

Anhang D: Kugeloberflächeneinteilung

Hier wird die in Kapitel 2.5.2 ausgewählte Kugeloberflächeneinteilung detailliert bestimmt, dabei wird auf die Anforderungen (A1) - (A6) an die Teilflächen von Seite 37 zurückgegriffen:

- Sie sollen in ihrer Form möglichst richtungsunabhängig sein, d. h. es sollen gleichseitige und gleichwinkliger (also regelmäßige) Vielecke sein (A1).
- Sie sollen nahezu flächengleich sein (A2).
- Die Einteilung soll hinreichend fein sein (A3).
- Ferner sollen bzgl. des Kugelmittelpunktes einander gegenüberliegende Flächen für ein Auswerteprogramm leicht identifizierbar sein (A4).
- Strahlen, die vom Kugelzentrum ausgehend verschiedene Teilflächen durchstoßen, sollen unterscheidbar sein, d. h. die Entscheidung, in welche Teilfläche ein Strahl fällt, muß einfach sein (A5).
- Die mittlere Position innerhalb einer Teilfläche wird als Richtungsmittelwert aller in diese Teilfläche fallenden Strahlen bestimmt. Falls dieser Mittelwert weit vom Schwerpunkt der Teilfläche entfernt liegt - z. B. nahe einem Eckpunkt -, benutze ich die Mittelwerte der angrenzenden Nachbarparteilflächen für eine ggf. notwendige gewichtete Mittelung. Also benötige ich zu jeder Teilfläche auch eine Liste der Nachbarparteilflächen (A6).

Die Numerierung der Ecken der entstehenden achtzig Flächen ist der Übersicht halber hier noch einmal wiedergegeben (Abbildung 2.22 und Abbildung 1), ebenso die von mir gewählte Numerierung der Flächen. Diese ist so gewählt, daß bzgl. des Kugelmittelpunktes einander gegenüberliegende Flächen – analog zur Augensumme sieben eines Würfels – die Indexsumme 79¹ haben.

¹Es ist zu beachten, daß die Durchnummerierung der Flächen mit der Zahl Null beginnt. Dies hat zur Folge, daß die Indexsumme 79 statt 81 ist.

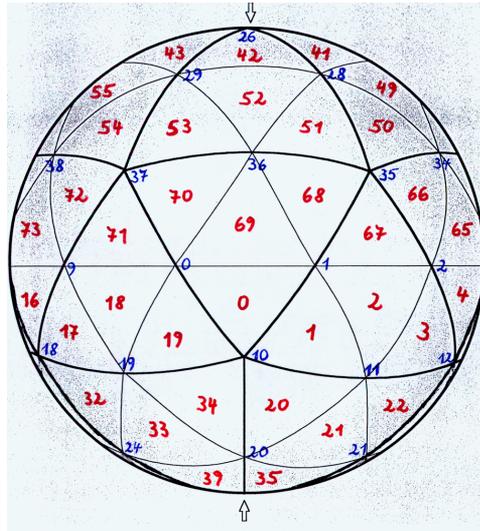


Abb. 1: Unterteilter Iksosaeder auf der Kugeloberfläche (rot: Flächennumerierung, blau: Eckennumerierung); dicke Linien: projizierte Iksosaederkanten – dünne Linien: projizierte Iksosaederdreiecksunterteilung.

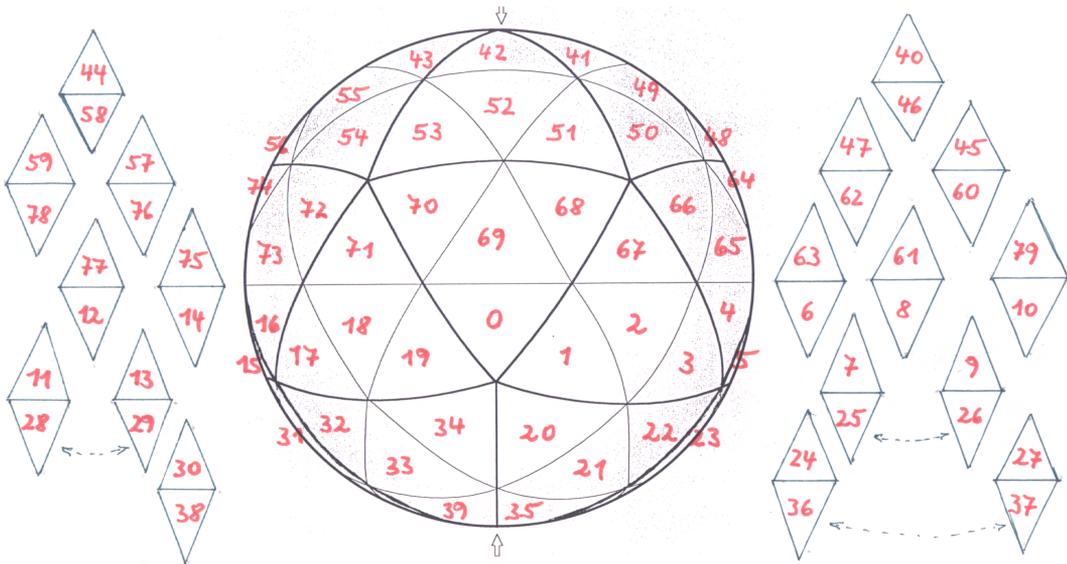


Abb. 2: Schema für die Flächen auf der abgewandten Kugel­seite (rot: Flächennumerierung, grünes \triangle : Dreiecksspitze nach oben, grünes ∇ : Dreiecksspitze nach unten, grünes $\leftarrow \dots \rightarrow$: weist auf zu identifizierende Kanten hin).

Im folgenden sind die Ecken (0,1,2,...41) - Flächen (0,1,2,...79) - Zuordnungen des gemäß Abbildung 1 unterteilten Kugelikosaeders aufgelistet, $F_l = l$ sind die Flächennummern vor der Klammer und $P_k = k$ die Eckennummern in den Klammern (siehe auch Abbildung 2). $l(i,j,k)$ bedeutet $F_l = \triangle(P_i, P_j, P_k)$, wobei die Punkte P_i (obere bzw. obere linke Ecke), P_j (untere bzw. obere rechte Ecke) und P_k (untere linke bzw. untere Ecke), $l = 0,1,2,\dots,79$; $i,j,k = 0,1,2,\dots,41$ die Eckpunkte der Kugeldreiecksfläche F_l sind :

0(0, 1,10), 1(1,11,10), 2(1, 2,11), 3(2,12,11), 4(2, 3,12),
 5(3,13,12), 6(3, 4,13), 7(4,14,13), 8(4, 5,14), 9(5,15,14),
 10(5, 6,15), 11(6,16,15), 12(6, 7,16), 13(7,17,16), 14(7, 8,17),
 15(8,18,17), 16(8, 9,18), 17(9,19,18), 18(9, 0,19), 19(0,10,19),
 20(10,11,20), 21(11,21,20), 22(11,12,21), 23(12,13,21), 24(13,22,21),
 25(13,14,22), 26(14,15,22), 27(15,23,22), 28(15,16,23), 29(16,17,23),
 30(17,24,23), 31(17,18,24), 32(18,19,24), 33(19,20,24), 34(19,10,20),
 35(20,21,25), 36(21,22,25), 37(22,23,25), 38(23,24,25), 39(24,20,25),
 40(26,31,27), 41(26,27,28), 42(26,28,29), 43(26,29,39), 44(26,30,31),
 45(31,41,32), 46(27,31,32), 47(27,32,33), 48(27,33,34), 49(28,27,34),
 50(28,34,35), 51(28,35,36), 52(29,28,36), 53(29,37,38), 54(29,37,38),
 55(30,29,38), 56(30,38,39), 57(30,39,40), 58(31,30,39), 59(31,40,41),
 60(32,41, 5), 61(32, 5, 4), 62(33,32, 4), 63(33, 4, 3), 64(34,33, 3),
 65(34, 3, 2), 66(35,34, 2), 67(35, 2, 1), 68(36,35, 1), 69(36, 1, 0),
 70(37,36, 0), 71(37, 0, 9), 72(38,37, 9), 73(38, 9, 8), 74(39,38, 8),
 75(39, 8, 7), 76(40,39, 7), 77(40, 7, 6), 78(41,40, 6), 79(41, 6, 5),

Es folgen nun Lageberechnungen, um Anforderung (A5) unter Einbeziehung der Anforderungen (A1) und (A2) zu erfüllen:

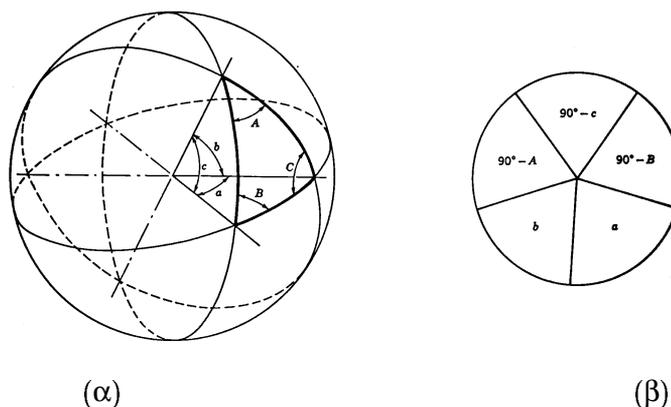


Abb. 3: (α) : Bezeichnungen im sphärischen Kugeldreieck: a, b, c sind die Öffnungswinkel vom Kugelmittelpunkt aus für die Kugeldreiecksseiten; A, B, C die Innenwinkel an den Eckpunkten. (β) : Im rechtwinkligen Kugeldreieck ($C = 90^\circ$) gilt die Napiersche Regel entsprechend der im Kreis eingetragenen auftretenden Winkel: der Sinus eines der eingetragenen Winkel ($a, b, C = 90^\circ - A, C = 90^\circ - c$ und $C = 90^\circ - B$) ist gleich dem Produkt aus den Cosinus der gegenüberliegenden Winkel (entnommen aus Korn & Korn 1968).

Im sphärischen rechtwinkligen Kugeldreieck ABC der Abbildung 3 gilt:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b . \quad (1)$$

Für die Fläche F_{71} , begrenzt durch die Punkte P_{37} , P_0 und P_9 , gilt:

$$\cos(\widehat{P_1, P_{37}}) = \cos 18^\circ \cdot \cos(\widehat{P_{37}, Proj(P_{37} \rightarrow \text{Äquator})})$$

$\widehat{P_1, P_{37}}$ bedeutet den Großkreisbogen von P_1 nach P_{37} und ist gerade die halbe Bogenlänge des Ikosaederdreiecks auf der Kugel, also gilt:

$$\widehat{P_1, P_{37}} + \widehat{P_{37}, Proj} = 90^\circ$$

wobei $Proj = Proj(P_{37} \rightarrow \text{Äquator})$ die Projektion des Punktes P_{37} längs des Großkreises auf den Äquator bedeutet. Eine gute Näherung ist

$$\widehat{P_{37}, Proj} \approx 26.6^\circ,$$

denn

$$\cos 26.6^\circ \cdot \cos 18^\circ \approx 0.8503 \approx \cos 31.7^\circ$$

und

$$26.6^\circ + 2 * 31.7^\circ = 90^\circ.$$

Damit folgt in $F_{51} \cup F_{52} \cup F_{53} \cup F_{42}$ wegen Gleichung (1)

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{P_{36}, P_{26}}) &= \frac{\cos 63.4^\circ}{\cos 31.7^\circ} \\ &= 0.526, \end{aligned} \tag{2}$$

also $\widehat{P_{36}, P_{26}} = 58.2^\circ$, d. h. $P_{36} = (31.8^\circ, 0^\circ)$ und $P_{37} = (26.6^\circ, 0^\circ)$, wie in Abschnitt 2.5.2 schon erwähnt. Ich vereinfache dies jetzt zu der Näherung

$$\begin{aligned} \varphi_{32} = \varphi_{33} = \dots = \varphi_{41} &= 28^\circ \\ \varphi_{10} = \varphi_{11} = \dots = \varphi_{19} &= -28^\circ \\ \varphi_{27} = \varphi_{28} = \dots = \varphi_{31} &= 60^\circ \\ \varphi_{20} = \varphi_{21} = \dots = \varphi_{24} &= -60^\circ \end{aligned}$$

Die Anforderung (A5) kann ich also jetzt leicht erfüllen, da es wegen

$$\begin{aligned} \varphi < 60^\circ &: F_{35}, F_{36}, \dots, F_{39} \\ \varphi \in [-60^\circ, -28^\circ] &: F_{20}, F_{21}, \dots, F_{34} \\ \varphi \in [-28^\circ, 0^\circ) &: F_0, F_1, \dots, F_{19} \\ \varphi \in (0^\circ, 28^\circ) &: F_{60}, F_{61}, \dots, F_{79} \\ \varphi \in [28^\circ, 60^\circ] &: F_{45}, F_{46}, \dots, F_{59} \\ \varphi > 60^\circ &: F_{40}, F_{41}, \dots, F_{44} \end{aligned}$$

jetzt einfach ist zu entscheiden, in welchen der durch die Breitenkreise $\varphi = 0^\circ$, $\varphi = \pm 28^\circ$ und $\varphi = \pm 60^\circ$ begrenzten Streifen auf der Kugel der Strahl fällt.

Die Rechtfertigung bzgl. der Anforderungen (A1) und (A2) ergibt sich aus folgender Flächenberechnung (es steht F_i für den Flächeninhalt der vereinfachten, d. h. der für den Entscheidungsalgorithmus geänderten Flächen; als Einheiten kann ich die Winkelgrade verwenden, da ich nur untereinander vergleiche):

$$\begin{aligned}
 F_0 = F_{69} = F_2 = \dots = F_{71} &= \frac{1}{2} \cdot 28^\circ \cdot 36^\circ \quad (\# = 20) \\
 \approx F_{68} = F_{70} = F_1 = \dots = F_{66} &\lesssim F_0 \quad (\# = 20) \\
 F_{51} = F_{53} = F_{20} = F_{22} = \dots = F_{34} &\gtrsim \frac{1}{2} \cdot 32^\circ \cdot \text{red}36_{28}^\circ \quad (\# = 20) \\
 F_{52} = F_{55} = F_{21} = F_{24} = \dots = F_{33} &\lesssim \frac{1}{2} \cdot 32^\circ \cdot \text{red}72_{60}^\circ \quad (\# = 10) \\
 \approx F_{40} = F_{35} = F_{41} = F_{36} = \dots = F_{39} &\gtrsim \frac{1}{2} \cdot 30^\circ \cdot \text{red}72_{60}^\circ \quad (\# = 10)
 \end{aligned}$$

$\text{red}\lambda_\varphi$ bedeutet den in der Breite φ durch einen Längenöffnungswinkel λ erzeugten Bogen (siehe Abbildung 4), als Großkreisbogen mit $e(\lambda_\varphi)$ bezeichnet und als Breitenkreisbogen (Kleinkreis) mit $\hat{e}(\lambda_\varphi)$. # steht für Anzahl, \gtrsim und \lesssim soll dabei zusätzlich zu größer und kleiner ungefähr gleich bedeuten.

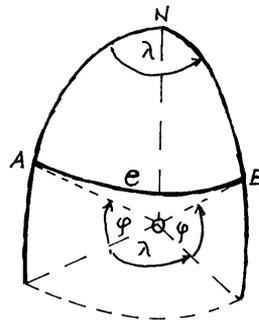


Abb. 4: Skizze zum Seitencosinussatz (3); $e = \text{red}\lambda_\varphi$ ist der Großkreisbogen von A nach B in der Breite φ erzeugt durch einen Längenöffnungswinkel λ .

Nach dem Seitencosinussatz gilt für die reduzierten Winkel $\text{red}\lambda_\varphi$ (siehe Abbildung 4)

$$\cos e = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cdot \cos \lambda \quad . \quad (3)$$

Dies liefert

$$e(72_{60}^\circ) \approx 34^\circ \quad , \quad e(36_{28}^\circ) \approx 31.5^\circ \quad .$$

Für den Großkreis gilt Gleichung (3) und für den Kleinkreis

$$\hat{e}(\lambda_\varphi) = \frac{\pi \cdot \lambda}{180^\circ} \cdot \cos \varphi \quad .$$

Dies ergibt bei $\text{red}72_{60}^\circ$ für den Großkreis 34° und für den Kleinkreis 36° und bei $\text{red}36_{28}^\circ$ für den Großkreis und für den Kleinkreis jeweils 31.5° ². Für vierzig Flächen erhalte ich jeweils 504 Flächeneinheiten (wie oben erwähnt in Winkelgraden), für zehn Flächen 540, für weitere zehn Flächen 528 und für die restlichen zwanzig Flächen wieder 504 Flächeneinheiten, d. h. die maximalen Abweichungen liegen

²Je näher der Breitenkreis dem Äquator rückt, desto stärker nähert er sich dem zugehörigen Großkreisbogen an, der sich dadurch auszeichnet, die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Kugel zu bilden.

bei 7 % (gegenüber von 10 % im Falle der exakten Einteilung). Diese Abweichungen sind tolerabel und werden bei der Auswertung als Gewichtskorrekturen berücksichtigt.

Da achtzig Teilflächen für meine Zwecke ausreichen und ich auch eine Nachbarschaftsliste für alle Teilflächen einfach aufstellen kann, habe ich die Anforderungen (A1) - (A6) erfüllt.

Um innerhalb der Breitenstreifen zu entscheiden, in welche Teilfläche dieses Streifens der Strahl trifft, ist die folgende Untersuchung durchzuführen (N_f steht dabei für Flächennummer). Die Abbildungen 5 und 8 zeigen die Verhältnisse in den dem Äquator benachbarten Streifen. Die Begrenzung der Teilflächen bilden dabei die Kreisbögen

$$\frac{\lambda - k \cdot 18^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi}{28^\circ}$$

und

$$\frac{\lambda - k \cdot 18^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi + 28^\circ}{28^\circ}$$

für $k = 1, 3, 5, \dots, 19$ unterhalb des Äquators (s. Abbildung 5) bzw.

$$\frac{\lambda - j \cdot 18^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi}{28^\circ}$$

und

$$\frac{\lambda - j \cdot 18^\circ}{18^\circ} - \frac{\varphi}{28^\circ}$$

für $j = 0, 2, 4, \dots, 18$ oberhalb des Äquators (s. Abbildung 8).

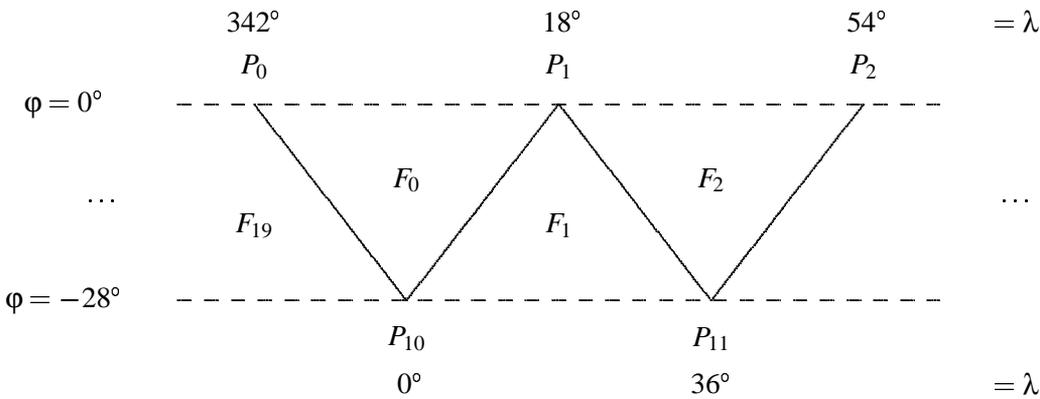


Abb. 5: Skizze zu $\varphi \in (-28^\circ, 0^\circ)$

Für die Entscheidung, auf welcher Seite des jeweiligen Trennbogens die vorgegebene Richtung liegt und damit in welche Teilfläche sie fällt, ergibt sich gemäß Abbildung 5 im Streifen unterhalb des Äquators, also zwischen 0° und -28° :

$$\lambda \in (18^\circ, 36^\circ) : \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda - 18^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi}{28^\circ} > 0 \\ \frac{\lambda - 18^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi}{28^\circ} < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} : N_f = 2 \\ : N_f = 1 \end{array}$$

$$\lambda \in (36^\circ, 54^\circ) : \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda - 54^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi + 28^\circ}{28^\circ} < 0 \\ \frac{\lambda - 54^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi + 28^\circ}{28^\circ} > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} : N_f = 2 \\ : N_f = 3 \end{array}$$

⋮

$$\lambda \in (342^\circ, 360^\circ) : \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda - 342^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi}{28^\circ} > 0 \\ \frac{\lambda - 342^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi}{28^\circ} < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} : N_f = 0 \\ : N_f = 19 \end{array}$$

$$\lambda \in (0^\circ, 18^\circ) : \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda - 18^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi + 28^\circ}{28^\circ} \\ \phantom{\frac{\lambda - 18^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi + 28^\circ}{28^\circ}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} < 0 : N_f = 0 \\ > 0 : N_f = 1 \end{array}$$

Die Abbildungen 6 und 7 zeigen die Gegebenheiten im mittleren Streifen der unteren bzw. oberen Halbkugel; dabei sind die Abbildungen 6a und 7 in Mercator-Projektion ausgeführt, da diese die für den Algorithmus wichtigen Zusammenhänge am besten darstellt. Weil diese aber nicht flächentreu ist und in mittleren Breitenbereichen schon sehr stark verzerrt (F_{21} wirkt doppelt so groß wie F_{20}), sind die gleichen Verhältnisse in Abbildung 6b noch einmal in einer nahezu flächentreuen der stereographischen ähnlichen Projektion wiedergegeben. Da in den mittleren Streifen der unteren und oberen Halbkugel zum einen die Längengrade eine einfache Entscheidung z. B. zwischen F_{22} und F_{23} ermöglichen, verbleiben nur noch die Entscheidungen zwischen den Flächen, die mit der Spitze nach oben (im unteren Streifen, Abbildung 6a) bzw. nach unten (im oberen Streifen, Abbildung 7) weisen, und ihren Nachbarn. Dafür liegen die folgenden Kreisbögen als Begrenzungen zugrunde:

$$\begin{array}{l} \frac{\lambda - j \cdot 72^\circ}{36^\circ} + \frac{\varphi + 28^\circ}{32^\circ} \\ \frac{\lambda - j \cdot 72^\circ}{36^\circ} + \frac{\varphi + 60^\circ}{32^\circ} \end{array}$$

für $j = 0, 1, 2, 3, 4$ auf der unteren Halbkugel (s. Abbildung 6a) bzw.

$$\begin{array}{l} \frac{\lambda - (k + \frac{1}{2})72^\circ}{36^\circ} + \frac{\varphi - 28^\circ}{32^\circ} \\ \frac{\lambda - (k + \frac{1}{2})72^\circ}{36^\circ} + \frac{\varphi - 60^\circ}{32^\circ} \end{array}$$

für $k = 0, 1, 2, 3, 4$ auf der oberen Halbkugel (s. Abbildung 7). Da diese Kreisbögen keine Großkreise sind und die mit ihrem Schwerpunkt dem Äquator näherliegenden ohnehin kleineren Flächen zusätzlich benachteiligen, korrigiere ich die Terme mit φ in den Kreisbögen, so daß eine fast genaue Flächengleichheit (für dann nur noch angenäherte Dreiecke) in dem mittleren Streifen erreicht wird – getestet anhand von einem durch Zufallszahlen gewonnenen gleichverteilten Richtungsfeldes – in der Form

$$\frac{\varphi + 22^\circ}{32^\circ} \text{ und } \frac{\varphi + 64^\circ}{32^\circ} \text{ bzw. } \frac{\varphi - 22^\circ}{32^\circ} \text{ und } \frac{\varphi - 64^\circ}{32^\circ}$$

Für die Entscheidung, in welche Teilfläche eine vorgegebene Richtung fällt, d. h. auf welcher Seite des jeweiligen Trennbogens sie liegt, gilt gemäß Abbildung 6a im mittleren Streifen unterhalb des Äquators, also zwischen -28° und -60° :

$$\begin{array}{l} \lambda \in (0^\circ, 36^\circ) : \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda}{36^\circ} + \frac{\varphi + 22^\circ}{32^\circ} \\ \phantom{\frac{\lambda}{36^\circ} + \frac{\varphi + 22^\circ}{32^\circ}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} < 0 : N_f = 20 \\ > 0 : N_f = 21 \end{array} \\ \lambda \in (36^\circ, 72^\circ) : \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda - 72^\circ}{36^\circ} + \frac{\varphi + 64^\circ}{32^\circ} \\ \phantom{\frac{\lambda - 72^\circ}{36^\circ} + \frac{\varphi + 64^\circ}{32^\circ}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} < 0 : N_f = 21 \\ > 0 : N_f = 22 \end{array} \\ \vdots \\ \lambda \in (324^\circ, 360^\circ) : \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda - 360^\circ}{36^\circ} + \frac{\varphi + 64^\circ}{32^\circ} \\ \phantom{\frac{\lambda - 360^\circ}{36^\circ} + \frac{\varphi + 64^\circ}{32^\circ}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} < 0 : N_f = 33 \\ > 0 : N_f = 34 \end{array} \end{array}$$

Auf den Kugelkappen (also $\varphi < -60^\circ$ auf der unteren und $\varphi > 60^\circ$ oberen Halbkugel) sind die Unterteilungen durch die Längengrade gegeben (s. Abbildung 2). Im Streifen um den Südpol, also zwischen

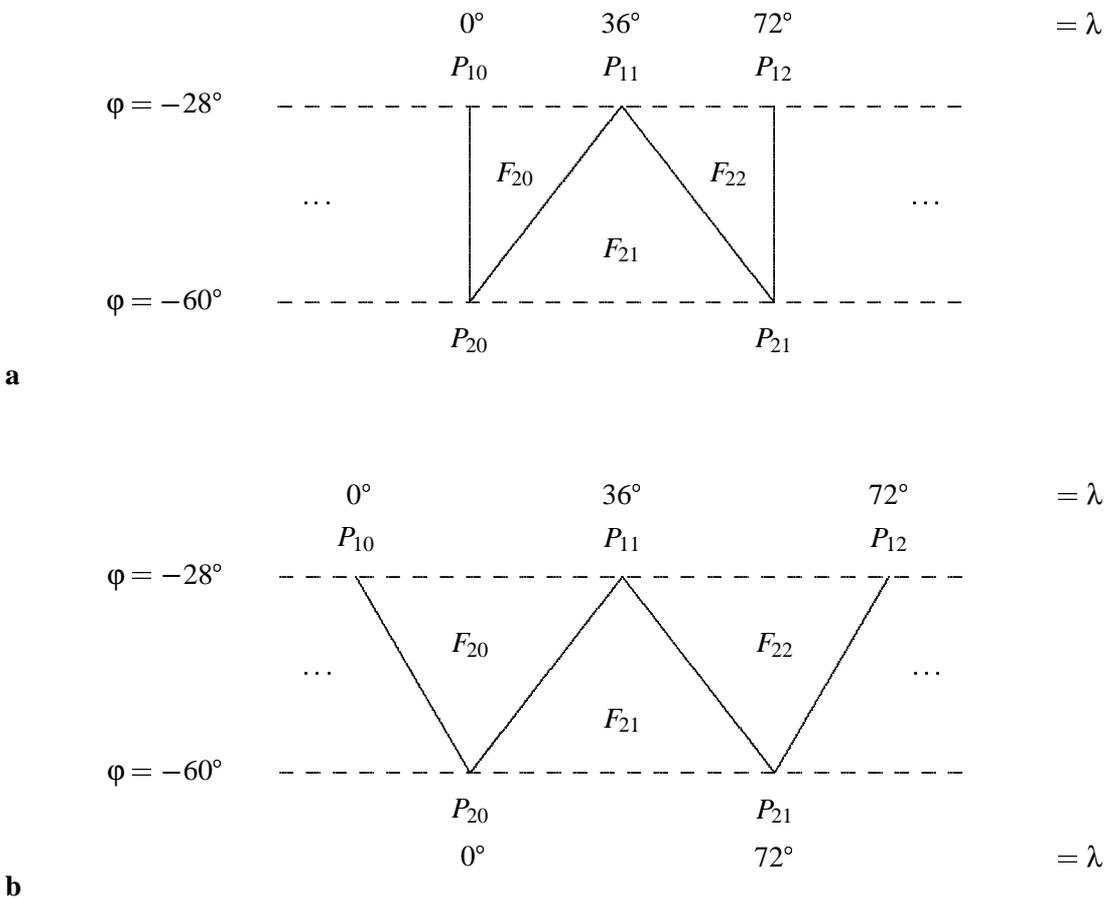


Abb. 6: Skizze zu $\varphi \in (-60^\circ, -28^\circ)$; **(a)** in Mercator-Projektion, **(b)** in einer etwa flächentreuen der stereographischen ähnlichen Projektion.

-60° und -90° gilt:

$$\varphi < -60^\circ : N_f = \left\lceil \frac{\lambda}{72^\circ} \right\rceil + 35,$$

d.h. $N_f = 35, 36, \dots, 39$. Im Streifen um den Nordpol, also zwischen 60° und 90° setze ich

$$\tilde{\lambda} = \lambda, \text{ und für } \lambda < 180^\circ : \tilde{\lambda} = \lambda + 360^\circ;$$

dann gilt:

$$\varphi > 60^\circ : N_f = 46 - \left\lceil \frac{\tilde{\lambda} - 36^\circ}{72^\circ} \right\rceil,$$

d.h. $N_f = 40, 41, \dots, 44$.

Gemäß Abbildung 7 gilt im mittleren Streifen oberhalb des Äquators, also zwischen 28° und 60° :

$$\lambda \in (144^\circ, 180^\circ) : \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda - 180^\circ}{36^\circ} + \frac{\varphi - 22^\circ}{32^\circ} > 0 : N_f = 45 \\ < 0 : N_f = 46 \end{array} \right\}$$

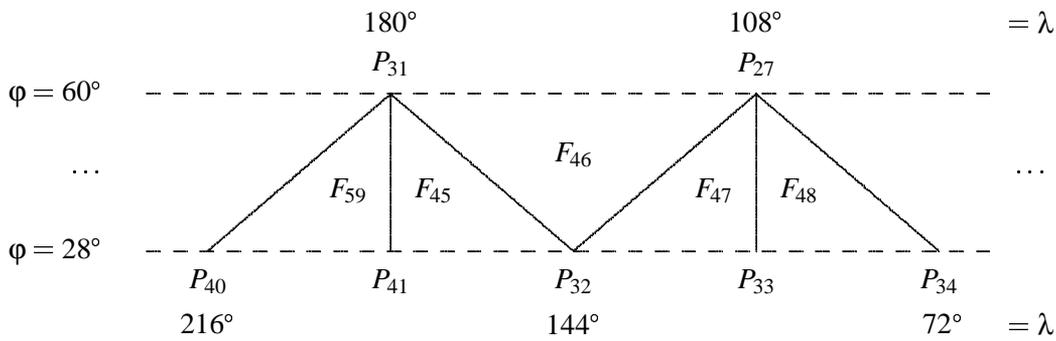


Abb. 7: Skizze zu $\varphi \in (28^\circ, 60^\circ)$ in Mercator-Projektion.

$$\lambda \in (108^\circ, 144^\circ) : \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda - 108^\circ}{36^\circ} + \frac{\varphi - 64^\circ}{32^\circ} \\ \phantom{\frac{\lambda - 108^\circ}{36^\circ} + \frac{\varphi - 64^\circ}{32^\circ}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} > 0 : N_f = 46 \\ < 0 : N_f = 47 \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\lambda \in (180^\circ, 216^\circ) : \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda - 180^\circ}{36^\circ} + \frac{\varphi - 64^\circ}{32^\circ} \\ \phantom{\frac{\lambda - 180^\circ}{36^\circ} + \frac{\varphi - 64^\circ}{32^\circ}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} > 0 : N_f = 58 \\ < 0 : N_f = 59 \end{array}$$

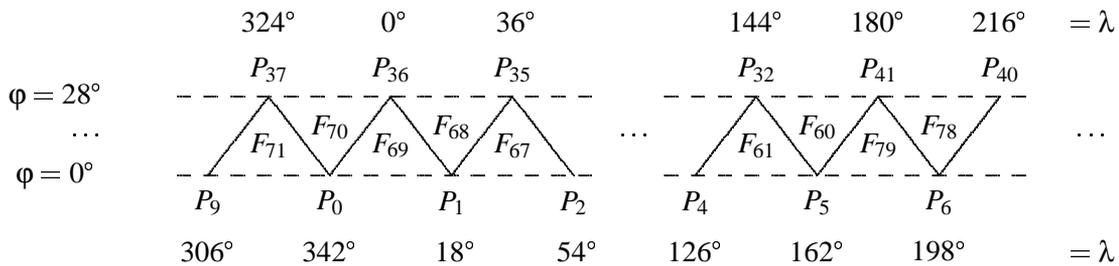


Abb. 8: Skizze zu $\varphi \in (0^\circ, 28^\circ)$

Gemäß Abbildung 8 gilt im Streifen oberhalb des Äquators, also zwischen 0° und 28° :

$$\lambda \in (144^\circ, 162^\circ) : \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda - 144^\circ}{18^\circ} - \frac{\varphi}{28^\circ} \\ \phantom{\frac{\lambda - 144^\circ}{18^\circ} - \frac{\varphi}{28^\circ}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} < 0 : N_f = 61 \\ > 0 : N_f = 60 \end{array}$$

$$\lambda \in (126^\circ, 144^\circ) : \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda - 144^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi}{28^\circ} \\ \phantom{\frac{\lambda - 144^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi}{28^\circ}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} > 0 : N_f = 61 \\ < 0 : N_f = 62 \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\lambda \in (162^\circ, 180^\circ) : \left. \begin{array}{l} \frac{\lambda - 180^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi}{28^\circ} \\ \phantom{\frac{\lambda - 180^\circ}{18^\circ} + \frac{\varphi}{28^\circ}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} > 0 : N_f = 79 \\ < 0 : N_f = 60 \end{array}$$

Wie in Kapitel 2.5.2 ausgeführt, wurde der Algorithmus mit einem aus Zufallszahlen gewonnenen gleichverteilten Richtungsfeld erfolgreich getestet.