektivität Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Dann gibt es nach 4.3 genau eine K-lineare Abbildung

$$f : V \longrightarrow W, \quad \text{mit} \quad f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m$$

für $j = 1, \ldots, n$, also mit $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$. Dies zeigt, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ bijektiv ist.

□

Beispiele.
Sei

$$\boxed{f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (3x - 2y, x + y)}$$

1. Sei $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{(1,0), (0,1)\}$, dann ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, denn $f(1,0) = (3,1)$ und $f(0,1) = (-2,1)$.
2. Ist $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$ und $\mathcal{C} = \{(3,1), (-2,1)\}$, so ist
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
denn $f(1,0) = 1(3,1) + 0(-2,1)$ und $f(0,1) = 0(3,1) + 1(-2,1)$.
3. Sei V ein K-Vektorraum und $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann gehört zur *Identität*
$$\mathrm{id} : V \longrightarrow V, \quad v \longmapsto v$$
die Matrix
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =: E_n \in \mathrm{M}_{n\times n}(K),$$
denn $\mathrm{id}(v_j) = v_j = 1v_j$ für $j = 1, \ldots, n$.
Wir nennen E_n auch *Einheitsmatrix* in $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$.

5.5 Die Dimension von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$

Satz.
Sind V, W endlich dimensionale Vektorräume, so ist auch $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ *endlich dimensional, und es gilt*

$$\boxed{\dim_K \mathrm{Hom}_K(V, W) = (\dim_K V) \cdot (\dim_K W)}$$

Beweis. Sei $\dim_K V = n$ und sei $\dim_K W = m$. Dann gibt es nach Satz 5.4 einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_K(V, W) \simeq \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Aus Satz 4.6 folgt dann die Behauptung, da $\dim_K \mathrm{M}_{m\times n}(K) = mn$ nach 5.1 gilt. □

Definition.
Sei V ein K-Vektorraum, dann heißt

$$\boxed{V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)}$$

der *Dualraum* von V.

Ist V endlich dimensional, dann ist auch V^* ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, und für $W = K$ folgt aus Satz 5.5

$$\dim_K V^* = \dim_K \mathrm{Hom}_K(V, K) = (\dim_K V)\underbrace{(\dim_K K)}_{=1} = \dim_K V$$

5.6 Die Darstellungsmatrix $\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}}(f \circ g)$

Satz.
Seien U, V, W endlich dimensionale K-Vektorräume,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (u_1, \ldots, u_\ell) \text{ eine Basis von } U \\ \mathcal{B} &= (v_1, \ldots, v_n) \text{ eine Basis von } V \\ \mathcal{C} &= (w_1, \ldots, w_m) \text{ eine Basis von } W \end{aligned}$$

Sind $g : U \longrightarrow V$ und $f : V \longrightarrow W$ K-linear, so ist auch

$$f \circ g : U \longrightarrow W, \quad u \longmapsto f(g(u))$$

K-linear, und es gilt:

$$\boxed{\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}}(f \circ g) = \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(g)}$$

Die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen entspricht der Multiplikation von Matrizen.

Beweis. Es ist

$$\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(g) = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{n\ell} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{A}}(f \circ g) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{m\ell} \end{pmatrix}$$

wobei

(1) $f(v_k) = a_{1k}w_1 + \cdots + a_{mk}w_m$ für $k = 1, \ldots, n$

(2) $g(u_j) = b_{1j}v_1 + \cdots + b_{nj}v_n$ für $j = 1, \ldots, \ell$

(3) $(f \circ g)(u_j) = c_{1j}w_1 + \cdots + c_{mj}w_m$ für $j = 1, \ldots, \ell$

Für $j = 1, \ldots, \ell$ gilt ferner:

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(u_j) = f(g(u_j)) &\underset{(2)}{=} f(b_{1j}v_1 + \cdots + b_{nj}v_n) \\
&= b_{1j}f(v_1) + \cdots + b_{nj}f(v_n), \text{ da } f\ K\text{-linear} \\
&\underset{(1)}{=} b_{1j}(a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m) + \cdots + b_{nj}(a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m) \\
&= \underbrace{(a_{11}b_{1j} + \cdots + a_{1n}b_{nj})}_{c_{1j}} w_1 + \cdots + \underbrace{(a_{m1}b_{1j} + \cdots + a_{mn}b_{nj})}_{c_{mj}} w_m
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich mit (3) ergibt:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \text{ für } i = 1, \ldots, m}$$

Nach Definition 5.2 der Matrizenmultiplikation folgt die Behauptung. □

Die Rechenregeln 4.10 für lineare Abbildungen übertragen sich nach 5.4 und Satz 5.6 auf Matrizen.

Rechenregeln für Matrizen

Sind $A, A' \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, $B, B' \in \mathrm{M}_{n\times r}(K)$, $C \in \mathrm{M}_{r\times s}(K)$ und $\lambda \in K$, so gelten:

1. $(AB)C = A(BC)$ (Assoziativität)
2. $A(B + B') = AB + AB'$ und $(A + A')B = AB + A'B$
3. $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$
4. $E_mA = AE_n = A$ (Neutralität der Einheitsmatrix) (vgl. 5.4.3.)

5.7 Invertierbare Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ heißt *invertierbar*, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ gibt mit

$$A^{-1}A = E_n$$

Wie aus 1. in dem folgenden Satz hervorgeht, bilden die invertierbaren Matrizen aus $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$ eine multiplikative Gruppe (genannt *allgemeine lineare Gruppe*). Die *inverse Matrix* A^{-1} einer invertierbaren Matrix A ist also eindeutig bestimmt, und es gilt auch $AA^{-1} = E_n$ nach Satz 1.5. Ein Homomorphismus $G \longrightarrow G'$ einer Gruppe G in eine Gruppe G' heißt *Isomorphismus*, falls er bijektiv ist.

Satz.

1. *Die Menge der invertierbaren Matrizen*

$$\mathrm{GL}_n(K) := \{A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K) \mid A \textit{ ist invertierbar}\}$$

ist eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation.

2. *Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von V, dann ist $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ invertierbar für jedes $f \in \mathrm{Aut}(V)$, und die Abbildung*

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} : \mathrm{Aut}(V) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K), \quad f \longmapsto \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

ein Isomorphismus von Gruppen. (Dabei ist $\mathrm{Aut}(V)$ *definiert wie in Bemerkung 4.5.)*

Beweis. 1. Es gilt $E_nA = A$ und $(AB)C = A(BC)$ für alle $A, B, C \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ nach den Rechenregeln in 5.6.
Sind $A, B \in \mathrm{GL}_n(K)$, dann ist auch $AB \in \mathrm{GL}_n(K)$, denn $B^{-1}A^{-1}$ ist ein inverses Element

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E_n$$

Die Matrizenmultiplikation liefert damit eine Verknüpfung

$$\mathrm{GL}_n(K) \times \mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)$$

die alle Gruppenaxiome in 1.5 erfüllt.

2. Seien $f, g \in \mathrm{Aut}(V)$, dann ist $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ ein *Homomorphismus*, da nach 5.6

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f \circ g) = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g)$$

gilt. Speziell für $g = f^{-1}$ folgt $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(K)$, da $E_n = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ nach 5.4.3 gilt. Nach Satz 5.4 gibt es zu jeder Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ genau eine Abbildung $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ mit $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = A$. Es ist aber dann $f \in \mathrm{Aut}(V)$, denn die Umkehrabbildung f^{-1} ergibt sich als Urbild von A^{-1}. Daher ist $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ auch bijektiv.

$\square$

Beispiel.
Die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist invertierbar mit } T^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

denn es ist

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

Regel: Ist $T = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\det(T) := ad - bc \neq 0$, dann folgt

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ist $\det(T) = 0$, dann gibt es keine inverse Matrix (vgl. 7.6 unten).

Bemerkung.
Ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ invertierbar, so ist auch die transponierte Matrix ${}^tA$ invertierbar, und es gilt

$$\boxed{({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})}$$

Beweis. Es ist

$${}^t(A^{-1})\,{}^tA \underset{5.3}{=} {}^t(AA^{-1}) = {}^tE_n = E_n$$

□

5.8 Basiswechsel in *V*

Beispiel.
Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$. Der Wechsel von $\mathcal{B}$ zur Basis $\mathcal{B}' = \{(5,8),(-1,1)\}$ wird beschrieben durch die Matrix

$$\boxed{T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}}$$

denn

$$\begin{aligned} (5,8) &= 5(1,0) + 8(0,1) \\ (-1,1) &= -1(1,0) + 1(0,1) \quad \text{(vgl. 5.4)} \end{aligned}$$

Es ist

$$T^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$$

Satz.
Sei V ein K-Vektorraum, und seien $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ zwei Basen von V. Dann ist $T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ invertierbar, und es ist $T^{-1} = \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$.

Beweis. Es ist

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) \underset{5.6}{=} \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) \underset{5.4}{=} E_n$$

□

Wir nennen $T = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ die *Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$* .

5.9 Basiswechsel und Darstellungsmatrix

Satz.
Seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ zwei Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ zwei Basen von W. Ist $T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)$ und $S := \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_W)$, so gilt

$$\boxed{\mathrm{M}^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}(f) = S^{-1}\, \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)\, T}$$

für jede K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$.

Beweis. Nach 5.8 ist $S^{-1} = \mathrm{M}^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_W)$. Es folgt

$$\begin{aligned} S^{-1}\, \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)\, T &= \big(\mathrm{M}^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_W)\, \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)\big) \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V) \\ &\underset{5.6}{=} \mathrm{M}^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}}(f)\, \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V) \\ &\underset{5.6}{=} \mathrm{M}^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}(f) \end{aligned}$$

□

Folgerung.
Ist speziell $V = W$, dann folgt aus dem Satz für $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ und $\mathcal{B}' = \mathcal{C}'$

$$\boxed{\mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = T^{-1}\, \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\, T}$$

Beispiel.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \longmapsto (3x - 2y, x + y)$ und $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ die Standardbasis, $\mathcal{B}' = \{(5, 8), (-1, 1)\}$, $\mathcal{C}' = \{(0, 1), (1, 1)\}$. Damit ist

$$\begin{array}{rclcl} f(5,8) &=& (-1,13) &=& 14(0,1) + (-1)(1,1) \\ f(-1,1) &=& (-5,0) &=& 5(0,1) + (-5)(1,1) \end{array}$$

also

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = S^{-1}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)\,T$$

mit

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \mathrm{M}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \mathrm{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{aligned} S^{-1}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)\,T &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) \end{aligned}$$

5.10 Eine geschickte Basiswahl

Satz.
Seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume, und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Dann gibt es Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W so, dass gilt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} E_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{mit} \quad r = \dim_K \operatorname{bild} f$$

Hierbei ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ in Blöcken dargestellt. E_r ist die $(r \times r)$-Einheitsmatrix, und 0 ist jeweils die Nullmatrix mit passendem Format.

Beweis. Seien $v_1, \dots, v_r \in V$ so gewählt, dass $f(v_1) = w_1, \dots, f(v_r) = w_r$ eine Basis von $\operatorname{bild} f$ bilden. Ergänze diese Basis zu einer Basis $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ von W. Sei $(u_1, \dots, u_s)$ eine Basis von $\operatorname{kern} f$. Nach Lemma 4.7 bildet $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s)$ eine Basis von V und $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ hat die angegebene Gestalt. □

Folgerung.
Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und r die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A. Dann gibt es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$ und $T \in$

$\mathrm{M}_{n\times n}(K)$ so, dass gilt

$$S^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von K^n und $\mathcal{C}$ eine Basis von K^m. Nach 5.4 gibt es eine K-lineare Abbildung $f : K^n \longrightarrow K^m$ so, dass $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$. Nach dem Satz gibt es Basen $\mathcal{B}'$ von K^n und $\mathcal{C}'$ von K^m so, dass gilt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} E_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Mit $T := \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_{K^n})$ und $S := \mathrm{M}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{K^m})$ folgt $S^{-1}AT = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}(f)$ nach 5.8 und 5.9. □

5.11 Die Standardabbildung zu einer Matrix

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Dann erhalten wir eine K-lineare Abbildung

$$g : K^n \longrightarrow K^m, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

genannt *Standardabbildung* zur Matrix A. Wir benutzen die Spaltenschreibweise und erhalten damit bezüglich Matrizenmultiplikation

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &\underset{5.2}{=} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m\times 1}(K) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für den j-ten Standardbasisvektor von K^n

$$\vec{e_j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \; j\text{-te Zeile}$$

dass

$$A\vec{e_j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = j\text{-te Spalte von } A \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

Regel: *Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Standardbasisvektoren.*

Beispiel.
Sei $f : K^3 \longrightarrow K^2$ gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ bezüglich den Standardbasen von K^2 und K^3. Dann ist (in Spaltenschreibweise)

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Insbesondere wird $\operatorname{bild}(f)$ von $\left\{ \binom{1}{4}, \binom{2}{5}, \binom{3}{6} \right\}$ erzeugt.

Bemerkung.
Es ist $A = \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(g)$, wobei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von K^n und $\mathcal{C}$ die Standardbasis von K^m ist.

Lemma.
Ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ invertierbar, so ist die Standardabbildung $K^n \longrightarrow K^n$, $\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$, bijektiv.

(Dabei wird der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ *als Spalte geschrieben.)*

Beweis. Ist $A\vec{x} = \vec{0}$, so folgt $\vec{x} = E_n\vec{x} = A^{-1}A\vec{x} = \vec{0}$. Die Standardabbildung $K^n \longrightarrow K^n$ ist also injektiv und daher nach 4.8 bijektiv. □

5.12 Faktorisierung einer linearen Abbildung

Jede K-lineare Abbildung eines endlich-dimensionalen K-Vektorraumes in einen ebensolchen lässt sich über die Standardabbildung und die in 4.6 definierte Koordinatenabbildung $k_{\mathcal{B}}$ faktorisieren.

Satz.
Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, W ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ und $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Ist g die Standardabbildung zur Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$, so ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k_{\mathcal{B}}"', "\simeq"] & W \arrow[d, "k_{\mathcal{C}}", "\simeq"'] \\ K^n \arrow[r, "g"] & K^m \end{tikzcd}$$

kommutativ d.h. es ist

$$\boxed{g \circ k_{\mathcal{B}} = k_{\mathcal{C}} \circ f}$$

Beweis. Für $j = 1, \dots, n$ ist

$$\begin{aligned} (g \circ k_{\mathcal{B}})(v_j) &= g(k_{\mathcal{B}}(v_j)) && \text{nach Def. von } \circ \\ &= g(\vec{e_j}) && \text{nach Definition von } k_{\mathcal{B}}\text{, vgl.4.6} \\ &= \ j\text{-te Spalte von } \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) && \text{nach 5.11} \end{aligned}$$

Ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } f(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m \text{ (vgl. 5.4)}$$

dann folgt für $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} (k_{\mathcal{C}} \circ f)(v_j) &= k_{\mathcal{C}}(f(v_j)) && \text{nach Def. von } \circ \\ &= k_{\mathcal{C}}(a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m) && \text{nach 5.4} \\ &= a_{1j}k_{\mathcal{C}}(w_1) + \cdots + a_{mj}k_{\mathcal{C}}(w_m) && \text{da } k_{\mathcal{C}}\ K\text{-linear} \\ &= a_{1j}\vec{e_1} + \cdots + a_{mj}\vec{e_m} && \text{nach 4.6} \\ &= \ j\text{-te Spalte von } \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) \end{aligned}$$

Hierbei bilden $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m}$ die Standardbasis des K^m. □

5.13 Rang einer Matrix

Definition.
Der *Rang einer Matrix* $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ (auch *Spaltenrang* genannt) ist die Dimension des von den Spalten von A erzeugten Teilraumes von K^m.

Bemerkung.
Für die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ einer K-linearen Abbildung $f : V \longrightarrow W$ gilt

$$\boxed{\operatorname{rang} \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \dim_K \operatorname{bild}(f)}$$

Beweis. Nach 5.12 gilt $f = k_{\mathcal{C}}^{-1} \circ g \circ k_{\mathcal{B}}$, wobei $k_{\mathcal{C}}$ und $k_{\mathcal{B}}$ Isomorphismen sind und $g : K^n \longrightarrow K^m$ die zu $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ gehörige Standardabbildung ist. Es gilt also $\dim_K \operatorname{bild}(f) = \dim_K \operatorname{bild}(g)$. Nach 5.11 wird aber $\operatorname{bild}(g)$ von den Spalten von $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ erzeugt. □

Wir definieren nun: $\boxed{\operatorname{rang}(f) := \dim_K \operatorname{bild}(f)}$

5.14 Rang und Invertierbarkeit

Satz.
Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann gilt

$$\boxed{A \text{ ist invertierbar}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\operatorname{rang} A = n}$$

Beweis. $\Longrightarrow$ Sei A invertierbar, dann ist die Standardabbildung

$$g : K^n \longrightarrow K^n, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

nach Lemma 5.11 bijektiv. Also ist $\operatorname{rang} A = n$, da nach 5.11 $\operatorname{bild}(g)$ von den Spalten von A erzeugt wird.

$\Longleftarrow$ Sei $\operatorname{rang} A = n$. Dann gibt es nach Folgerung 5.10 invertierbare Matrizen $S, T \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ mit $S^{-1}AT = E_n$ und also mit $S^{-1}A = T^{-1}$. Sei $B := TS^{-1}$, dann folgt

$$BA = TS^{-1}A = TT^{-1} = E_n$$

Also ist A invertierbar.

□

5.15 Zeilenrang einer Matrix

Definition.
Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Der *Zeilenrang* von A ist die Dimension des von den Zeilen erzeugten Teilraumes von K^n.

Satz.
Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Dann gilt

$$\boxed{\text{Spaltenrang von } A} \quad = \quad \boxed{\text{Zeilenrang von } A}$$

Beweis. Nach Folgerung 5.10 gibt es invertierbare Matrizen $R \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$ und $T \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ so, dass

$$RAT = \begin{pmatrix} E_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Wir zeigen zunächst, dass Spaltenrang von A = Spaltenrang von RAT gilt. Bezeichnet g_B die zur Matrix B gehörige Standardabbildung, so gilt

$$\operatorname{rang} B = \dim_K \operatorname{bild}(g_B) =: \operatorname{rang}(g_B)$$

nach 5.11 und 5.13. Es sind $g_T : K^n \longrightarrow K^n$ und $g_R : K^m \longrightarrow K^m$ Isomorphismen nach Lemma 5.11, und g_R vermittelt eine injektive K-lineare Abbildung $\operatorname{bild}(g_A) \longrightarrow K^m$. Es folgt $\operatorname{rang}(g_R \circ g_A \circ g_T) = \operatorname{rang}(g_A)$ und daher $\operatorname{rang}(RAT) = \operatorname{rang} A$ nach 5.11 und 5.6. Nun folgt

$$\begin{aligned}
\text{Spaltenrang von } A &= \text{ Spaltenrang von } RAT \text{ (eben gezeigt)} \\
&= \text{ Spaltenrang von } {}^t(RAT) \text{ (offensichtlich)} \\
&= \text{ Spaltenrang von } {}^tT\,{}^tA\,{}^tR \text{ (nach 5.3)} \\
&= \text{ Spaltenrang von } {}^tA \text{ (eben gezeigt)} \\
&= \text{ Zeilenrang von } A \text{ (nach Definition von } {}^tA \text{ in 5.3)}
\end{aligned}$$

□

Lernerfolgstest.
- Welches Format müssen zwei Matrizen A und B haben, damit man das Produkt AB bilden kann?
- Kann man eine Matrix aus $\mathrm{M}_{2\times 3}(K)$ invertieren?
- Seien A, B invertierbare Matrizen in $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann ist das Produkt AB invertierbar. Wie bildet man die inverse Matrix $(AB)^{-1}$?
- Aufgaben 22 bis 30, im Aufgabenpool Abschnitt 5.

5.16 Übungsaufgaben 22 – 30

Aufgabe 22.
Es sei V der Vektorraum aller 3×3-Matrizen über einem Körper K. Man zeige, dass die Abbildung

$$f : V \to K, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mapsto a_{11} + a_{22} + a_{33} \,,$$

K-linear ist, und konstruiere eine Basis von $\mathrm{kern}(f)$.

Aufgabe 23.
(a) Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W und $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Man zeige, dass der von den Spalten von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ erzeugte Teilraum von K^m isomorph zu $\mathrm{bild}(f)$ ist.

(b) Sei $f : K^3 \to K^2$ die Standardabbildung zur Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Man bestimme jeweils eine Basis von $\mathrm{bild}(f)$ und $\mathrm{kern}(f)$.

Aufgabe 24.
Für die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, -6x_2 + 12x_3, -2x_1 + 2x_2 - 2x_3)$$

berechne man die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$, falls

(a) $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

(b) $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{(-1, 0, 1), (-1, 2, 1), (-2, 0, 4)\}$.

Aufgabe 25.
Eine K-lineare Abbildung $f : V \to V$ heißt *Projektion*, falls $f \circ f = f$ gilt.

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Projektion, für die $(1, 2) \in \mathrm{kern}(f)$ und $(1, -1) \in \mathrm{bild}(f)$ gelte. Man berechne die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$, falls

(a) $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$

(b) $\mathcal{B} = \mathcal{C} = \{(1, 2), (1, -1)\}$.

Aufgabe 26.
Sei $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ der *Dualraum* von V. Für $j = 1, \ldots, n$ sei $v_j^* \in V^*$ definiert durch

$$v_j^*(v_k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = j \\ 0, & \text{falls } k \neq j \end{cases} \quad \text{für } k = 1, \ldots, n. \quad \text{Man zeige:}$$

(a) $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ ist eine Basis von V^*.

(b) Ist $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung, so ist die Abbildung

$${}^t f : W^* \to V^*, \ \alpha \mapsto \alpha \circ f\,,$$

ebenfalls K-linear.

(c) Ist $A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$, so gilt ${}^tA = M^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{C}^*}({}^t f)$ für die *transponierte Matrix* ${}^tA$.

Aufgabe 27.
Gegeben seien die Basen $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ und

$$\mathcal{B}' = \{(3, -1, 0), (-1, -1, 1), (-3, 2, -1)\}$$

von $\mathbb{R}^3$ sowie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-5x_1 - 18x_2 - 24x_3, 4x_1 + 13x_2 + 16x_3, -2x_1 - 6x_2 - 7x_3).$$

(a) Man berechne die Matrizen $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ und $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$.

(b) Man berechne die Matrizen $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ und $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$.

(c) Man verifiziere die Gleichung $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$.

Aufgabe 28.
Gegeben seien die Basen

$$\mathcal{B} = \{(17, -25, 1), (0, 1, 0), (16, 0, 1)\} \text{ und } \mathcal{B}' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (16, 2, 1)\}$$

von $\mathbb{R}^3$ sowie die Basen $\mathcal{C} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ und $\mathcal{C}' = \{(3, 7), (2, 5)\}$ von $\mathbb{R}^2$. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit der Matrix

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Man berechne die Matrizen $S := M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$, $T := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ und $M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}(f)$.

(b) Man verifiziere die Gleichung $M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}(f) = S^{-1} \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot T$.

Aufgabe 29.
Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit der Matrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ von $\mathbb{R}^3$. Man berechne die Matrix $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ für die Basis

$$\mathcal{B}' = \{(2,1,2),(1,2,2),(2,2,3)\}\,.$$

Aufgabe 30.
(a) Sei $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung, und seien $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V. Man zeige:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) \in \mathrm{GL}_n(K) \iff f \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

(b) Man zeige: Die Abbildung $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \mathrm{Aut}(V) \to \mathrm{GL}_n(K)$, $f \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, ist ein Isomorphismus von Gruppen.

6 Lineare Gleichungssysteme

Lernziel.
Fertigkeiten: Lösen von linearen Gleichungssystemen mit dem Gaußschen Algorithmus
Kenntnisse: Lösbarkeitskriterien, Aussagen über die Lösungsmenge von homogenen und inhomogenen linearen Gleichungssystemen

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$. Gesucht sind alle Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, für die gilt: $\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$

oder ausführlich (gemäß Definition 5.2 der Matrizenmultiplikation für $A\vec{x}$)

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Wir nennen $A\vec{x} = \vec{b}$ ein *lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$.

6.1 Beispiele

1. Das System $A\vec{x} = \vec{0}$ heißt *homogenes lineares Gleichungssystem*. Die Menge der Lösungen ist der Kern der Standardabbildung

   $$K^n \longrightarrow K^m, \quad \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$$

   Insbesondere ist $A\vec{x} = \vec{0}$ lösbar, da $\vec{0} \in K^n$ stets eine Lösung ist.

2. Sei $K = \mathbb{R}$. Das System

   $$\begin{array}{ccccc} \sqrt{3}x_1 & - & 3x_2 & = & 0 \\ x_1 & - & \sqrt{3}x_2 & = & 1 \end{array}$$

   besitzt keine Lösung (vgl. Aufgabe 3c).

6.2 Lösbarkeitskriterien

Seien $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $f : K^n \longrightarrow K^m$, $\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$, die zugehörige Standardabbildung. Dann gelten

1. Äquivalent sind

   (a) Das System $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar, d.h. hat mindestens eine Lösung

   (b) $\vec{b} \in \mathrm{bild}(f)$

   (c) $\mathrm{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

   „Rang von A = Rang der um $\vec{b}$ erweiterten Matrix $(A|\vec{b})$."

2. Äquivalent sind

   (a) $A\vec{x} = \vec{b}$ ist *universell lösbar*, d.h. für jedes $\vec{b} \in K^m$ lösbar.

   (b) f ist surjektiv

   (c) $\mathrm{rang}\, A = m$

3. Äquivalent sind

   (a) $A\vec{x} = \vec{b}$ ist *eindeutig lösbar*, d.h. hat genau eine Lösung

   (b) $\mathrm{rang}\, A = n = \mathrm{rang}\,(A|\vec{b})$

4. Falls $m = n$ (n Gleichungen und n Unbekannte), dann sind äquivalent

   (a) $A\vec{x} = \vec{b}$ ist *eindeutig lösbar*

   (b) $\mathrm{rang}\, A = n$

   In diesem Fall ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ die Lösung.

5. Ist $m < n$ (weniger Gleichungen als Unbekannte), so hat das homogene System $A\vec{x} = \vec{0}$ stets eine Lösung $\neq \vec{0}$ (nicht triviale Lösung).

Beweis. **zu 1., 2.** 1. und 2. gelten, weil $\mathrm{bild}(f)$ von den Spalten von A erzeugt wird (vgl. 5.11) und also

$$\boxed{\dim_K \mathrm{bild}(f) = \mathrm{rang}\, A}$$

ist (vgl. 5.13).

zu 3. Wenn das System $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist, so gilt

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ ist eindeutig lösbar } \iff \mathrm{kern}(f) = \{\vec{0}\}$$

„$\Longrightarrow$" $\vec{z} \in \mathrm{kern}(f) \Longrightarrow A(\vec{x}+\vec{z}) = A\vec{x}+A\vec{z} = \vec{b}+\vec{0}$. Damit ist $\vec{z} = \vec{0}$, da wir sonst zwei verschiedene Lösungen hätten.

„$\Longleftarrow$“ $\operatorname{kern}(f) = \{\vec{0}\} \underset{\text{Satz 4.4}}{\Longrightarrow} f$ injektiv $\Longrightarrow$ Eindeutigkeit

3. folgt nun aus 1. und der Dimensionsformel

$$n \underset{4.7}{=} \dim_K \operatorname{kern}(f) + \dim_K \operatorname{bild}(f) \underset{5.13}{=} \dim_K \operatorname{kern}(f) + \operatorname{rang} A$$

zu 4. Da $m = n$ ist gilt

$$\operatorname{rang} A = n \underset{5.14}{\Longleftrightarrow} A \text{ invertierbar}$$

zu 5.

$$\begin{aligned} m < n &\Longrightarrow \dim_K \operatorname{bild}(f) < n \\ &\Longrightarrow \dim_K \operatorname{kern} f > 0, \text{ da } n \underset{4.7}{=} \dim_K \operatorname{kern}(f) + \dim_K \operatorname{bild}(f) \\ &\Longrightarrow \text{ Behauptung folgt nach 6.1 1.} \end{aligned}$$

$\square$

6.3 Die Menge der Lösungen

Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $f : K^n \longrightarrow K^m,\ \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$. Das System $A\vec{x} = \vec{b}$ sei lösbar, und es sei $\vec{x}_0 \in K^n$ irgendeine Lösung. Dann ist

$$\boxed{\vec{x}_0 + \operatorname{kern}(f) := \{\vec{x}_0 + \vec{x} \mid \vec{x} \in \operatorname{kern} f\}}$$

die Menge aller Lösungen des Systems; sie ist im allgemeinen kein Teilraum von K^n, aber ein sogenannter „affiner Unterraum“.
Insbesondere ist ein lösbares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ genau dann eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene System $A\vec{x} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$ hat (und in diesem Fall gilt: Anzahl der Gleichungen $\geqslant$ Anzahl der Unbekannten nach 6.2 5.).

Beweis. Ist $\vec{x}_1 \in K^n$ eine Lösung, dann folgt

$$\begin{gathered} A(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) = A\vec{x}_1 - A\vec{x}_0 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0} \\ \Longrightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_0 \in \operatorname{kern} f \Longrightarrow \vec{x}_1 \in \vec{x}_0 + \operatorname{kern}(f) \end{gathered}$$

Ist umgekehrt $\vec{x}_1 \in \vec{x}_0 + \operatorname{kern}(f)$, also $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \vec{x}$ mit $\vec{x} \in \operatorname{kern}(f)$, dann gilt

$$A\vec{x}_1 = A(\vec{x}_0 + \vec{x}) = A\vec{x}_0 + A\vec{x} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

$\square$

Beispiel.
Zu lösen ist das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & -8x_2 & + & -2x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & & + & 4x_3 & = & -2 \end{array}$$

Methode: Es ist

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -8 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right)$$ Addiere das 3-fache der 1. Zeile zur 2. Zeile
Addiere die 1. Zeile zur 3. Zeile

$$M_1 := \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & -4 \end{array}\right)$$ Addiere die 2. Zeile zur 3. Zeile

$$M_2 := \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right)$$

Es folgt

$$6x_3 = -6 \Longrightarrow x_3 = -1$$

$$\Longrightarrow \quad -2x_2 - 1 = -2 \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad -x_1 + 2\frac{1}{2} + 1(-1) = -2 \Longrightarrow x_1 = 2$$

6.4 Elementare Umformungen einer Matrix

Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Eine *elementare Zeilenumformung von* A ist einer der folgenden Vorgänge:

I) Vertauschung zweier Zeilen

II) Multiplikation einer Zeile mit einem $\lambda \in K^\star = K \setminus \{0\}$

III) Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile, $\lambda \in K$

Entsprechend ist eine elementare *Spaltenumformung* definiert.

Bemerkung.
Elementare Umformungen ändern den Rang einer Matrix nicht (vgl. Aufgabe 32a).

6.5 Elementare Umformungen und die Lösungsmenge

Bemerkung.
Sei $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ und $\vec{b} \in K^m$. Geht die Matrix $(A|\vec{b})$ durch elementare **Zeilen**transformationen in die Matrix $(A'|\vec{b}')$ über, so haben die linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ und $A'\vec{x} = \vec{b}'$ dieselbe Lösungsmenge.

Beweis. Elementare Zeilenumformungen von $(A|\vec{b})$ bewirken, dass zwei Gleichungen vertauscht werden (I), eine Gleichung mit $\lambda \neq 0$ multipliziert wird (II) oder ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addiert wird (III). Die Lösungen von $A\vec{x} = \vec{b}$ sind also auch Lösungen von $A'\vec{x} = \vec{b}'$. Da man durch entsprechende elementare Zeilenumformungen der Matrix $(A'|\vec{b}')$ wieder zur Matrix $(A|\vec{b})$ zurück kommen kann, ergibt die gleiche Argumentation, dass die Lösungen von $A'\vec{x} = \vec{b}'$ auch die Lösungen des Systems $A\vec{x} = \vec{b}$ sind. $\square$

Elementare Spaltenumformungen verändern die Lösungsmenge.
Spaltenvertauschungen kann man zur Lösung benutzen, muss aber dann die Unbekannten entsprechend umnummerieren.

6.6 Gaußscher Algorithmus ($m = n = \operatorname{rang} A$)

Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ und $\operatorname{rang} A = n$. In diesem Fall ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar (vgl. 6.2 4.), und in jeder Spalte von A gibt es ein Element ungleich Null.

1. Schritt Wir starten mit der Matrix $(A|\vec{b})$ und erreichen durch Zeilenvertauschungen (falls nötig) dass $a_{11} \neq 0$ ist. Addiere das $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-fache der ersten Zeile zur i-ten Zeile für $i = 2, \ldots, n$. Wir erhalten eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^* & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n1} & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right)$$

2. Schritt Durch eventuelle Zeilenvertauschung mit einer Zeile, die ungleich der 1. Zeile ist (beachte: $\operatorname{rang} A = n$), stellen wir sicher, dass $a'_{22} \neq 0$ ist. Addieren wir nun das $-\frac{a'_{i2}}{a'_{22}}$-fache der 2. Zeile zur i-ten

Zeile für jedes $i \neq 2$, dann ergibt sich eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^* & 0 & a_{13}'' & \cdots & a_{1n}'' & b_1'' \\ 0 & a_{22}^* & a_{23}'' & \cdots & a_{2n}'' & b_2'' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & \cdots & a_{3n}'' & b_3'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}'' & \cdots & a_{nn}'' & b_n'' \end{array}\right)$$

Wir iterieren nun dieses Verfahren. Da $\operatorname{rang} A = n$ ist, können wir im k-ten Schritt stets durch eventuelle Zeilenvertauschung unter den Zeilen $k, \ldots, n$ erreichen, dass das Element an der Stelle (k, k) ungleich Null ist. Schließlich ergibt sich eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^* & 0 & \cdots & 0 & b_1^* \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^* & b_n^* \end{array}\right)$$

Nach 6.5 ist die Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ gegeben durch

$$\boxed{x_i = \frac{b_i^*}{a_{ii}^*} \quad \forall i = 1, \ldots, n}$$

6.7 Verfahren zur Inversion einer Matrix

Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Dann ist $\operatorname{rang} A = n$ (vgl. 5.14). Wenden wir die Umformungen aus 6.6 auf A an und multiplizieren am Schluss die i-te Zeile mit $1/a_{ii}^*$, so erhalten wir die Einheitsmatrix E_n

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten nun A^{-1}, indem wir alle elementaren Umformungen, die A in E_n überführt haben, in derselben Reihenfolge auf E_n anwenden.

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 - \frac{8}{5} Z_1} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & \frac{13}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 + \frac{5}{13} Z_2} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{13}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{5}{13} Z_2]{\frac{1}{5} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$
E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 - \frac{8}{5} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{8}{5} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 + \frac{5}{13} Z_2} \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{5}{13} \\ -\frac{8}{5} & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\frac{5}{13} Z_2]{\frac{1}{5} Z_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{8}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} = A^{-1} \qquad \text{(vgl. Beispiel in 5.7).}
$$

6.8 Gaußscher Algorithmus

Sei $A \in \mathrm{M}_{m \times n}(K)$. Um das System $A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen, führen wir solange elementare Zeilenumformungen der Matrix $(A|\vec{b})$ durch, bis die Gestalt

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
a'_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & b'_1 \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a'_{\ell\ell} & * & \cdots & \cdots & * & \vdots \\
\cline{1-8}
0 & \cdots & \cdots & 0 & \multicolumn{1}{c|}{0} & * & \cdots & * & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \multicolumn{1}{c|}{\vdots} & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \multicolumn{1}{c|}{0} & * & \cdots & * & b'_m
\end{array}\right)
\quad \text{mit } a'_{ii} \neq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, \ell
$$

erreicht ist. Durch Vertauschung der Spalten $\ell + 1, \ldots, n$ können wir das Verfahren fortsetzen, müssen dann aber die Unbekannten entsprechend umnummerieren. Schließlich erhalten wir eine Matrix der Form

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
a''_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & \cdots & * & b''_1 \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a''_{kk} & * & \cdots & \cdots & * & b''_k \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b''_{k+1} \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b''_m
\end{array}\right)
$$

mit $a''_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \ldots, k$.
Der Rang von A und die Lösbarkeit des Systems lassen sich nun einfach ablesen: $\operatorname{rang} A = k$, und $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar genau dann, wenn $b''_{k+1} = \cdots = b''_m = 0$ (vgl. 6.2 1.).

Beispiel.
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt

$$(A|\vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Es folgt, dass $\operatorname{rang} A = 2$ und $\operatorname{rang}(A|\vec{b}) = 3$ ist. Das System ist deshalb nach 6.2 1. nicht lösbar.

Lernerfolgstest.
- Schreiben Sie das folgende Gleichungssystem in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ und diskutieren Sie Lösbarkeit, Lösungsverfahren und Lösungsmenge:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ -4x_1 & & & + & 4x_3 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 5x_2 & + & 5x_3 & = & -2 \end{array}$$

- Schildern Sie das Prinzip des Gauß-Algorithmus.
- Aufgaben 31–35, im Aufgabenpool Abschnitt 6

6.9 Übungsaufgaben 31 – 35

Sofern nicht anders vermerkt, beziehen sich die folgenden Aufgaben auf den Körper $\mathbb{R}$.

Aufgabe 31.
Problem aus einem Altchinesischen Mathematikbuch:
Wieviele Hähne, Hennen und Küken kann man für 100 Münzen kaufen, wenn man insgesamt 100 Vögel haben will, und ein Hahn 5 Münzen, eine Henne 3 Münzen und drei Küken 1 Münze kosten? Die 100 Münzen sollen hierbei vollständig verbraucht werden.

Man stelle ein passendes lineares Gleichungssystem auf und gebe eine Lösung dieses Systems an, die auch das Problem löst. Man ermittle dann die Menge aller Lösungen des Systems.

Aufgabe 32.
Sei K ein beliebiger Körper. Man zeige:

a) Geht eine Matrix $B \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ durch elementare Umformungen aus einer Matrix $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ hervor, so gilt $\mathrm{rang}(B) = \mathrm{rang}(A)$.

b) Jede $m \times n$-Matrix kann durch elementare Umformungen in eine $m \times n$-Matrix der Form

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_{rr} & \dots & c_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden mit $c_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \dots, r$.

c) Es ist $\mathrm{rang}(C) = r$.

Bemerkung. Aufgabe 32 liefert ein Verfahren zur Bestimmung des Ranges einer Matrix. Man bringt die Matrix durch elementare Umformungen auf eine Matrix der Gestalt C und kann dann den Rang direkt ablesen.

Aufgabe 33.
Es seien $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Man bestimme $\mathrm{rang}(A)$, $\mathrm{rang}(A|\vec{b})$ und $\mathrm{rang}(A|\vec{c})$.

b) Man bestimme die Dimension des Lösungsraumes

$$U := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^6 \mid A\vec{x} = \vec{0}\,\}$$

und löse das homogene Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$.

c) Man ermittle jeweils die Lösungsmenge der Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$ und $A\vec{x} = \vec{c}$.

Aufgabe 34.
In Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ bestimme man die Lösungsmenge des Gleichungssystems
$tx_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + tx_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + tx_3 = 1$.

Aufgabe 35.
(a) Für zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ zeige man:

$$\operatorname{rang}(A \cdot B) \leq \operatorname{rang}(A) \quad \text{und} \quad \operatorname{rang}(A \cdot B) \leq \operatorname{rang}(B)\,.$$

(b) Man zeige: Sind $R \in \mathrm{GL}_m(K),\ T \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, so ist

$$\operatorname{rang}(R \cdot A \cdot T) = \operatorname{rang}(A)\,.$$

7 Die Determinante einer $n \times n$-Matrix

Lernziel.
Fertigkeiten: Berechnung der Determinante einer $n \times n$-Matrix für $n \leqslant 4$ ohne Taschenrechner oder Computer. Lösen von linearen Gleichugssystemen mit Cramerscher Regel, soweit möglich.
Kenntnisse: Definition und Eigenschaften der Determinante

Beispiele.

1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K) \quad \Longrightarrow \quad \det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in K$

2. *Sarrussche Regel:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(K)$$

$$\Longrightarrow \quad \det A = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} & + & a_{12}a_{23}a_{31} & + & a_{21}a_{32}a_{13} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} & - & a_{12}a_{21}a_{33} & - & a_{23}a_{32}a_{11} \end{matrix} \in K$$

3.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det A = 30 + 42 - 48 - 24 = 0$$

7.1 Definition der Determinante

Die Determinante einer $n \times n$-Matrix wird durch den folgenden Satz definiert.

Satz.
Es gibt genau eine Abbildung

$$\det : \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K, \quad A \longmapsto \det A$$

mit den Eigenschaften:

1. $\det$ *ist linear in jeder Zeile*

2. Ist $\operatorname{rang} A < n$*, so ist* $\det A = 0$

3. $\det E_n = 1$

Wir nennen $\det A$ die *Determinante* von $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ und $\det$ die *Determinante.*
Der Beweis des Satzes erfolgt in 7.3 und 7.4 unten.

Bedeutung von 1. Seien $z_1, \ldots, z_n$ die Zeilen von $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. Dann lässt sich A schreiben als

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

und 1. bedeutet:

$$\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

für $i = 1, \ldots, n$ und $\lambda \in K$. An den mit Punkten versehenen Stellen sind dabei die Zeilen von A unverändert übernommen.

7.2 Eigenschaften der Determinante

Lemma.
Sei $\det : \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften 1., 2., 3. aus 7.1, und seien* $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$*. Dann gelten*

a) *Geht B aus A durch Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen hervor, dann gilt*

$$\boxed{\det B = \det A}$$

b) *Geht B aus A durch Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \in K$ hervor, dann gilt*

$$\boxed{\det B = \lambda \det A}$$

c) *Geht B aus A durch Vertauschung zweier Zeilen hervor, dann gilt*

$$\boxed{\det B = -\det A}$$

Beweis. **zu a)** Ist

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j + \lambda z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

dann folgt

$$\det B \underset{7.1\ 1.}{=} \det A + \lambda \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \underset{7.1\ 2.}{=} \det A, \text{ da } \operatorname{rang} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} < n,$$

vgl. 5.15.

zu b) Die Behauptung folgt direkt aus 7.1 1.

zu c) Ist

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_i + z_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_i + z_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + z_j \\ \vdots \\ z_i + z_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

dann folgt $\det A \underset{7.2.a}{=} \det A_1$, $\det B \underset{7.2.a}{=} \det B_1$ und

$$\det A_1 \ + \ \det B_1 \underset{7.1.1}{=} \det C \underset{7.1.2}{=} 0$$

□

7.3 Beweis der Eindeutigkeitsaussage in 7.1

Seien $\det, \det' : \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K$ zwei Abbildungen mit den Eigenschaften 1., 2., 3. aus 7.1, dann ist $\det A = \det' A$ für jede Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$.

Beweis. Ist $\operatorname{rang} A < n$, dann ist nach 7.1.2 $\det A = \det' A = 0$.
Sei $\operatorname{rang} A = n$. Nach 6.6 und 6.7 können wir A durch elementare Zeileumformungen in die Einheitsmatrix E_n verwandeln. Da $\det E_n = 1 = \det' E_n$ nach 7.1.3 gilt und wir die elementare Zeilenumformungen wieder rückgängig machen können, folgt mit den Rechenregeln aus 7.2 $\det A = \det' A$. □

7.4 Laplacescher Entwicklungssatz

Definition.
Für $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ bezeichne A_{ij} die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entstehende $(n-1) \times (n-1)$-Matrix.

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dann folgt

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \det A &= a_{11}\det A_{11} - a_{21}\det A_{21} + a_{31}\det A_{31}\\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}\\ &\quad - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}\end{aligned}$$

Satz.
Es gibt genau eine Abbildung $\det : \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K$ *mit den Eigenschaften 1, 2, 3 aus 7.1. Man kann* $\det A$ *induktiv durch* Entwicklung der j-ten Spalte *berechnen, d.h. es gilt die Formel*

$$(*) \qquad \boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}$$

für jedes $j = 1, \dots, n$. *Ausgeschrieben bedeutet die Formel*

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}$$

für jedes $j = 1, \dots, n$.

Beweis durch Induktion nach n.

$n = 1$ Setze $\det a := a \ \forall a \in K$. Dann die Eigenschaften in 7.1 erfüllt.

$n > 1$ Wir nehmen an, dass es für $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen eine Determinante gibt. Wir wählen ein $j \in \{1, \dots, n\}$ aus und definieren $\det A$ durch $(*)$ für jedes $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$.
Zu zeigen: Die so gewonnene Abbildung det hat die Eigenschaften 1, 2, 3 aus 7.1.

zu 1.) det ist linear in jeder Zeile, weil dies für jeden Summanden in der Entwicklungsformel $(*)$ gilt.

zu 2.) Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ und $\operatorname{rang} A < n$.
Zu zeigen $\det A = 0$. Ist $\operatorname{rang} A < n$ dann folgt aus 5.15, dass Zeilenrang $A < n$ ist. Nach 3.2 gibt es dann eine Zeile z_i von A, die Linearkombination der anderen Zeilen ist, also

$$z_i = \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_{i-1} z_{i-1} + \lambda_{i+1} z_{i+1} + \cdots + \lambda_n z_n$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

Es folgt:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{ i-te Zeile}$$

$$= \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_{i-1} z_{i-1} + \lambda_{i+1} z_{i+1} + \cdots + \lambda_n z_n \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_{i-1} \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i-1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{ i-te Zeile}$$

$$+ \lambda_{i+1} \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{ i-te Zeile}$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus folgender Eigenschaft $2'$.

Lemma.
Es gilt 2': Sind in einer Matrix $B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ zwei Zeilen gleich, so ist $\det B = 0$.

Beweis. In $B = (b_{ij})$ seien die k-te und die ℓ-te Zeile gleich, und es sei ohne Einschränkung $k < \ell$. Mit Ausnahme von $\det B_{kj}$ und $\det B_{\ell j}$ sind dann nach Induktionsvoraussetzung alle Determinanten $\det B_{ij} = 0$ (weil die Matrix B_{ij} für $i \neq k, \ell$ zwei gleiche Zeilen hat und also $\operatorname{rang} B_{ij} < n-1$ gilt). Es folgt

$$\begin{aligned} \det B &= (-1)^{k+j} b_{kj} \det B_{kj} + (-1)^{\ell+j} b_{\ell j} \det B_{\ell j} \\ &\underset{(b_{kj}=b_{\ell j})}{=} (-1)^j b_{kj} \big((-1)^k \det B_{kj} + (-1)^\ell \det B_{\ell j}\big) \end{aligned}$$

Ist $\ell = k+1$, so annulieren sich die Summanden in den Klammern, und es ist $\det B = 0$.

Vergleichen wir nun die beiden Matrizen

$$B_{kj} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_{k-1} \\ z'_{k+1} \\ \vdots \\ z'_\ell \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} \text{ und } B_{\ell j} = \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_k \\ \vdots \\ z'_{\ell-1} \\ z'_{\ell+1} \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } z'_\ell = z'_k$$

dann können wir B_{kj} durch $\ell-k-1$ Zeilenvertauschungen in $B_{\ell j}$ verwandeln. Nach Induktionsvoraussetzung und 7.2 bewirkt dies gerade $\ell-k-1$ Vorzeichenwechsel. Es folgt

$$\begin{aligned} (-1)^k \det B_{kj} + (-1)^\ell \det B_{\ell j} &= (-1)^k(-1)^{\ell-k-1} \det B_{\ell j} + (-1)^\ell \det B_{\ell j} \\ &= (-1)^{k+\ell-k-1} \det B_{\ell j} + (-1)^\ell \det B_{\ell j} \\ &= \left((-1)^{\ell-1} + (-1)^\ell\right) \det B_{\ell j} = 0 \end{aligned}$$

und damit $\det B = 0$. □

zu 3.) Für die Einheitsmatrix E_n berechnen wir $(*)$. Es ergibt sich

$$\det E_n = \underbrace{(-1)^{j+j}}_{=1} 1 \det E_{jj} \underset{\text{Ind. Vor.}}{=} 1$$

□

7.5 Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix

Folgerung (aus 7.4).
Ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ eine *obere Dreiecksmatrix*, das heißt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

so ist $\det A$ das Produkt der Diagonalelemente

$$\boxed{\det A = a_{11} \cdots a_{nn}}$$

Dies gilt insbesondere auch für Diagonalmatrizen.

Beweis. Der Beweis ergibt sich durch Induktion nach n und Entwicklung nach der ersten Spalte. □

Beispiel.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 - 4z_1]{z_2 - 2z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_3 - z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

  Nach 7.2 und 7.5 folgt $\det A = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$.

- Berechnung von $\det A$ durch Entwicklung nach der ersten Spalte

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} - 2 \det A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} + 4 \det A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 21 - 2 \cdot (-15) + 4 \cdot (-13) = -1 \end{aligned}$$

- Weitere Möglichkeit der Berechnung von $\det A$. Es ist

$$\begin{aligned} \det A &\underset{7.2}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \\ &\underset{7.4}{=} 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} = -1 \end{aligned}$$

7.6 Kriterium für invertierbare Matrizen

Sei $A \in \mathrm{M}_{n \times n}(K)$. Dann sind äquivalent:

i) A ist invertierbar

ii) $\operatorname{rang} A = n$

iii) $\det A \neq 0$

Beweis. **i) $\Longleftrightarrow$ ii)** vgl. 5.14

ii) $\Longrightarrow$ iii) Ist $\operatorname{rang} A = n$, so kann A wie in 6.6 durch elementare Zeilenumformungen in eine Diagonalmatrix überführt werden mit lauter Diagonalelementen ungleich Null. Nach 7.2 und 7.5 ist damit $\det A \neq 0$.

iii) $\Longrightarrow$ ii) Dies folgt aus 7.1 2.

□

7.7 Determinante der transponierten Matrix

Satz.
Ist $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$, so ist

$$\det A = \det {}^tA$$

Insbesondere können wir $\det A$ *auch durch* Entwicklung nach der i-ten Zeile *berechnen. Es gilt*

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}$$

für jedes $i = 1, \dots, n$. Ausgeschrieben bedeutet dies

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$$

für jedes $i = 1, \dots, n$.

Beweis. Definieren wir Linearität in einer Spalte analog wie in 7.1, dann ist die durch $(*)$ in 7.4 gegebene Abbildung

$$\det : \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K, \quad A \longmapsto \det A$$

auch linear in der j-ten Spalte für $j = 1, \dots, n$, denn in der Spaltenentwicklungsformel 7.4 hängen die Matrizen $A_{j1}, \dots, A_{jn}$ nicht von der j-ten Spalte ab, da diese gestrichen wurde.
Da die Spalten von A die Zeilen von ${}^tA$ sind, folgt, dass die Abbildung

$$\mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K, \quad A \longmapsto \det {}^tA$$

linear in jeder Zeile ist und damit 1. aus 7.1 erfüllt. Sie erfüllt auch 2., denn nach 5.15 ist $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA$. Auch 3. ist erfüllt, da ${}^tE_n = E_n$. Da det nach 7.3 durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist, folgt $\det {}^tA = \det A$ für alle $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$. □

7.8 Multiplikationssatz für Determinanten

Satz.
Sind $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ dann gilt

$$\boxed{\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)}$$

Insbesondere gilt: Ist A invertierbar, so ist

$$\boxed{(\det A)^{-1} = \det A^{-1}}$$

Beweis. Ist $\operatorname{rang} B < n$, dann ist $\det B = 0$ nach 7.6, und es ist auch $\operatorname{rang}(AB) < n$, (denn andernfalls wäre AB invertierbar nach 5.14 und daher auch B, was $\operatorname{rang} B = n$ nach 5.14 zur Folge hätte).
Es folgt $0 \underset{7.6}{=} \det(AB) = \det A \cdot \underbrace{\det B}_{=0}$.
Sei B fest gewählt mit $\operatorname{rang} B = n$. Dann ist nach 7.6 $\det B \neq 0$. Wir zeigen nun, dass die Abbildung

$$f : \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K, \quad A \longmapsto (\det B)^{-1} \det(AB)$$

die Eigenschaften 1., 2., 3. aus 7.1 erfüllt. Mit der Eindeutigkeitsaussage aus 7.3 folgt dann $\det A = f(A) = (\det B)^{-1} \det(AB)$ und also die Behauptung.

zu 1.) Für

$$C := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

folgt

$$CB \underset{5.2}{=} \begin{pmatrix} z_1 B \\ \vdots \\ (z_i + z_i')B \\ \vdots \\ z_n B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 B \\ \vdots \\ z_i B + z_i' B \\ \vdots \\ z_n B \end{pmatrix}$$

also

$$\det(CB) \underset{7.1}{=} \det \begin{pmatrix} z_1 B \\ \vdots \\ z_i B \\ \vdots \\ z_n B \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} z_1 B \\ \vdots \\ z_i' B \\ \vdots \\ z_n B \end{pmatrix}$$

$$\underset{5.2}{=} \det \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} B \right) + \det \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} B \right)$$

Durch Division mit $(\det B)^{-1}$ folgt hieraus

$$f\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Analog ergibt sich

$$f\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

zu 2.) Ist $\operatorname{rang} A < n$, dann ist nach 5.14 auch $\operatorname{rang} AB < n$ und damit $\det AB = 0$ nach 7.6, insbesondere $f(A) = 0$.

zu 3.)

$$\begin{aligned} f(E_n) &= (\det B)^{-1} \det(E_n B) \text{ nach Def. von } f \\ &= (\det B)^{-1} \det B = 1 \end{aligned}$$

□

7.9 Kästchenregel

Satz. *Sei $A \in \mathrm{M}_{r\times r}(K)$, und sei $C \in \mathrm{M}_{n-r\times n-r}(K)$. Die Nullmatrix 0 und die Matrix B seien von passendem Format. Dann gilt:*

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = (\det A)\cdot(\det C)$$

Beweis. Schreibe die Kästchenmatrix als Matrizenprodukt in der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_r & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & E_{n-r} \end{array}\right)$$

Entwicklung des linken Faktors nach der ersten Spalte und des rechten Faktors nach der letzten Zeile sowie jeweils Induktion ergeben
$\det\left(\begin{array}{c|c} E_r & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det C$ und $\det\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & E_{n-r} \end{array}\right) = \det A$
und also nach dem Multiplikationssatz 7.8 die Behauptung. □

Bemerkung.
Es gibt noch andere Methoden, die Kästchenregel zu beweisen, wie z.B. die Matrizen A und C durch elementare Zeilenumformungen vom Typ 6.4.III jeweils auf die Gestalt einer oberen Dreiecksmatrix zu bringen und dann die Regel 7.5 anzuwenden.

7.10 Methode zur Berechnung der inversen Matrix

Satz.
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ *und* $\det A \neq 0$ *dann gilt*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} B}$$

wobei $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ *mit*

$$\boxed{b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}}$$

Beweis. Wir zeigen $AB = \det A \cdot E_n$. Es ist $AB = (c_{ij})$ mit

$$\begin{aligned} c_{ij} &\underset{5.2}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+j} \det A_{jk} \quad \text{(nach Definition von } B\text{)} \\ &= \det A' \quad \text{(Entwicklung nach der } j\text{-ten Zeile 7.7)} \end{aligned}$$

wobei A' aus A entsteht, indem die j-te durch die i-te Zeile ersetzt wird, also

$$c_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j, \text{ da in } A' \text{ zwei Zeilen gleich sind} \end{cases}$$

□

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det A = 13$$

Damit ergibt sich für A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

vgl. Beispiele in 5.7 und 6.7

7.11 Cramersche Regel

Ist A eine invertierbare $n \times n$-Matrix, so lässt sich ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel lösen.

Satz.
Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(K)$. Dann ist das lineare Gleichungsystem $A\vec{x} = \vec{b}$ für jedes $\vec{b} \in K^n$ eindeutig lösbar (vgl. 6.2 und 7.6), und die Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
x_2 &= \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\
&\ \,\vdots \\
x_n &= \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & b_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beweis. Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ die Lösung des Systems

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

Sind

$$\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, \vec{s}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

die Spalten von A, dann folgt

$$x_1\vec{s}_1 + \cdots + x_n\vec{s}_n = \vec{b}$$

und also

$$x_1\vec{s}_1 + \cdots + x_i\vec{s}_i - \vec{b} + \cdots + x_n\vec{s}_n = \vec{0}$$

Insbesondere sind also die Vektoren $\vec{s}_1, \ldots, x_i\vec{s}_i - \vec{b}, \ldots, \vec{s}_n$ linear abhängig für $i = 1, \ldots, n$, und damit sind auch die Spalten der Matrix

$$B_i := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & x_i a_{1i} - b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & x_i a_{ni} - b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

linear abhängig für $i = 1, \ldots, n$. Nach 7.6 folgt $\det B_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Für $i = 1, \ldots, n$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = \det B_i &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & x_i a_{1i} - b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & x_i a_{ni} - b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &\underset{7.7}{=} x_i \det A - \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da det linear in der i-ten Spalte ist, und es folgt die Behauptung. □

7.12 Die spezielle lineare Gruppe

Bemerkung.
Die *spezielle lineare Gruppe*

$$\mathrm{SL}_n(K) := \{A \in \mathrm{GL}_n \mid \det A = 1\}$$

ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$, der Gruppe aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen über K (vgl. 5.7.1).

Beweis.

- Sind $A, B \in \mathrm{SL}_n(K)$, so sind auch AB und $A^{-1} \in \mathrm{SL}_n(K)$. Dies folgt aus 7.10.
- Ferner ist $\mathrm{SL}_n(K) \neq \varnothing$, da $E_n \in \mathrm{SL}_n(K)$

□

7.13 Die Determinante eines Endomorphismus

Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und sei $f : V \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung, das heißt ein Endomorphismus von V. Wähle eine Basis $\mathcal{B}$ von V und setze

$$\boxed{\det f := \det \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}$$

Diese Definition ist unabhängig von der Basiswahl, wie sich gleich zeigt.

Satz.
$\det f$ *ist unabhängig von der Wahl der Basis* $\mathcal{B}$*.*

Beweis. Sei $\mathcal{B}'$ eine weitere Basis von V. Dann gilt nach 5.9

$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = T^{-1}\ \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\ T$ mit $T = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$. Es folgt

$$\det \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = \det(T^{-1}\ \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\ T) \underset{7.8}{=} \det T^{-1} \cdot \det \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \det T = \det \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

□

Bemerkung.
Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und sei $f : V \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung dann gilt

$$\boxed{f \text{ ist ein Automorphismus}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\det f \neq 0}$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist ein Automorphismus} \\ \Longleftrightarrow\ & \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \text{ ist invertierbar (nach 5.7.2)} \\ \Longleftrightarrow\ & \det f = \det \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \neq 0 \text{ (nach 7.6)} \end{aligned}$$

□

7.14 Zur Bedeutung der Determinante

Wie wir oben gesehen haben, kann die Determinante recht nützlich bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen sein. Darüber hinaus spielt sie eine entscheidende Rolle in der Eigenwerttheorie, die wir im nächsten Kapitel kennenlernen werden, und dient zur Definition des Begriffs der *Orientierung* von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Ferner kann man mit Hilfe der Determinante den Flächeninhalt eines Parallelogramms und allgemeiner das Volumen eines Parallelotops im $\mathbb{R}^n$ ausrechnen. Auch in der Analysis begegnet man der Determinante. Wir gehen hier noch kurz auf die Begriffe Orientierung und Volumen ein.

Orientierung von reellen Vektorräumen

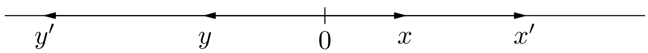


Abbildung 13: $x' = \lambda x$ mit $x, x' \in \mathbb{R}^1$ und $\det \lambda > 0$

In $\mathbb{R}^1$:
Es sind x und x' *gleich orientiert*, da $x' = \lambda x$ mit $\det \lambda > 0$. (Beachte dabei, dass $\lambda = \det \lambda \in \mathbb{R}$ gilt.) Es sind y, y' gleich orientiert, da $y' = \lambda y$ mit $\det \lambda > 0$ gilt, und y, x sind nicht gleich orientiert, da $y = \lambda x$ mit $\det \lambda < 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Diese Vorstellung von Orientierung in $\mathbb{R}^1$ können wir auf einen endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum übertragen.

Definition.
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Dann heißen zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ von V *gleich orientiert*, wenn für die Matrix des Basiswechsels gilt

$$\boxed{\det \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) > 0}$$

Wir schreiben dann $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$.

Behauptung „$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation, d.h.

1. $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}$
2. $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \Longrightarrow \mathcal{B}' \sim \mathcal{B}$
3. $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}'' \Longrightarrow \mathcal{B} \sim \mathcal{B}''$

Beweis. **zu 1.)** Es ist $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = E_n$ nach 5.4.3 und $\det E_n = 1 > 0$ nach 7.1.

zu 2.) Sei $T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$. Dann ist $\mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = T^{-1}$ nach 5.8. Ist $\det T > 0$, so folgt $\det T^{-1} \underset{7.8}{=} \frac{1}{\det T} > 0$.

zu 3.) Es ist $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})\, \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(\mathrm{id}) \underset{5.6}{=} \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(\mathrm{id})$ und damit

$$\det \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(\mathrm{id}) = \underbrace{\det \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})}_{>0}\ \underbrace{\det \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(\mathrm{id})}_{>0} > 0$$

$\square$

Eine Äquivalenzklasse von Basen heißt *Orientierung* von V.

Definition.
V heißt *orientierter* $\mathbb{R}$*-Vektorraum*, wenn eine (geordnete) Basis $\mathcal{B}$ von V als *positiv orientiert* ausgezeichnet ist. Alle Basen, die zu $\mathcal{B}$ gleichorientiert sind (also in der selben Äquivalenzklasse liegen) heißen dann *positiv orientiert* und die anderen *negativ orientiert*. Im $\mathbb{R}^n$ sei stets die Standardbasis als positiv orientiert ausgezeichnet.

Orientierungserhaltende Automorphismen

Sei V ein endlich n-dimensionaler orientierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann heißt ein Automorphismus $f : V \xrightarrow{\sim} V$ *orientierungserhaltend*, wenn f jede Basis von V in eine gleichorientierte Basis überführt.

Bemerkung.
Es gilt

$$\boxed{f \text{ ist orientierungserhaltend}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\det f > 0}$$

Beweis. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und sei $\mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_n')$ mit $f(v_j) = v_j'$ für $j = 1, \ldots, n$, dann ist auch $\mathcal{B}'$ eine Basis von V nach Aufgabe 20, da f bijektiv ist. Nach 5.4 gilt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$, also

$$\det f = \det \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \det \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$$

□

Insbesondere ist f orientierungserhaltend wenn f **eine** Basis von V in eine gleichorientierte Basis überführt.

Folgerung.
Sei $v_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), \ldots, v_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Tragen wir v_j als j-te Spalte ein, so erhalten wir eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ mit $\det A \neq 0$ nach 7.6. Es gilt dann

$$\boxed{\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n) \sim \text{ Standardbasis}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\det A > 0}$$

Beweis. Sei

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

die zu A gehörende Standardabbildung. Sie bildet gerade den j-ten Standardbasisvektor auf die j-te Spalte ab (vgl. 5.11), und es ist $\det A = \det f_A$. Die Behauptung folgt nun. □

Die Determinante als Volumen

Sei $V = \mathbb{R}^n$, und seien $v_1, \dots, v_n$ Vektoren in V. Dann heißt die Menge

$$\boxed{P(v_1, \dots, v_n) := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1 \text{ für } i = 1, \dots, n\}}$$

das von $v_1, \dots, v_n$ *aufgespannte Parallelotop* im $\mathbb{R}^n$.
Wir definieren das *Volumen* von $P(v_1, \dots, v_n)$ als den Absolutbetrag

$$|\det(v_1, \dots, v_n)|$$

(hierbei wird v_j wie oben als j-te Spalte einer $n \times n$-Matrix aufgefasst).

Beispiel.
Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis in $\mathbb{R}^n$. Dann ist $|\det E_n| = |1| = 1$ das Volumen des n-dimensionalen „Einheitswürfels“ $P(e_1, \dots, e_n)$.

Flächeninhalt eines Parallelogramms

Sei $V = \mathbb{R}^2$. Wir berechnen den Flächeninhalt des Parallelogramms

$$P(v_1, v_2) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid 0 \leqslant \lambda_1, \lambda_2 \leqslant 1\}$$

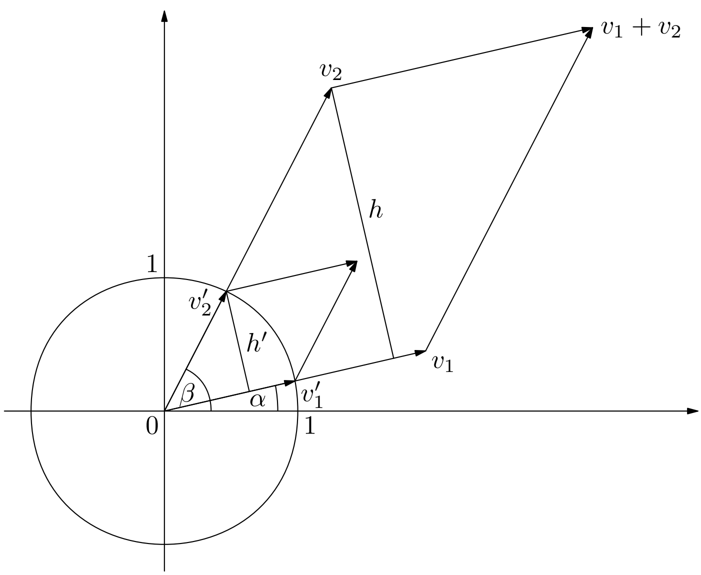


Abbildung 14: Parallelogramm

Es ist

$$v_1 = \lambda v_1' = \lambda(\cos\alpha, \sin\alpha)$$
$$v_2 = \mu v_2' = \mu(\cos\beta, \sin\beta)$$

Für $0 \leqslant \beta - \alpha \leqslant \pi$ folgt

$$F' = 1 \cdot h' = 1 \cdot \sin(\beta - \alpha) = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \geqslant 0$$

mit Hilfe des Additionstheorems $\sin(\beta - \alpha) = \cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$. Es folgt mit $h = \mu h'$

$$F = \lambda\mu F' = \det \begin{pmatrix} \lambda\cos\alpha & \lambda\sin\alpha \\ \mu\cos\beta & \mu\sin\beta \end{pmatrix}$$

Berechnen wir F als Volumen eines Parallelotops in $\mathbb{R}^2$, wie oben für jedes $n > 0$ angegeben, dann erhalten wir mit $v_1 = (a_1, a_2)$ und $v_2 = (b_1, b_2)$

$$F = \left|\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right| \underset{7.7}{=} \left|\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}\right| .$$

Lernerfolgstest.

- Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- Was ist die Kästchenregel für eine Matrix der Form $\left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline B & C \end{array}\right)$?
- Gilt immer noch eine Kästchenregel, wenn auf die Nullmatrix als Kästchen verzichtet wird?
- Geben Sie die zu $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ inverse Matrix an.
- Auf welchen Typ eines linearen Gleichungssystems ist die Cramersche Regel anwendbar?
- Aufgaben 36–43, im Aufgabenpool Abschnitt 7

7.15 Übungsaufgaben 36 – 43

Aufgabe 36.

Man prüfe, ob die folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ invertierbar sind, und bestimme gegebenenfalls die inverse Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 37.
(a) Man berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})\,.$$

(b) Man zeige mit Hilfe des LAPLACEschen Entwicklungssatzes, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 0 & 1 \\ -y & x & -1 & 0 \\ 0 & 1 & x & -y \\ -1 & 0 & y & x \end{pmatrix} = (x^2 + y^2 + 1)^2\,.$$

Aufgabe 38.
Gegeben seien über $\mathbb{R}$ die Matrix A und der Vektor $\vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ benutze man

(a) die CRAMERsche Regel und

(b) den GAUSSschen Algorithmus.

(c) Man bestimme die inverse Matrix A^{-1} und verifiziere die Gleichung $A^{-1}\,\vec{b} = \vec{x}$ für die unter (a) und (b) gewonnene Lösung $\vec{x}$.

Aufgabe 39.
Man untersuche, ob die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ bilden.

Aufgabe 40.
In Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ bestimme man die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$x_1 - x_2 + x_3 + (1-t)x_4 = 1$
$t\,x_1 - (t+1)x_2 - t^2\,x_4 = t$
$x_1 + x_2 + (2t+1)x_3 + (1+t)x_4 = t^2\,.$

Aufgabe 41.
(a) Man bestimme alle 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$, die zu sich selbst invers sind.

(b) Sei $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$, und sei A^2 die Nullmatrix. Man zeige, dass für jedes $\lambda \in K$ gilt:

$$\det(\lambda E_2 - A) = \lambda^2 .$$

Aufgabe 42.
(a) Seien (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) drei Eckpunkte eines Parallelogramms P in $\mathbb{R}^2$.
Man zeige: Der Flächeninhalt von P ist gleich dem Betrag der Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Man bestimme den Flächeninhalt F_i eines Parallelogramms P_i in $\mathbb{R}^2$, das die folgenden Eckpunkte besitzt:

$(-3, 2)$, $(1, 4)$, $(-2, -7)$ für P_1 , $(1, 1)$, $(2, -1)$, $(4, 6)$ für P_2 ,

$(2, 5)$, $(-1, 4)$, $(1, 2)$ für P_3 und $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 3)$ für P_4 .

Aufgabe 43.
(a) Man berechne die Determinante der Matrix

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

und bestimme die inverse Matrix T^{-1}.

(b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$T = \frac{1}{1 + x(x+1)} \begin{pmatrix} -x & x(1+x) & 1+x \\ 1+x & -x & x(1+x) \\ x(1+x) & 1+x & -x \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

orthogonal ist, d.h. für die ${}^tTT = E_n$ gilt..

8 Eigenwertprobleme

Lernziel.
Fertigkeiten: Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren
Kenntnisse: Kriterien für die Diagonalisierbarkeit von $n \times n$-Matrizen.

Bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen sind Vektoren $\vec{x} \in K^n$ gesucht, welche die Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$ mit vorgegebenen $A \in \mathrm{M}_{m \times n}(K)$ und $\vec{b} \in K^m$ erfüllen. Die nun zu behandelnden *Eigenwertprobleme* kann man ebenfalls in der Form einer Matrizengleichung schreiben, und zwar als

$$\boxed{A\vec{x} = \lambda\vec{x} \text{ mit vorgegebener Matrix } A \in \mathrm{M}_{n \times n}(K)}$$

Hierbei sind Skalare $\lambda \in K$ und Vektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$ aus K^n gesucht, die diese Gleichung erfüllen. Eine Lösung braucht es nicht zu geben, und wir interessieren uns wiederum für Lösbarkeitskriterien und im Fall der Lösbarkeit für Lösungsmethoden.
Eigenwertprobleme treten im Zusammenhang mit der Diagonalisierbarkeit von $n \times n$-Matrizen auf, wie wir unten präzisieren werden. Auf Eigenwertprobleme stößt man häufig in der Mathematik wie z.B. in Analysis bei der Lösung von Differenzialgleichungen. In den Vorlesungen der Theoretischen Physik sind die Standardprobleme, bei denen Eingenwertprobleme eine zentrale Rolle spielen, **a)** in der Mechanik: Kreisel (Hauptachsentransformation des Trägheitstensors) sowie Schwingungsverhalten komplexer Systeme (Normalschwingungen) und **b)** in der Quantenmechanik: Bestimmung der möglichen Messwerte von Observablen (z.B. bei Spinsystemen, wo die Observablen durch hermitesche Matrizen dargestellt werden).
Auf die Begriffe "Hauptachsentransformation" und "hermitesche Matrizen" werden wir im nächsten Kapitel noch eingehen.

8.1 Ähnliche Matrizen und Diagonalisierbarkeit

Definition.

1. Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_{n \times n}(K)$ heißen *ähnlich*, (in Zeichen $A \sim B$), falls es eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ so gibt, dass gilt:

$$\boxed{B = T^{-1}AT}$$

2. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{n \times n}(K)$ heißt *diagonalisierbar*, falls A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

3. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ein Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ heißt *diagonalisierbar*, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt so, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

Beispiel.
Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist diagonalisierbar, denn es ist $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix für $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Die zu A gehörende Standardabbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \vec{x} \longmapsto A\vec{x}$, ist diagonalisierbar, denn es ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ für die Basis } \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \text{ von } \mathbb{R}^2.$$

8.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition.
Sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V. Ein Element $\lambda \in K$ heißt *Eigenwert von f*, falls es einen Vektor $v \neq \vec{0}$ in V gibt mit

$$\boxed{f(v) = \lambda v}$$

Jeder solche Vektor $v \neq \vec{0}$ heißt dann *Eigenvektor zum Eigenwert λ*.

Beispiel.
Wir betrachten den Körper $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{1, i\}$. Die *komplexe Konjugation* $\sigma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, definiert durch $\sigma(1) = 1$ und $\sigma(i) = -i$. Der Basisvektor 1 ist dann ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, und der Basisvektor i ist ein Eigenvektor zum Eigenwert -1. Es ist $\sigma(1) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot i$ und $\sigma(i) = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot i$. Hieraus folgt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, und also ist σ diagonalisierbar.

8.3 Kriterium für Diagonalisierbarkeit

Satz.
Sei V endlich dimensional. Dann ist ein Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ genau dann diagonalisierbar, wenn V eine Basis $\mathcal{B}$ besitzt, die nur aus Eigenvektoren von f besteht.
Die zugehörigen Eigenwerte stehen dann auf der Diagonalen von $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

Beweis. Für eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V sind äquivalent:

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

$\underset{5.4}{\iff} f(v_j) = \lambda_j v_j \ \forall j = 1, \dots, n$
$\iff v_j$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_j \ \forall j = 1, \dots, n$ □

8.4 Wann sind Eigenvektoren linear unabhängig?

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig:

Satz.
Sei V ein K-Vektorraum, und sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Ist v_j Eigenvektor von f zum Eigenwert λ_j für $j = 1, \dots, n$ und gilt $\lambda_i \neq \lambda_j$ für alle $i \neq j$, so sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.
Im Fall $n = \dim_K V$ besitzt f also höchstens n verschiedene Eigenwerte; und falls f genau n verschiedene Eigenwerte besitzt, ist f diagonalisierbar.

Beweis. Induktion nach n:

$n = 1$ Ist trivial, da $v_1 \neq \vec{0}$ nach Definition 8.2

$n > 1$ Die Behauptung sei richtig für $k < n$. Sei

$$(*) \qquad \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_{k+1} v_{k+1} = \vec{0} \text{ mit } \mu_1, \dots, \mu_{k+1} \in K$$

Es folgt

$$(1) \qquad \begin{aligned} \vec{0} = f(\vec{0}) &= \mu_1 f(v_1) + \cdots + \mu_{k+1} f(v_{k+1}) \\ &\underset{\text{Vor.}}{=} \mu_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \mu_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} \end{aligned}$$

Da außerdem

$$(2) \qquad \vec{0} \underset{(*)}{=} \lambda_{k+1}(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_{k+1} v_{k+1})$$

gilt, ergibt (1) − (2)

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \mu_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1 + \cdots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k \\ &\quad + \mu_{k+1}\underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})}_{0}v_{k+1} \\ \underset{\text{Indvor.}}{\Longrightarrow} \quad & \mu_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \cdots = \mu_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0 \\ \underset{\lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j}{\Longrightarrow} \quad & \mu_1 = \cdots = \mu_k = 0 \\ \underset{(*)}{\Longrightarrow} \quad & \mu_{k+1} = 0, \text{ da } v_{k+1} \neq \vec{0}\end{aligned}$$

Ist $\dim_K V = n$ und hat f genau n verschiedene Eigenwerte, so besitzt V eine Basis, die aus Eigenvektoren besteht, und f ist nach 8.3 diagonalisierbar. □

8.5 Einschub über Polynome

Sei $V := \mathrm{Abb}(K, K)$ der K-Vektorraum aller Abbildungen $f : K \longrightarrow K$. Dann sind Addition $f + g$ und Skalarmultiplikation λf für $f, g \in V$ und $\lambda \in K$ nach 2.2 gegeben durch

$$(f + g)(a) := f(a) + g(a) \quad \forall a \in K$$
$$(\lambda f)(a) := \lambda f(a) \quad \forall a \in K$$

Wir betrachten nun die Menge $M = \{1, t, t^2, \ldots\} \subset V$ mit

$$t^n : K \longrightarrow K \quad a \longmapsto a^n$$

für $n \in \mathbb{N}$ und

$$1 = t^0 : K \longrightarrow K \quad a \longmapsto 1$$

Satz.
Besitzt K unendlich viele Elemente, so ist $M = \{1, t, t^2, \ldots\}$ linear unabhängig in V.

Beweisskizze. Nach 3.1 genügt es zu zeigen, dass die Abbildungen

$$1, t, t^2, \ldots, t^n$$

für jedes $n > 0$ linear unabhängig sind. Für $n = 0$ ist dies sicher richtig. Wir nehmen an, dass es eine Linearkombination $f := \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n$ mit $n > 0$ und $\lambda_n \neq 0$ gäbe, die $f(a) = 0$ für alle $a \in K$ erfüllt. Um diese

Annahme zum Widerspruch zu führen, wählen wir n paarweise verschiedene Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ und zeigen, dass $f(a) = (a - b_1) \cdots (a - b_n) \cdot \lambda_n$ für alle $a \in K \setminus \{b_1, \ldots, b_n\}$ gilt. Besitzt K unendlich viele Elemente, so folgt der Widerspruch $\lambda_n = 0$.
Da $f(b_1) = 0 = f(a)$ gilt, lässt sich $f(a)$ schreiben als $f(a) = (a - b_1)g(a)$, wobei $g(a) = 0$ für alle $a \in K \setminus \{b_1\}$ gilt. (Setze $g(a) = (\lambda_1 + \lambda_2 b_1 + \cdots + \lambda_n b_1^{n-1}) + \cdots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n b_1)a^{n-2} + \lambda_n a^{n-1}$. Für $n = 1$ ist zum Beispiel $(a - b_1)g(a) = (a - b_1)\lambda_1 = a\lambda_1 - b_1\,\lambda_1 = f(a)$, da $\lambda_0 = -b_1\lambda_1$ wegen $0 = f(b_1) = \lambda_0 + \lambda_1 b_1$ gilt.)
Analog ist $g(a) = (a - b_2)g'(a)$, wobei $g'(a) = 0$ für alle $a \in K \setminus \{b_1, b_2\}$ gilt. (Dabei hat $g'(a)$ die Form $g'(a) = \mu_0 + \cdots + \mu_{n-3}\, a^{n-3} + \lambda_n a^{n-2}$.) So fortfahrend erhält man $f(a) = (a - b_1) \cdot \cdots \cdot (a - b_n) \cdot \lambda_n$. $\square$

Bemerkung.
Besitzt K nur endlich viele Elemente, so braucht die Menge M nicht mehr linear unabhängig zu sein. Ist zum Beispiel $K = \{0, 1\}$ der in 1.4 definierte Körper mit zwei Elementen, so ist $t + t^2$ die Nullabbildung, und also sind t, t^2 linear abhängig.

Besitzt K unendlich viele Elemente, so nennen wir $f(t) := \lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n$ mit $\lambda_n \neq 0$ ein *Polynom vom Grad* n und können t auch als eine *Unbestimmte* auffassen, in die man beliebig Elemente a aus K einsetzen kann. Wir benutzen dann auch den Buchstaben x statt t. Allgemein wird der *Polynomring* in der Algebra-Vorlesung eingeführt.
Ist $K = \mathbb{R}$, so erhalten wir für $f(t) = t^2$ und $g(t) = -\frac{1}{2}t^2$ das folgende Bild.

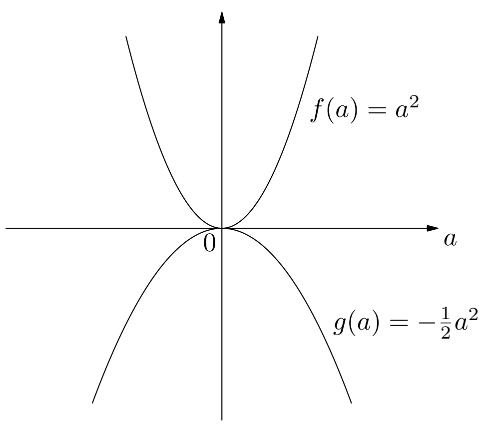


Abbildung 15: Zwei Parabeln

8.6 Charakteristisches Polynom

Sei $h : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen K-Vektorraumes V. Dann ist die Determinante $\det h$ definiert durch

$$\det h := \det \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(h)$$

mit irgendeiner Basis $\mathcal{B}$ von V. (Die Definition ist davon unabhängig, welche Basis wir wählen, vgl. 7.12.)

Bemerkung.
Sei $g = f - \lambda\,\mathrm{id}$ mit $\lambda \in K$, wobei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus von V ist. Dann folgt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda E_n$ nach Satz 5.4 und Beispiel 5.4.3 und also

$$\boxed{\det g = \det\big(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - \lambda E_n\big)}$$

Ersetzen wir hierin λ durch eine Unbestimmte x über K, so erhalten wir das *charakteristische Polynom von* f. Es ist definiert als

$$\boxed{\chi_f(x) := \det\big(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - xE_n\big)}$$

Allgemein ist das *charakteristische Polynom* einer Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ definiert als

$$\boxed{\chi_A(x) := \det(A - xE_n)}$$

Die Determinante berechnen wir so, wie wir es kennen, wenn statt der Unbestimmten x ein $\lambda \in K$ in dem Ausdruck $\det(A - xE_n)$ steht. Es ergibt sich: $\det(A - xE_n) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$. Setzen wir $x = 0$ ein, so sehen wir, dass $\det A = a_0$ gilt.

Beispiele.

1. $A = (n \times n)$-Nullmatrix $\Longrightarrow \chi_A(x) = \det(-xE_n) = (-1)^n x^n$
2. $A = E_n \Longrightarrow \chi_A(x) = (1-x)^n = (-1)^n(x-1)^n$
3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K) \Longrightarrow$

   $$\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix} = x^2 - (\underbrace{a+d}_{\text{Spur } A})x + \underbrace{ad-bc}_{\det A}$$

   Allgemein bezeichnet man als *Spur* einer $n \times n$-Matrix die Summe ihrer Diagonalelemente.

Um Eigenwerte ermitteln, braucht man nur die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_f(x)$ zu bestimmen, wie aus dem folgenden Satz, "(iii) $\Longrightarrow$ (i)", hervorgeht.

Satz.
Sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen K-Vektorraumes V. Dann sind für $\lambda \in K$ äquivalent:

i) λ *ist Eigenwert von* f

ii) $V_\lambda := \operatorname{kern}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{\vec{0}\}$

iii) $\chi_f(\lambda) = 0$

Beweis. Sei $g = f - \lambda\,\mathrm{id}_V$, also $g(v) = f(v) - \lambda v \ \forall v \in V$. Dann gilt:
λ Eigenwert von $f \Longleftrightarrow \exists\, v \in V \setminus \{\vec{0}\}$ mit $g(v) = 0$ (vgl. Definition 8.2)
$\Longleftrightarrow V_\lambda = \operatorname{kern}(g) \neq \{\vec{0}\}$
$\Longleftrightarrow g$ ist kein Isomorphismus (vgl. Satz 4.4, 4.8)
$\Longleftrightarrow \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g)$ ist nicht invertierbar (vgl. Satz 5.7)
$\Longleftrightarrow\ 0 \underset{7.6}{=} \det \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) \underset{8.6}{=} \det\big(\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda E_n\big) = \chi_f(\lambda)$ $\square$

8.7 Eigenräume

Ist $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus und λ ein Eigenwert von f, so heißt der Teilraum

$$\boxed{V_\lambda := \operatorname{kern}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)}$$

der *Eigenraum* von f zum Eigenwert λ. Es ist also

$$\boxed{V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}}$$

und $V_\lambda \setminus \{\vec{0}\}$ ist die Menge aller Eigenvektoren von f zum Eigenwert λ.

Bemerkung.
Ist $\dim_K V = n$, und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f, so ist die Summe $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}$ direkt (wie aus 8.4 folgt), und es gilt

$$\dim_K V_{\lambda_1} + \cdots + \dim_K V_{\lambda_k} \leqslant n$$

(wie mit Induktion aus 3.12, dem Dimensionssatz 3.13 und der Definition der (inneren) direkten Summe 2.7 folgt).

Lemma.
Sei $\dim_K V = n$ *und* $f : V \longrightarrow V$ *ein Endomorphismus. Ist* λ *eine* m*-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms* $\chi_f(x)$*, so gilt* $\dim_K V_\lambda \leqslant m$ *für den Eigenraum* $V_\lambda = \operatorname{kern}(f - \lambda \operatorname{id}_V)$

Beweis. Sei $(v_1, \dots, v_\ell)$ eine Basis von V_λ. Ergänze diese zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V. Dann gilt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \qquad \text{mit } A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{\ell \times \ell}(K)$$

und also folgt $\chi_f(x) \overset{8.6}{=} \det\big(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) - xE_n\big) \overset{7.9}{=} (\lambda - x)^\ell \, p(x)$ mit passendem Polynom p. Es folgt $\ell \leqslant m$ □

8.8 Hauptsatz über Diagonalisierbarkeit

In 5.10 haben wir gesehen, dass es zu einem Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ stets Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ in V so gibt, dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{mit } r = \dim_K \operatorname{bild} f$$

gilt und also die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist. Viel schwieriger und nicht immer lösbar ist das Problem, eine Basis $\mathcal{B}$ so zu finden, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist, wie der folgende Hauptsatz zeigt.

Satz.
Sei $\dim_K V = n$ *und* $f : V \longrightarrow V$ *ein Endomorphismus. Seien* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *die verschiedenen Eigenwerte von* f *und* $V_{\lambda_i} := \operatorname{kern}(f - \lambda_i \operatorname{id})$ *die zugehörigen Eigenräume für* $i = 1, \dots, k$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f *ist diagonalisierbar*
2. $\chi_f(x) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \cdots (\lambda_k - x)^{n_k}$ ***und*** $\dim_K V_{\lambda_i} = n_i$ *für* $i = 1, \dots, k$
3. $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$

Beweis. Es ist $k \leqslant n$ nach 8.7.

1. $\Longrightarrow$ **2.** Nach 8.3 besitzt V eine Basis $\mathcal{B}$, die aus Eigenvektoren besteht. Wir ordnen diese Basis entsprechend den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, also $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $f(v_1) = \lambda_1 v_1, \dots, f(v_{n_1}) = \lambda_1 v_{n_1}, f(v_{n_1+1}) = \lambda_2 v_{n_1+1}, \dots, f(v_{n_2}) = \lambda_2 v_{n_2}$, usw. Es folgt

$$(*) \qquad n_i \leqslant \dim_K V_{\lambda_i} \quad \text{für } i = 1, \dots, k$$

und

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} n_1 \left\{ \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{matrix} \right. & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \left. \begin{matrix} \lambda_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{matrix} \right\} n_k \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \chi_f(x) = \det\big(\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - xE_n\big) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \cdots (\lambda_k - x)^{n_k}$

$\Longrightarrow \dim_K V_{\lambda_i} \leqslant n_i$ nach 8.7

Mit $(*)$ folgt $\dim_K V_{\lambda_i} = n_i$ für $i = 1, \dots, k$.

2. $\Longrightarrow$ **3.** Da $\chi_f(x)$ den Grad n hat (vgl. 8.6) und da nach Voraussetzung $\chi_f(x) = (\lambda_1 - x)^{n_1} \cdots (\lambda_k - x)^{n_k}$ gilt, folgt

$$\boxed{n = n_1 + \cdots + n_k}$$

Nach 8.7 ist die Summe $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}$ direkt

$$\underset{2.7,\ 3.13}{\Longrightarrow} \quad \begin{aligned} \dim_K(V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}) &= \dim_K V_{\lambda_1} + \cdots + \dim_K V_{\lambda_k} \\ &\underset{2.}{=} n_1 + \cdots + n_k \\ &= n \end{aligned}$$

und also $\dim_K(V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}) = \dim_K V$. Da $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}$ ein Untervektorraum von V ist, folgt $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k} = V$ nach 3.12.

3. $\Longrightarrow$ **1.** Wir wählen von jedem V_{λ_i} eine Basis und erhalten dadurch eine Basis von Eigenvektoren von $V \Longrightarrow$ 1. nach 8.3.

$\square$

Beispiel.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(e_1) = e_1 \quad \text{und} \quad f(e_2) = e_1 + e_2$$

und sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ die Standardbasis.

$$\Longrightarrow \; A := \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \; \chi_f(x) = \det(A - xE_2) = \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$$

$\underset{8.6}{\Longrightarrow}$ 1 ist zweifacher Eigenwert.

$\underset{8.8}{\Longrightarrow}$ f ist nicht diagonalisierbar, da $\dim_{\mathbb{R}} V_1 \neq 2$ gilt:

Es ist $e_1 \in \mathrm{kern}(f - \mathrm{id})$, da $f(e_1) - e_1 = \vec{0}$. Ist $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \in \mathrm{kern}(f - \mathrm{id})$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so folgt $\vec{0} = \vec{0} + \lambda_2 (f - \mathrm{id})(e_2) = \lambda_2 e_1 + \lambda_2 e_2 - \lambda_2 e_2 = \lambda_2 e_1$ und also $\lambda_2 = 0$. Es folgt $V_1 := \mathrm{kern}(f - \mathrm{id}) = \mathbb{R}e_1 := \{\lambda e_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, also $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = 1$.

8.9 Rechenschritte zur Diagonalisierung

Man untersuche, ob

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (a, b, c) \longmapsto (-5a + 7c, 6a + 2b - 6c, -4a + 6c)$$

diagonalisierbar ist und konstruiere gegebenenfalls eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ so, dass $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ eine Diagonalmatrix ist.

1. Schritt Bestimme die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}'$ von $\mathbb{R}^3$. Es ist

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0) = (-5, 6, -4) \\ f(0,1,0) = (0, 2, 0) \\ f(0,0,1) = (7, -6, 6) \end{array}\right\} \Longrightarrow A := \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Schritt Prüfe, ob das charakteristische Polynom $\det(A - xE_3)$ in Linearfaktoren zerfällt. (Falls nein $\underset{8.8}{\Longrightarrow}$ f nicht diagonalisierbar.) Es ist

$$\begin{aligned}\det(A - xE_3) &= \det\begin{pmatrix}-5-x & 0 & 7\\ 6 & 2-x & -6\\ -4 & 0 & 6-x\end{pmatrix}\\ &= (2-x)((-5-x)(6-x)+28)\\ &= (2-x)(x^2-x-2)\\ &= (2-x)^2(-1-x)\end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom zerfällt (über $\mathbb{R}$) in Linearfaktoren, und seine Nullstellen sind die *Eigenwerte* von f. Es ist -1 ein einfacher Eigenwert und 2 ein zweifacher Eigenwert von f.

3. Schritt Bestimme zu jedem Eigenwert λ die Dimension des *Eigenraums* $V_\lambda := \operatorname{kern}(f - \lambda\,\mathrm{id})$. Falls $\dim_{\mathbb{R}} V_\lambda =$ Vielfachheit von λ für jeden Eigenwert λ gilt $\underset{8.8}{\Longrightarrow}$ f ist diagonalisierbar. (Andernfalls ist f nicht diagonalisierbar.)

$\lambda = -1$: Bestimme eine Basis von $V_{-1} = \operatorname{kern}(f + \mathrm{id})$. Es ist

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5+1 & 0 & 7\\ 6 & 2+1 & -6\\ -4 & 0 & 6+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4a+7c\\ 6a+3b-6c\\ -4a+7c\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow -4a + 7c = 0, \quad 6a + 3b - 6c = 0$

$\Longrightarrow a = 7,\ b = -6,\ c = 4$ ist eine Lösung $\neq \vec{0}$

$\underset{8.7}{\Longrightarrow} v_1 = (7, -6, 4)$ bildet eine Basis von V_{-1}, also $\dim_{\mathbb{R}} V_{-1} = 1$

$\lambda = 2$: Bestimme eine Basis von $V_2 = \operatorname{kern}(f - 2\,\mathrm{id})$. Es ist

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5-2 & 0 & 7\\ 6 & 2-2 & -6\\ -4 & 0 & 6-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7a+7c\\ 6a-6c\\ -4a+4c\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow a = c,\ b$ beliebig

$\Longrightarrow v_2 = (0,1,0)$ und $v_3 = (1,0,1)$ bilden eine Basis von V_2

$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_2 = 2$

Ergebnis f ist diagonalisierbar, und

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (7,-6,4), v_2 = (0,1,0), v_3 = (1,0,1)\}$$

ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von f besteht. Es ist

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (-7,6,-4) = -v_1 \\ f(v_2) &= (0,2,0) = 2v_2 \\ f(v_3) &= (2,0,2) = 2v_3 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8.10 Trigonalisierbarkeit

Ist V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, so heißt ein Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ *trigonalisierbar*, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt so, dass $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix lässt sich besonders leicht ermitteln, wie wir in 7.5 festgestellt haben.

Satz.
Sei $\dim_K V = n$ und $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann sind äquivalent

i.) *f ist trigonalisierbar*

ii.) $\chi_f(x) = (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x)$ *mit* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

Insbesondere ist im Fall $K = \mathbb{C}$ jeder Endomorphismus von V trigonalisierbar

Beweis. **i.) $\Longrightarrow$ ii.)** Ist f triagonalisierbar, dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V so, dass

$$\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \chi_f(x) &\underset{8.6}{=} \det\bigl(\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) - xE_n\bigr) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n - x \end{pmatrix} \\ &\underset{7.5}{=} (\lambda_1 - x)\cdots(\lambda_n - x) \end{aligned}$$

ii.) $\Longrightarrow$ i.) Wir zeigen durch Induktion nach n, dass es eine „f- invariante Fahne“ gibt, das ist eine Kette von Teilräumen

$$\{\vec{0}\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

mit $\dim_K V_j = j$ und $f(V_j) \subseteq V_j \; \forall j = 1, \ldots, n$. Hieraus folgt (i), denn dann gibt es nach dem Basisergänzungssatz 3.7 eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V so, dass $(v_1, \ldots, v_j)$ eine Basis von V_j ist für jedes $j = 1, \ldots, n$, und nach 5.4 ist $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ eine obere Dreiecksmatrix.

$n = 1$ klar

$n > 1$ Nach Voraussetzung ist $\chi_f(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$. Dann ist λ_1 eine Nullstelle und also ein Eigenwert von f nach 8.6. Sei w_1 Eigenvektor zu λ_1, also $w_1 \neq \vec{0}$ und $f(w_1) = \lambda_1 w_1$. Wir ergänzen w_1 zu einer Basis $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$ von V.

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

mit $A := (a_{ij})_{i,j=2,\ldots,n}$.
Sei U der von $(w_2, \ldots, w_n)$ erzeugte Teilraum von V. Wir definieren zwei K-lineare Abbildungen:

$$h : U \longrightarrow V_1 := K w_1, \quad w_j \longmapsto a_{1j} w_1 \; \forall j = 2, \ldots, n$$

$$g : U \longrightarrow U, \quad w_j \longmapsto a_{2j} w_2 + \cdots + a_{nj} w_n \; \forall j = 2, \ldots, n$$

Es folgt $f(u) = h(u) + g(u) \; \forall u \in U$ nach 4.4, und A ist die Matrix von g bezüglich der Basis $(w_2, \ldots, w_n)$ von U. Es ist

$$\chi_f(x) = \det \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A - xE_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = (\lambda_1 - x)\chi_g(x)$$

also $\chi_g(x) = (\lambda_2 - x) \cdots (\lambda_n - x)$ nach Voraussetzung (ii). Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf U und g an und erhalten eine g-invariante Fahne

$$\{\vec{0}\} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_{n-1} = U$$

Dann ergibt $V_j := V_1 + U_{j-1}$ die gewünschte f-invariante Fahne, denn für $\lambda \in K$ und $u \in U_{j-1}$ ist

$$\begin{aligned} f(\lambda w_1 + u) &= \lambda\lambda_1 w_1 + f(u) \\ &= \underbrace{\lambda\lambda_1 w_1 + h(u)}_{\in V_1} + \underbrace{g(u)}_{\in U_{j-1}} \in V_j \end{aligned}$$

Nach dem „Fundamentalsatz der Algebra“ (der in der Funktionentheorie-Vorlesung gezeigt wird), zerfällt jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren. Hieraus folgt die letzte Behauptung im Satz. □

Lernerfolgstest.
- Konstruieren Sie eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ so, dass es keine Lösung des Eigenwertproblems $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ gibt (d.h. dass es nicht $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} \neq \vec{0}$ aus $\mathbb{R}^2$ so gibt, dass diese Gleichung mit der von Ihnen konstruierten Matrix erfüllt ist.)
- Ist die in 8.1 definierte Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation?
- Wie bestimmt man Eigenwerte?
- Wie lautet der Hauptsatz über Diagonalisierbarkeit?
- Aufgaben 44-48, im Aufgabenpool Abschnitt 8.

8.11 Übungsaufgaben 44 – 48

Aufgabe 44.
Sei K ein Körper, und sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung eines K-Vektorraums V in einen K-Vektorraum W. Für Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ aus V sei $w_1 = f(v_1), \ldots, w_n = f(v_n)$. Man beweise die folgende Aussage und prüfe, ob auch die umgekehrte Richtung gilt:
$w_1, \ldots, w_n$ *linear unabhängig in* $W \implies v_1, \ldots, v_n$ *linear unabhängig in* V.

Aufgabe 45.
Man zeige, dass die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (a, b, c) \longmapsto (3a + 2b - c\,,\, 2a + 6b - 2c\,,\, 2c)\,,$$

diagonalisierbar ist, und konstruiere eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ derart, dass die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 46.
Sei $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, die zu $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ gehörende Standardabbildung. Man bestimme das charakteristische Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren von f, wenn

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 47.
Man bestimme das charakteristische Polynom, Eigenwerte und Eigenvektoren von f, wenn

a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (a, b, c) \longmapsto (2a + b, b - c, 2b + 4c)$,

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (a, b, c) \longmapsto (a + 2b, a + 2b, c)$,

c) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (a, b, c) \longmapsto (a, -c, b)$.

Man entscheide jeweils, ob f diagonalisierbar ist.

Aufgabe 48.
Seien $f, g : K^n \longrightarrow K^n$ zwei K-lineare Abbildungen. Wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von K^n gibt, deren Vektoren sowohl Eigenvektoren von f wie auch Eigenvektoren von g sind, so sagt man, dass f und g *simultan diagonalisierbar* seien. Man zeige:

(a) Wenn f und g simultan diagonalisierbar sind, so gilt $f \circ g = g \circ f$.

(b) Wenn f genau n verschiedene Eigenwerte besitzt und wenn $f \circ g = g \circ f$ gilt, dann sind f und g simultan diagonalisierbar.

Bemerkung. Die Umkehrung von 61 (a) gilt tatsächlich nur unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen, wie schon das Beispiel $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ und $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (a, b) \longmapsto (a + b, b)$, zeigt.

Metrische Vektorräume

Zusätzlich zu Addition und Skalarmultiplikation versehen wir nun einen K-Vektorraum auch noch mit einer geometrischen Struktur, die es erlaubt die Länge eines Vektors und den Winkel zwischen zwei Vektoren zu definieren. Wir werden uns hier hauptsächlich auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ als Grundkörper beschränken.

9 Euklidische und unitäre Vektorräume

Lernziel.
Fertigkeiten: Konstruktion von Orthonormalbasen
Kenntnisse: Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)$ einer Metrik s auf V, Basiswechsel, Skalarprodukt, Längen- und Winkelbegriff, Spektralsatz, Diagonalisierbarkeit symmetrischer und hermitescher Matrizen

9.1 Involution auf K

Eine *Involution* auf einem Körper K ist eine Abbildung

$$\bar{\ }: K \longrightarrow K\,, \quad \alpha \longmapsto \overline{\alpha}\,,$$

so, dass für alle $\alpha, \beta \in K$ gilt

1. $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$ (“involutorisch”)
2. $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$ (“additiv”)
3. $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ (“multiplikativ”)

Beispiele

1. Die Identität $\mathrm{id} : K \longrightarrow K$, $\alpha \longmapsto \alpha$, ist eine Involution, bei der $\overline{\alpha} = \alpha$ für alle $\alpha \in K$ gilt.

2. Sei $K = \mathbb{C} = \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ mit $i^2 = -1$. Dann ist die *komplexe Konjugation* $^-\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ x + yi \longmapsto x - yi$, eine Involution.

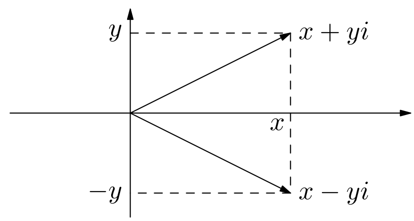


Abbildung 16: Komplexe Konjugation

9.2 Metrik auf V

Sei K mit einer Involution $^-$ versehen. Eine Abbildung

$$s : V \times V \longrightarrow K, \quad (v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$$

heißt *Metrik auf* V, falls für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda \in K$ gilt

1. $\left.\begin{aligned} \langle u + v, w\rangle &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \\ \langle \lambda v, w\rangle &= \lambda\langle v, w\rangle \end{aligned}\right\}$ *linear im ersten Argument*

2. $\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle$ *Symmetrieeigenschaft*

Behauptung.
Die beiden Eigenschaften 1 und 2 implizieren, dass für alle $u, v, w \in V$ und $\mu \in K$ gilt

1.′ $\left.\begin{aligned} \langle u, v + w\rangle &= \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \\ \langle v, \mu w\rangle &= \overline{\mu}\langle v, w\rangle \end{aligned}\right\}$ semilinear im zweiten Argument

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \langle u, v + w\rangle &\underset{2.}{=} \overline{\langle v + w, u\rangle} \underset{1.}{=} \overline{\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle} \\ &= \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle} \qquad \text{da } ^- \text{ additiv} \\ &\underset{2.}{=} \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \end{aligned}$$

$$\text{und} \qquad \langle v, \mu w\rangle \underset{2.}{=} \overline{\langle \mu w, v\rangle} \underset{1.}{=} \overline{\mu\langle w, v\rangle} = \overline{\mu}\,\overline{\langle w, v\rangle} \underset{2.}{=} \overline{\mu}\langle v, w\rangle$$

□

Definition.
Eine Metrik s auf einem K-Vektorraum heißt *symmetrische Bilinearform*, falls $^-$ die Identität ist, d.h. $\overline{\alpha} = \alpha$ für alle $\alpha \in K$ gilt. Andernfalls heißt s eine *hermitesche Form.*

Bemerkung.
Sei $1 + 1 \neq 0$ in K. Dann gehört zu jeder symmetrischen Bilinearfom $s : V \times V \longrightarrow K,\ (v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$, eine *quadratische Form* q, das ist die Abbildung

$$q : V \longrightarrow K, v \longmapsto q(v) := s(v, v)\,.$$

Sie hat die Eigenschaften:

(i) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ für alle $\lambda \in K$ und $v \in V$

(ii) $s(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$ für alle $v, w \in V$ „Polarisierung".

Mit Hilfe einer Metrik $s : V \times V \longrightarrow K, \quad (v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$ werden wir später den „Winkel" zwischen Vektoren definieren. Die Benutzung der spitzen Klammern deutet dies schon an.

9.3 Die zu einer Metrik s gehörende Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)$

Sei K mit einer Involution $^-$ versehen, und sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Dann ordnen wir einer Metrik

$$s : V \times V \longrightarrow K, \quad (v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$$

folgende Matrix zu

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) := \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}$$

also $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ mit $a_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$. Nach 9.2.2 gilt

$$(2_M) \qquad \boxed{\overline{a_{ij}} = a_{ji}\ \forall i, j = 1, \ldots, n}$$

Umgekehrt gilt der

Satz.
*Zu **jeder** Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ mit der Eigenschaft (2_M) gibt es genau eine Metrik s mit $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = A$.*

Beweis. Für

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ und } w = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in K$ setzen wir

$$\boxed{s(v,w) := \langle v, w\rangle := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{\mu_1} \\ \vdots \\ \overline{\mu_n} \end{pmatrix}}$$

Nach Definition 5.2 der Matrizenmultiplikation folgt $\langle v_i, v_j\rangle = a_{ij}$, da

$$\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{e_i} \cdot A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_j} = a_{ij}$$

gilt. Also ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = A$. Offenbar ist s linear im ersten Argument. Und s ist durch $s(v_i, v_j) = a_{ij}$ eindeutig bestimmt, denn ist $s' : V \times V \longrightarrow K$ eine weitere Metrik mit $s'(v_i, v_j) = a_{ij}$, so gilt in Summenschreibweise $\sum_{j=1}^{n} b_j := b_1 + \cdots + b_n$ nach Definition der Matrizenmultiplikation 5.2

$$\begin{aligned} s(v,w) &= (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{\mu_1} \\ \vdots \\ \overline{\mu_n} \end{pmatrix} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, \overline{\mu_j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\, \overline{\mu_j} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \overline{\mu_j} \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\, \overline{\mu_j}\, a_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i\, \overline{\mu_j}\, s'(v_i, v_j) \\ &= s'(v,w) \quad \text{nach den Regeln 9.2.1 angewandt auf } s'\,. \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt $\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle$, vgl. 9.2. Da $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$ nach 2_M gilt, folgt $\overline{\langle v, w\rangle} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i}\, \overline{\overline{\mu_j}}\, \overline{a_{ij}} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\lambda_i}\, \mu_j\, a_{ji} = \langle w, v\rangle$. □

9.4 Basiswechsel

Satz. *Gegeben seien eine Involution* $^{-}: K \longrightarrow K$, $\alpha \longmapsto \overline{\alpha}$, *eine Metrik* $s : V \times V \longrightarrow K$, $(v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$, *sowie zwei Basen* $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ *und* $\mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_n')$ *von* V. *Setzen wir*

$$\boxed{T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})} \qquad \textit{so gilt} \qquad \boxed{\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) = {}^tT\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\,\overline{T}}$$

Dabei ist $\overline{T} = (\overline{t_{ij}})$ *für* $T = (t_{ij})$.

Beweis. Seien $v, w \in V$ und $T = (t_{ij})$. Es ist

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \\ &= \alpha_1 v_1' + \dots + \alpha_n v_n' \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} w &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n \\ &= \beta_1 v_1' + \dots + \beta_n v_n' \end{aligned}$$

mit $\lambda_i, \mu_i, \alpha_i, \beta_i \in K$. Nach 5.12, angewandt auf $f = \mathrm{id}$, gilt $k_{\mathcal{B}}(v) = T \cdot k_{\mathcal{B}'}(v)$ für alle $v \in V$ und also

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} \underset{5.12}{=} T \cdot \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} \underset{5.2}{=} \begin{pmatrix} t_{11}\beta_1 + \dots + t_{1n}\beta_n \\ \vdots \\ t_{n1}\beta_1 + \dots + t_{nn}\beta_n \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt

$$\begin{pmatrix}\overline{\mu_1}\\ \vdots\\ \overline{\mu_n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{t_{11}}\,\overline{\beta_1} + \dots + \overline{t_{1n}}\,\overline{\beta_n} \\ \vdots \\ \overline{t_{n1}}\,\overline{\beta_1} + \dots + \overline{t_{nn}}\,\overline{\beta_n} \end{pmatrix} = \overline{T}\begin{pmatrix}\overline{\beta_1}\\ \vdots\\ \overline{\beta_n}\end{pmatrix}$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} s(v, w) &\underset{9.3}{=} (\lambda_1, \dots, \lambda_n)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\begin{pmatrix}\overline{\mu_1}\\ \vdots\\ \overline{\mu_n}\end{pmatrix} = {}^t\!\left(T\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\,\overline{T}\begin{pmatrix}\overline{\beta_1}\\ \vdots\\ \overline{\beta_n}\end{pmatrix} \\ &\underset{5.3}{=} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\ {}^tT\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\,\overline{T}\begin{pmatrix}\overline{\beta_1}\\ \vdots\\ \overline{\beta_n}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Andererseits ist $s(v, w) \underset{9.3}{=} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s)\begin{pmatrix}\overline{\beta_1}\\ \vdots\\ \overline{\beta_n}\end{pmatrix}$. Da dies insbesondere für die Standardbasisvektoren gilt, folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel.
Sei $K = \mathbb{R}$ mit Involution id, $V = \mathbb{R}^2$ und s eine Metrik gegeben durch

$$\boxed{\langle v, w\rangle = x_1y_1 - x_2y_2 \text{ für } v = (x_1, x_2),\ w = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2}$$

Dann ist s eine symmetrische Bilinearform, und es ist

$$\langle v, v\rangle = x_1^2 - x_2^2$$

Hier können drei Fälle auftreten

$\langle v, v\rangle = 0$ Zum Beispiel für $v = e_1 + e_2 = (1, 1)$ oder $v = e_1 - e_2 = (1, -1)$, wobei $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$ ist, gilt $\langle v, v\rangle = 0$

$\langle v, v\rangle > 0$ Zum Beispiel für $v = 2e_1 + e_2 = (2, 1) \Longrightarrow \langle v, v\rangle = 3$

$\langle v, v\rangle < 0$ Zum Beispiel für $v = e_1 + 2e_2 = (1, 2) \Longrightarrow \langle v, v\rangle = -3$

Ist $r \in \mathbb{R}$ und $H_r := \{v \in V \mid \langle v, v\rangle = r\}$, dann beschreibt H_r eine Hyperbel $(r \neq 0)$ bzw. die beiden Winkelhalbierenden $(r = 0)$.

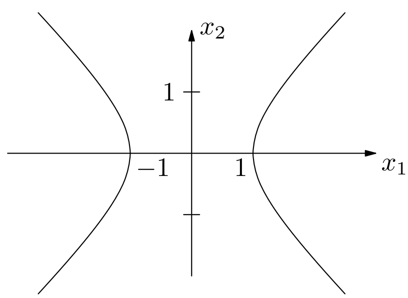


Abbildung 17: Hyperbel

Sei $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis von $V = \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ferner sei $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2\}$ mit $u_1 := \frac{1}{2}(e_1 + e_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $u_2 := (1, -1)$. Dann gilt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

und wie im obigen Satz bewiesen

$$\begin{aligned} {}^tT\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\,T &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s)\,. \end{aligned}$$

Man nennt $\mathbb{R}^2$, versehen mit dieser Metrik s, eine *hyperbolische Ebene*.

9.5 Skalarprodukt

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $^-$ die Identität, d.h. $\overline{\lambda} = \lambda$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, oder sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $^-$ die *komplexe Konjugation*, d.h. $\overline{\lambda} = x - yi$ für $\lambda = x + yi \in \mathbb{C}$. Ein *Skalarprodukt* auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist eine Abbildung

$$s : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$$

derart, dass für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

1. $\left.\begin{aligned} \langle u + v, w\rangle &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \\ \langle \lambda v, w\rangle &= \lambda\langle v, w\rangle \end{aligned}\right\}$ linear im ersten Argument

2. $\overline{\langle v, w\rangle} = \langle w, v\rangle$ Symmetrieeigenschaft

3. $\langle v, v\rangle > 0$ für $v \neq \vec{0}$ Eigenschaft "positiv definit".

Nach 2. ist $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$, auch wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist.
Ein *Skalarprodukt* ist also eine *positiv definite symmetrische Bilinearform* auf V, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und eine *positiv definite hermitesche Form* auf V falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (vgl. Definition 9.2). (Die Metrik s oben im Beispiel in 9.4 ist kein Skalarprodukt, da sie nicht positiv definit ist.)
Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist, heißt *euklidisch*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und *unitär*, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Hinweis.
In der Theoretischen Physik ist die Konvention genau umgekehrt: Skalarprodukte sind im zweiten Argument linear und im ersten Argument semilinear, zum Beispiel ist auf $V := \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig }\}$ durch

$$\boxed{\langle f, g\rangle := \int_0^1 \overline{f(\alpha)}g(\alpha)\, d\alpha \text{ für } f, g \in V}$$

ein Skalarprodukt nach Konvention der Physik und durch

$$\boxed{\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(\alpha)\overline{g(\alpha)}\, d\alpha \text{ für } f, g \in V}$$

ein Skalarprodukt nach Konvention der Mathematik gegeben.

Die Begriffe “Skalarprodukt” und “Skalarmultiplikation” dürfen nicht verwechselt werden!

9.6 Standardskalarprodukt

Für $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $w = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ aus $\mathbb{K}^n$ setzen wir

$$\langle v, w\rangle := \alpha_1\bar{\beta}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{\beta}_n$$

insbesondere

$$\langle v, w\rangle := \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Es ist

$$\langle v, w\rangle = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \vdots \\ \bar{\beta}_n \end{pmatrix}$$

und die zugehörige Matrix bezüglich der Standardbasis ist die Einheitsmatrix.

Beispiel.
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\langle v, v\rangle = (a, b)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a^2 + b^2 = c^2$$

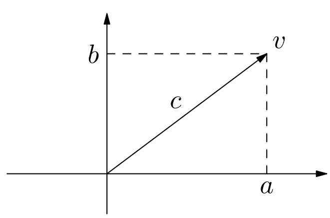


Abbildung 18: Länge des Vektors v

Wir nennen deshalb $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die *Länge* oder *Norm* von v. Es ist $\|v\|$ der *Abstand* zwischen (a, b) und $(0, 0)$.

9.7 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Sei V ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ wie in 9.5. In Anlehnung an das obige Beispiel definieren wir

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

und nennen $\|v\|$ die *Länge* oder *Norm* von v.

Satz.
Für $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten

i) $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle > 0$, *falls* $v \neq \vec{0}$

ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

iii) $|\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\| \cdot \|w\|$ Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

iv) $|\langle v, w\rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \iff v, w$ *sind linear abhängig*

v) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ Dreiecksungleichung

Beweis. **i)** folgt nach Definition der Norm und 9.5.3

ii) $\|\lambda v\|^2 \underset{\text{i)}}{=} \langle \lambda v, \lambda v\rangle \underset{9.2}{=} \lambda\bar{\lambda}\langle v, v\rangle \underset{1.1}{=} |\lambda|^2\langle v, v\rangle = |\lambda|^2\|v\|^2$

iii) Für $w = \vec{0}$ ist die Behauptung trivial. Sei $w \neq \vec{0}$. Setze

$$\boxed{\lambda := \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}}$$

Dabei ist $\langle w, w\rangle = \|w\|^2 > 0$ in $\mathbb{R}$. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle \text{ nach 9.5 3.} \\ &\underset{9.2}{=} \langle v, v\rangle - \bar{\lambda}\langle v, w\rangle - \lambda\langle w, v\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle w, w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle - \bar{\lambda}\langle v, w\rangle, \text{ da } \langle w, v\rangle \underset{2.}{=} \overline{\langle v, w\rangle} = \overline{\lambda\langle w, w\rangle} = \bar{\lambda}\langle w, w\rangle \\ &= \|v\|^2 - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\|w\|^2} \cdot \langle v, w\rangle \text{ nach i) und Definition von } \lambda \end{aligned}$$

Multiplikation der Ungleichung mit $\|w\|^2 > 0$ ergibt
$0 \leqslant \|v\|^2\|w\|^2 - \overline{\langle v, w\rangle}\langle v, w\rangle = \|v\|^2\|w\|^2 - |\langle v, w\rangle|^2$ nach 1.1 falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

iv) Für $w = \vec{0}$ ist die Behauptung trivial. Sei $w \neq \vec{0}$.

„$\Longrightarrow$“ Sei $|\langle v, w\rangle| = \|v\| \cdot \|w\|$. Analog wie in iii) berechnen wir

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle v - \lambda w, v - \lambda w\rangle &= \|v\|^2 - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}}{\|w\|^2} \cdot \langle v, w\rangle \\ &= \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w\rangle|^2}{\|w\|^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Insbesondere ist $0 = \langle v-\lambda w, v-\lambda w\rangle$ und damit folgt $v-\lambda w = \vec{0}$ nach 9.5.3.

„$\Longleftarrow$“ Ist $v = \mu w$ mit $\mu \in \mathbb{K}$, dann folgt

$$|\langle v, w\rangle| = |\langle \mu w, w\rangle| \underset{1.}{=} |\mu||\langle w, w\rangle| \underset{\text{i)}}{=} |\mu|\|w\| \cdot \|w\|$$

Andererseits gilt $\quad \|v\| = \|\mu w\| \underset{\text{ii)}}{=} |\mu|\|w\|$

Es folgt die Behauptung.

v) Mit der Bezeichnung $\Re(z)$ für den Realteil einer komplexen Zahl z aus 1.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \text{ nach i)} \\ &= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \text{ nach 9.2} \\ &\underset{\text{i)}}{=} \|v\|^2 + \langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} + \|w\|^2 \text{ nach 9.5} \\ &= \|v\|^2 + 2\Re(\langle v, w\rangle) + \|w\|^2, \text{ da } (x + yi) + (x - yi) = 2x \\ &\leqslant \|v\|^2 + 2|\langle v, w\rangle| + \|w\|^2, \text{ da } \Re(z) \leqslant |z| \\ &\underset{iii)}{\leqslant} \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

□

9.8 Winkel

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und V ein euklidischer Vektorraum. Dann ist der *Winkel* $\varphi = \sphericalangle(v, w)$ für $v, w \neq \vec{0}$ definiert durch

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \text{ und } 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi}$$

Da nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$-1 \leqslant \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \leqslant 1$$

gilt und

$$\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$$

bijektiv ist, ist φ dadurch wohldefiniert.
Es gilt also

$$\boxed{\langle v,w\rangle = \|v\|\cdot\|w\|\cos\varphi}$$

und $\langle v,w\rangle = 0$, falls $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also falls v und w *senkrecht aufeinander stehen*. In diesem Fall schreiben wir $v \perp w$. Zum Beispiel ist für das Standardskalarprodukt

$$(1,0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$$

also $(1,0)\perp(0,1)$.
Definieren wir allgemein in einem euklidischen oder unitären $\mathbb{K}$-Vektorraum V, dass $v,w \in V$ *orthogonal* sind oder *senkrecht aufeinander stehen*, wenn $\langle v,w\rangle = 0$ gilt (in Zeichen $v\perp w$), so erhalten wir aus 9.7 v) ein *Analogon zum Satz des Pythagoras*

$$\boxed{v\perp w \quad\Longrightarrow\quad \|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2}$$

Man kann sich von der Vorstellung leiten lassen, dass auch in einem beliebigen mit einer Metrik $\langle\ ,\ \rangle$ versehenen Vektorraum $\langle v,v\rangle$ die Länge von v festlegt und $\langle v,w\rangle$ den Winkel zwischen v und w definiert. Es gibt dann insbesondere Vektoren der Länge 0, und v und w stehen senkrecht aufeinander, wenn $\langle v,w\rangle = 0$.

9.9 Orthonormalbasen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum wie in 9.5. Ist V endlich dimensional, so besitzt V eine *Orthonormalbasis*, d.h. eine Basis $(u_1,\ldots,u_n)$ mit $\|u_j\| = 1$ für alle $j = 1,\ldots,n$ und $u_i \perp u_j$ für alle $i \neq j$.

Satz (Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren).
Wähle eine Basis $(v_1,\ldots,v_n)$ von V. Setze

$$\boxed{u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}}$$

Dann ist $\|u_1\| = 1$. *Setze*

$$\boxed{u_2' := v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 \text{ und } u_2 := \frac{u_2'}{\|u_2'\|}}$$

Setze

$$\boxed{u_3' := v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2 \text{ und } u_3 := \frac{u_3'}{\|u_3'\|}}$$

u.s.w.
Dann ist $(u_1, \ldots, u_n)$ *eine Orthonormalbasis von* V.

Beweis. durch Induktion nach $n = \dim_K V$

$n = 1$ klar

$n > 1$ Sei $k < n$ und U_k der von $v_1, \ldots, v_k$ erzeugte Teilraum von V. Nach Induktionsvoraussetzung hat U_k eine Orthonormalbasis $(u_1, \ldots, u_k)$. Setze

$$u_{k+1}' = v_{k+1} - \langle v_{k+1}, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_{k+1}, u_k\rangle u_k$$

dann ist $u_{k+1}' \neq \vec{0}$, da $v_{k+1} \notin U_k$. Setze $u_{k+1} = \frac{u_{k+1}'}{\|u_{k+1}'\|}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\langle u_{k+1}, u_j\rangle &= \frac{1}{\|u_{k+1}'\|}\langle v_{k+1} - \langle v_{k+1}, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_{k+1}, u_k\rangle u_k, u_j\rangle \\
&= \frac{1}{\|u_{k+1}'\|}(\langle v_{k+1}, u_j\rangle - \langle v_{k+1}, u_1\rangle\langle u_1, u_j\rangle - \cdots - \langle v_{k+1}, u_k\rangle\langle u_k, u_j\rangle) \\
&= \frac{1}{\|u_{k+1}'\|}(\langle v_{k+1}, u_j\rangle - \langle v_{k+1}, u_j\rangle\langle u_j, u_j\rangle) \\
&= 0 \quad \forall j = 1, \ldots, k
\end{aligned}$$

da s linear im ersten Argument ist, $u_1, \ldots, u_k$ paarweise orthogonal sind und $\langle u_j, u_j\rangle = 1$ ist. □

9.10 Selbstadjungierte Endomorphismen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und sei

$$\overline{\alpha} := \begin{cases} \alpha \text{ falls } \alpha \in \mathbb{R} \\ x - yi \text{ falls } \alpha = x + yi \in \mathbb{C} \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Sei V ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum (vgl. 9.5).

Definition.
Ein Endomorphismus $f : V \longrightarrow V$ heißt *selbstadjungiert* (bzgl. $\langle\ ,\ \rangle$), falls

$$\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle \quad \forall v, w \in V$$

Bemerkung.
Wenn $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V und $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ist, so gilt

$$\boxed{f \text{ selbstadjungiert}} \Longleftrightarrow \boxed{{}^tA = \overline{A}}$$

Beweis. Es gilt:

$$\boxed{f \text{ selbstadjungiert} \iff \langle f(v_j), v_k\rangle = \langle v_j, f(v_k)\rangle \ \forall j, k = 1, \ldots, n}$$

Da $\mathcal{B}$ orthonormal ist, gilt für $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) =: (a_{ij})$ nach Definition 5.4:

$$\begin{aligned} \langle f(v_j), v_k\rangle &= a_{1j}\langle v_1, v_k\rangle + \cdots + a_{nj}\langle v_n, v_k\rangle = a_{kj} \\ \langle v_j, f(v_k)\rangle &= \overline{a_{1k}}\langle v_j, v_1\rangle + \cdots + \overline{a_{nk}}\langle v_j, v_n\rangle = \overline{a_{jk}} \end{aligned}$$

□

9.11 Spektralsatz

Satz.
Sei $f : V \longrightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus eines n-dimensionalen euklidischen oder unitären $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Dann besitzt V eine Orthonormalbasis, die aus Eigenvektoren von f besteht. Die Eigenwerte von f sind sämtlich reell.

Beweis mit Fundamentalsatz der Algebra.
Ist λ Eigenwert von f, also $f(v) = \lambda v$ für einen Vektor $v \neq \vec{0}$, so folgt

$$\begin{aligned} \langle f(v), v\rangle &= \langle \lambda v, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle \\ \langle v, f(v)\rangle &= \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle \end{aligned}$$

Da f selbstadjungiert ist, gilt $\langle f(v), v\rangle = \langle v, f(v)\rangle$, und da $\langle v, v\rangle \neq 0$ ist (vgl. 9.5), folgt $\lambda = \overline{\lambda}$ und also $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Eigenwerte von f sind somit sämtlich reell.
Wir zeigen nun durch Induktion nach $n = \dim_{\mathbb{K}} V$, dass V eine Orthonormalbasis besitzt, die aus lauter Eigenvektoren von f besteht.
$\underline{n = 1}$: Dann wird V von einem Vektor $v \neq \vec{0}$ erzeugt, also $V = \mathbb{K}v := \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$. Da $f(v) \in \mathbb{K}v$ gilt, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{K}$ so, dass $f(v) = \lambda v$ ist. Setzen wir $u = \mu v$ mit $\mu = \frac{1}{\|v\|}$, so gilt $f(u) = \lambda u$ und $\|u\| = 1$. Also ist u ein normierter Eigenvektor von f, und $\{u\}$ ist die gesuchte Orthonormalbasis von V.

$\underline{n > 1}$: Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, dass das charakteristische Polynom $\chi_f(x)$ eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ hat. Daher ist λ Eigenwert von f nach Satz 8.6, falls V unitär und also $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist. Wie oben gezeigt, ist λ reell.
Ist V euklidisch und also $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so argumentieren wir wie folgt, um einen Eigenwert von f zu erhalten: Nach 9.9 besitzt V eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$. Es ist $A := \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Da f selbstadjungiert ist, gilt ${}^tA = \overline{A}$ nach 9.10. Sei $g : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ die durch A definierte Standardabbildung (vgl. 5.11). Dann gilt $A = \mathrm{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(g)$ für die Standardbasis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{C}^n$, und nach Bemerkung 9.10 folgt, dass g selbstadjungiert bezüglich des Standardskalarproduktes von $\mathbb{C}^n$ ist. Analog wie oben erhalten wir einen reellen Eigenwert λ von g. Nun ist λ Nullstelle von $\chi_g(x) = \det(A - xE_n) = \chi_f(x)$, und damit ist λ auch ein Eigenwert von f.
Wie im Fall $n = 1$ gesehen, können wir zum Eigenwert λ einen Eigenvektor u von f mit $\|u\| = 1$ wählen. Setze $U = \mathbb{K}u$, und

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \;\forall w \in U\}.$$

Dann induziert f eine selbstadjungierte Abbildung $f|_{U^\perp} : U^\perp \longrightarrow U^\perp$, $v \longmapsto f(v)$, denn für jedes $v \in U^\perp$ gilt

$$\langle f(v), u\rangle \underset{f \text{ selbstadjungiert}}{=} \langle v, f(u)\rangle = \langle v, \underbrace{\lambda u}_{\in U}\rangle \underset{v\,\in\, U^\perp}{=} 0$$

und also $f(v) \in U^\perp$. Nun zeigen wir, dass $\dim_{\mathbb{K}} U^\perp = n - 1$ gilt, um dann die Induktionsvoraussetzung auf $f|_{U^\perp}$ anwenden zu können.
Da $\langle\, ,\, \rangle$ positiv definit ist, gilt $U \cap U^\perp = \{\vec{0}\}$, und wir erhalten

$$n \geqslant \dim_{\mathbb{K}}(U + U^\perp) \underset{3.13}{=} \dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}} U^\perp = 1 + \dim_{\mathbb{K}} U^\perp$$

Insbesondere ist $\dim_{\mathbb{K}} U^\perp < n$. Wir ergänzen den Eigenvektor u von f zu einer Basis von V und konstruieren dann wie in 9.9 eine Orthonormalbasis $\{u, u_2, \ldots, u_n\}$ von V. Da $u_2, \ldots, u_n$ linear unabhängig sind und in $U^\perp$ liegen, folgt $\dim_{\mathbb{K}} U^\perp = n - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $U^\perp$ eine Orthornormalbasis, die aus lauter Eigenvektoren besteht. Diese Basis ergibt zusammen mit u die gesuchte Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht. □

Anwendungen des Spektralsatzes sind neue Aussagen über die Diagonalisierbarkeit von Matrizen und die Hauptachsentransformation. Bevor wir darauf eingehen, rechnen wir noch ein Beispiel zum Spektralsatz.

Beispiel.
Sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (a,b,c) \longmapsto (a-2c, 0, -2a+4c)$, und sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt versehen. Zeige, dass f selbstadjungiert ist, und konstruiere eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von f besteht.

- Es ist f selbstadjungiert, denn es ist

  $$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,0,-2) \\ f(0,1,0) &= (0,0,0) \\ f(0,0,1) &= (-2,0,4) \end{aligned} \qquad \text{also} \qquad A := \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

  eine symmetrische Matrix, vgl. 9.10.

- Wir zerlegen das charakteristische Polynom $\det(A - xE_3)$ in Linearfaktoren. Es ist

  $$\begin{aligned} \det(A - xE_3) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 0 & -x & 0 \\ -2 & 0 & 4-x \end{pmatrix} &= (1-x)(-x)(4-x) + 4x \\ &= -x^3 + 5x^2 = x^2(5-x) \end{aligned}$$

  $\Longrightarrow$ 5 ist ein einfacher und 0 ist zweifacher Eigenwert von f.

- Bestimme jeweils eine Basis der Eigenräume

  $$V_5 = \mathrm{kern}(f - 5\,\mathrm{id}) \qquad \text{und} \qquad V_0 = \mathrm{kern}\, f$$

  $\lambda = 5$: Es ist

  $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4a-2c \\ -5b \\ -2a-c \end{pmatrix}$$
  $$\Longrightarrow c = -2a \text{ und } b = 0$$

  also bildet $v_1 = (1,0,-2)$ eine Basis von V_5

  $\lambda = 0$: Es ist

  $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2c \\ 0 \\ -2a+4c \end{pmatrix}$$
  $$\Longrightarrow a = 2c \text{ und } b \text{ ist beliebig}$$

  also bilden $v_2 = (0,1,0)$ und $v_3 = (2,0,1)$ eine Basis von $V_0 = \mathrm{kern}\, f$

- Für die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (5,0,-10) = 5v_1 \\ f(v_2) &= (0,0,0) = 0v_2 \\ f(v_3) &= (0,0,0) = 0v_3 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \mathcal{B}$ ist Basis aus Eigenvektoren von f. Es gilt

$$\left.\begin{aligned} \langle v_1, v_2\rangle &= 1\cdot 0 + 0\cdot 1 - 2\cdot 0 = 0 \Longrightarrow v_1 \perp v_2 \\ \langle v_1, v_3\rangle &= 1\cdot 2 + 0\cdot 0 - 2\cdot 1 = 0 \Longrightarrow v_1 \perp v_3 \end{aligned}\right\} V_0 \perp V_5 \text{ nach 9.11}$$

$$\langle v_2, v_3\rangle = 0\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0 \Longrightarrow v_2 \perp v_3$$

und

$$\begin{aligned} \|v_1\| &= \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \\ \|v_2\| &= \sqrt{\langle v_2, v_2\rangle} = 1 \\ \|v_3\| &= \sqrt{\langle v_3, v_3\rangle} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2), \quad u_2 = (0,1,0), \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)$
bilden eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

9.12 Hermitesche und symmetrische Matrizen

Definition.

a) Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ heißt *symmetrisch*, falls ${}^tA = A$ gilt.

b) Eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ heißt *orthogonal*, falls ${}^tTT = E_n$ gilt.

c) Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ heißt *hermitesch*, falls ${}^tA = \overline{A}$ gilt.

d) Eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ heißt *unitär*, falls ${}^tT\overline{T} = E_n$ gilt.

Korollar.

a) *Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch Dann gibt es eine orthogonale Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ so, dass*

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

b) Sei $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *hermitesch. Dann gibt es eine unitäre Matrix* $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *so, dass*

$$ {}^tTA\overline{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} $$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *gilt.*

In beiden Fällen sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *die Eigenwerte (mit Vielfachheiten) der Standardabbildung* $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$, $\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$.

Beweis. Sei s das Standardskalarprodukt (vgl. 9.6) und $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $V := \mathbb{K}^n$. Dann ist $A = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ (vgl. 5.11), und f ist selbstadjungiert nach Bemerkung 9.10. Nach dem Spektralsatz 9.11 besitzt V eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}'$, die aus Eigenvektoren von f besteht. Es folgt

$$ \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) \underset{8.3}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \underset{5.9}{=} T^{-1}AT \text{ mit } T := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_V)\,, $$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von f sind. Da $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ Orthonormalbasen $\underset{9.3}{\Longrightarrow} \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) = E_n = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) \underset{9.4}{\Longrightarrow} E_n = {}^tTE_n\overline{T} \Longrightarrow {}^tT = \overline{T}^{-1}$. Es folgt die Behauptung im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, folgt

$$ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = T^{-1}AT = {}^t\overline{T}AT = {}^tSA\overline{S} \text{ mit } S := \overline{T} $$

□

9.13 Hauptachsentransformation

Zu einer symmetrischen Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ gehört eine quadratische Form (vgl. Bem. 9.2 und 9.3)

$$ q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto (x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =: q(\vec{x}) $$

Es gilt dann $q(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2 \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j$ (nach 5.2).

Die *Hauptachsentransformation* $\vec{x} \longmapsto S\vec{x}$ ist eine Koordinatentransformation mit einer orthogonalen Matrix S so, dass die "gemischten Glieder", das sind die Glieder hinter dem Summenzeichen, wegfallen:

Satz.

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch, und sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$, die zu A gehörende Standardabbildung und $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es bezüglich des Standardskalarprodukts eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}$ von $\mathbb{R}^n$, die aus lauter Eigenvektoren von f besteht und folgendes bewirkt:

1. *Die Matrix $S := \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ ist orthogonal, also gilt ${}^tS = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}) = S^{-1}$.*
2. *Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die zu $\mathcal{C}$ gehörenden Eigenwerte und ist*
$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ \vec{x} \longmapsto S\vec{x} =: \vec{y}$$
die zu S gehörende Standardabbildung, so gibt es eine quadratische Form $q_{\mathcal{C}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:
$$q(\vec{x}) = q_{\mathcal{C}}(\vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2\ .$$

Beweis. Da $A = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ symmetrisch ist, besitzt $\mathbb{R}^n$ nach 9.10, 9.11 eine Orthonormalbasis $\mathcal{C}$, die aus Eigenvektoren von f besteht. Es ist $\mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = T^{-1}AT$ mit $T = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id})$ nach 5.9. Bezeichnet s' das Standardskalarprodukt von $\mathbb{R}^n$, so gilt
$$E_n = \mathrm{M}_{\mathcal{C}}(s') \underset{9.4}{=} {}^tT\, \underbrace{\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s')}_{=E_n}\, T = {}^tTT$$
da $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ orthonormal bezüglich s' sind. Also ist T orthogonal. Es folgt $S := \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) \underset{5.8}{=} T^{-1} = {}^tT$ und damit 1. Weiterhin folgt $\vec{x} = S^{-1}\vec{y} = T\vec{y}$ und also
$$\begin{aligned}
q(\vec{x}) &= (x_1, \ldots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (y_1, \ldots, y_n)^t T \cdot A \cdot T \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= (y_1, \ldots, y_n)\, \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =: q_{\mathcal{C}}(\vec{y}) \\
&= \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2\ , \quad \text{da } \mathrm{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) \underset{8.3}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Geometrische Interpretation für $n = 2$. Ist $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 \neq 0$, so setze $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ und $\beta = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}$, und es folgt

$$q_{\mathcal{C}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{y_1^2}{\alpha^2} \pm \frac{y_2^2}{\beta^2}$$

Betrachte die „Kurve“

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, q_{\mathcal{C}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 1 \right\}$$

Im Fall „+“ ist F eine Ellipse und im Fall „−“ eine Hyperbel.

Beispiel.

Man führe die Hauptachsentransformation von $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ durch:

- Die Eigenwerte von

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_1}{2} \end{pmatrix}$$

  sind $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ und $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

- Dazu gehören die normierten Eigenvektoren

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Sei $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ und $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$, dann folgt

$$q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_1}{2}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1x_2$$
$$q_{\mathcal{C}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = \frac{y_1^2}{2} - \frac{y_2^2}{2}$$

  wobei

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = {}^tT\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ mit } T = \mathrm{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  also

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$
\begin{aligned}
{}^tTAT = \quad & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
= \quad & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
X = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{y_1^2}{2} - \frac{y_2^2}{2} = 1 \right\}
$$

Insbesondere ist X eine Hyperbel.

Lernerfolgstest.

- Die in 9.1 auf einem Körper K definierte Involution ist stets bijektiv. Warum?
- Verifizieren Sie die Eigenschaften (i) und (ii) in Bemerkung 9.2.
- Diskutieren Sie den Spektralsatz 9.11 am Beispiel des Null-Endomorphismus $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $v \longmapsto \vec{0}$.
- Aufgaben 49-62, im Aufgabenpool Abschnitt 9.

9.14 Übungsaufgaben 49 – 62

Aufgabe 49.
Für $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $w = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ aus $\mathbb{R}^4$ sei

$$
\langle v, w\rangle := 3x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_3y_4 + 4x_4y_3\,.
$$

Hierdurch ist eine *symmetrische Bilinearform* $s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$, definiert. Man bestimme die Matrizen $M_{\mathcal{B}}(s)$ und $M_{\mathcal{B}'}(s)$ bezüglich der Basen

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \{(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\} \text{ und} \\
\mathcal{B}' &= \{(1,0,0,0),\ (-1,1,0,0),\ (0,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),\ (0,0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2})\} \text{ von } \mathbb{R}^4\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 50.
Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man zeige, dass für $u, v, w \in V$ die folgenden drei Aussagen gelten, und fertige zu (c) eine Skizze an:

(a) $\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w\rangle$ *("Kosinussatz")*

(b) $\|v+w\|^2+\|v-w\|^2 = 2\,\|v\|^2+2\,\|w\|^2$ *("Parallelogrammgleichung")*

(c) $(u - w) \perp (v - w) \implies \|u - w\|^2 + \|v - w\|^2 = \|u - v\|^2\,.$

Aufgabe 51.
Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt versehen, und es seien

$$v_1 = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\,0\,,\,\frac{-1}{2\sqrt{6}}\Big),\; v_2 = \Big(\frac{-1}{2\sqrt{3}}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{-1}{2\sqrt{6}}\Big),\; v_3 = \Big(\frac{-1}{2\sqrt{3}}\,,\,-\frac{1}{2}\,,\,\frac{-1}{2\sqrt{6}}\Big)\,,$$

und $v_4 = \Big(0, 0, \frac{3}{2\sqrt{6}}\Big)$.
Man berechne den *Abstand* $\|v_i - v_j\|$ für $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}\,,\; i < j$. Sodann zeige man, dass v_1, v_2, v_3, v_4 ein regelmäßiges Tetraeder mit dem Mittelpunkt $\vec{0}$ bilden. Man ermittle, welche Winkel v_1, v_2, v_3, v_4 miteinander bilden.

Aufgabe 52.
Es sei $V := \mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen, und es sei U der von den Vektoren $(2, 1, 0, 3),\ (4, 2, 1, -1),\ (1, 0, 2, -13)$ erzeugte Untervektorraum von V. Man bestimme eine Basis des *zu U orthogonalen Untervektorraums* $U^\perp := \{v \in V \mid v \perp u\ \forall\, u \in U\}$.

Aufgabe 53.
Sei V ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für $v, w \in V$, $v \neq 0$, zeige man: Es gibt genau einen Vektor $u \in V$ und genau ein $\lambda \in \mathbb{K}$ derart, dass gilt: $w = \lambda v + u$ und $u \perp v$. Hierbei ist $\lambda = \frac{\langle w,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$. Man fertige vor der Beweisführung eine Skizze an.
(λv heißt die *orthogonale Projektion von w auf die Gerade* $\mathbb{K}v$.)

Aufgabe 54.
Es seien $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$ jeweils mit dem Standardskalarprodukt versehen.

(a) Man ergänze $u_1 = \big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

(b) Man ergänze $u_1 = \big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big), u_2 = \big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 55.
Es sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen, und es sei U der von den Vektoren $v_1 = (-3, -3, 3, 3),\ v_2 = (-5, -5, 7, 7)$ und $v_3 = (4, -2, 0, 6)$ erzeugte Teilraum von $\mathbb{R}^4$. Man benutze das SCHMIDTsche Orthonormalisierungsverfahren zur Konstruktion einer Orthonormalbasis von U.

Aufgabe 56.
(a) Man zeige: Vektoren $v_1 \neq \vec{0}, \ldots, v_n \neq \vec{0}$ in einem euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Eigenschaft $v_i \perp v_j\ \forall\, i \neq j$ sind linear unabhängig, und für jeden Vektor v aus dem von $v_1, \ldots, v_n$ erzeugten Teilraum gilt:

$$v = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}\, v_1 + \cdots + \frac{\langle v, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle}\, v_n\ .$$

(b) Es sei $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Man konstruiere mit Hilfe des SCHMIDTschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis für den Teilraum $U = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \}$ und bestimme eine Basis von $U^\perp$.

Aufgabe 57.
Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt versehen, und es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,,\ (a, b, c) \longmapsto (3a - c, 2b, -a + 3c)$$

(a) Man zeige, dass f selbstadjungiert ist.

(b) Man konstruiere eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von f besteht.

Aufgabe 58.
Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt versehen, und es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3\,,\ (a, b, c) \longmapsto (4a - 2b, -2a + 3b + 2c, 2b + 2c)$$

(a) Man zeige, dass f selbstadjungiert ist.

(b) Man konstruiere eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von f besteht.

Aufgabe 59.
Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Man führe die Hauptachsentransformation von A durch.

Aufgabe 60.
Es sei $A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 89 & -48 \\ -48 & 61 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Man führe die Hauptachsentransformation von A durch und fertige eine Skizze an.

Aufgabe 61.
Es sei $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Man führe die Hauptachsentransformation von A durch und fertige eine Skizze an.

Aufgabe 62.
Es sei $A = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 11 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Man führe die Hauptachsentransformation von A durch und fertige eine Skizze an.

10 Orthogonale und unitäre Abbildungen

Lernziel.
<u>Fertigkeiten</u>: Drehungen und Spiegelungen zu beschreiben
<u>Kenntnisse</u>: Matrizengruppen $\mathrm{GL}_n, \mathrm{O}_n, \mathrm{U}_n, \mathrm{SL}_n, \mathrm{SO}_n, \mathrm{SU}_n$,
Eigenschaften orthogonaler und unitärer Endomorphismen

10.1 Metrische Abbildungen

Sei zunächst K ein beliebiger Körper. Gegeben seien K-Vektorräume V und W, die bezüglich derselben Involution $^- : K \longrightarrow K$, $\alpha \longmapsto \overline{\alpha}$, jeweils mit einer Metrik $s_V : V \times V \longrightarrow K$ auf V und $s_W : W \times W \longrightarrow K$ auf W (gemäß 9.2) ausgestattet seien.

Definition.

1. Eine K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt *metrisch* oder *Metrik erhaltend*, falls gilt:

$$\boxed{s_V(v, v') = s_W(f(v), f(v'))\ \forall v, v' \in V}$$

2. Eine K-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ heißt *Isometrie*, falls f metrisch und bijektiv ist. Wir nennen V und W *isometrisch*, wenn es eine Isometrie $f : V \longrightarrow W$ gibt.

10.2 Die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ einer Isometrie f

Satz.
Seien $s : V \times V \longrightarrow K$, $(v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$, eine Metrik, $f : V \longrightarrow V$ ein Automorphismus, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $T := \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. Dann gilt

$$\boxed{f \textit{ ist eine Isometrie} \iff {}^tT\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\,\overline{T} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)}$$

Beweis. Da f ein Automorphismus ist, ist $\mathcal{B}' := (f(v_1), \ldots, f(v_n))$ eine Basis von V nach Aufgabe 20. Dann gilt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ nach 5.4 und also ${}^tT\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\,\overline{T} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s)$ nach 9.3 und 9.4. Nun folgt

$$f \text{ ist eine Isometrie} \iff \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(s) \iff {}^tT\,\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\,\overline{T} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\,.$$

□

10.3 Lineare Gruppen

Wir stellen zunächst den Begriff einer Untergruppe bereit. Eine Teilmenge H einer Gruppe G heißt *Untergruppe* von G, falls $e \in H$ und $a \circ b \in H$ sowie $a^{-1} \in H$ für alle $a, b \in H$ gilt.

Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, und sei $s : V \times V \longrightarrow K$, $(v, w) \longmapsto \langle v, w\rangle$, eine Metrik auf V. Nach Satz 5.7 ist die Abbildung

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \mathrm{Aut}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(K), \quad f \longmapsto \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ein Isomorphismus von Gruppen. Im Hinblick auf 10.2 betrachten wir in $\mathrm{Aut}(V)$ die Untergruppe $\mathrm{Aut}(V, s)$ aller Isometrien $f : V \longrightarrow V$, und in $\mathrm{GL}_n(K)$ die Unterguppe

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(K, s) := \{T \in \mathrm{GL}_n(K) \mid {}^t T\, \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\, \overline{T} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s)\}}$$

Dann erhalten wir nach 10.2 einen Isomorphismus von Gruppen

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \mathrm{Aut}(V, s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(K, s), \quad f \longmapsto \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

Beispiele.

1. Definiert man eine Metrik $s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ durch die Matrix (vgl. Satz 9.3)
$$E_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
so ist s eine symmetrische Bilinearform, die nicht positiv definit ist. Es ist $s(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - c^2x_4y_4$ die in der Physik wichtige *Lorentzform* (aufgefasst als “Raum-Zeit”). Die Zeiteinheit ist so gewählt, dass $c = 1$ für die Lichtgeschwindigkeit c gilt. Die Gruppe $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R}, s)$ ist die *Lorentzgruppe*
$$\boxed{\mathrm{O}_{3,1}(\mathbb{R}) := \{T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t T E_{3,1} T = E_{3,1}\}}$$

2. Sei V euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis von V (vgl. 9.9). Dann ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = E_n$, und die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}, s)$ ist die *orthogonale Gruppe*
$$\boxed{\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) := \{T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t TT = E_n\}}$$

Sehr wichtig ist auch noch die folgende Untergruppe von $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, die *spezielle orthogonale Gruppe* genannt wird,

$$\boxed{\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) := \{T \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det T = 1\}}$$

3. Analog: Sei V unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Dann ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}, s)$ die *unitäre Gruppe*

$$\boxed{\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) := \{T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^tT\overline{T} = E_n\}}$$

und die *spezielle unitäre Gruppe* ist definiert als

$$\boxed{\mathrm{SU}_n(\mathbb{C}) := \{T \in \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \mid \det T = 1\}}$$

In Übereinstimmung mit Definition 9.12 wird eine Matrix aus $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *orthogonal* und eine Matrix aus $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ *unitär* genannt. Für eine unitäre Matrix T gilt

$$|\det T|^2 \underset{1.1}{=} (\det T)\cdot(\overline{\det T}) \underset{7.7}{=} (\det {}^tT)\cdot(\det \overline{T}) \underset{7.8}{=} \det({}^tT \cdot \overline{T}) \underset{\text{s.o.}}{=} \det E_n = 1$$

und also $|\det T| = 1$. Für eine orthogonale Matrix T gilt analog $\det T = \pm 1$.

10.4 Bestimmung der orthogonalen 2×2-Matrizen

Wir gehen hierbei von einem beliebigen Grundkörper K aus und nennen eine Matrix $T \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$ *orthogonal*, falls ${}^tTT = E_2$ gilt. Seien $a, b \in K$ mit $a^2 + b^2 = 1$. Dann sind die Matrizen

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ und } S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}}$$

orthogonal denn:

$${}^tTT = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$${}^tSS = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz.
Für Matrizen $T \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$ gilt

$$\boxed{T \text{ orthogonal}} \iff \boxed{T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ oder } T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ mit } a^2+b^2=1}$$

Beweis. $\Longleftarrow$ siehe oben

$\Longrightarrow$ Es ist $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in K$ und

$$^tTT = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also $a^2+c^2=1$, $b^2+d^2=1$ und $ab+cd=0$.

1. Fall $a \neq 0$. Dann ist $b = -\frac{cd}{a} \Longrightarrow 1 = b^2+d^2 = \frac{d^2}{a^2}\underbrace{(c^2+a^2)}_{1} \Longrightarrow$

$$(d+a)(d-a) = 0 \Longrightarrow d = \pm a \Longrightarrow b = \begin{cases} -c \text{ falls } d = a \\ c \text{ falls } d = -a \end{cases}$$

2. Fall $a = 0$. Dann ist $c^2 = 1 \Longrightarrow c = \pm 1 \Longrightarrow d = 0$, da $ab+cd = 0$ $\Longrightarrow b^2 = 1 \Longrightarrow b = \pm 1$

□

10.5 Orthogonale und unitäre Endomorphismen

Sei V ein K-Vektorraum, der mit einer Metrik $\langle\, ,\, \rangle$ versehen sei, und sei $f : V \longrightarrow V$ eine metrische Abbildung. Ist $\langle\, ,\, \rangle$ eine symmetrische Bilinearform, so nennt man f auch eine *orthogonale Abbildung* oder einen *orthogonalen Endomorphismus*. Ist V ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\langle\, ,\, \rangle$ ein Sklarprodukt auf V (vgl. 9.5), so nennt man f auch eine *unitäre Abbildung* oder einen *unitären Endomorphismus*. Die Sprechweisen sind aber nicht einheitlich in der Literatur.

Bemerkung.
Seien V ein euklischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum, $f : V \longrightarrow V$ ein orthogonaler oder unitärer Endomorphismus und $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ die *Länge* von $v \in V$ (vgl. 9.7). Dann gelten:

1. $\|f(v)\| = \|v\|$ für alle $v \in V$

2. f ist injektiv. Insbesondere ist f eine Isometrie, wenn V endlichdimensional ist.

3. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert von f, so gilt $|\lambda| = 1$

Beweis. **1.** folgt nach Voraussetzung über f.

Zu 2.: Ist $f(v) = f(v')$, so folgt $0 = \|\vec{0}\| = \|f(v) - f(v')\| = \|f(v - v')\| = \|v - v'\|$ und also $v = v'$ nach 9.5.3. Aus 4.8 folgt nun 2.

Zu 3.: Ist v Eigenvektor zu λ, so folgt $\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| \underset{9.7}{=} |\lambda|\|v\|$ und also $|\lambda| = 1$, da $v \neq \vec{0}$. □

Satz.
Sei V ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum.
Jede Abbildung $f : V \longrightarrow V$, die das Skalarprodukt erhält, für die also

$$\langle v, w\rangle = \langle f(v), f(w)\rangle \quad \forall v, w \in V$$

gilt, ist $\mathbb{K}$-linear (und daher orthogonal *oder* unitär*).*

Beweis.

1. Setze $z := f(v + w) - f(v) - f(w)$. Zu zeigen $z = \vec{0}$.
   Für alle $u \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle z, f(u)\rangle &= \langle f(v + w) - f(v) - f(w), f(u)\rangle \\ &\underset{9.5}{=} \langle f(v + w), f(u)\rangle - \langle f(v), f(u)\rangle - \langle f(w), f(u)\rangle \\ &= \langle v + w, u\rangle - \langle v, u\rangle - \langle w, u\rangle \text{ nach Vor.} \\ &= 0 \text{ nach } 9.5\end{aligned}$$

   Es sei U der von der Menge $\{f(u) \mid u \in V\}$ erzeugte Teilraum von V. Dann ist $\langle z, z'\rangle = 0$ für alle $z' \in U$ nach 9.5 Da $z \in U$ ist, folgt insbesondere $\langle z, z\rangle = 0$ und also $z = \vec{0}$ nach 9.5.3.

2. Setze analog $z := f(\lambda v) - \lambda f(v)$ für $\lambda \in \mathbb{K}$. Für alle $u \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle z, f(u)\rangle &= \langle f(\lambda v) - \lambda f(v), f(u)\rangle \\ &= \langle f(\lambda v), f(u)\rangle - \lambda\langle f(v), f(u)\rangle \\ &= \langle \lambda v, u\rangle - \langle \lambda v, u\rangle = 0\end{aligned}$$

   Wie in 1. folgt nun $z = \vec{0}$.

□

10.6 Orthogonale und unitäre Matrizen

Wie in 9.12 definiert, heißt eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *orthogonal*, wenn ${}^tTT = E_n$, und eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *unitär*, wenn ${}^tT\overline{T} = E_n$ gilt.

Satz.
Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V und $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

1. *Der Endomorphismus f ist orthogonal bzw. unitär.*
2. *Der Endomorphismus f ist eine Isometrie.*
3. *Die Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ist orthogonal bzw. unitär.*

Beweis. **1. $\Longrightarrow$ 2.** Dies gilt nach Bemerkung 10.5.2.

2. $\Longrightarrow$ 3. Dies gilt nach Satz 10.2, da $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = E_n$ für jede Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V gilt.

3. $\Longrightarrow$ 1. Sei $T := \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ orthogonal bzw. unitär. Dann ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, und nach 5.7 folgt $f \in \mathrm{Aut}(V)$. Da $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(s) = E_n$ und ${}^tT\overline{T} = E_n$ (mit $\overline{T} = T$, falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) gelten, ergibt 10.2 "$\Longleftarrow$", dass f eine Isometrie und insbesondere orthogonal bzw. unitär ist

□

Beispiel.
Ist $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$, so entsprechen die orthogonalen Abbildungen $f : V \longrightarrow V$ bijektiv den Matrizen der Form

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_{\text{Drehung, det()=1}} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}}_{\text{Spiegelung, det()=}-1} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a^2 + b^2 = 1$$

(vgl. 10.4 und 10.7, 10.8 unten)

10.7 Spiegelungen

Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, und sei $v \neq \vec{0}$ in V fest gewählt. Eine *Spiegelung* bezüglich v ist ein Endomorphismus $\sigma : V \longrightarrow V$ mit den Eigenschaften

1. $\sigma(v) = -v$
2. Es gibt einen $(n-1)$-dimensionalen Untervektorraum U von V so, dass $\sigma(u) = u$ für alle $u \in U$ gilt.

Satz. *Sei $\|v\| = 1$. Dann ist die Abbildung*

$$\boxed{\sigma : V \longrightarrow V, \quad w \longmapsto w - 2\langle w, v\rangle v}$$

eine Spiegelung bezüglich v und eine Isometrie. Ferner gilt $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$.

Beweis. Wir ergänzen v zu einer Orthonormalbasis $v_2, \ldots, v_n$ (vgl. 9.9). Sei U der von $v_2, \ldots, v_n$ aufgespannte Untervektorraum von V. Dann ist $\dim_{\mathbb{R}} U = n - 1$, und es ist $U = (\mathbb{R}v)^{\perp} = \{u \in V \mid \langle u, v\rangle = 0\}$. Es folgt $\sigma(u) = u$ für alle $u \in U$. Und es gilt $\sigma(v) = -v$, da $\|v\| = 1$ ist. Damit sind die Eigenschaften 1. und 2. erfüllt. Ferner erhält σ das Skalarprodukt, denn für alle $w, w' \in V$ gilt (vgl. 9.2 und beachte $\langle v, v\rangle = 1$):

$$\begin{aligned}
\langle \sigma(w), \sigma(w')\rangle &= \langle w - 2\langle w, v\rangle v,\ w' - 2\langle w', v\rangle v\rangle \\
&= \langle w, w'\rangle - 2\langle w', v\rangle\langle w, v\rangle - 2\langle w, v\rangle\langle v, w'\rangle + 4\langle w, v\rangle\,\langle w', v\rangle \\
&= \langle w, w'\rangle
\end{aligned}$$

Also ist σ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung nach Satz 10.5 und daher orthogonal. Nach 10.6 ist σ eine Isometrie. Es ist

$$\begin{aligned}
\sigma(\sigma(w)) &= \sigma\big(w - 2\langle w, v\rangle v\big) \\
&= \sigma(w) - 2\langle w, v\rangle\,\sigma(v) \quad \text{da } \sigma\ \mathbb{R}\text{-linear} \\
&= w - 2\langle w, v\rangle v + 2\langle w, v\rangle v, \text{ da } \sigma(v) = -v \\
&= w \ \ \forall w \in V
\end{aligned}$$

□

Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\langle\, ,\, \rangle$ das Standardskalarprodukt. Dann ist $U = (\mathbb{R}v)^{\perp}$ eine Gerade. Für $\|v\| = 1$ ist $w \longmapsto \langle w, v\rangle v$ die *orthogonale Projektion* von w auf $\mathbb{R}v$ (vgl. Aufgabe 53).

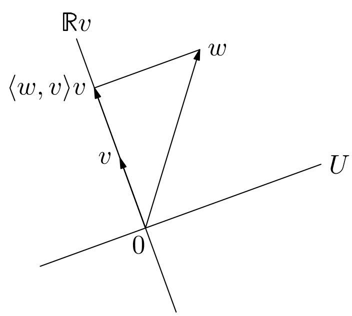


Abbildung 19: orthogonale Projektion von w auf $\mathbb{R}v$

Sei nun V euklidisch und $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$. Es sei $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ eine Orthonormalbasis von V und $f : V \longrightarrow V$ orthogonal.

Behauptung.
Ist $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$, so ist f eine Spiegelung bezüglich eines $v \in V$ mit $\|v\| = 1$, und es gilt $f(w) = w - 2\langle w, v\rangle v$ für alle $w \in V$.

Beweis. **1. Fall** $a = 1 \Longrightarrow b = 0$.
Für die Spiegelung $\sigma : V \longrightarrow V,\ w \longmapsto w - 2\langle w, u_2\rangle u_2$ bezüglich u_2 gilt $\sigma(u_1) = u_1$ und $\sigma(u_2) = -u_2$, also

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \Longrightarrow \sigma = f \text{ nach 10.3}$$

2. Fall $a \neq 1 \Longrightarrow a = -1$ oder $|a| < 1$, da $a^2 + b^2 = 1$. Setze $v = \alpha u_1 + \beta u_2$ mit $\alpha = \sqrt{\frac{1-a}{2}}$ und $\beta = \frac{-b}{2\alpha}$. Es folgt

$$\langle v, v\rangle = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1-a}{2} + \frac{b^2}{4\alpha^2} = \frac{1-a}{2} + \frac{b^2}{2(1-a)}$$

$$= \frac{(1-a)^2 + b^2}{2(1-a)} = \frac{1 - 2a + \overbrace{a^2 + b^2}^{=1}}{2 - 2a} = 1$$

Sei $\sigma : V \longrightarrow V,\ w \longmapsto w - 2\langle w, v\rangle v$, die Spiegelung an der Geraden $(\mathbb{R}v)^{\perp}$. Mit Hilfe von $\langle u_1, v\rangle = \alpha$ und $\langle u_2, v\rangle = \beta$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\sigma(u_1) &= u_1 - 2\alpha(\alpha u_1 + \beta u_2) = u_1 - 2\alpha^2 u_1 - 2\alpha\beta u_2 \\ &= (1 - 1 + a)u_1 + bu_2 = au_1 + bu_2\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sigma(u_2) &= u_2 - 2\beta(\alpha u_1 + \beta u_2) = u_2 - 2\beta^2 u_2 - 2\alpha\beta u_1 \\ &= \left(1 - \frac{b^2}{1-a}\right) u_2 + bu_1 = \frac{1 - a - b^2}{1-a} u_2 + bu_1 \\ &= \frac{a^2 - a}{1-a} u_2 + bu_1\,, \quad \text{da } 1 - b^2 = a^2 \\ &= \frac{-a(1-a)}{1-a} u_2 + bu_1 = bu_1 - au_2\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \Longrightarrow \sigma = f \text{ nach 10.3}$$

□

10.8 Drehungen von $\mathbb{R}^2$

Wir versehen $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt, und es sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine orthogonale, orientierungserhaltende Abbildung. Dann ist $\det f > 0$ nach Bemerkung 7.14, und also gilt $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$ nach 10.4 und 10.6.

Es gibt nun genau ein $\varphi \in [0, 2\pi[$ mit

$$a = \cos\varphi \quad \text{und} \quad b = \sin\varphi\,,$$

und die Matrix

$$D := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

beschreibt per Standardabbildung eine Drehung von $\mathbb{R}^2$ um $\vec{0}$ mit dem Drehwinkel φ (gegen die Uhrzeigersinn), wie man sieht, wenn man $v \in \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten $v = \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}^+$ und $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ schreibt.

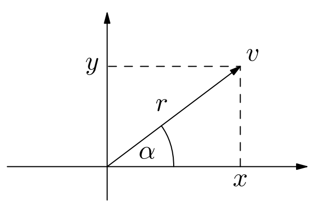


Abbildung 20: Polarkoordinaten

Es ist

$$\begin{aligned} Dv &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos\varphi\,\cos\alpha - \sin\varphi\,\sin\alpha) \\ r(\sin\varphi\,\cos\alpha + \cos\varphi\,\sin\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\varphi) \\ r\sin(\alpha+\varphi) \end{pmatrix} \text{ nach Additionstheoremen} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die Drehungen von $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt sind die orthogonalen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\det f = 1$. Für $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gilt

$$\boxed{A \text{ beschreibt eine Drehung per Standardabbildung}} \iff \boxed{A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})}$$

10.9 Fixpunkte orthogonaler Abbildungen

Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, und sei $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V (vgl. 9.9).

Lemma.
Sei $n = \dim_{\mathbb{R}} V$ ungerade und $f : V \longrightarrow V$ orthogonal. Ist $A := \mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ in $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, dann ist $\det(A - E_n) = 0$. Insbesondere besitzt f den Eigenwert 1, und f hat einen Fixpunkt $v_1 \neq \vec{0}$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\det(A - E_n) &= \det {}^tA \det(A - E_n), \text{ weil } 1 \underset{\text{Vor.}}{=} \det A \underset{7.7}{=} \det {}^tA \\
&= \det({}^tA(A - E_n)), \text{ weil det multiplikativ nach 7.8} \\
&= \det(E_n - {}^tA), \text{ weil } A \text{ orthogonal nach 10.6} \\
&= \det({}^t(E_n - A))), \text{ da Transponieren additiv und } {}^tE_n = E_n \\
&= \det(-(A - E_n)) \text{ nach 7.7} \\
&= (-1)^n \det(A - E_n) \text{ durch } n\text{-maliges Anwenden von 7.2b)} \\
&= -\det(A - E_n) \in \mathbb{R}, \text{ da } n \text{ ungerade}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\det(A - E_n) = 0$. Also hat f den Eigenwert 1 nach 8.6, und es gibt einen Vektor $v_1 \neq \vec{0}$ mit $f(v_1) = v_1$ nach 8.2. Insbesondere ist v_1 ein *Eigenvektor zum Eigenwert* 1. □

10.10 Drehungen von $\mathbb{R}^3$

Wir versehen $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt. Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ sei $\|v-w\|$ der *Abstand* zwischen v und w.

Definition.
Eine *Bewegung* von $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ so, dass

$$\|v - w\| = \|f(v) - f(w)\| \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

gilt, und also eine abstandserhaltende Abbildung.

Lemma.
Jede Bewegung von $\mathbb{R}^n$, die den Nullpunkt festlässt, ist orthogonal.

Beweis. Sei f eine Bewegung von $\mathbb{R}^n$ mit $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|v - w\|^2 &\underset{9.7}{=} \langle v - w, v - w\rangle \underset{9.2}{=} \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle - 2\langle v, w\rangle \\
&= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\|f(v)-f(w)\|^2 &= \|f(v)\|^2+\|f(w)\|^2-2\langle f(v),f(w)\rangle\\ &= \|f(v)-f(\vec{0})\|^2+\|f(w)-f(\vec{0})\|^2-2\langle f(v),f(w)\rangle\\ &= \|v-\vec{0}\|^2+\|w-\vec{0}\|^2-2\langle f(v),f(w)\rangle, \text{ da } f \text{ Bewegung}\\ &= \|v\|^2+\|w\|^2-2\langle f(v),f(w)\rangle\end{aligned}$$

Da $\|v-w\|^2=\|f(v)-f(w)\|^2$ gilt, folgt $\langle v,w\rangle=\langle f(v),f(w)\rangle\ \forall v,w\in\mathbb{R}^n$, und nach Satz 10.5 ist f dann auch $\mathbb{R}$-linear. $\square$

Sei nun $n=3$ und $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ eine Drehung um den Nullpunkt. Dann ist f eine abstandserhaltende Abbildung, die $\vec{0}$ festlässt, und also nach dem Lemma eine orthogonale Abbildung. Ferner lässt f einen Vektor $v_0\neq\vec{0}$ fest. Dieser definiert die Drehachse, und auf der Ebene U senkrecht zu v_0 wirkt f wie eine Drehung.

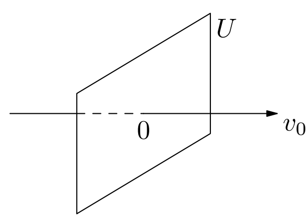


Abbildung 21: Untervektorraum U

Satz.
Die Drehungen von $\mathbb{R}^3$ um den Nullpunkt sind die orthogonalen Abbildungen $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ mit $\det f=1$. Für $A\in\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ gilt

$$\boxed{\textit{A beschreibt eine Drehung per Standardabbildung}}\iff\boxed{A\in\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}$$

Beweis. Sei $\mathcal{B}'$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, und sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es ist dann $\mathcal{B}'$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$.

„$\Longrightarrow$“ Ist $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ eine Drehung um den Nullpunkt
$\Longrightarrow$ f ist orthogonal (nach dem Lemma oben)
$\Longrightarrow A:=\mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)\in\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ (nach 10.6)
$\Longrightarrow \det A=\pm 1$ (vgl.10.3.2)
$\Longrightarrow \det A=1$, da $f=\mathrm{id}$ für den Drehwinkel 0 gilt und die Determinante stetig vom Drehwinkel abhängt.
$\Longrightarrow A=\mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)\in\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$

„$\Longleftarrow$“ Sei $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, und sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die zu A gehörende Standardabbildung. Dann gilt $A = \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$, und f ist orthogonal nach 10.6. Da f $\mathbb{R}$-linear ist, gilt $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Nach 10.9 hat f auch einen Fixpunkt $v_0 \neq \vec{0}$ in $\mathbb{R}^3$, also $f(v_0) = v_0$. Sei $U := (\mathbb{R}v_0)^\perp$ die Ebene durch $\vec{0}$, die senkrecht zu v_0 ist. Dann ist U ein f-invarianter Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, d.h. $f(u) \in U\ \forall u \in U$, denn für $u \perp v_0$ gilt

$$0 = \langle u, v_0 \rangle \underset{f \text{ orth.}}{=} \langle f(u), f(v_0) \rangle = \langle f(u), v_0 \rangle \text{ also } f(u) \perp v_0\ \forall u \in U$$

Wir zeigen nun, dass $f|_U : U \longrightarrow U$ wie eine Drehung wirkt. Dies erreichen wir durch geeigneten Basiswechsel. Wir konstruieren eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ so, dass die Matrix $C := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ die Form

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

hat und also eine Drehung von $\mathbb{R}^3$ mit Drehwinkel φ per Standardabbildung zu C beschreibt, wobei $e_1 = (1,0,0)$ auf der Drehachse liegt.

Konstruktion von $\mathcal{B}$: Sei $v_1 := \frac{v_0}{\|v_0\|} \Longrightarrow \|v_1\| = 1$. Wir wählen gemäß 9.9 eine Orthonormalbasis $\mathcal{D} := \{v_2, v_3\}$ von U. Dann ist $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, da $v_1 \perp U$.
Es ist $f(v_1) = v_1$, da mit v_0 auch v_1 ein Fixpunkt ist. Da $f(u) \in U$ für alle $u \in U$ gilt, gibt es $\lambda_2, \lambda_3, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} f(v_2) &= \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \\ f(v_3) &= \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 \end{aligned}$$

Daher gilt

$$C := \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \underset{5.4}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \mu_2 \\ 0 & \lambda_3 & \mu_3 \end{pmatrix} \text{ und } D := \mathrm{M}^{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}(f|_U) \underset{5.4}{=} \begin{pmatrix} \lambda_2 & \mu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

und aus 10.6 folgt, dass C und D orthogonal sind. Da $A = \mathrm{M}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$ gilt, ist $A \underset{5.9}{=} T^{-1}CT$ mit $T = \mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$. Es folgt

$$1 \underset{\text{Vor.}}{=} \det A \underset{7.8}{=} \det C \underset{7.4}{=} 1 \cdot \det D$$

also $C \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ und $D \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Nach 10.8 ist daher

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Mit C beschreibt auch $A = T^{-1}CT$ eine Drehung von $\mathbb{R}^3$ um $\vec{0}$ per Standardabbildung. Der Vektor v_1 liegt auf der Drehachse, der Drehwinkel φ wird auf der zu v_1 senkrechten Ebene U gemessen und zwar gegen den Uhrzeigersinn, wenn man von v_1 aus auf die Ebene U sieht.

□

Im Hinblick auf 10.8 und Satz 10.9 nennt man die Gruppen $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ auch *Drehgruppen*.

Lernerfolgstest.
- Ist die Umkehrabbildung einer Isometrie eine metrische Abbildung?
- Wieso ist die in 10.3 definierte Menge $\mathrm{Aut}(V, s)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(V)$?
- Was ist die inverse Matrix T^{-1} einer unitären Matrix T ?
- Wieso ist die in 10.3 definierte Menge $\mathrm{GL}_n(K, s)$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$?
- Welche Aussage können Sie über die Determinante einer orthogonalen Matrix sowie einer unitären Matrix machen?
- Die Matrix $S = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ beschreibt per Standardabbildung eine Spiegelung von $\mathbb{R}^2$. An welcher Geraden wird gespiegelt? Machen Sie sich die geometrische Bedeutung klar.
- Aufgaben 63-68, im Aufgabenpool Abschnitt 10.

10.11 Übungsaufgaben 63 – 68

Aufgabe 63.
Sei $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ eine Matrix mit lauter positiven Einträgen, und sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die zugehörige Standardabbildung. Man zeige:

(a) f hat zwei verschiedene reelle Eigenwerte.

(b) Der größere Eigenwert besitzt einen Eigenvektor, der im ersten Quadranten liegt und der kleinere einen Eigenvektor, der im zweiten Quadranten liegt.

Aufgabe 64.
Man bringe die reelle Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ in $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ auf Diagonalgestalt.

Aufgabe 65.
Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine orthogonale Abbildung mit Determinante $\det(f) = -1$. Man zeige, dass -1 Eigenwert von f ist.

Definition.
Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ heißt *positiv definit*, wenn

$$(\mu_1, \ldots, \mu_n)\, A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} > 0$$

für jeden Vektor $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \neq \vec{0}$ aus $\mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 66.
Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, und sei $f : V \longrightarrow V$ selbstadjungiert. Man zeige, dass folgende Bedingungen äquivalent sind.
(a) Alle Eigenwerte von f sind > 0.
(b) Für jeden Vektor $v \neq \vec{0}$ aus V ist $\langle f(v), v\rangle > 0$.
(c) Die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ist positiv definit.

Aufgabe 67.
Man untersuche, welche der folgenden reellen Matrizen positiv definit sind.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 68.
Sei V ein 2-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist eine *Spiegelung* von V eine orthogonale Abbildung $V \longrightarrow V$, deren Determinante gleich -1 ist.
Man zeige, dass eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ genau dann eine Spiegelung ist, wenn f die Eigenwerte 1 und -1 hat und die zugehörigen Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen.

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Artin, Emil: *Analytische Geometrie und Algebra I, II.* Vorlesungen an der Universität Hamburg, 1960/61. Teil I ausgearbeitet von H. Behncke und W. Hansen, Teil II ausgearbeitet von H. Kiendl und W. Hansen.

[2] Artin, Michael: *Algebra.* Birkhäuser, 1998.

[3] Artmann, Benno: *Lineare Algebra.* Birkhäuser Skripten, 1991.

[4] Beutelspacher, Albrecht: *Lineare Algebra.* vieweg, 1998.

[5] Brieskorn, E. und H. Knörrer: *Ebene algebraische Kurven.* Birkhäuser, 1981.

[6] Dieck, Tammo tom: *Lineare Algebra.* Mathematisches Institut der Universität Göttingen, 1995.

[7] Fischer, Gerd: *Lineare Algebra.* vieweg, 1997.

[8] Fischer, Gerd: *Analytische Geometrie.* vieweg, 1998.

[9] Fischer, H. und H. Kaul: *Mathematik für Physiker.* Teubner, 1988.

[10] Jänich, Klaus: *Lineare Algebra.* Springer Verlag, 1981.

[11] Kersten, Ina: *Algebra-Vorlesung.* Mathematisches Institut der Universität Göttingen, 2000/01.

[12] Lang, Serge: *Linear Algebra.* Addison-Wesley, 1977.

[13] Maus, Eckhart: *Analytische Geometrie und Lineare Algebra I.* Mathematisches Institut der Universität Göttingen, 1992.

[14] Maus, Eckhart: *Analytische Geometrie und Lineare Algebra II.* Mathematisches Institut der Universität Göttingen, 1997.

[15] Smith, Larry: *Linear Algebra.* Springer, Zweite Auflage, 1984.

[16] Stoppel, H. und B. Griese: *Übungsbuch zur Linearen Algebra.* vieweg, 1998.

[17] Stuhler, Ulrich: *Analytische Geometrie und Lineare Algebra II.* Mathematisches Institut der Universität Göttingen, 1999.

Index

Dieser Universitätsdruck wendet sich an Studierende des ersten Semesters, die einen Studienabschluss in Mathematik, Physik oder für das Lehramt an Gymnasien mit Mathematik als einem der Unterrichtsfächer anstreben. Er enthält mathematische Grundlagen aus linearer Algebra und Geometrie, die im gesamten weiteren Studium gebraucht werden. Insbesondere wird in die Theorie von Vektorräumen, Matrizen, Determinanten, linearen Gleichungssystemen, Eigenwertproblemen und Vektorräumen mit geometrischer Struktur eingeführt.

GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT GÖTTINGEN

ISBN 3-938616-26-1

Universitätsdrucke Göttingen