II. SEMIOTISCHE ANALYSE –
BESCHREIBBARKEIT UND BERECHENBARKEIT

1. Emanzipation der Schrift von der Sprache

1.1 Abecedarium Novum Naturae, Charactersitica Universalis, Begriffsschriften

Es ist viel über die Sprache und ihre Verwendung philosophiert worden, doch seltener wird der Tatsache volle Aufmerksamkeit geschenkt, daß es die geschriebene Sprache ist, die wir dabei vor Augen haben. Vor allem jene Überlegungen basieren auf einer verschrifteten Sprache, die sich mit der Verwendung der Sprache in den Wissenschaften befassen und gegebenenfalls formalsprachliche Ansätze zu etablieren versuchen.[1] So schlägt bereits Francis Bacon eine *Sprachtherapie* auf der Basis von Schriftzeichen vor, welche die Mehrdeutigkeit und Fiktionalität der Wörter kurieren und damit den Gebrauch falscher Ideen unterbinden solle.[2] Dabei denkt er an die Einführung von Charakteren ähnlich den Zahlen, die unabhängig von den gesprochenen Sprachen als geschriebene Zeichen nahezu universell verstehbar sein sollen. Auf Basis solcher Zeichen sollte sein *Abecedarium Novum Naturae* als Begriffsschrift der exakten Indexierung des Wissens dienen.[3] Einen großangelegten Entwurf zu einer *characteristica universalis* und einer *scientia generalis* versuchte Gottfried W. Leibniz. Dazu diente ihm die Organisation der Alphabetschrift als Metapher, denn die Begriffe sollten sich in einem Alphabet des Denkens ordnen lassen. Die characteristica universalis ist als ein Werkzeug zu verstehen, welches die Denkprozesse durch die Zeichenverwendung versinnbildlichen, also visuell verding-

[1] Beispielsweise: Wittgenstein, L.: Tractatus logico-philosophicus, 1997; Carnap, R.: Der logische Aufbau der Welt, 1961; Popper, K.: Logik der Forschung, 1989; Waismann, F.: Logik, Sprache, Philosophie, 1976; Quine, W.v.: Wort und Gegenstand, 1980; Langer, S.: Philosophie auf neuem Wege, 1979

[2] „*Daher knebelt die schlechte und törichte Zuordnung der Worte den Geist auf merkwürdige Art und Weise. Auch die Definitionen oder Bezeichnungen, mit denen sich die Gelehrten in einigen Punkten zu schützen und zu verteidigen pflegen, bessern die Sachlage keineswegs*." Bacon, F.: Novum Organon I, 1990, S. 103

[3] Francis Bacon hatte dabei weniger Zahlzeichen vor Augen, als vielmehr chinesische Schriftzeichen, die sich für ihn dadurch auszeichnen, daß sie sich direkt auf Objekte beziehen und als Schriftzeichen – unabhängig von der unterschiedlichen Aussprache - sowohl von den Chinesen als auch von den Japanern gelesen werden können. Vrgl. Eco, U.: Die Suche nach der vollkommenen Sprache, 1997, S. 218ff. „*Bacon dachte nicht an ein Schriftzeichen, das ein Abbild der bezeichneten Sache liefert oder gar ihr Wesen enthüllt; sein Charakter ist ein konventionelles Zeichen, das sich jedoch auf einen präzisen Begriff bezieht. Sein Problem bestand darin, ein Alphabet der Grundbegriffe zu konstituieren, und in diesem Sinne war sein 1622 zusammengestelltes Abecedarium Novum Naturae, das im Anhang seiner Historia naturalis et experimentalis figurieren sollte, ein Versuch der Indexierung des Wissens* ..." Eco, 1997, S. 221. Auf eine Schriftsprache mit Charakteren ähnlich der algebraischen oder arithmetischen weist auch 1654 John Webster in seinem Academiarum examen hin. Vrgl. Eco, 1997, S. 226; Meier-Oeser, S.: Die Entlastung von der Mühsamkeit des Denkens, 1993. Die Idee einer Begriffsschrift wie sie bereits zu jener Zeit diskutiert wurde, birgt weniger das Problem in sich geeignete Schriftzeichen zu entwerfen, als vielmehr diese auszusprechen. Denn wie Rene Descartes hinweist „...w*enn einer sich für die Elementarbegriffe der Synonyme in seiner eigenen Sprache bediente, würde er von den anderen Völkern nicht verstanden, es sei denn, er drückte sich schriftlich aus*;" Descartes Gedankengang wird zitiert nach: Eco, 1997, S. 225

lichen sollte, denn das Typische der Charaktere sei ihre sinnlich wahrnehmbare Gestalt.[4] „*Das Ziel unserer Charakteristik ist, so beschaffene Sinnzeichen anzuwenden, daß alle Folgerungen, die aufgestellt werden können, sogleich aus den Wörtern oder Charakteren selbst hervorgehen*; ... *in der allgemeinen Sprache muß sie* [die Folgerung] *aus einer Zerlegung der Wörter in ihre Buchstaben bewiesen werden können* ...“[5] Im Mittelpunkt dieser Bemühungen steht die symbolische Erkenntnis, die sich der Schriftzeichen bedient und in der Mathematik als verwirklicht gilt, denn „...*menschliches Denken wird durch Zeichen vollbracht.*“[6] Dabei bedarf die rationale Durchdringung der Welt, wie sie Leibniz und anderen als Vision vorschwebt, der Schrift, um ein symbolisches Abbild zu schreiben und die Relationen der Dinge zu spiegeln. Denn es seien die Gesetze des Denkens, die sich in den Zeichen und Zeichenrelationen symbolisieren ließen, wie George Boole darlegte,[7] und er weist ausdrücklich darauf hin: „*In the present treaties, however, it is with written signs that we have to do, and it is with reference to these exclusively that the term „sign“ will be employed*.“[8] Auch Gottlob Frege ist sich der „...*Vortheile einer angemessenen Bezeichnungsweise*“[9] bewußt und würdigt das Programm einer allgemeinen Charakteristik von Leibniz, auch wenn es ihn *riesenhaft* anmutet. Doch: „*Man kann in den arithmetischen, geometrischen, chemischen Zeichen Verwirklichungen des Leibnizschen Gedankens für einzelne Gebiete sehen. Die hier vorgeschlagene Begriffsschrift fügt diesen ein neues hinzu* ...“[10]

1.2 Sprachspiele

Weitere Beispiele ließen sich anfügen, doch diese Hinweise sollen genügen, um auf die Relevanz der Schrift für die Versuche der Konstruktion einer eindeutigen Sprache im Dienste der Wissenschaft aufmerksam zu machen, unabhängig davon, ob es sich um eine zu konstruierende Begriffsschrift handelt oder um eine rein formale Verwendung der Zeichen wie in der Algebra oder der formalen Logik. Sie sollten auch genügen, um die philosophisch motivierte Frage nach dem zu stellen, was die

[4] „*Neben Buchstaben und mathematischen Zeichen können auch geometrische Figuren, Bilder oder Modelle Charaktere sein.*“ Peckhaus, V.: Logik, Mathesis universalis und die allgemeine Wissenschaft: Leibniz und die Wiederentdeckung der formalen Logik im 19. Jahrhundert, 1997, S. 32
[5] Leibniz, G.W.: Fragmente zur Logik, 1960, S. 93
[6] Leibniz, G.W.: Die philosophischen Schriften, Bd. 7, 1973, S. 204. „*Zu diesem „Leibnizprogramm“ gehören als Hilfsmittel eine characteristica universalis, welche alle Relationen zwischen Dingen in Relationen zwischen Zeichen zu spiegeln erlaubt; eine logica inventiva, welche ausgehend von den einfachsten Relationsaussagen der Reihe nach alle Wahrheiten liefert, ferner als calculus ratiocinator ein Folgerungskalkül, in dem alle Schritte als bloß syntaktische Umformungen von Zeichenreihen geschehen, und eine ars iudicandi, die sachliche Meinungsverschiedenheiten durch Bereitstellung eines rein formalen und voll kontrollierbaren Entscheidungsverfahrens beilegen kann*.“ Thiel, Ch.: Kurt Gödel: Die Grenzen der Kalküle, 1992, S. 174
[7] „*1st. Literal symbols, as x, y, &c., representing things as subjects of our conceptions. 2nd. Signs of operation, as +, -,* x, *standing for those operations of the mind by which the conceptions of things are combined or resolved so as to form new conceptions involving the same elements. 3rd. The sign of identity, =*.“ Boole, G.: The Laws of Thought, o.Dat, S. 27
[8] Boole, o.Dat, S. 25
[9] Frege, G.: Begriffsschrift und andere Aufsätze, 1964, S. XI
[10] Frege, 1964, S. XII

Schrift ist und wie sie verwendet wird. Denn, wie Susanne Langer anführt, „... *steht das Gebäude menschlichen Wissens nicht mehr als eine ungeheure Sammlung von Sinnesmitteilungen vor uns, sondern als ein Gebäude aus Tatsachen, die Symbole, und Gesetzen, die deren Bedeutung sind. Ein neues philosophisches Thema ist für die Zukunft angeschlagen, ein erkenntnistheoretisches Thema, das Verständnis der Wissenschaft. Sein Stichwort ist die Macht des Symbolismus, so wie die Endgültigkeit der Sinnesdaten das einer früheren Epoche war.* “[11] Die Symbole sind die neuen Daten, aus welchen sich die *Tatsachen* der Wissenschaften berechnen lassen.[12] Aus der mathematischen Grundlegung der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, resultiert nicht nur eine spezifische Weltanschauung, sondern auch die semiotische Fundierung der Wissenschaften auf der Basis der Schrift. Mittlerweile hat sich die Schrift in diesem Prozeß jedoch so weit von der Sprache emanzipiert, daß das *Spiel* – die Herkunft der Schrift, wie Jaques Derrida es sieht – heute „... *zu sich selbst* [kommt]*, indem es die Grenze auslöscht, von der aus man die Zirkulation der Zeichen meinte regeln zu können, indem es alle noch Sicherheit gewährenden Signifikate mit sich reißt, alle vom Spiel noch nicht erfaßten Schlupfwinkel aufstöbert und alle Festen schleift, die bis dahin den Bereich der Sprache kontrollierten*.“[13] Es gäbe also verschiedene Gründe, die Schrift in den Mittelpunkt einer philosophischen Untersuchung zu stellen. Denn einerseits wirkt sie normierend auf die Sprache ein, wie die skriptographische und die typographische Revolution zeigen,[14] andererseits ist sie das Instrument symbolischer Erkenntnis. Doch es zeichnet sich noch ein weiterer Grund ab, der aus der aktuellen Entwicklung der Computertechnologie resultiert und Derridas Überlegung eine interessante Wendung gibt. Computer - selbst semiotische Maschinen, die im Verständnis von Alan Turing auf der Idee einer schriftbasierten Zeichenverwendung gründen[15] - eröffnen durch ihre enorme Rechenkapazität eine neue Verwendungs- und Darstellungsweise der Schrift. Damit ist nicht die Imitation des Schreibens mit Hilfe von Textverarbeitungsprogrammen oder eine neue Form von Textualität durch das Prinzip des Hypertexts gemeint, sondern die semiotische Modellierung von Objekten und Prozessen auf Basis der numerischen Simulation. Mit der Simulation findet die Schrift insofern zu sich selbst, als sie sich des sprachlich orientierten Symbolcharakters entledigt und vom Medium zum Objekt semiotischer Operationen avanciert.

[11] Langer, S.: Philosophie auf neuem Wege, 1979, S. 29
[12] „*Was sich direkt beobachten läßt, ist nur ein Zeichen der »physikalischen Tatsache«; es erfordert Deutung, um wissenschaftliche Aussagen herzugeben*.“ Langer, 1979, S. 29
[13] Derrida, J.: Grammatologie, 1974, S. 17/18
[14] Derrida, 1974; Coulmas, F.: Über Schrift, 1981; Feldbusch, E.: Geschriebene Sprache, 1985; Ong, W.: Oralität und Literalität, 1987; Stetter, Ch.: Schrift und Sprache, 1997; Giesecke, M.: Sinnenwandel, Sprachwandel, Kulturwandel, 1992
[15] Der Mechanismus der Turingmaschine basiert auf der Idee der sukzessiven Verarbeitung von Schriftzeichen. „*Turing greift dazu auf seine Schulzeit zurück und beschreibt den Vorgang des Rechnens als Notieren von Zahlen nach festen Regeln in den Rechenkästchen karierter Schulhefte*.“ Coy, W.: Gutenberg und Turing: Fünf Thesen zur Geburt der Hypermedien, 1994, S. 71. „*The machine is supplied with a „tape“ (the analogue of paper) running through it, and divided into sections (called „squares“) each capable of bearing a „symbol“.“* Turing, A.: On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem, 1964, S. 116

1.3 Digitale Zeichen und semiotische Partikel

Vorbereitet wird diese Entwicklung durch die Formalisierung und Mechanisierung der Zeichenverwendung.[16] Während die Formalisierung in der interpretationsfreien und operativen Verwendung der Schrift besteht,[17] delegiert die Mechanisierung die Ausführung der Zeichenoperationen an das maschinelle Medium des Computers. Dabei werden die Zeichen selbst als *digitale Zeichen* in Form unanschaulicher Zustände operationalisiert. Schließlich erlaubt die numerische Simulation die semiotische Modellierung als direktes Operieren auf den Zuständen, denn die digitalen Zeichen werden zu formbaren Objekten der Symbolmanipulation. Visualisiert auf Basis von Farbwertzuordnungen bilden sie die *semiotischen Partikel* der virtuellen Welten. Die aktuellen Rechnergeschwindigkeiten von über eine Milliarde Operationen in der Sekunde ermöglichen die Erzeugung und Umformung enormer Mengen digitaler Zeichen und sorgen so für die semiotische Fülle, die notwendig ist, um einen ikonischen Eindruck dieser Welten zu generieren.[18] Die Einsichten, die sich mit diesen Bildern eröffnen, verweisen auf den formal-operativen Erzeugungsmechanismus der entfalteten Datenfluten, wir jedoch glauben Moleküle, Wetterfronten oder Strömungsturbulenzen darin zu erkennen. Doch was haben diese Bilder mit der Schrift zu tun? Dieser Frage nachzugehen ist Thema der Analyse der Zeichensysteme und ihres Wandels von der Beschreibbarkeit zur Simulierbarkeit.

2. Zeichensysteme und Zeichen

2.1 Typographische Grundeinheiten der Alphabetschrift

Unbestreitbar hat die Schrift die Externalisierung des Wissens durch die Fixierung, Speicherung und jederzeit verfügbaren Präsentation auf einem Trägermedium zur Folge. Aber sie ist auch die Voraussetzung der Formalisierung und Kalkülisierung des Symbolgebrauchs und damit der Externalisierung ihrer eigenen Verwendungsweise, die sich in der intrasymbolischen Relevanz der Zeichen zeigt. Die Sichtbarmachung semantischer Einheiten mit Folgen von Zeichen einer Alphabetschrift führt zur Linearisierung der Informationsdarstellung und diese legt die Idee nahe, das Verfahren der Erzeugung von

[16] Vrgl. Krämer, S.: Symbolische Maschinen, 1988; Heintz, B.: Die Herrschaft der Regel, 1993; Mainzer, K.: Computer – Neue Flügel des Geistes?, 1995; Fischer, M.: Schrift als Notation, 1997, S. 81 – 98

[17] Operationszeichen wie +, -, $\supseteq$, $\subseteq$, $\in$, $\wedge$ oder $\vee$ symbolisieren Operationsvorschriften und nicht Objekte. Die Variablen werden formal verwendet und können auf beliebige Objekte oder Zustände bezogen werden.

[18] Die semiotische Fülle diskreter Werte simuliert dabei eine syntaktische Dichte, die laut Nelson Goodman die Voraussetzung ikonischer Darstellungsformen ist. Vrgl. Goodman, N.: Sprachen der Kunst, 1995, S. 133ff

Zeichenfolgen zu schematisieren. Der visuelle Dingcharakter lenkt die Aufmerksamkeit auf die Zeichen selbst und gibt damit den Weg zur Abkopplung der Signifikanten von den Signifikaten frei. Dieser Übergang - von der referentiellen zur formalen Verwendung der Ausdrücke als bloße Zeichenfolgen - ist ein wichtiger Schritt in der Symbolverwendung und hat tiefgreifende Folgen für den Zeichengebrauch.[19] Denn er geht mit der Emanzipation der Schrift von der Sprache einher, [20] insofern die Entkopplung von den extrasymbolischen Bezügen die Loslösung von der Lesbarkeit der Zeichenfolgen zur Folge hat. Denn selbst wenn Buchstaben verwendet werden, wären diese zwar lesbar, doch ohne Semantik verlöre die Lesbarkeit ihre Bedeutung, d.h. die Verwendung ist eine rein schriftbezogene. In diesem Sinne unlesbare Schrift läßt sich jedoch nicht mehr als Supplement der Rede zur Reproduktion von Lauten und entsprechenden Sinneinheiten verstehen. Vielmehr gewinnt sie als Grundlage von Kalkülen oder formalen Sprachen an Eigenständigkeit und übernimmt produktive Aufgaben, indem sie operativ zur Zeichenproduktion verwendet wird.[21]

Diese Entwicklung fußt wesentlich auf dem hohen Abstraktionsgrad der Alphabetschrift. Die Buchstabenschrift ist zwar nur eine Möglichkeit der skriptographischen Umsetzung oral vermittelter Zeichen. Piktogramme, Ideogramme, Silbenschriften dienen dem selben Zweck und zumeist sind Schriften hybride Systeme. Doch das Prinzip des Alphabets erzeugt Bedingungen und Normierungen, welche die Idee der Formalisierung und Mechanisierung des Zeichenumgangs fördern. Die Normierungsleistung des Alphabets zeigt sich in verschiedenen Aspekten. Zum einen bezüglich der Übersetzbarkeit zahlreicher Sprachen auf der Basis des Alphabets, zum anderen aufgrund der einfachen Lehrbarkeit, die das Schreiben des elitären Anspruchs enthebt. Vor allem jedoch in ihrem Prinzip der Zeichenverwendung, denn mit dem griechischen Alphabet, das erstmals die Vokale verschriftet, gelingt die „ ... *fast totale Transformation des Wortes aus dem Klang ins Sichtbare* ...“[22] und damit die Reduktion von Schriftsprache auf kleinste Einheiten. Dazu wird die lautliche Einheit des Wortes in Teile zerlegt und

---

[19] In ihren Studien hat Sybille Krämer auf diesen Wandel aufmerksam gemacht: Die Entdeckung der symbolischen Differenz zwischen Ausdruck und Gegenstand in der Antike, die ontologische Legitimierung der Zeichenfolgen als Ausdrücke und die Verdrängung des ontologischen durch einen operativen Symbolismus läßt sich von Platon und Aristoteles, über die mittelalterliche orientalische und abendländische Mathematik und Philosophen wie Raimundus Lullus oder Gottfried W. Leibniz, bis zur neuzeitlichen Logik und Mathematik von George Boole, Gottlob Frege oder David Hilbert nachvollziehen. Krämer, S.: Symbolische Maschinen, 1988 und Krämer, S.: Berechenbare Vernunft, 1991

[20] Allerdings handelt es sich nicht um ein historisches Ereignis, da Schrift von Beginn an auch zu anderen Zwecken als zur Darstellung der Rede verwendet wurde, wie die Nutzung von Ziffern dokumentiert. Die Prononcierung der Emanzipationsidee ist eher als oppositionelle Abgrenzung zur Supplementsthese sprachwissenschaftlicher Untersuchungen zu verstehen. Vrgl. Saussure, de F.: Grundlagen der Allgemeinen Sprachwissenschaft, 1967, S. 28ff. „*Die Definition der gesprochenen Sprache als Ausdruck des Denkens und der geschriebenen Sprache als Abbild des Gesprochenen (Abbilddogma) bildet den Kristallisationspunkt der Bestimmung geschriebener Sprache*.“ Feldbusch, E.: Geschriebene Sprache, 1985, S. 1

[21] Sybille Krämer unterscheidet zwischen der typographischen Schrift und der phonetischen Schrift. Die Differenz beider „... *kann bestimmt werden durch die Polarität »produktiv-reproduktiv«*.“ Krämer, S.: Geistes-Technologie, 1989, S. 44

[22] Ong, W.: Oralität und Literalität, 1987, S. 92. „*Der Grund dafür, warum das Alphabet so spät und nur ein einziges mal erfunden wurde, liegt in der Natur des Klanges selbst. Denn das Alphabet operiert mehr mit dem Klang als die anderen Schriften, indem es ihn direkt auf räumliche Äquivalente reduziert, ihn in kleinere, analytisch genauere, handhabarere Einheiten zerlegt als eine Silbenschrift: Anstatt des einen Symbols für den Klang ba benutzt man zwei, b und a*.“ Ong, 1987, S. 93

auf Schriftebene als zusammengesetzte Folgen von Buchstaben realisiert (phonographisches Prinzip). Während die Alphabetschrift den Klang der Worte visuell verdinglicht und Sprache in Laut- und Zeichenatome zerlegt, bilden ideographische und piktographische Schriften ganze Sinnzusammenhänge ab.[23] Der Vorteil dieser Art von Zeichen besteht darin, daß sie unabhängig von ihrer Aussprache und damit Lesbarkeit - insofern ihre Bedeutung bekannt ist - als geschriebene Zeichen verstehbar sind.[24] Die Errungenschaften, die sich mit der Verwendung der Alphabetschrift ergeben, verstärken sich durch den Wandel von skriptographischen zu typographischen Zeichensystemen und führen zu einer weiteren Normierung des Zeichengebrauchs zur Repräsentation der gesprochenen Sprache.[25] Denn während ein umfangreiches Typenrepertoire mit Buchstaben, Ligaturen und Abkürzungszeichen die handschriftliche Kodierung von Texten erleichtert, bedarf die typographische Textverarbeitung aus Zeit- und Kostengründen eines möglichst kleinen Zeichenumfangs.[26] Abkürzungen, wie sie zahlreich von den Schreibern im Mittelalter verwendet wurden, verletzten das Prinzip der phonographischen Kodierung der Alphabetschrift. Mit abnehmendem Zeichenrepertoire erleichtert sich aber auch die Informationsvermittlung, da sich die Anzahl der Kodierungsprinzipien und Schriftelemente verringert. Die Folge der zunehmenden Normierung der Zeichenverwendung ist die Reduktion subjektiver Einflüsse auf das Zeichensystem und macht dessen Produkte allgemeinverständlich lesbar.[27]

2.2 Semantische Grundeinheiten geschriebener Sprache

In diesem Sinne ist auch die Herausbildung typographischer Grundeinheiten zu verstehen. Während die gesprochene Sprache zwar eine Akzentuierung, aber kaum eine Sequenzierung des Sprechflusses vornimmt, basiert die geschriebene Sprache auf der Klammerung von Informationseinheiten wie Silben, Worten, Sätzen oder Absätzen.[28] Epistemologisch interessant ist, daß die grammatische Form

[23] Begriffsschriften, welche Buchstaben und Buchstabenkombinationen zur Indexierung von Wissensinhalten nutzen, verwenden die Zeichen des Alphabets wie ideographische oder piktographische Schriften, um der Schrift eine polygraphische Funktion zu verleihen. Vrgl. Eco, U.: Die Suche nach der vollkommenen Sprache, 1997, S. 206ff

[24] Die chinesische Schrift ist ein Beispiel für diesen Nutzen, denn unabhängig von ihrem Dialekt können sich Chinesen über ihre Schriftzeichen verständigen. Auch die Ziffern als ideographische Zeichen sind nahezu universell verstehbar.

[25] Vrgl. Giesecke, M.: Sinnenwandel, Sprachwandel, Kulturwandel, 1992, S. 302ff. Die Diskretisierung der Buchstaben als Lettern geht dabei auf Johannes Gutenberg zurück.

[26] „*Gutenberg und manche Frühdrucker nach ihm übersetzten diese Zeichen* [Ligaturen und Abkürzungen] *in den Maschinenkode, weil sie sich von ihren handschriftlichen Vorbildern nicht weit genug absetzen konnten oder wollten. Jedenfalls entsprachen beide Zeichenklassen nicht der Logik der neuen typographischen Textverarbeitung und sie wurden deshalb in der Folge schrittweise fallengelassen*." Giesecke, 1992, S. 306

[27] Die Frage stellt sich, „... *warum bei der handschriftlichen Erfahrungstradierung ... so problemlos gekürzt werden konnte. Ein Grund dürfte sein, daß die Handschriften in aller Regel Medien innerhalb von abgegrenzten Institutionen gewesen sind, und nur auf festgelegten »Dienstwegen« zirkulierten. Die Personen, die mit ihnen zu tun hatten, lasen sie wie Formulare*." Giesecke, 1992, S. 312. Abkürzungen und *Privatschriften* finden sich bis heute in persönlichen, handschriftlichen Notizen.

[28] Die Einführung von Wortabständen setzt sich ab dem 9. Jahrhundert durch, die Satztrennung mittels Punkten erst später. Vrgl. Koch, P.: Graphé. Ihre Entwicklung zur Schrift, zum Kaklül und zur Liste, 1997, S. 62 sowie Giesecke, 1992, S. 312ff. Allerdings muß geschriebene Sprache die Melodie und Prosodie gesprochener Sprache ersetzen. Die Schwierigkeit zeigt sich heute in den Text-to-speech Programmen.

durch den typographischen Zeichengebrauch beeinflußt ist: „*Als Grundeinheit der typographischen Datenverarbeitung hat sich letztendlich der »Aussagesatz« durchgesetzt. In der Normalform besteht er aus Subjekt, Prädikat und Objekt. Durch Variationen dieser Normalform lassen sich verschiedene weitere Satztypen generieren*."[29] Der Wandel des Zeichengebrauchs setzt sich schließlich im 16. Jahrhundert auf breiter Front durch, da einerseits der Lese- und Schreibunterricht der Schulen sich zu dieser Zeit an den neuen typographischen Medien orientiert, andererseits die Handschriften ab der Mitte des 16. Jahrhunderts die Gestaltungsprinzipien der Drucke imitieren.[30] Das Primat der lautsprachlichen Realisierung gegenüber der schriftlichen gilt jedoch bis ins Hochmittelalter: Texte werden laut geschrieben (diktiert), und Lesen ist stets lautes Lesen. Erst mit graphischen Textgliederungsverfahren wird auch die stumme Produktion und Rezeption von Schrifttexten möglich. Damit geht die kommunikative Nähe und die Einbindung in den Entstehungskontext verloren und eine zerdehnte Sprechersituation entsteht.[31] In der Erschließung des Bereichs der kommunikativen Distanz liegt eine entscheidende Leistung der Technologie des Schreibens. Dazu muß eine syntaktische wie semantische Schreibstrategie entwickelt werden, die im Blick auf den potentiellen Leser die kommunikative Situation simuliert und mögliche Fragen durch die Allgemeingültigkeit der Inhalte weitgehend antizipiert.

2.3 Beschreiben, Registrieren, Zählen

Doch es ist nicht nur das Schreiben, das die Entwicklung der Schrift prägt. In der Verwendung von Schriftzeichen lassen sich verschiedene Entwicklungsstränge rekonstruieren: Die Nutzung der Schrift zum Beschreiben, Zählen und Registrieren, wobei alle drei Zwecke zu Beginn noch nicht ausdifferenziert sind.[32] Erst die Entflechtung der Vorgänge des Zählens und Beschreibens führt zu einer Spezialisierung der Zeichen und zur Abstraktion der Symbole im Bereich des Zählens. Die Emanzipation des Verfahrens der Beschreibung erlaubt die graphische Symbolisierung von Referenten, die nicht gezählt werden. Im Unterschied dazu gerät mit der Spezialisierung auf das Zählen und Rechnen sowie mit der Abkoppelung der Zahlen von den gezählten Objekten die graphische Realisierung der Zählzeichen selbst in den Mittelpunkt des mathematischen Zeichengebrauchs. Die Bündelung iterierter Zählzei-

[29] Giesecke, 1992, S. 317
[30] „*Im 18. und 19. Jahrhundert beginnt dann auch der Umbau der Rede, der gesprochenen Sprache, nach den typographischen Normen*." Giesecke, 1992, S. 327
[31] „*Das Schreiben ermöglicht das, was man „kontext-freie" Sprache ... oder „autonomen" Diskurs ... nannte, einen Diskurs also, der nicht wie die orale Rede befragt oder angefochten werden kann, weil er sich nämlich von seinem Autor unabhängig gemacht hat*." Ong, 1987, S. 81
[32] Dies geschieht durch die pragmatisch motivierte Spezialisierung auf das Referieren, Registrieren sowie Zählen und Rechnen und zeigt sich in der Trifurkation der Graphé in Schrift, Kalkül und Liste. Vrgl. Koch, 1997, S. 55ff

chen zu Einheiten führt zur Ausbildung von Ziffersystemen und schließlich zum Rechnen mit den Symbolen selbst. Derart verwendete Zeichen unterscheiden sich grundlegend in ihrem Gebrauch von Zeichen in Texten. Ein Mittleres zwischen Beschreiben und Zählen stellt die Technologie des Registrierens zur Speicherung, Präsentation und Verarbeitung von Informationen in Form von Listen dar. Informationssparten, Listeneinträge und Metatexte für das Lesen der Liste bilden eine Struktur, die eine Teilrezeption ermöglicht, welche die Linearität, die für die Produktion erforderlich ist, in der Rezeption umgeht: Einträge, die durch eine Similaritätsrelation mit den Informationssparten verknüpft sind, können sowohl im ganzen, als auch punktuell rezipiert werden. Listen dienen der Vernetzung, Klassifikation, Selektion und Neuordnung von Informationen und sind über die Registrierung hinaus schriftbasierte Werkzeuge zur Verarbeitung von Daten. Dieser Nutzen erhöht sich mit der Realisierung im dreidimensionalen Medium der Kartei.[33] Schließlich entwickeln sich Metasysteme zur Verwaltung der Adressen von Karteikarten oder anderen Informations-trägern. Computer überwinden die Dreidimensionalität und ermöglichen die Handhabung von Listen im n-dimensionalen mathematischen Raum. Beschreiben, Zählen und Registrieren sind Verwendungsweisen der Schrift, welche die Zeichen als sinnhafte Zeichenfolgen (Wörter) oder ideographische Sinnzeichen (Zahlen) verwenden.

2.4 Definition semiotischer Begriffe und Klassen von Zeichensystemen

Mit der Formalisierung erschließt sich ein weiterer Symbolgebrauch, indem die Zeichen von ihrer Sinnhaftigkeit, also ihrer extrasymbolischen Bedeutung abgekoppelt werden. Die Alphabetschrift, deren Abstraktionsgrad und lineare Darstellungsweise die Grundlage der hier besprochenen Formalisierung und Mechanisierung der Schrift stellt, dient dabei als prototypischer Ausgangspunkt semiotischer Überlegungen zu formalisierten Zeichensystemen. In einer allgemeinen Redeweise läßt sich nämlich ein schriftbasiertes *Zeichensystem* als eine endliche Menge diskreter Zeichen und konventioneller oder expliziter Regeln über den Gebrauch dieser Zeichen zur Erzeugung und Umformung von Ausdrücken oder Zeichenfolgen (Formations- und Transformationsregeln) beschreiben.[34] Der Begriff *Zeichen* bezieht sich dabei auf Buchstaben, Ziffern und andere graphische Konfigurationen, also jene Grundeinheiten der Schrift, die in der Sprachwissenschaft Grapheme genannt werden und welche als Objekt-, Operations- und Hilfszeichen im Zeichensystem spezifiziert sind. *Zeichenfolgen* titulieren Zeicheneinheiten, die keine semantische Interpretation aufweisen, wohingegen der Begriff *Ausdruck*

[33] „*Dadurch daß hier das Trägermedium zerschnitten ist, stellt es keine einheitliche Fläche mehr dar. ... Ein einzelner „Eintrag“ kann potentiell wesentlich länger sein als bei der Liste und gegebenenfalls selbst wieder eine Liste oder einen ganzen Text darstellen*.“ Koch, 1997, S. 73. Die Verbindung zu elektronisch realisierten Datenbanken und Hypertexten liegt auf der Hand.
[34] Regeln sind Anweisungen für die zulässige Bildung und Umformung von Zeichenfolgen.

im traditionellen Verständnis des Begriffs Zeichen zu verstehen ist, also für sinnhafte Zeicheneinheiten wie Worte, Sätze oder Piktogramme.[35] Ausdrücke verweisen auf einen referentiellen Zeichengebrauch, der auf einen vorgeordneten Objektbereich referiert. In einem solchen Zeichensystem besitzen die Ausdrücke einen extrasymbolischen Symbolgehalt und damit eine Stellvertreterfunktion.

Die Entkopplung von Zeichen und Bezeichnetem, jene Entwicklung, die wir Formalisierung nennen, vollzieht sich in zwei Schritten: vom referentiellen zum formalen und vom formalen zum formalistischen Zeichengebrauch, der hier als formal-operativer bezeichnet wird.[36] Indem von der Stellvertreterfunktion der Ausdrücke abstrahiert wird, fungieren einzelne Zeichen als *Variablen*. Als Variablen in einem referentiellen Zeichensystem sind sie immer bestimmt, also spezifischen Ausdrücken, Sätzen, Kategorien oder Gegenständen zugeordnet. Ein solches *formales System*, das einen gewissen referentiellen Charakter beibehält, dient der Artikulation von Eigenschaften oder relationalen Strukturen zwischen den vorgeordneten Objekten, oder es intendiert als Modell die Exemplifikation guter Rede, wahrer Urteile oder folgerichtiger Schlüsse, insofern die Objekte sprachlicher Natur sind oder Tatsachen entsprechen. Basismodell ist dabei das Sprach- und Schriftsystem der natürlichen Sprache, von welchem spezifische Variablen und Ausdrücke ausgewählt werden, die im Rahmen des Zeichensystems dann gemäß der Intention verwendet werden. Den ausgewiesenen Variablen und Ausdrücken werden Gesetze hinzugefügt, deren Befolgung den Rahmen korrekter Operationen innerhalb des Zeichensystems vorgibt. Beispielsweise werden in der aristotelischen Logik bestimmte Variablen und Ausdrücke als Prädikate, andere als Subjekte oder logische Formworte klassifiziert und anhand von Definitionen in ihren konkreten Bedeutungen - Begriffswort und Bedeutung des umgrenzten Begriffes - festgelegt. Die logische Form der so *gezähmten* Sprache ist analysierbar und unter Einhaltung bestimmter Gesetze wie des Satzes vom Widerspruch reglementierbar.[37] Auf diesem Weg läßt sich aus

[35] Wird eine Zeichenfolge semantisch (extrasymbolisch) interpretiert, so wird sie in einen Ausdruck transformiert. Ist ein Ausdruck von seiner semantischen Interpretation abgekoppelt, wird er als Zeichenfolge tituliert. An die Zeichen, Zeichenfolgen bzw. Ausdrücke und Regeln werden spezifische Anforderungen gestellt, die entscheidend von der Intention abhängen, für welchen Verwendungszweck das Zeichensystem konstruiert wurde. Gilt die Aufmerksamkeit des Autors der Normierung umgangssprachlicher Praxen, der Abbildung semantischer Begriffseigenschaften, der Konstruktion neuer Ausdrücke oder der Kalkülisierung gegebener Zeichensysteme? Die Intention entscheidet über die referentielle oder formal-operative Verwendung der Ausdrücke bzw. Zeichenfolgen, die intrasymbolische und gegebenenfalls extrasymbolische Interpretation, die syntaktische Ausbildung der Form sowie den Leistungsumfang des konzipierten Zeichensystems. Je nach Konzeption und Umsetzung werden Kriterien wie Eindeutigkeit, Endlichkeit, Konsistenz, Entscheidbarkeit sowie die Gelingenskriterien wie Wahrheit oder Richtigkeit dominant.

[36] Die Verwendung der Unterscheidung zwischen einem formalen und einem formalistischen System ist in der Literatur uneinheitlich: Für Helmut Schnelle ist ein formales System eines, das „*1. Von jeder ontologischen Bestimmung der Entitäten und Objekte, deren Ordnung und Form das System repräsentiert (insbesondere ist die Frage nach der Realisation des Systems irrelevant); 2. Von den speziellen Zeichen- und Sprachmitteln, die zur Darstellung des formalen Systems benutzt werden*“ abstrahiert. Schnelle, H.: Zeichensysteme zur wissenschaftlichen Darstellung, 1962, S. 31. Sybille Krämer gibt an: „*Die Aristotelische Syllogistik ist zwar formal, jedoch kein formalistisches System. Dabei sei unter einem „formalistischen System“ ein System verstanden, in welchem die Richtigkeit von Ableitungen innerhalb des Systems nachgeprüft werden kann, ohne daß man die Bedeutungen der in den Ableitungen benutzten Ausdrücke und Symbole in Rechnung stellen muß*.“ Krämer, 1988, S. 75

[37] Auf dieser Basis lassen sich dann durch Umformungen Regeln gewinnen, z.B. *A kommt jedem B zu und B kommt jedem C zu: A kommt jedem C zu* (Schlußregel Barbara).

einem normalsprachlichen Satz ein formalsprachlicher Satz gewinnen, der innerhalb des Zeichensystems spezifiziert ist, der aber aufgrund der referentiellen Ausrichtung an den vorgeordneten Objektbereich gekoppelt und dem Basismodell natürlicher Sprache verhaftet bleibt (extrasymbolische Interpretation).

Der Schritt nun zu einem *formal-operativen Zeichensystem* besteht in der Abkoppelung der bestimmten Variablen und Ausdrücke von einem vorgeordneten Objektbereich. Dies bedeutet, die Zeichen weder als umgangsprachliche Ausdrücke zu werten noch ihnen eine Stellvertreterfunktion zuzubilligen. Sie markieren lediglich Gruppierungen beliebiger, diskreter Entitäten, deren Ordnung sich ausschließlich aus der regelbasierten Anwendung ergibt. Für das Zeichensystem hat die Unbestimmtheit weitreichende Folgen, denn es müssen die zuvor durch den Objektbereich implizierten Voraussetzungen expliziert werden. Impliziert der Objektbereich beispielsweise eine bestimmte Reihenfolge der Ausdrücke, so muß in einem formalistischen Zeichensystem explizit angegeben werden, ob die Reihenfolge der Zeichen beliebig ist oder nicht.[38] Diese Art der Zeichenverwendung läßt sich als *operativer Symbolismus* bezeichnen,[39] d.h. die Verwendung der Zeichen generiert sich aus den Regeln des Systems und sucht keine inhaltliche Orientierung im vorgeordneten Objektbereich. Die Regeln nehmen lediglich auf die syntaktische Gestalt der Zeichen bezug. Dazu bedarf die formal-operative Zeichenverwendung spezifischer syntaktischer Anforderungen wie der Schriftlichkeit und damit der Linearisierung der Zeichenverwendung. Beides sind notwendige Bedingungen für das formale Operieren mit Zeichen.[40] Die Dominanz der Syntax reduziert die Semantik der Zeichen auf deren intrasymbolische Bedeutung, die sich in den Operationsvorschriften bzw. in der Interpretation bezüglich ihrer Zulässigkeit erschöpft und operational handhabbar wird. Formal-operative Systeme können aufgrund ihrer in sich geschlossenen und auf sich selbst angewandten Operationalität auch als Kalkülsysteme bezeichnet werden.[41]

[38] Beispielsweise muß geklärt werden, ob im Zeichensystem Kommutativität erlaubt ist oder nicht.
[39] Vrgl. Anm. 1, Seite 9. „*Formale Axiomensysteme sind bloße Kalküle und können als solche keinen inhaltlichen Wahrheitsbegriff für Formeln oder Sätze definieren, sondern nur den Begriff der Ableitbarkeit einer Figur eines bestimmten Typus* ...“ Stekeler-Weithofer, P.: Grundprobleme der Logik, 1986, S. 155. Die verwendeten Zeichen-(folgen) besitzen in einem formal-operativen System keine extrasymbolische Bedeutung mehr, denn „... *die Grundidee der Formalisierung besteht darin, das Manipulieren von Symbolreihen von ihrer Interpretation abzutrennen*.“ Krämer, 1988, S. 176
[40] Als herausragende Beispiele für die Verwendung graphischer Zeichen und die damit einhergehende Linearisierung nennt Sybille Krämer die indischen Ziffern mit ihrem Stellenwertprinzip und Gottlob Freges Linearisierung der logischen Semantik in seiner Begriffsschrift. Krämer, 1988, S. 175f
[41] „*Ein Kalkül ist eine Herstellungsvorschrift, nach welcher aus einer begrenzten Menge von Zeichen unbegrenzt viele Zeichenkonfigurationen hergestellt werden können.*“ Krämer, 1988, S. 59

2.5 Konsequenzen der Formalisierung für die Zeichenverwendung

Was bedeutet die Formalisierung für das einzelne Zeichen? Der Übergang vom referentiellen zum formal-operativen Symbolgebrauch trennt den Gebrauch der Zeichen von ihrer semantischen Interpretation. In einem referentiellen Zeichensystem stehen die Ausdrücke in formaler Supposition. Dies gilt für fast alle Worte der Umgangssprache.[42] Es liegt auf der Hand, daß in formal-operativen Zeichensystemen keine formale Supposition vorliegt, da die Zeichen keinen extrasymbolischen Bezug aufweisen. Allerdings kommt auch ein formalisiertes System nicht ohne Bedeutungen der verwendeten Zeichen aus. Diese beziehen sich jedoch lediglich auf die intrasymbolische Funktion der Zeichen, die wohlunterscheidbaren und definierten Zeichenklassen angehören, wie Variablen, Konstanten, Operations- und Hilfszeichen und mehr. [43] Für die Frage nach dem Charakter der Zeichen eines formal-operativen Zeichensystems ist zu beachten, daß die Zeichentheorien in der Regel unter dem Begriff `Zeichen` einen sinnhaften Ausdruck verstehen, der basierend auf der Konzeption von Charles S. Peirce mit dem Mittel-, Objekt- und Interpretantenbezug eine triadische Relation aufweist. „*Wenn irgend Etwas diese drei Bezüge nicht aufweist, so handelt es sich auch nicht um ein vollständiges `Zeichen`*."[44] Nach Max Bense läßt sich die `Zeichenrelation` folgendermaßen darstellen: `Z = R (M, O, I)`. In formal-operativen Zeichensystemen kommt es jedoch in erster Linie auf die Grapheme als Zeichen an, also auf deren materiale Beschaffenheit, nicht darauf, wofür die Zeichenfolgen stehen. Da `Zeichen` traditionell gerade über ihre Eigenschaft, `etwas zu repräsentieren`, definiert werden,[45]

---

[42] Formale Supposition: Der Ausdruck *Peter* bezeichnet den Menschen Peter. Materiale Supposition: In „*`Hund´ ist ein Substantiv" steht der Ausdruck `Hund´ als Substantiv in materialer Supposition*." Bochenski, I./Menne, A.: Grundriß der formalen Logik, 1983, S. 23. Schreibregeln erlauben die Unterscheidung zwischen formaler und materialer Supposition: *Der Hund ist ein Substantiv* ist falsch, da hier nicht der Ausdruck *Hund* gemeint ist. Inwieweit materiale Supposition in formal-operativen Zeichensystemen existiert, hängt von der intrasymbolischen Interpretation ab bzw. von der selbstreferentiellen Bedeutung der Zeichen aufgrund der in den Regeln oder der Metatheorie festgelegten Eigenschaften.

[43] Beispielsweise unterscheidet David Hilbert in seinem Aufbau der Gesamtmathematik: „... *I. Individualzeichen (meist griechische Buchstaben) ... II. Variable (lateinische Buchstaben) ... III. Zeichen zur Mitteilung (deutsche Buchstaben)* ..." Hilbert, D.: Neubegründung der Mathematik, 1965b, S. 165/166. Bochenski und Menne erklären die wichtigsten Verwendungen der Zeichen. Vrgl. Bochenski/Menne, 1983, S. 19 - 22

[44] Walther, E.: Allgemeine Zeichenlehre, 1974, S. 48. Durch die von Peirce unterschiedenen Bezüge läßt sich die Einteilung in Quali-, Sin- und Legizeichen (nach Charles Morris: Tone, Token, Type) sowie in Spezifikationen des M-Bezugs (MM, MO, MI), O-Bezugs (OM, OO, OI) und I-Bezugs (IM, IO, II) und damit in zehn ausgezeichneten Zeichenklassen geben. Interessant im Zusammenhang formaler Zeichensysteme wäre gegebenenfalls das argumentisch-symbolische Legizeichen: „*Nach Peirce ist das argumentisch-symbolische Legizeichen – oder kurz das Argument – die zehnte und höchste Zeichenklasse. Das Argument ist das Zeichen eines vollständigen, geregelten (gesetzmäßigen) Zusammenhangs, in dem es nicht auf die Objekte, die nur symbolisch bezeichnet werden, ankommt, sondern auf die geregelten Zusammenhänge, wie sie in Schlußfiguren, Kalkülen usw. vorkommen*." Walther, 1974, S. 82 Allerdings ist zu beachten, daß für Peirce der Zerfall der Worte in Silben und dieser in Laute die degenerative Semiose vom Legizeichen zum Qualizeichen darstellt. Der Laut ist ein Qualizeichen mit dem Mittelbezug MM. Hier wird zudem deutlich, daß das Primat der gesprochenen Sprache, wie es in den Sprachwissenschaften und der Semiotik anzutreffen ist und von Jacques Derrida kritisiert wurde, den Blick auf die graphischen Zeichen verstellt. So schreibt Ferdinand de Saussure in seinen *Grundlagen der Sprachwissenschaft* in Abschnitt §3 Kritik der Schrift: „... *tatsächlich arbeitet jede Sprache mit einer bestimmten Anzahl deutlich unterschiedener Lauteinheiten. Dieses System ist das einzig Wirkliche, auf das es dem Sprachforscher ankommt. Die Schriftzeichen sind nur ein Abbild davon, dessen Genauigkeit festzustellen*." Saussure, 1967, S. 40. Zurecht wird dies in Frage gestellt, vrgl. Krämer, 1997 oder Koch, 1997

[45] So schreibt Charles S. Peirce: „*Jedes hinlänglich vollständige Zeichen bezieht sich auf verschiedene wirkliche Objekte*." Peirce, Ch.: Neue Elemente, 1998, S. 37. Der Zeichenbegriff ist hier wesentlich umfangreicher angelegt. Für Peirce sind deshalb *Ikon* und *Index* entartete Zeichen. Das Ikon, da es als ein Zeichen definiert ist, „... *dessen Eigenart, welche es in die Lage setzt, ein Zeichen derjenigen Sorte zu werden, zu der es gehört, einfach als eine seiner Qualitäten in ihm liegt. Eine geometrische Figur z.B. die auf Papier gezeichnet ist, kann das Ikon eines Dreiecks oder einer anderen geometrischen Gestalt sein.*"

rekurrieren formal-operative Zeichensysteme auf `unvollständige Zeichen` bzw. auf einen stark reduzierten `Zeichenbegriff`, der sich auf den Zeichenträger konzentriert und ein spezifisches Verständnis von Designat und Interpretant aufweist.[46] Die Reduktion besteht darin, daß einzelne Buchstaben und andere Zeichen verwendet werden, die ihre intrasymbolische Bedeutung im Rahmen des Zeichensystems aufgrund von Regeln oder durch metatextuelle Festlegungen erhalten. Da die Zeichen einer semantischen Interpretation entbehren, können sie aus beliebigen graphischen Konfigurationen gebildet sein, vorausgesetzt, diese sind unterscheidbar und reproduzierbar. Die primäre Funktion der Zeichen und Zeichenfolgen in formal-operativen Zeichensystemen besteht in ihrer definitiven Identifikation, unabhängig von subjektiver Interpretation.

Dies bedeutet, daß Zeichen in formal-operativen Zeichensystemen sowohl eine ähnliche Funktion als auch Eigenschaften aufweisen, wie sie Nelson Goodman in seiner Symboltheorie den `Zeichen` von *Notationssystemen* zugeschrieben hat, allerdings ausschließlich auf den syntaktischen Teil bezogen.[47] „*Kurz, die von einem Notationssystem geforderten Eigenschaften sind Eindeutigkeit, syntaktische und semantische Disjunktivität und Differenzierung. ... Ein System ist also dann und nur dann notational, wenn wir theoretisch festlegen können, daß jede Marke zu höchstens einem besonderen Charakter gehört und jeder Gegenstand Inskriptionen von höchstens einem besonderen Charakter erfüllt.*“[48] Der Unterschied besteht darin, daß `Zeichen` von Notationssystemen `etwas notieren` und daher vorgeordnete Gegenstände denotieren. Dies ist für die Zeichen der formal-operativen Zeichensysteme nicht der Fall, da die entsprechenden Inskriptionen *vakant* sind und keinen extrasymbolischen Erfüllungsgegenstand aufweisen.[49] Trotz dieses Unterschieds sind die syntaktischen Eigenschaften, wie sie Goodman für die `Zeichen` von Notationssystemen beschreibt, für Zeichen in formal-operativen Zeichensystemen von Bedeutung. Er gliedert `Zeichen` in einen syntaktischen und semantischen Teil. Für den syntaktischen Teil sind die entscheidenden Kriterien die Disjunktivität und Differenziertheit. Disjunkt meint: Ein Zeichenträger (Marke) kann nur zu einem Charakter gehören. Eine Marke kann nicht

---

Pierce, 1998, S. 41 „*Die andere Form entarteter Zeichen ist als Index zu bezeichnen. Er ist als Zeichen definiert, das sich zu einem solchen eignet, weil es sich in einer wirklichen Relation mit seinem Objekt befindet. Ein Wetterhahn z.B. ist ein solches Zeichen.*““ Peirce, 1998, S. 41. Für Charles W. Morris resultiert die Semiose aus „...*dem, was als Zeichen wirkt, aus dem, worauf sich das Zeichen bezieht, und aus dem Effekt, der in irgendeinem Rezipienten ausgelöst wird und durch den die betreffende Sache ihm als Zeichen erscheint. Diese drei Komponenten der Semiose sollen jeweils Zeichenträger, Designat und Interpretant heißen*; ...“ Morris, Ch.: Grundlagen der Zeichentheorie, 1998, S. 57

[46] Das Designat beschränkt sich auf die intrasymbolische Interpretation (vakante Inskriptionen auf semantischer Ebene), der Interpretant wird automatisiert, d.h. seine Interpretationskompetenz läßt sich mechanisieren.

[47] Goodman, N.: Sprachen der Kunst, 1995, S. 125ff; Vrgl. Scholz, O.: Bild, Darstellung, Zeichen, 1991, S. 82ff

[48] Goodman, 1995, S. 150/151

[49] „... *im Objekt-Englisch hat weder ein »ktn« noch ein »k« irgendeinen Erfüllungsgegenstand. ... Inskriptionen ohne Erfüllungsgegenstände können vakant genannt werden. Vakanz kann entweder durch einen Charakter entstehen, dem kein Erfüllungsgegenstand zugewiesen wurde, oder dadurch, daß es solche Erfüllungsgegenstände, wie sie verlangt werden, nicht gibt, oder durch die explizite Klausel, daß der Charakter keinen Erfüllungsgegenstand haben soll*.“ Goodman, 1995, S. 141. Für formal-operative Systeme kann man diese Klausel als gegeben für einen vorgeordneten Objektbereich annehmen. Oder mit Willard O.V. Quine gesprochen, es handelt sich nicht um Gegenstands-Variablen, die auf irgendwelche Gegenstände als ihre Werte referieren. Vrgl. Quine, W.O.: Die Wurzeln der Referenz, 1972, S. 138ff

ein a und gleichzeitig ein b sein. Differenziert meint: Es läßt sich bestimmen, zu welchem Charakter jede Marke gehört. Das Symbolschema ist so konstruiert, daß die Inskriptionen nicht ineinander übergehen, sondern (endlich) unterschieden sind. Inskriptionen sind realisierte Zeichenträger, die zu einer bestimmten Klasse von Marken gehören, beispielsweise als Linienzug einen bestimmten Buchstaben darstellen. Ein Beispiel für ein disjunktes und differenziertes Symbolschema ist das Alphabet als eine endliche Liste von Marken (Buchstaben), aus der sich ein Zeichensystem konstruieren läßt. Alle Marken sind wohlgeformt bzw. lassen sich von nicht wohlgeformten unterscheiden. Reproduzierbarkeit im Sinne einer Transkription oder Kopierung ist möglich, ohne die Entstehungsgeschichte des Textes berücksichtigen zu müssen. Ist ein Zeichensystem syntaktisch nicht disjunkt und differenziert, dann handelt es sich um ein syntaktisch (diskontinuierlich oder durchgängig) dichtes System, wie beispielsweise der Bereich der reellen Zahlen. Syntaktische Dichte ist laut Goodman eine notwendige Bedingung für bildhafte Zeichensysteme. Ihre Reproduzierbarkeit kann allenfalls approximativ sein, auch mit heutigen Verfahren. Die Identität ist dementsprechend von der Entstehungsgeschichte abhängig. Oder mit anderen Worten: Es läßt sich kein eindeutiges Notationsverfahren für Bilder angeben. Analog dem syntaktischen Teil kann man für den semantischen von Disjunktivität und Differenziertheit sprechen. Der Bezug ist jedoch nicht die Klasse von Inskriptionen, sondern die Klasse von Gegenständen, auf welche die Inskriptionen angewendet werden. Ist etwas semantisch disjunkt, so dürfen keine zwei Charaktere einen Anwendungsgegenstand gemeinsam haben. Für die semantische Differenziertheit gilt, daß die Klassen entscheidbar sind. Beide Eigenschaften führen zu einem Höchstmaß an semantischer Eindeutigkeit. Die natürliche Sprache kann aufgrund ihrer alphabetischen Kodierung als syntaktisch disjunkt und differenziert sowie semantisch mehrdeutig bezeichnet werden. Allenfalls formale Sprachen mit Bezug auf einen Objektbereich sind syntaktisch wie semantisch disjunkt und differenziert.[50] Doch wie bereits erwähnt, sind die Inskriptionen der Zeichenträger formal-operativ verwendeter Zeichensysteme vakant und besitzen keine extrasymbolischen Erfüllungsgegenstände. Es ist eine Frage der Perspektive, ob intrasymbolische Interpretationen wie die Verwendung eines Zeichenträgers als Variable, Konstante, Argument oder Funktor als abstrakte Erfüllungsgegenstände in Form von Definitionen - oder besser: Erfüllungsvorschriften - angesehen werden, die jeweils unterschiedliche Eigenschaften aufweisen. Wenn ja, gilt die Forderung der semantischen Differenziertheit, da die Zuordnung eines Zeichenträgers zu einer Erfüllungsvorschrift wie Funktor oder Argument eindeutig entscheidbar sein muß. Hingegen muß keine semantische Disjunktheit vorliegen, da voneinander verschiedene Zeichenträger eine Erfüllungsvorschrift gemeinsam haben können.[51] Zudem lassen sich

[50] Für Notationssyteme sind folgende Eigenschaften gefordert: „*Eindeutigkeit, syntaktische und semantische Disjunktivität und Differenziertheit. ... es sind Merkmale, die notationale Systeme ... von nichtnotationalen Systemen unterscheiden.*“ Goodman, 1995, S. 150/151
[51] Die semantische Disjunktheit gilt für Zeichenklassen, die eindeutig einer Erfüllungsvorschrift zugeordnet sein müssen.

Operationszeichen als Notationen von Operationsvorschriften verstehen, auf die alle Bedingungen von Notationssystemen zutreffen. Die Betrachtung des operativen Symbolismus macht deutlich, daß der Objektcharakter der Zeichen in den Mittelpunkt rückt.[52] Die Zeichen selbst werden in Form von Variablen zum Material der Symboloperationen, und die Erfüllungsvorschriften und Regeln geben an, wie das Material zu verwenden ist.[53] Die Gestaltqualität der Zeichen bzw. die Eigenschaften, welche die syntaktische Disjunktheit und Differenziertheit gewährleisten, erlangen für die primäre Funktion der formal-operativen Zeichensysteme - die definitive, syntaktische Identifikation von Zeichen und Zeichenfolgen unabhängig von subjektiver Interpretation - einen großen Stellenwert.[54] Eine hohe Gestaltqualität ist die Voraussetzung für die Normierung der Zeichen, wie sie sich beim Übergang vom skriptographischen zum typographischen Umgang mit Texten entwickelt hat.[55] Und sie ist eine Voraussetzung für die Identifizierung im Sinne einer eindeutigen und von subjektiven Interpretationen unabhängigen Perzeption.[56] Darüber hinaus stellen manche Zeichensysteme „...*nicht nur dar, sondern man erkennt an ihnen ihr Konstruktionsprinzip und ihren Zusammenhang mit den anderen Zeichen des Systems*".[57]

2.6 Interpretationsmöglichkeit formaler Zeichensysteme

Die Zeichenverwendung in formal-operativen Zeichensystemen ist unbestimmt, d.h. die Zeichen können für jedes beliebige Objekt stehen.[58] Der Nutzen liegt in der interpretationsfreien Verwendung der Zeichen als Material syntaktischer Operationen. Im Gegensatz dazu lassen sich formale Zeichensysteme als symbolische Modelle verstehen, die auf einen Objektbereich bezogen und damit konkreti-

[52] Helmut Schnelle artikuliert die Anforderungen an Kalkülzeichen wie folgt: „*a) Die Sinnesdaten, die als Zeichen zu verwenden sind, seien für das optische Sinnesorgan des Menschen wahrnehmbar. b) Sie seien mit Hilfe der üblichen Druck- oder Schreibverfahren erzeugbar oder erzeugt. c) Sie seien Schwärzungen oder Färbungen auf einheitlich gefärbten flächigem Untergrund. d) Sie seien für die menschliche Perzeption deutlich in selbst nicht weiter zerlegbare Grundkonfigurationen zerlegbar und aus diesen konstruierbar, und zwar eindeutig, d.h. auf eine und nur eine Weise.*" Schnelle, 1962, S. 49

[53] Moderne Kalkültheorien definieren deshalb Sprache in diesem Sinne wie folgt: „*By a language, in the general sense used in semiotics, is meant any system of objects, called symbols, which can be produced in unlimited quantity, like the letters of ordinary print or the phonemes of speech, and combined into linear series called expressions*." Curry, H.B./Feys, R.: Combinatory Logic I., 1958, S. 23

[54] „*Bei möglichst hoher Gestaltqualität muß eine möglichst hohe charakteristische Vielfalt erzielt werden, um die Identifizierung durch möglichst viele typische Stellen zu erleichtern und gegen physiologische Mängel bei der Perzeption und Störungen der Zeichenstruktur selbst immun zu machen*." Schnelle, 1962, S. 53. Vrgl. Krämer, S.: Symbolische Erkenntnis bei Leibniz, 1992

[55] So waren die von Gutenberg verwendeten Zeichenklassen der Ligaturen und Abkürzungen den Kodierungen der mittelalterlichen Skriptorien entlehnt und finden sich in heutigen Druckschriften nicht mehr. „*Mit den Ligaturen werden Schriftzeichen, die oft nacheinander beim Schreiben benutzt werden, zu einem komplexen Zeichen zusammengeschlossen; die Einzelbuchstaben werden verstümmelt oder neutraler gesprochen: abgekürzt*." Giesecke, 1992, S. 307. Die Lesbarkeit als perzeptives Moment wird durch die Vielfalt und unterschiedliche Handhabung der Abkürzungen beeinträchtigt.

[56] Aktuell ist diese Thematik heute für die maschinelle Texterkennung, wie die Normierung der Schrift der neuen Europa-Kennzeichen für Autos veranschaulicht.

[57] Schnelle, 1962, S. 53. Helmut Schnelle gibt diesbezüglich als Beispiele Notationen binärlogischer Verknüpfungen von Frege, Peirce, Lesniewski u.a. an.

[58] Die Unbestimmtheit der Zeichen in Computern geht prinzipiell weiter, da jede binäre Notierung programmgesteuert verschieden kodiert werden kann. So läßt sich die ursprünglich als Zahl kodierte Notierung als Farbe oder Klang darstellen.

sierbar sind. Die logische und arithmetische Interpretation von Kalkülen oder die Verwendung formaler Theorien in den Wissenschaften sind Beispiele dafür. Die Anwendung formaler Zeichensysteme auf einen Objektbereich strukturiert diesen, da die Ontologien den eingesetzten Objektklassen und den Regeln des Zeichensystems entsprechen müssen und nicht kontradiktorisch interferieren dürfen.[59] Im Rahmen einer modelltheoretischen Einordnung lassen sich referentielle Zeichensysteme als *Modelle von etwas* verstehen, also als Abbildungen vorgeordneter und in diesem Sinne originärer Objektbereiche. Da Modelle in der Regel nicht alle Attribute des zu repräsentierenden Originals umfassen, sondern nur die als jeweils relevant eingestuften, basieren sie auf einer Abstraktionsleistung. Bereits die Unterteilung des Objektbereichs in Individuen und Attribute stellt eine abstrahierende Interpretation dar.

Die Angleichung eines Modells an das Original kann primär strukturell (formal) oder material (inhaltlich) erfolgen.[60] Eine formale Angleichung sieht von der Verknüpfung der Attribute mit einer semantisch verstandenen Bedeutung ab, so daß formale Gegebenheiten übrigbleiben (formale Zeichensysteme).[61] Die materiale Angleichung kann in einem Spektrum analoger bis isohyler Modelle erfolgen. Erstere werden durch Um- und Neukodierung aller materialer Beschaffenheiten charakterisiert, während letztere als kodierungsinvariante Abbildung die größtmögliche materiale Angleichung repräsentieren. Eine isomorphe und isohyle Modellabbildung stellt eine Kopierung seines Originals, also ein adäquates Modell dar. Ein Modell kann als Original eines neuen Modells oder auch als Modell seiner selbst aufgefaßt werden. Viele Attribut- bzw. Prädikatklassen sind Systeme. Ein System definiert sich durch wenigstens eine Zusammenhangsrelation jedes Elements innerhalb derselben Klasse, so daß die Gesamtheit der Klassenelemente bezüglich dieser Relation ein einheitlich geordnetes Ganzes bildet. Wissenschaftliche Modelle sind in der Regel Systeme und werden zu unterschiedlichen Zwecken eingesetzt: Als Demonstrationsmodelle zur Veranschaulichung von Zusammenhängen, als Experimentalmodelle zur Ermittlung oder Überprüfung von Hypothesen, als abstrakte Modelle um Sach-

[59] „*Während sie in der gewöhnlichen Sprache unvermeidlich erscheinen, können die logischen Paradoxa in keiner der gegenwärtig verwendeten formalisierten Sprachen abgeleitet werden* ...“ Henle, P.: Sprache, Denken, Kultur, 1975, S. 150

[60] „*Unter Attributen sind Merkmale und Eigenschaften von Individuen, Relationen zwischen Individuen, Eigenschaften von Eigenschaften, Eigenschaften von Relationen usw. zu verstehen*.“ Stachowiak, H.: Allgemeine Modelltheorie, 1973, S. 134. Individuen kann man als Attribute nullter Stufe bezeichnen, während die eigentlichen Attribute eine erste (Eigenschaften der Individuen, Relationen zwischen Individuen), zweite (Eigenschaften von Eigenschaften oder Relationen, Relationen zwischen Relationen) und weitere Stufen einnehmen können, entspechend der stufen- bzw. typentheoretischen Einteilungsweise. Die symbolische Repräsentation der Attribute geschieht durch Prädikate, wobei angenommen wird, daß es zu jeder Attributklasse wenigstens eine sie repräsentierende Prädikatklasse gibt. Mathematische oder physikalische Kontinua lassen sich durch endliche Attribut-, bzw. Prädikatklassen diskretisieren. Präterierte Attribute werden in der Modellabbildung nicht berücksichtigt, während abundante Attribute im Modell keine originalseitige Entsprechung aufweisen. Präterition (Verkürzung) und Abundanz sind quantitativ explizierbar, w ohingegen Kontrastierung (Überbetonung von Attributen) nicht allgemein erfaßbar ist.

[61] Die Abbildungs-Isomorphie als maximale strukturelle Angleichung führt Original-Individuen in Modell-Individuen und Original-Attribute in Modell-Attribute über, wobei die Stellenzahl der Attribute beibehalten wird. Ein dreistelliges Original-Attribut beispielsweise wird als dreistelliges Modell-Attribut präsentiert. Demgegenüber steht der Fall der minimalen strukturellen Angleichung, die die Gesamtklasse aller Attribute auf ein einziges modellseitiges Individuum verkürzt (monadisches Modell).

verhalte in logisch gebündelter Form zu vermitteln oder als operative Modelle möglicher Zielaußenwelten zur Entscheidungs- und Planungshilfe. Die axiomatisch-deduktive Methode als spezielle Form der Zeichenverwendung beispielsweise kann als Modell wissenschaftlichen Vorgehens verstanden werden, so wie auch von Aristoteles impliziert und in Euklids Elemente umgesetzt. Die Betonung des Modellcharakters ist jedoch von Bedeutung, da es ansonsten zu Mißverständnissen bezüglich des Geltungsbereiches kommen kann.[62] Formal-operative Zeichensysteme leiten sich nicht aus einem vorgeordneten Objektbereich ab, d.h. sie sind weder Abbildungen noch Abstraktionen wie referentielle oder formale Zeichensysteme.[63] Dennoch können sie als Modelle fungieren, die im nachhinein auf einen Objektbereich angewandt werden. Sie sind also weniger Modelle von etwas, sondern eher *für etwas*. Natürlich können auch Modelle, die von ihrem vorgeordneten, ursprünglichen Objektbereich abgekoppelt und für einen anderen Bereich verwendet werden, Modelle für etwas sein. Modelle in diesem Sinne sind konstruktiv, da sie Interpretationsstrukturen konstituieren, die auf einen Objektbereich angewendet werden. Allerdings zielt die Referenz auf einen nachgeordneten, nicht auf einen vorgeordneten Objektbereich. Für formal-operative Zeichensysteme ist die Interpretation nicht wesentlich, solange sich das Interesse auf die syntaktischen Eigenschaften des Zeichensystems konzentriert. Wenn es jedoch als Textur einer Anwendung dient, wie dies in den Wissenschaften üblich ist, kann die Interpretation für unterschiedliche Objektbereiche vorgenommen werden.[64] Dies bedeutet aber auch, daß für den selben Objektbereich verschiedene Texturen verwendet werden können, d.h. es gibt kein ausgezeichnetes (wahres) formales Zeichensystem.

Doch was ist dann das Ziel der Formalisierung? Es ist wohl die im Laufe der Jahrhunderte entwickelte Einsicht, daß „*die symbolische Erkenntnis, eine Erkenntnis also, die sich nicht Begriffen (Ideen), sondern wie in der Mathematik Symbolen (Zeichen) bedient, ... zentrale Bedeutung für das menschliche Denken*“ hat.[65] Normierte und formalisierte Sprachen bzw. deren Zeichensysteme als Darstellungs- wie Operationsinstrumente der symbolischen Erkenntnis erlauben die Generierung einer Ordnung der Entitäten, die entweder aus einem vorgeordneten Objektbereich abstrahiert oder ohne extrasymbolischen Bezug konstruiert wurde. Solche Systeme sind übersichtlicher und einfacher als das normal-

[62] „*Daß Beweise immer syllogistisch-deduktiv seien, ist schon bei Aristoteles ein bloßer wissenschaftstheoretischer Glaubenssatz, der an der wissenschaftlichen Praxis vorbeiredet und sich nur an dem Logik-Bild, nicht an der Frage seiner Angemessenheit orientiert. ... Man sollte daher das `dogmatische´ (Miß-) Verständnis eines Logik-Bildes oder eines Modells einer Wissenschaftslehre von dem Gebrauch solcher Bilder und Modelle zu Vergleichs-, Unterscheidungs- und Artikulationszwecken, zur Erstellung geordneter Terminologien und Notationen (usw.) unterscheiden.*“ Stekeler-Weithofer, 1986, S. 124

[63] Tatsächlich bilden die formalen Zeichensysteme einen Mittelbegriff zwischen referentiellen und formal-operativen. Ein referentielles Zeichensystem kann durch die Abkopplung von der extrasymbolischen Bedeutung der Zeichen in ein formales System überführt werden.

[64] Ein formalisiertes Zeichensystem ist bezüglich der Interpretationsmöglichkeiten multifunktional verwendbar, „*da die undefinierten Termini eines formalen deduktiven Systems willkürliche Symbole ohne Interpretationen und wörtliche Bedeutungen sind, sind die Postulate überhaupt keine Aussagen oder Feststellungen, sondern bloße Formeln.*“ Henle, 1975, S. 144

[65] Peckhaus, V.: Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft, 1986, S. 31/32

sprachliche Basismodell und entsprechen den methodischen Anforderungen und Kriterien eher als die natürliche Sprache.[66] Zudem garantiert die deduktive Methode eine lückenlose Umformung und Ableitung neuer Zeichenfolgen. Die *Leistung* eines Zeichensystems liegt in seiner Abbildungs-, Abstraktions- oder Konstruktionsfunktion, je nach Verwendungszweck. Doch erst der Übergang vom referentiellen zum formal-operativen Zeichengebrauch führt zur Entdeckung, daß Sprache – besser: Schrift[67] - syntaktisch konstruktiv und operativ verwendet werden kann. [68]

3. Schriftbasierte Zahlensysteme und Zahlen

3.1 Zähl- und Ziffernsysteme

Die Entwicklung von Zeichen und Zeichensystemen nimmt mit dem Symbolisieren, Registrieren und Zählen von Anzahlen ihren Anfang.[69] Dabei zeigt sich die Tendenz zur Formalisierung im Bereich des Zählens und Operierens mit Größen und die Algebra avanciert zum prototypischen Verwendungsbereich formal-operativer Zeichensysteme. Das Referieren auf Gegenstände und das Zählen dieser Gegenstände sind zu Beginn noch in einem einzigen Verfahren gebündelt, wobei hier unter Zählen das Iterieren der Symbolisierungen der Anzahlen zu verstehen ist. Erst nach und nach differenziert sich einerseits die Spezialisierung auf das Referieren respektive auf das Zählen und Rechnen, andererseits werden die Zeichen im Bereich des Zählens verselbständigt. Dies bedeutet einen Übergang von der gegenständlichen zur symbolischen Repräsentation von Zahlen. Schließlich wird die Iteration von Zählzeichen (Zählreihen) und damit die rekursive Erzeugung von Zahlen aus einem Einheits-

[66] Weitverbreitet ist die Auffassung, die semantische Mehrdeutigkeit der natürlichen Sprache sei ein Mangel, der durch die Formalisierung von Sprache behoben werden müsse: „*Die Umgangssprache ist weithin durch historische Zufälligkeiten so, wie sie heute ist. Sie enthält eine Fülle von Mehrdeutigkeiten und Inkonsequenzen. In mancher Hinsicht mag das vorteilhaft sein – für die Logik jedoch sind es Mängel. Darum benutzt die moderne Logik mit großem Vorteil die formalistische Sprache der Kalküle.*“ Bochenski/Menne, 1983, S. 17

[67] „*Es geht also um die Erfindung und Nutzung eines Typus von Schrift, der vom phonetischen Alphabet mit seiner engen Verbindung zur gesprochenen Sprache wohlzuunterscheiden ist. Ein solches Schriftsystem sei „operative Schrift“ genannt. Wir verstehen darunter ein genuin graphisches System, das aus einem diskreten Vorrat elementarer Zeichen besteht, sowie aus Regeln zur Bildung und Umbildung der Zeichen und Zeichenreihen. Dabei nehmen die Regeln ausschließlich bezug auf die syntaktische Gestalt, nicht aber auf die Bedeutung der Ausdrücke. Ein solches System kann auch als „symbolische Maschine“ gekennzeichnet werden.*“ Krämer, S.: Schrift und Episteme am Beispiel Descartes´, 1997, S. 115/116

[68] Dazu bedarf es der Explizierung konstituierender Regeln im syntaktischen Umgang mit den Zeichen sowie der Absicherung spezifischer Eigenschaften, welchen das formal-operative Zeichensystem (Kalkülsystem) unterliegt. Um festzustellen, daß das Kalkülsystem konsistent ist, muß es als Regelwerk in sich geschlossen und überschaubar sein. Dies ist der Fall, wenn es über einen endlichen Vorrat an Grundzeichen und Operationen verfügt, so daß entscheidbar ist, ob eine gebildete Zeichenfolge zulässig ist oder nicht.

[69] „*Im Rahmen erster komplexerer Formen der Wirtschaftsorganisation wird es notwendig, Abgaben, Verpflegung, Vorratshaltung usw. in einem körperexternen Medium zu registrieren, weil die Informationsmenge nicht mehr memorisierbar ist. Seit dem 8./7. Jahrtausend v.Chr. werden zunächst Steine, dann kleine Formen aus gebranntem Ton als Zählhilfen aufbewahrt ...*“ Koch, 1997, S. 51

Zahlzeichen durch Individualzeichen zur Zusammenfassung mehrere Einheits-Zahlzeichen in ein additives Ziffernsystem überführt.[70] Dabei bedienen sich Ziffernsysteme eines Kunstgriffes, der darin besteht „... *die unbegrenzte Menge der Zahlen auf eine Weise überschaubar und beherrschbar zu machen, für die das menschliche Gedächtnis nicht zur Grenze wird. Das aber ist der Fall, sofern wir Zahlen dadurch bilden, daß wir von einer begrenzten Menge von Individualzeichen ausgehen und einer Regel, die genau vorgibt, wie aus diesen wenigen Individualzeichen alle möglichen Zahlen gebildet werden können.*“[71] Jeder, der die Individualzeichen und Regeln kennt, kann Zahlen bilden und entsprechend der zugeordneten Beschreibung (Wortname) lesen.

Die Ersetzung der additiven Zählsysteme im Mittelalter durch das Stellenwertprinzip des indischen Ziffernsystems führt nicht nur ein neues Zeichensystem für Zahlen ein, es ermöglicht darüber hinaus das Darstellen der Zahlen wie das Operieren mit diesen in ein und demselben Medium, dem der schriftlichen Zeichensysteme auf Papier.[72] Aufgrund der Endlichkeit der Grundzeichen sowie der Regelhaftigkeit der Operationen mit diesen Zeichen zur Erzeugung neuer Zeichen stellen Ziffernsysteme formale Zeichensysteme dar. Um jedoch in einem Positionssystem wie dem indischen Ziffernsystem eindeutig operieren zu können, bedarf es eines Zeichens für eine leere Stelle. Die Null als das Leere (*sunya*) wird von den Indern als ein solches Zeichen eingeführt.[73] Ein Punkt oder ein Kreis sind numerische Inskriptionen für das Leere in den indischen Inschriften, und ab dem 9. Jahrhundert n. Chr. wird der symbolische Umgang mit dem Leeren operationalisiert, indem die bis heute gültigen Rechenregeln eingeführt werden. Das Besondere des indischen Ziffernsystems ist sein dezimales Stellenwertprinzip, das es erlaubt, die Grundrechenarten zu algorithmisieren. Dazu ist nicht nur das Symbol der Null eine Voraussetzung, sondern auch die Einführung negativer Zahlen, die durch besondere Zeichen gekennzeichnet werden. Aus neun Ziffern (123456789), dem Zeichen für Null (0) sowie der Kennzeichnung negativer Zahlen (-) lassen sich alle ganzen Zahlen generieren sowie mit ihnen gemäß den Vorschriften der Grundrechenarten operieren. Das Ziffernsystem ist zur Darstellung ganzer Zahlen für die Rechnenoperationen Addition, Subtraktion und Multiplikation vollständig.

---

[70] „*Seit dem 3. Jahrtausend v.Chr. sind uns Dokumente überliefert, aus denen zu schließen ist, daß verschiedene antike Hochkulturen unabhängig voneinander Zählreihen durch Zählsysteme bildeten, in denen nicht nur ein und dasselbe Zeichen fortlaufend aneinandergefügt, sondern Zeichengruppen gebildet und diese durch Individualzeichen ersetzt wurden: die Zählreihe ist mit Hilfe von Ziffern gebildet*.“ Krämer, 1988, S. 9

[71] Krämer, 1988, S. 10

[72] Vrgl. Krämer, 1988, S. 48ff. Rechenbrett oder Rechensteine waren nicht mehr von Nöten. Die Algoristen setzen sich in Europa Ende des Mittelalters gegen die Abakisten durch und mit ihnen die indischen Ziffern und das Rechnen auf Papier.

[73] Sowohl die Ägypter als auch die Griechen besaßen bereits ein Lückenzeichen. „... *PTOLEMAIOS verwendet in seinen Tabellen als Lückenzeichen o, was vielleicht den Anfangsbuchstaben von ouden (=nichts) bedeutet* ...“ Gericke, H.: Geschichte des Zahlbegriffs, 1970, S. 47. „*Dieses Wort* [sunya] *haben die Araber mit al-sifr übersetzt; daraus entstand cifra, das noch bis GAUSS die Bedeutung Null hatte*.“ Gericke, 1970, S. 47. „... *die Null wird in Indien erstmals im 9. Jahrhundert n.Chr. verwendet und findet in Europa erst im 13. Jahrhundert durch das „Algorismus“ betitelte arithmetische Lehrbuch des SACROBOSCO Verbreitung!*" Thiel: Philosophie und Mathematik, 1995, S. 112

Für das Bruchrechnen ist jedoch die Einführung neuer Zeichen und Regeln erforderlich. Das Rechnen mit Verhältnissen führt zu Zahlen, die gemäß der lateinischen Übersetzung für Verhältnis (ratio) als rationale oder gebrochene Zahlen bezeichnet werden. Verhältniszahlen lassen sich als Brüche darstellen, wobei zwei Zahlen übereinander angeordnet und durch einen Strich getrennt werden (—). Brüche entsprechen Teilen von ganzen Zahlen, die mit Hilfe eines Trennungszeichens (,) numerisch endlich oder periodisch unendlich notiert werden. Die Idee, numerische Zeichensysteme auf geometrische Systeme anzuwenden, führt jedoch zu Problemen und macht auf die Möglichkeit neuer Zahlen aufmerksam, die sich nicht mit den bekannten Zeichen darstellen lassen. Das Verhältnis der Seite eines Quadrats zu seiner Diagonalen weist beispielsweise eine Größe auf, die sich mit den bislang erwähnten Zahlzeichen nicht notieren läßt. Wird der Seite des Quadrats die Länge 1 zugeordnet, so entspricht die Größe der Diagonale einer Zahl, die nicht als Bruch zweier teilerfremder Zahlen darstellbar ist: Wurzel 2, deren numerische Formulierung eine Zahl aus einer nicht abbrechenden Folge rationaler Zahlen ist, die den Wert der Diagonale approximiert. Zur Erzeugung dieser Formulierung muß ein Näherungsverfahren definiert und ausgeführt werden, das eine konzentrierte Folge sich-einander-nähernder rationaler Zahlen erzeugt. Dabei entsteht „... *die durch die konzentrierte rationale Zahlenfolge* a_* *dargestellte reelle Zahl* $\alpha(a_*)$*". In der Analysis schreibt man statt „*$\alpha(a_*)$*" häufig „*$\lim_{n \to \infty} a_n$*", gelesen „Limes (d.i.: Grenzwert) der Folge* a_n *für n gegen Unendlich"*.[74] Die rationale Zahl p läßt sich eindeutig einer reellen Zahl $\alpha(p_*)$ zuordnen, so daß sich der Eindruck ergibt, man könne reelle Zahlen mit rationalen Zahlen in der Veranschaulichung auf der Zahlengerade identifizieren. Reelle Zahlen ohne Entsprechung einer rationalen Zahl sind analog dieser Terminologie irrationale Zahlen wie eben Wurzel 2.[75] In der heutigen Bezeichnung lassen sich **N** die Menge der natürlichen Zahlen, **Z** die Menge der ganzen Zahlen, **Q** die Menge der rationalen Zahlen und **R** die Menge der reellen Zahlen unterscheiden. Der Zugang zu diesen Zahlen ergibt sich für die natürlichen und ganzen Zahlen durch Ordnungs- oder Kardinalzahlen, also durch das Erzeugen von Zähleinheiten durch Nachfolgebeziehungen oder durch die Anzahl der Elemente einer Menge, für die rationalen Zahlen durch algebraische Operationen und für die reellen Zahlen durch die Vervollständigung der Zahlengerade zur Meßbarkeit jeder beliebigen Strecke.[76]

[74] Thiel, 1995, S. 147

[75] „*Im 16. und z.T. 17. Jh. haben sich nicht nur die Brüche und irrationalen Zahlen, sondern auch die Null, die negativen und die komplexen Zahlen in der Algebra durchgesetzt, und sie werden auch alle als Zahlen behandelt, d.h. man führt mit ihnen die üblichen Rechenoperationen durch.*" Gericke, 1970, S. 68

[76] Zählen, Rechnen und Messen kennzeichnen die Schritte zur Entwicklung reeller Zahlen oder analog der Bourbakischen Einteilung: Mengenlehre, Algebra und Topologie. Vrgl. Bourbaki, N.: Die Architektur der Mathematik, 1974. **C** die Menge der komplexen Zahlen sowie hyperkomplexe Zahlen werden hier nicht behandelt. Komplexe Zahlen besitzen keine Ordnungsstruktur der Art kleiner, gleich, größer.

3.2 Zahlbegriffe und -definitionen

Die Unterschiedlichkeit der Zahlen, insbesondere die Anwendung von Zahlen auf geometrische Verhältnisse, führt in der Reflexion zu unterschiedlichen Zahlbegriffen. Diese Zahlbegriffe haben sich im Laufe der Jahrhunderte erheblich gewandelt, und zwar in dem Maße, wie sich die Zähltechniken und Zählsysteme und mit ihnen die Zeichensysteme zur Erzeugung und Notierung von Zahlen verändert haben. Die Frage nach dem Zahlbegriff wurde erstmals im antiken Griechenland gestellt. Zahlen sind in der griechischen Mathematik Gegenstände mit Eigenschaften, über die sich Aussagen treffen lassen, und dies ist eine notwendige Bedingung, um Definitionen von Zahlen aufzustellen.[77] Aristoteles bezeichnet die Zahl als begrenzte Vielheit, die in diskrete Teile zerlegbar ist, während für Euklid die Zahl eine aus Einheiten zusammengesetzte Menge ist. [78] Weder die Null noch die Eins - die laut Definition keine aus Einheiten bestehende Menge, also Vielheit ist - noch irrationale Zahlen lassen sich mit diesem Zahlbegriff fassen, lediglich die natürlichen Zahlen. Der Unterschied der beiden Arten von Zahlen zeigt sich bei Euklid, der Bruchrechnungen als Lehre von Zahlenverhältnissen und irrationale Zahlen als Lehre von Größenverhältnissen substituiert.[79] Die theoretische Herangehensweise der griechischen Mathematik im Umgang mit dem Zahlbegriff und die Idee des Beweises führt den deduktiv-axiomatischen Denkstil als Form des Verstehens im Bereich des Zählens ein. Die Addierbarkeit, Vergleichbarkeit und Anordenbarkeit werden als basale Operationen im Umgang mit mathematischen Größen in Form von Aussagen über die Addition, Gleichheitsrelation und Ordnungsrelation verstanden. Dies steht im engen Zusammenhang mit der Entwicklung der Logik.[80] Und Euklid verwendet gemäß dem aristotelischen Modell der Wissenschaftslehre Beweise, die auf Theoremen basieren. Die Ausrichtung der griechischen Mathematik auf das beweisende Wissen wird durch die Geometrisierung der Algebra unterstützt als Ersetzung der Zahlen durch Strecken und der Addition durch Aneinandersetzen von Strecken. Obwohl die Beweiskunst nicht unbedingt auf die anschauliche Demonstration referieren muß, ist für die griechische und mittelalterliche Mathematik die demonstrative Beweisführung, und darunter die geometrische, die am höchsten evidente Methode.[81] Die Entdeckung der h-

[77] „*Die Pythagoreer sprechen von geraden und ungeraden Zahlen. Das klingt unscheinbar, aber es bedeutet, daß die Zahl ein Gegenstand ist, dem Eigenschaften zugeschrieben werden*." Gericke, 1970, S. 20.
[78] „*Quantum heißt das, was in Teile, die ihm innewohnen zerlegbar ist, von denen jeder der Natur nach ein Eines und ein Das ist. Die Menge ist nun ein Quantum, wenn es zählbar ist, aber eine Größe, wenn es meßbar ist*." Aristoteles: Metaphysik, 1970, 1020a. „*Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge*" Euklid VII, 2 zitiert nach Gericke, 1970, S. 27. Euklid trennt strikt zwischen Zahlen und Verhältnissen (Zahlenverhältnisse und Größenverhältnisse). Die Unterscheidung hält sich zwar bis ins 17. Jahrhundert in den Lehrbüchern, wird aber praktisch bereits von Archimedes unterlaufen, der mit Brüchen rechnet inklusive irrationalen Größenverhältnissen.
[79] Die Eins gilt erst als Zahl, als Descartes im Anschluß an seine Streckenrechnung angibt, was man unter einer Zahl zu verstehen habe, nämlich „... *das, was sich zur Einheit verhält wie eine Strecke zu einer fest gewählten Einheitsstrecke*." Gericke, 1970, S. 10
[80] Noch die pythagoreische Rechensteinarithmetik nutzt die Gestalt der Formationen zur Demonstration arithmetischer Eigenschaften und veranschaulicht damit Eigenschaften von Zahlen in heuristischer Weise.
[81] Vrgl. Schüling, H.: Die Geschichte der axiomatischen Methode im 16. und beginnenden 17. Jahrhundert, 1969

kommensurabilität zweier Strecken als Verhältnis einer Seite zur Diagonale eines Quadrats und die Folgerung, daß sich beide Strecken nicht wie Zahlen zueinander (rational) verhalten, stärkt die Vorrangstellung der Geometrie gegenüber der Arithmetik. Aus dieser Erkenntnis leitet sich die Einsicht ab, daß nichts Geometrisches durch die Arithmetik bewiesen werden dürfe. Dies schränkt den Bereich der Algebra erheblich ein, da für geometrische Deutungen das Homogenitätsprinzip gilt, d.h. Ausdrücke wie x^4 entsprechen keinen geometrischen Objekten und sind von daher nicht zulässig. Oder anders gesprochen: Läßt sich ein numerisches Zeichensystem nicht in ein geometrisch interpretiertes, anschauliches System überführen, so ist es nicht zulässig, wobei die geometrische Konstruierbarkeit als Referenz gilt.[82]

Der geometrischen Anschaulichkeit entgegengesetzt ist der rein symbolorientierte Umgang mit Größen in der Algebra, allen voran in der indischen Algebra auf Basis des uns vertrauten Ziffernsystems. Während die Algebra das Rechnen mit Unbekannten (Größen) ist, bezieht sich die Arithmetik auf bekannte Größen, eben die Zahlen. Im Unterschied zur griechischen Methode des beweisenden Wissens, das sich am Modell der Geometrie orientiert, sind Beweise in der orientalischen Rechenkunst auf die Algebra bezogen und geben das verwendete Lösungsschema wieder. Die Denkweise, die hier zum Tragen kommt, ist ein verfahrensorientierter Stil, wenn auch noch kein streng formalisierter und kalkülisierter. Erst François Viète begründet im 16. Jahrhundert ein rein schematisches, zeichenorientiertes Rechenverfahren mit Buchstaben für unbestimmte numerische Werte und entwirft so die moderne Algebra und die mathematische Formel. Diese wird von René Descartes erweitert, indem er den Wertebereich der Algebra auf die Geometrie ausdehnt und die algebraischen Operationen auf Linien, die er Einheiten nennt, „... *um sie mit Zahlen in nähere Beziehung zu bringen* ...“,[83] abbildet. Damit ist es vermöge der symbolischen Algebra möglich geworden, allgemeine Größen überhaupt zu artikulieren und arithmetische wie geometrische Probleme zu lösen.[84] Dadurch verändert sich auch der Zahlbegriff, denn die Zahl ist kein Objekt mit Eigenschaften mehr, die geometrisch veranschaulicht werden, sondern das, was durch ein (Kalkül-) Zeichen repräsentiert ist. Maßgeblich wird einzig die zulässige Operation mit diesen Zeichen, die keinen Gegenstand Zahl mehr denotieren, sondern ma-

[82] Unabhängig von dieser strengen Forderung gibt es Mathematiker wie Diophant von Alexandrien, die mit diesem Denkstil brechen und im Bereich der Algebra erstaunliches leisten. Indem er Zeichen für (noch) unbekannte Zahlen und reziproke Potenzen einführt, gelingt es ihm, alle Typen quadratischer, kubischer und biquadratischer Gleichungen zu lösen. Vrgl. Krämer, S., 1988, S. 36ff. Interessant in diesem Zusammenhang ist, daß die nicht-euklidische Geometrie erst ihren Siegszug antreten konnte, als sie in dem Modell von Felix Klein in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts einen neuen Begriff von Parallelität veranschaulichte, welcher der aus der Alltagsgewohnheit vertrauten Anschauung widerspricht. Vrgl. Meschkowski, H.: Wandlungen des mathematischen Denkens, 1985, S. 12ff

[83] Descartes, R.: Geometrie, 1981, S. 1. „*Und ich werde mich nicht scheuen, diese der Arithmetik entnommenen Ausdrücke in die Geometrie einzuführen, um mich dadurch verständlicher zu machen*.“ Descartes, 1981, S. 2

[84] Obwohl Descartes auf traditionelle geometrische Probleme konzentriert bleibt, ist das Neue daran, „... *daß Konstruktionsprobleme durch Berechnung gelöst werden und somit die Möglichkeit der Konstruierbarkeit einer geforderten Figur zurückgeführt wird auf die Möglichkeit der Berechenbarkeit der einer der Figur entsprechenden Gleichung*.“ Krämer, 1988, S. 65 Descartes gibt auch folgerichtig das Homogenitätsprinzip auf, das noch für Francois Viète verpflichtend war.

thematische Gegenstände symbolisch konstituieren, die dann als Zahlen, Strecken-Zeichen oder beliebige diskrete Entitäten interpretiert werden können, d.h. der Begriff der Zahl selbst wird kalkülisiert und ordnet sich einem allgemeinen Zeichenbegriff unter. Rechnen bezieht sich nicht mehr nur auf (An-)Zahlen, sondern auf syntaktisch differenzierte und disjunkte Charaktere. Ein Beleg dieses Zeichenbegriffs ist der Differentialquotient von Leibniz *dx/dy*, der eine operative Vorschrift symbolisiert, die das Unendliche einer rekursiven Handlung darstellt, indem die Vorschrift unbegrenzt oft auf das vorausgehende Resultat der Vorschrift angewandt wird.[85] Damit wird die Algebra zum prototypischen Beispiel formal-operativer Zeichensysteme.

Der unterschiedliche Umgang mit dem Zahlbegriff führt zu verschiedenen Zahlendefinitionen, deren Unterschiedlichkeit sich vor allem in der Idee eines kontinuierlichen Zahlbegriffs zeigt: Sind Zahlen kontinuierliche Größen ähnlich dem Verhältnis zweier Strecken, von welchen eine als Einheit anzusehen ist? Oder sind sie Zeichenfolgen, die bis ins Unendliche fortgesetzt werden können, aber prinzipiell als diskret voneinander unterschieden gedacht werden können? So schreibt Isaac Newton beispielsweise in seiner *Arithmetica universalis*: „*Unter `Zahlen´ verstehen wir nicht sowohl eine Menge von Einheiten, sondern vielmehr das abstrakte Verhältnis irgendeiner Größe zu einer anderen Größe derselben Gattung, die als Einheit angenommen wird. Sie ist von dreifacher Art: ganz, gebrochen und irrational; ganz, wenn die Einheit sie mißt, gebrochen, wenn ein Teil der Einheit, dessen Vielfaches die Einheit ist, sie mißt, irrational, wenn die Einheit mit ihr inkommensurabel ist*."[86] Die geometrische Begründung des Zahlbegriffs und damit seine Anschaulichkeit ist jedoch mit zunehmender Methodenorientiertheit der Mathematik nicht mehr aufrechtzuerhalten, und so entwickelten sich in der Neuzeit mit den neuen Methoden (analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung, algebraische Umformungen von Gleichungen) neue Zahlenbegriffe, aber auch neue Versuche der Veranschaulichung wie die Konzeption von William R. Hamilton, der Aussagen der Zeitanschauung zur Erzeugung eines Axiomensystems für die Algebra verwendet.[87] Vor allem die komplexen Zahlen führen zu vielfältigen Erklärungsansätzen, doch um komplexe Zahlen fassen zu können, bedarf es erst eines klaren Begriffes der reellen Zahlen.[88] Die Frage stellt sich, ob reelle Zahlen etwas entsprechen, also ob die Nähe-

[85] Vrgl. Krämer, 1988, S. 71
[86] Newton, I.: Arithmetica universalis, Leiden 1732, zitiert nach Gericke, 1970, S. 71/72.
[87] Paare von Zeitmomenten lassen sich entsprechend unserer Anschauung mit den Relationen zuvor, gleichzeitig und später ordnen. Mit diesen Ordnungsrelationen und Umformungsregeln lassen sich ganze, gebrochene und irrationale Zahlen konstruieren. Hamilton deutet komplexe Zahlen als Paare reeller Zahlen mit spezifischen Additions- und Multiplikationsregeln. Vrgl. Gericke, 1970, S. 81ff
[88] Komplexe Zahlen sind Zahlenpaare mit einem reellen und einem imaginären Teil. Veranschaulichen lassen sie sich in der Zahlenebene. Komplexe Zahlen treten bei einigen quadratischen Problemen auf (Cardano 1545), kubischen (Scipione de Ferro 1515, Tartagila 1539) und höheren Gleichungen auf. Der Fundamentalsatz der Algebra rechtfertigt die komplexen Zahlen. Er besagt, daß jede Gleichung vom Grad *n* genau *n* Lösungen ergibt, und daraus abgeleitet, daß es für jeden Grad Gleichungen mit sovielen Wurzeln gibt, wie der Grad angibt. Die Lösung dieser Gleichungen führt mitunter zu Lösungen, die von Descartes *imaginär* und von Leibniz Amphibien zwischen Sein und Nichtsein genannt werden. Vrgl. Gericke, 1970, S. 57ff.

rung von etwas Größerem und etwas Kleinerem zu etwas führt, das einer Zahl entspricht. Oder mit anderen Worten: „*Das Prinzip, daß eine Größe, die von Werten >c zu Werten <c „durch alle Zwischenwerte“ übergeht, einmal =c wird, ist ... ohne genauere Angabe über die Art des Überganges bzw. die zugelassenen Zwischenwerte nicht richtig*.“[89] (Zwischenwertsatz). Dieser Ansatz geht von der objektorientierten Vorstellung aus, daß *c* einer Entität entspräche. Hier zeigt sich die Produktivität symbolischer Erkenntnis, da für etwas Nichtgreifbares oder Unendliches ein Symbol als ideelle Setzung verwendet werden kann. Die Approximierung an die ideelle Setzung geschieht dann mittels Operationsvorschriften wie im Falle des Differentialquotienten. Der formal-operative Zeichenumgang entfaltet hier seine Wirkung, da die Zeichen nicht mehr auf vorgeordnete abstrakte oder reale Entitäten referieren, sondern als operativ erzeugte, semiotische Objekte verstanden werden. Die Frage, ob *c* etwas entspricht oder nicht, stellt sich genau genommen nicht mehr. Aber auch das Konzept der Folge zur Generierung reeller Zahlen läßt sich als ein operatives interpretieren, denn eine „.. *Folge läßt sich also verstehen als eine Vorschrift, deren Befolgung zu jeder gegebenen Grundzahl n einen Ausdruck liefert, den wir als das n-te Glied der Folge bezeichnen*;“[90] Eine Folge läßt sich darüber hinaus als einstellige Funktion darstellen, deren Argumente die Grundzahlen sind und die durch den Term *T(x)* dargestellt wird als *a(T(x))*. Die abstrahierende und konstruktive Denkweise moderner mathematischer Zeichenverwendung gelangt von Aussagen über konkrete Gegenstände durch Abstraktion zu Aussagen über fiktive Gegenstände, die mittels Termen bezeichnet werden. „*Jeder Abstraktionsschritt geht aus von konkreten Zeichen, und diese Zeichen sind in der Mathematik stets Ergebnisse von Konstruktionen nach Herstellungsregeln, deren Gesamtheit wir jeweils einen „Kalkül“ zur Herstellung der Zeichen nannten*.“[91] Der Aufbau der Zahlensysteme geschieht durch Abstraktionsschritte, die jeweils auf die vorausgehende Konstruktion konkreter Figuren aufbauen (Äquivalenzklassenbildung).[92] In diesem Sinne ist eine Zahl einem Zahlensystem dann zuordenbar, wenn sie mit den entsprechenden Herstellungsregeln erzeugbar und entsprechend den konventionell festgesetzten Zeichen notiert ist.

---

[89] Gericke, 1970, S. 87. Wieder kann die Geometrie zur Anschauung genutzt werden und zwar die Stetigkeit der Kurve bzw. Funktion. Euler nutzt dies 1749 um die Gültigkeit des Zwischenwertsatzes zu zeigen, da jede Gleichung ungeraden Grades mindestens eine reelle Lösung hat, da die mit der Gleichung beschriebene Kurve die x-Achse schneidet.

[90] Thiel, 1995, S. 148. „*Es handelt sich also um eine Zuordnung der Glieder der Folge zu Grundzahlen,*

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \end{array}$$

die wir uns induktiv (auch: rekursiv) vorgenommen denken können, d.h. durch die Angabe, wie jedes Glied der Folge aus (einigen oder allen) ihm vorhergehenden Gliedern berechnet werden kann, oder aber durch ein einheitliches Bildungsgesetz in Gestalt eines Ausdruckes mit einer Leerstelle, deren Ausfüllung durch ein Zeichen für die Grundzahl n den gegebenen Ausdruck in einen anderen überführt, der (evtl. nach Ausführung in ihm noch geforderter Rechenschritte oder Umformungen) das gesuchte Glied a_n liefert.“ Thiel, 1995, S. 148

[91] Thiel, 1995, S. 153

[92] „*Die Abstraktion ist vielmehr ein rein logischer Prozeß, ein Operieren mit Aussagen, dessen logischer Charakter durch den Wechsel von der Struktur der komplizierten Ausgangsaussage zur Struktur der neuen Aussage, die wir durch Abstraktionsschritte erhalten, zum Vorschein kommt*.“ Thiel, 1995, S. 131

3.3 Worte und Werte

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Verschriftung des Zählens, dessen markanteste Eigenschaft das induktive Erzeugungsprinzip ist, die Zusammenfassung großer Mengen an Zählzeichen mit Individualzeichen (Ziffern) erlaubt. Damit werden auch große Zahlen erfaßbar. Die Verschriftung erleichtert durch die symbolische Repräsentation sowohl den Umgang mit Zahlen als auch die Formalisierung von Ziffernsystemen. Die Bedingungen der Formalisierung – Schriftlichkeit, Schematisierbarkeit und Interpretationsfreiheit[93] – sind bei Ziffernsystemen gegeben: Ziffernsysteme weisen endlich viele Grundzeichen auf, mit welchen unendlich viele diskrete Zeichenausdrücke erzeugt werden können, und die Generierung von Zeichenausdrücken in Zahlensystemen ist kalkülisierbar. Im Unterschied zu den Zeichensystemen lassen sich jedoch nicht beliebig viele Ziffernsysteme konstruieren, denn sie sind durch die Geordnetheit der Zahlen limitiert. Während die Ordnungsstruktur einer Zählreihe aneinandergefügter Striche ersichtlich ist, wird diese in einem Ziffernsystem mit Stellenwertprinzip verschlüsselt, indem die Ziffern eine doppelte Funktion erfüllen: „*Sie zählen die Einer und geben die Rangstufen an, auf der die Einer „gelten“. ... die Rangstufen werden ... aus der Stelle abgeleitet, an der die Ziffer steht*.“[94] Der Unterschied zwischen einer Sprachschrift, einer formal-operativen Zeichenverwendung und Ziffernsystemen wird sowohl auf der Ebene der Grundzeichen als auch der Zeichenausdrücke deutlich. Das Charakteristikum der Sprachschrift ist das phonographische Prinzip und die daraus resultierende Lesbarkeit. Die Emanzipation der Schrift ermöglicht die Einführung nicht-lesbarer Zeichen. Während die Buchstaben und Ziffern zwar prinzipiell arbiträr sind, sich jedoch im Laufe der Zeit kulturell etabliert haben, da sie eindeutig Laute bzw. Zahlen notieren, sind die Grundzeichen formal-operativer Zeichensysteme beliebig. Hier zählt einzig die syntaktische Disjunktheit und Differenziertheit der Zeichen. Dies ist deshalb möglich, da die Zeichen nichts notieren, also semantisch nicht kodiert sind. Wörter und Zahlen hingegen referieren auf etwas. Allerdings ist die Form der Bezugnahme unterschiedlich: Wörter, die beliebig gebildet werden können - sieht man von lautbasierten Ausschlußregeln und der kulturellen Etablierung der Worte ab - nehmen auf extrasymbolische Bedeutungen zum Teil in mehrdeutiger Weise Bezug. Die Bildung von Wörtern läßt sich nicht formalisieren, auch deshalb nicht, da der Bereich der Laute keine Ordnung aufweist. Ziffern hingegen referieren auf einen Objektbereich beliebiger Entitäten, der durch eine kalkülisierbare Ordnungsstruktur geprägt ist (vollständige Induktion für **N** zur Erzeugung von Entitäten, die zueinander kleiner, größer oder

[93] „*Ein Vorgang ist formal beschreibbar, sofern es möglich ist, diesen mit Hilfe künstlicher Symbole so darzustellen, daß die Bedingungen des typographischen, schematischen und interpretationsfreien Symbolgebrauchs erfüllt sind*.“ Krämer, 1988, S. 2
[94] Krämer, 1988, S. 11

gleich sind).[95] Insofern sind die Erzeugungsregeln für Zahlenausdrücke formalisierbar. Formal-operative Zeichensysteme lassen sich auf Ziffernsysteme anwenden, indem sie in einer allgemeinen Weise auf geordnete Entitäten Bezug nehmen, wie dies für die formale Algebra der Fall ist. Der Vorteil der Ziffernsysteme gegenüber formal-operativen Zeichensystemen ist, daß nicht nur den Regeln gemäß Ausdrücke gebildet, sondern diese berechnet werden können. *Berechnen* meint, die regelbasierten Ausdrücke für konkrete numerische Werte anzuwenden und sie entsprechend der Ordnungsstruktur zu prüfen.

Sprachschrift	**Formal-operative Zeichensysteme**	**Zahlensysteme**
Laute sind kulturell geformt		Beliebige Entitäten, die geordnet sind (kleiner, größer, gleich)[96]
Grundzeichen (Buchstaben: a, b, c ...) sind kulturell geformt, syntaktisch disjunkt und differenziert und notieren Laute (phonographisches Prinzip)	Grundzeichen sind arbiträr, syntaktisch disjunkt und differenziert (beliebige graphische Konfigurationen)	Grundzeichen (Ziffern: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; I, V, ...) sind kulturell geformt, syntaktisch disjunkt und differenziert und notieren geordnete Entitäten (induktives Prinzip)
Zeichenausdrücke (Wörter) sind arbiträr und semantisch mehrdeutig (semantisch kodiert, ggf. lautbasierte Ausschlußregeln)	Zeichenfolgen sind durch Regeln determiniert und ohne extrasymbolischen Bezug	Zahlenausdrücke (Zahlen) sind durch Regeln determiniert eindeutig

Abb. 1.: Verschiedene Symbolsysteme

[95] Da es sich um einen Objektbereich beliebiger Entitäten handelt, der lediglich eine bestimmte Ordnung aufweisen muß, ist der Begriff der semantischen Eindeutigkeit hier ein sehr reduzierter, der lediglich auf die Ordnungsstruktur der Zahlen referiert, die es erlaubt, jede Entität eindeutig zu positionieren (kleiner, größer, gleich). Er erlaubt es jedoch, die Korrektheit einer Berechnung festzustellen.

[96] Die Definitionen von *größer*, *kleiner* und *gleich* hängen davon ab, ob man es mit endlichen oder unendlichen Mengen zu tun hat. Für komplexe Zahlen lassen sich diese Ordnungsstrukturen nicht verwenden.

4. Strukturen und Operationen

4.1 Rezept, Algorithmus, Kalkül

Die Formalisierung selbst stellt eine spezifische Strukturierung des Umgangs mit Zeichen dar, denn um mit Zeichen formal zu hantieren, bedarf es einer charakteristischen Verfahrensweise: Zum einen werden die Zeichen als referenzlose Entitäten aufgefaßt, zum anderen müssen die zulässigen Operationen in Form von Regeln expliziert werden. Als Folge der Abkopplung von einem extrasymbolischen Bezug und der schematischen Zeichenverwendung gewinnt die intrasymbolische Interpretation der Zeichen an Bedeutung. Diese sind in Form von metatextuellen Zuordnungen, aber vor allem durch Operationsvorschriften expliziert. Von daher lassen sich formal-operative Zeichensysteme als prozeßorientierte Strukturen verstehen. Der Begriff der *Struktur* bezieht sich dabei auf ein Gefüge von Zeichen, die in Relation zueinander stehen, wobei diese Relationen mit Operationszeichen notiert sind.[97] Strukturen unterscheiden sich also insofern von einfachen Zeichenfolgen, als sie Operationszeichen einbinden und damit einen Zusammenhang zwischen den Zeichen und Zeichenfolgen artikulieren. Diese Unterscheidung läßt sich am Beispiel der natürlichen Sprache veranschaulichen: Ausdrücke sind aus den Zeichenfolgen des Alphabets gebildete Worte, und Strukturen sind Sätze und Texte, die gemäß den grammatikalischen Regeln sowie Operationsworten wie *und*, *oder*, *nicht* (logische Konstanten) gebildet werden, wobei die Generierung der Worte nicht reglementierbar ist.[98] Dabei wird eine hierarchische Anordnung erkennbar, die vom Alphabet über die Worte zu den Strukturen aufsteigt. In formal-operativen Zeichensystemen wird diese hierarchische Anordnung nivelliert. Kalkülsysteme bieten gerade den Vorteil, nicht nur die Erzeugung der Strukturen, sondern auch der Zeichenfolgen durch Regeln zu formalisieren. Damit sind Zeichenfolgen und Strukturen auf der selben Ebene angesiedelt. Die Nivellierung der Hierarchisierung in formalisierten Zeichensystemen macht die Einführung einer theoretischen Unterscheidung zwischen Zeichenfolgen und Strukturen notwendig, da Strukturen als komplexe Folgen durch die von ihnen artikulierten Relationen spezifischen Kriterien unterliegen. Die mit der Formalisierung erwirkte Strukturierung ermöglicht einen reproduzierbaren und mechanisierbaren Umgang mit den Zeichen.[99]

[97] Existiert nur ein Zeichen oder eine Folge von Zeichen, so könnte man von einer Struktur sprechen, welche die Relation *Teil einer Folge sein* ausdrückt. Diese Relation betrifft nicht die Anordnung der Teile in der Folge. In formalisierten Zeichensystemen ist diese Anordnung nicht beliebig oder konventionell festgesetzt, sondern durch Regeln näher bestimmt. Dadurch entstehen geordnete Zeichenfolgen wie die der natürlichen Zahlen. Ein Zeichen ist Teil einer Folge, wenn diese Folge aus mindestens einem Zeichen besteht. Folgen mit der Länge 1 werden Zeichen genannt. Ein Zeichen, das eine Leerstelle andeutet, soll ebenfalls Teil einer Folge sein.

[98] Es lassen sich allenfalls lautbasierte Ausschlußregeln finden, die gewisse Buchstabenfolgen ausschließen oder wenig wahrscheinlich machen.

[99] Das Konzept der Erzeugbarkeit von Zeichenfolgen trifft diese Eigenschaft von formalisierten Zeichensystemen wohl am besten. „*Eine Menge M von Worten über einem Alphabet A heißt erzeugbar, wenn es ein Regelsystem gibt, derart, daß ein Wort W*

Auch hier läßt sich eine historische Entwicklung aufzeigen, die von der Algorithmisierung zur Kalkülisierung den Charakter der zunehmenden Schematisierung von Symboloperationen widerspiegelt. Den Beginn dieser Entwicklung markieren rezeptartige Anweisungen. Während *Rezepte* normalsprachliche Anweisungen für den Umgang mit konkreten Problemstellungen sind, geben *Algorithmen* allgemeine Lösungsverfahren für eine Klasse von Problemen an. *Kalküle* umgehen umgangsprachliche Formulierungen, indem sie in einer künstlichen Zeichensprache Handlungsanweisungen für den Umgang mit den Zeichen geben. Allen drei Verfahren ist der Anweisungscharakter zur schematischen Abfolge expliziter Regeln gemein, der zur Problemlösung führt. Rezepte, Algorithmen und Kalküle erlauben in ihrer je eigenen Weise das Operieren mit Zeichen und sind Ausdruck eines operativen Symbolismus. Typisch für diesen Zeichenumgang ist, daß nicht nur regelbasiert vorgegangen wird, sondern daß dieses Vorgehen schrittweise erfolgt, so daß sich jeder neue Schritt aus dem vorhergehenden ableitet.[100] Rezepte, Algorithmen und Kalküle sind prozeßorientierte Strukturen mit Aufforderungscharakter zur schrittweisen Ausführung der explizierten Operationen.[101] Die Ausführung der Anweisungen kann von Menschen vorgenommen werden oder im Falle der Algorithmen von Maschinen. In beiden Fällen müssen die Anweisungen jedoch eindeutig in einem endlichen Text formuliert sein. Doch auch wenn die Anweisungen endlich sind, kann sich die tatsächliche Ausführung beliebig lange hinziehen, d.h. nicht jede Anweisung ist abbrechend und es bedarf operationsexterner Abbruchkriterien, um die Ausführungen zu stoppen. Die Gründe liegen auf der Hand, denn jede tatsächliche Ausführung ist an die Endlichkeit der Ressourcen wie Zeit, Material oder Kapazität gebunden. Die Effektivität einer Anweisung ist deshalb von Bedeutung.[102]

Die prozeßorientierte Strukturierung des Umgangs mit Zeichen führt von der Formalisierung der Zeichensysteme zu deren Mechanisierung und bringt damit Konzepte wie Berechenbarkeit, Aufzählbarkeit oder Entscheidbarkeit ins Spiel, da die Effektivität zu einem entscheidenden Kriterium der mechanischen Ausführung wird. Eine Funktion ist *berechenbar*, wenn es eine in einem endlichen Text beschriebene allgemeine Anweisung gibt, mit der für jedes vorgelegte Argument der Funktionswert effektiv erzeugt werden kann. Eine Menge oder eine Relation ist *aufzählbar*, wenn jedes Element der

---

mit Hilfe der Regeln des Systems ableitbar ist genau dann, wenn es zu M gehört. Ebenso .... kann man von erzeugbaren Relationen sprechen." Hermes, H.: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit, 1978, S. 15

[100] Dieses Vorgehen hat pragmatische Gründe, da die in den Rezepten, Algorithmen oder Kalkülen angeschriebenen Anweisungen und Operationen unabhängig vom Autor von jeder anderen Person ausführbar sein sollen, ohne zusätzliche Informationen.

[101] „*Wenn hier von einem allgemeinen Verfahren* [Algorithmus] *die Rede ist, so soll darunter stets ein Prozeß verstanden werden, dessen Ausführung bis in die letzten Einzelheiten hinein eindeutig vorgeschrieben ist. Dazu gehört insbesondere, daß die Vorschrift in einem endlichen Text niedergelegt werden kann.*" Hermes, 1978, S. 1

[102] „*Kriterien der Effizienz wären z.B. geringe Rechenzeiten, möglichst geringer Speicherplatz oder möglichst wenig redundante Resolventenbildung. Unter solchen und anderen Kriterien wurde nach 1965 eine Reihe von effizienteren Resolutionsmethoden vorgeschlagen* ..." Mainzer, K.: Computer - Neue Flügel des Geistes?, 1995, S. 132

Menge durch eine berechenbare Funktion aufgezählt wird oder alle durch eine Relation geordneten Paare mit Hilfe zweier einstelliger berechenbarer Funktionen in geordneter Weise durchlaufen werden. Jede endliche Menge ist *entscheidbar*, indem alle Elemente der Menge gelistet werden, so daß der Vergleich, ob eine Zeichenfolge in dieser Liste vorkommt oder nicht, durchführbar ist.[103]

4.2 Turingmaschine als allgemeines Konzept der Zeichenverwendung

Im Falle der maschinellen Ausführbarkeit zeigt sich jedoch schnell, daß die Kriterien bezüglich der Mechanisierbarkeit prozeßorientierter Strukturen relativ vage sind. Sie beschränken sich auf die detaillierte Beschreibung einer Anweisung, die schrittweise abarbeitbar sein und dabei eine Ausgangskonfiguration von Zeichen in eine Endkonfiguration überführen soll. Um die Zeichenverwendung tatsächlich an eine Maschine zu delegieren, bedarf es einer geeigneten Charakterisierung, was ein Algorithmus bzw. ein allgemeines Verfahren denn sein sollte. Verschiedene Präzisierungen wurden vorgeschlagen, doch die Idee Alan Turings war es, die Allgemeinheit eines Verfahrens direkt mit seiner maschinellen Ausführbarkeit zu demonstrieren.[104] Dazu stellte er sich eine Maschine als einen Mechanismus vor, der in einfacher Manier nach Anweisungen mit Zeichen arbeitet. „*Turing greift dazu auf seine Schulzeit zurück und beschreibt den Vorgang des Rechnens als Notieren von Zahlen nach festen Regeln in den Rechenkästen karierter Schulhefte. Dies ist ein völlig mechanischer Prozeß, und Turing beschreibt ihn deshalb angemessen im Modell einer programmierten Maschine, der Turing-Maschine.*“[105]

Statt eines karierten Blattes hat man sich ein Band mit Feldern vorzustellen, das jeweils in 1-Feld-Schritten nach links (Anfang) oder rechts (Ende) bewegt werden kann. Auf dieses Band lassen sich Zeichen eines vorgegebenen Alphabets schreiben ($A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $n \geq 1$; a_0 für ein leeres Feld). Jede Anweisung zur Umsetzung von Operationen auf diesem Band muß derart formuliert sein, daß sie schrittweise ausgeführt werden kann. Dabei ist es das Ziel, eine Ausgangskonfiguration von Zeichen in endlich vielen Feldern in eine neue Konfiguration zu überführen. Um dies zu bewerkstelligen, gibt es die Operationen: (a_k) Beschriften eines Feldes (inklusive Löschung einer gegebenenfalls vorhan-

[103] Dies gilt auch für endliche Relationen, wenn man *n*-stellige Relationen als eine Menge von *n*-Tupeln auffaßt. Dies sind keine strengen Definitionen, sondern dienen zur Veranschaulichung. Aufzählbar darf nicht mit abzählbar verwechselt werden. Vrgl. Hermes, 1978, S. 9ff
[104] Church, A.: Unsolvable problem of elementary number theory, 1936; Church, A: A note on the Entscheidungsproblem, 1936a; Post, E.L.: Finite combinatory processes-formulations I, 1936; Turing, A. M.: On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, 1937.
[105] Coy, W.: Gutenberg und Turing: Fünf Thesen zur Geburt der Hypermedien, 1994, S. 71. Zur Turingmaschine vrgl. Hermes, 1978, S. 33ff; Ebbinghaus, H.-D.: Turing-Maschinen und berechenbare Funktionen I, 1964, S. 13ff.

denen Beschriftung), (r) Nach-rechts-Gehen, (l) Nach-links-Gehen und (s) Stoppen. Eine Operationsvorschrift muß nun in normierter Form in einzelne Teilvorschriften zerlegt werden und in einer Matrix endlicher Länge angeschrieben werden (Turingtafel): Die erste Spalte gibt die Operationsvorschrift (k) an, die zweite den Zustand des Feldes (a_0, a_1, …, a_n), die dritte Spalte die Operation (v = r, l, s) und die vierte die nächste Teilvorschrift (k_N). Eine Turingmaschine kann diese Operationen dann schrittweise ausführen. Im Grunde ist eine Turingmaschine eine Turingtafel, die den maschinellen Mechanismus anhand elementarer Instruktionen schrittweise steuert. „*If at each stage the motion of a machine ... is completely determined by the configuration, we shall call the machine an „automatic machine“ (a-machine).*“[106]

4.3 Funktionen als zeichenproduzierende Maschinen

Die Idee der Turingmaschine hängt eng mit einer Strukturierung von Zeichen zusammen, die es erlaubt, die Veränderung von Zeichen in Abhängigkeit von anderen Zeichen zu formulieren und zu berechnen: Funktionen.[107] „*Eine Funktion f mit Definitionsbereich D (oder **D**) und Wertebereich W (oder **W**) ist eine Vorschrift, die jedem Element des Definitionsbereichs ein Element des Wertebereichs zuordnet*.“[108] f: D $\rightarrow$ W. Die Schreibweise für Funktionen arbeitet mit verschiedenen Zeichenklassen, und eine Funktion f(x) wird gelesen als Funktion f von x, die der Zahl x die Zahl f(x) zuordnet. Für $f(x) = x^2$ ordnet die Funktion f der Zahl 2 den Wert 4 zu, der Zahl 3 den Wert 9 usf. Der Term einer Funktion kann aus einem Objektzeichen, einer Folge von Objektzeichen oder einer Struktur bestehen. Der Wert des Terms ergibt sich aus einer eindeutigen Zuordnung innerhalb eines Intervalls des Definitionsbereichs, indem ein Element des Definitionsbereichs als Wert oder der Wert einer auf dem Definitionsbereich definierten n-stelligen Operation zugeordnet wird. Der Wert eines Terms ist undefiniert, wenn die ihm zugeordnete Operation oder die als Werte der Funktionszeichen fungierenden Operationen nicht überall auf der Grundmenge definiert sind. So hat der Term $x - y$ für die Werte 3 und 2 der Objektsymbole x und y den Wert 1. Für die Werte 2 und 3 der Objektsymbole x und y ist er für die Grundmenge der natürlichen Zahlen nicht definiert.[109] An dem gegebenen Beispiel wird deutlich, daß die

[106] Turing, A.M.: On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, 1964, S. 118
[107] „*Der Begriff `Algorithmus´ scheint dem Begriff `Funktion´ dann äquivalent zu sein, wenn für eine Funktion Berechnungsregeln existieren, die es erlauben, für jedes Argument in endlich vielen Schritten den entsprechenden Funktionswert zu ermitteln. Ein Algorithmus, der die Werte einer Funktion berechnet, stellt eine Definition der Funktion dar*.“ Krämer, 1988, S. 163. Vrgl. Malcev, A.I.: Algorithmen und rekursive Funktionen, 1974
[108] Furlan, P.: Das gelbe Rechenbuch 1: Lineare Algebra, Differentialrechnung, o.Dat., S. 121
[109] Während die Operationen der Addition und Multiplikation überall definiert sind, ist die Subtraktion $x - y$ nur partiell, da sie nur für x > y definiert ist. Deshalb wird in der Theorie der rekursiven Funktionen eine modifizierte Form der Subtraktion eingeführt und mit einem eigenen Operationszeichen symbolisiert.

Operationen nur dann eindeutig definiert sind, wenn die Zeichen in wohl bestimmter Weise geordnet sind. Der Term *x – y* stellt eine Funktion dar, die dem Paar <3, 2> den Wert 1 zuordnet. Würde man x und y vertauschen so würde diese Funktion für das Paar <3, 2> undefiniert sein. Die Objekt- und Funktionszeichen können festgelegte Werte (konstante Zeichen) haben oder nicht (variable Zeichen).[110]

Partiell rekursive Funktionen f strukturieren Zeichenfolgen in der Weise, daß in einem mechanisierbaren Prozeß jede beliebige natürliche Zahl *x* in einen Funktionswert f(*x*) der Funktion f transformiert werden kann. Dieser Prozeß ist jedoch nicht abbrechend, wenn der Funktionswert von f im Punkt x nicht definiert ist. Für jede überall definierte partiell rekursive Funktion existiert ein nach endlich vielen Operationsschritten abbrechender Algorithmus. Laut der These von Alonzo Church ist die Klasse der partiell rekursiven Funktionen identisch mit der Klasse der berechenbaren Funktionen.[111] Dies bedeutet, daß jede Zeichenfolge oder Struktur, die sich in einer partiell rekursiven Funktion darstellen läßt, berechenbar ist. Oder anders gewendet: Die Strukturierung von Zeichen in Form berechenbarer Funktionen mit abbrechenden Algorithmen ist die Voraussetzung für deren computerbasierte Realisierung. Funktionen lassen sich als semiotische Maschinen zur Erzeugung definierter Werte verstehen. Ein Wert stellt ein Zeichen dar, das eindeutig auf Entitäten einer geordneten Menge referiert.

[110] Besondere Erwähnung verdienen die Anfangsfunktionen **s**, **o** und **I**. Es sind zahlentheoretische Funktionen, die per Definition folgende Werte haben: $\mathbf{s}^1(x) = x + 1$; $\mathbf{o}^n(x_1, ..., x_n) = 0$; $\mathbf{I}_m^n(x_1, ..., x_n) = x_m$ ($1 \leq m \leq n$; n = 1, 2, ...). Funktionen, die man mittels berechenbarer Operationen aus den Anfangsfunktionen erhält, heißen partiell rekursiv. Berechenbare Operationen sind die Substitution, die Minimalisierung und die primitive Rekursion. Die Operation der primitiven Rekursion f = **R**(*g, h*) besteht darin, daß man eine Funktion f aus den partiellen zahlentheoretischen Funktionen g und h erzeugen kann, wobei g eine *n*-stellige Funktion, h eine *n*+2-stellige und f eine *n*+1-stellige ist, und zwar wenn für alle natürlichen Werte $x_1, ..., x_n, y$ gegeben ist: $f(x_1, ..., x_n, 0) = g\ (x_1, ..., x_n,)$ und $f(x_1, ..., x_n, y+1) = h(x_1, ..., x_n, , y, f(x_1, ..., x_n, , y))$. „*Sind wir auf irgendeine Weise imstande, die Werte der Funktionen g, h zu finden, so kann man die Werte der Funktion f mit Hilfe einer Prozedur volkommen „mechanischen" Charakters ausrechnen. In der Tat genügt es für das Auffinden des Wertes* $f(a_1, ..., a_n, m+1)$ *nacheinander die Zahlen* $b_0 = g(a_1, ..., a_n)$, $b_1 = h(a_1, ..., a_n, 0, b_0)$, $b_2 = h(a_1, ..., a_n, 1, b_1), ... , b_{m+1} = h(a_1, ..., a_n, m, b_m)$ *zu finden. Die Zahl* b_{m+1}*, die wir nach dem m+1-ten Schritt erhalten, ist der gesuchte Wert der Funktion im Punkte* $<a_1, ..., a_n, m+1>$." Malcev, 1974, S. 15/16. Der Berechnungsprozeß kann unendlich lange dauern, wenn einer der Ausdrücke einen undefinierten Wert hat. Die Definition primitiv rekursiver Funktionen lautet: „*Gegeben sei ein System g irgendwelcher partieller Funktionen. Eine partielle Funktion f heißt primitiv rekursiv bezüglich g, wenn man sie aus den Funktionen des Systems g und den Anfangsfunktionen* ***s****,* ***o****,* $\mathbf{I}_m^n$ *durch eine endliche Anzahl von Operationen der Substitution und der primitiven Rekursion erhalten kann*." Malcev, 1974, S. 16. „*Eine partielle Funktion f heißt partiell rekursiv bezüglich eines Systems partieller Funktionen, wenn f aus den Funktionen des Systems s und den Anfangsfunktionen* ***s****,* ***o****,* $\mathbf{I}_m^n$ *durch eine endliche Anzahl von Operationen der Substitution, der primitiven Rekursion und der Minimalisierung erhalten kann.*" Malcev, 1974, S. 22. Die Klasse der partiell rekursiven Funktionen ist weiter als die der primitiv rekursiven Funktionen, da sie auch Funktionen umfaßt, die nicht überall definiert sind. Der Zusammenhang ergibt sich in folgendem Theorem: „*f(x) sei irgendeine primitiv rekursive Funktion und A eine beliebige primitiv rekursive Menge natürlicher Zahlen. Dann ist die durch das Schema* $f_p(x) = f(x)$*, falls x Î A und* $f_p(x)$ *= undef., falls x Ï A definierte Funktion* $f_p(x)$ *partiell rekursiv*." Malvec, 1974, S. 24

[111] Vrgl. Church, 1936

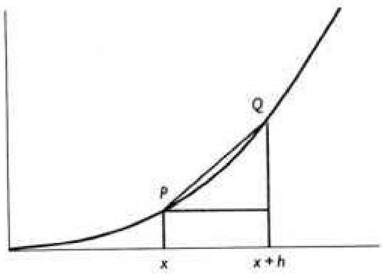

Abb. 2: Kurve zu $y = x^2$

Darüber hinaus besitzen Funktionen ein geometrisches Bild, mit welchem die Veränderung der Werte in Abhängigkeit von anderen Werten darstellbar ist, und zwar dann, wenn der Kurvenverlauf einer Funktion f(x) in einem Intervall a,b von jeder Vertikale dieses Intervalls nur einmal getroffen wird.[112] *„Der Graph der Funktion f: D ® W ist eine Teilmenge von D x W und besteht aus allen Paaren (x, y) mit x Î D und y = f(x).“*[113] Jede Funktion f(x) hat zwar ein geometrisches Bild, doch nicht jedes geometrische Bild entspricht einer Funktion. Beschäftigt man sich mit dem Verlauf der Kurvendarstellung einer Funktion, so interessiert vor allem das Verhalten der Änderungsrate der miteinander in Abhängigkeit gesetzten Werte oder mit anderen Worten: die Steigung der Kurve.[114] Die Steigungsrate leitet sich aus der Funktion ab und ist selbst eine Funktion. Ist eine Funktion f: $\mathrm{I} \to \mathbf{R}$ an jedem Punkt des Intervalls I differenzierbar, so erhält man die Ableitungsfunktion oder (erste) Ableitung f', die jeder Stelle x die Zahl $f'(x)$ zuordnet. Für die Funktion f(*x*) = x^2 sind die Funktionswerte vom Wert von *x* abhängig. Das Verhalten der Kurve geht von einer mäßigen Steigung zu Beginn aus, die zunehmend steiler wird, d.h. die Steigung der Kurve ist nicht konstant und hängt vom Wert von *x* ab. Um eine Struktur zu finden, die beschreibt wie die Steigung von *x* abhängig ist, betrachtet man zwei Punkte P und Q auf der Kurve und stellt sie sich durch eine Gerade PQ verbunden vor. Der Unterschied zwischen Kurve und Gerade nimmt in dem Maße ab, wie *h* abnimmt, und die Steigung der Kurve in P nähert sich der Steigung der Strecke PQ an. Die Steigung der Geraden PQ läßt sich berechnen, indem man die Höhenzunahme $(x + h)^2 - x^2$ durch die Zunahme in waagerechter Richtung *h* teilt. Die Steigung der Geraden ist $2xh + h^2 / h$ bzw. durch Kürzung 2x + h. Da mit $h \to 0$ der Unterschied der Steigung der Geraden PQ und der Kurve im Punkt P immer geringer wird, nähert sich die Steigung der Geraden dem Grenzwert $2x$ an, welcher der Steigung der Kurve in P entspricht. Verwendet man statt *h* die Notation *dx* und für die Höhendifferenz zwischen P und Q *dy*, so erhält man die von Leibniz eingeführte Notation dy/dx, die man *dy nach dx* ausspricht.[115] Das Besondere dieser Struktur ist, daß ein infinitesimaler Prozeß formuliert wird, der

[112] Man kann sich nach der Definition von C. Jordan unter einer Kurve das vorstellen, was ein Punkt bei stetiger Bewegung durchläuft. Der Ort des Punktes x, y wird als Funktion der Zeit t aufgefaßt. Dieser anschauliche Begriff wird jedoch durch die Entdeckung C. Peanos erschüttert, der eine Kurve entdeckte, die ein ganzes Quadrat durchläuft. Vrgl. Waismann, F.: Einführung in das mathematische Denken, 1970, S. 128ff

[113] Furlan, o.Dat., S. 121

[114] Die Aufmerksamkeit der antiken Mathematik galt Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel. Erst mit der Koordinatengeometrie von René Descartes geraten unabsehbare Mengen an Kurven in den Blick der Mathematiker, und eine universelle Methode zur Bestimmung des Verlaufs jeder beliebigen Kurve ist gefordert. Isaac Newton und Gottfried W. Leibniz lösen dies mit der Differentialrechnung. Dabei faßt Leibniz die Tangente als Grenzfall der Sekante auf. „*Bis Leibniz bestand in der Mathematik eine tiefe Kluft zwischen Sekante und Tangente; für die Kreissekante gelten zum Beispiel ganz andere Sätze als für die Kreistangente, und keinem Geometer wäre es in den Sinn gekommen, für diese beiden Arten von Linien gemeinsame Sätze aufzustellen.*“ Waismann, 1970, S. 135

[115] dx/dy läßt sich auch als x′ schreiben. Allgemein ist nx^{n-1} die Ableitung der Funktion x^n für jede natürliche Zahl *n*. „*Der durchschlagende Erfolg der Methode Leibnizens und Newtons beruhte darauf, daß die Anzahl der Funktionen, die man differenzieren*

einen Näherungswert ermittelt.[116] Die Differentiation ist eine Methode, um die Steigung einer Kurve approximativ zu berechnen bzw. um aus einer Ausgangsfunktion deren Steigungsfunktion (Ableitung) abzuleiten. Der dynamische Prozeß der Approximation der Steigung läßt sich als eine von *h* abhängige Funktion f(*h*) erfassen. Eine Zahl l ist der Grenzwert, ...“*wenn h „gegen 0 geht“, genaugenommen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle h mit $0 < |h| < \delta$ gilt: $|f(h) - l| < \varepsilon$.*“[117] Dieser Grenzwertsatz von Karl Weierstraß fixiert den dynamischen Prozeß der Approximation in einer formalen Definition und symbolisiert spezifische Zahlen δ, die bestimmte Eigenschaften aufweisen. Damit läßt sich der Approximationsprozeß selbst als mathematisches Objekt untersuchen.

4.4 Differentialgleichungen als Strukturen zur Beschreibung veränderlicher Größen

Will man die Veränderung veränderlicher Größen mit einer Struktur beschreiben, so läßt sich dies in einer Differentialgleichung formulieren, welche eine Beziehung zwischen einer Funktion und deren Ableitungen herstellt.[118] Im Laufe der Entwicklung entdeckte man, daß es zwischen der Differentialrechnung und der Integralrechnung einen Zusammenhang gibt. Die Differentiation der Steigung einer Kurve der Funktion f(*x*) ist invers zur Methode der Integration von Flächen- und Rauminhalten, indem dazu eine Flächen- oder Volumenfunktion A(*x*) ermittelt wird.[119] Es zeigt sich, daß die Ableitung von A(*x*): $A'(x) = f(x)$ ist, also die Funktion, die den Verlauf der die Fläche abschließenden Kurve bzw. das Volumen abschließenden Fläche beschreibt (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Die Struktur für A(*x*) läßt sich finden, indem man die Struktur sucht, für die f(*x*) die Ableitung darstellt. Allgemein wurden Strukturen beschrieben als ein Gefüge von Zeichen, die wechselseitig miteinander in Relation stehen, wobei diese Relationen regelbasiert und durch Operationszeichen symbolisch ge-

---

konnte, durch die Entwicklung eines Kalküls, also einer Sammlung von Regeln zum Differenzieren komplizierter Funktionen, enorm vergrößert werden konnte.“ Devlin, K.: Muster der Mathematik, 1997, S. 101

[116] „*Der Differentialquotient ist kein Zeichen, das einen gegebenen Zustand beschreibt, sondern eine funktionale Abhängigkeit vorschreibt. „Unendlich zu sein“ (im Sinne von unendlich klein bzw. groß) ist keine Eigenschaft einer bestimmten Größe, sondern die Eigenschaft einer Handlung, mit der wir eine bestimmte Vorschrift unbegrenzt oft auf das, kraft dieser Vorschrift gewonnene, Resultat einer Handlung wieder anwenden können. Das aber ist nichts anderes als die Grundidee aller Kalkülisierung: auf der Basis eines begrenzten Zeichenvorrates und eindeutiger Herstellungsvorschriften unbegrenzt viele Zeichenkonfigurationen erzeugen zu können*.“ Krämer, 1988, S.70. Differenzierbare Funktionen sind stetig. „*Eine Funktion f ist an der Stelle a stetig, falls $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$*.“ Furlan, o.Dat., S. 180. In ihrem Definitionsbereich stetige Funktionen sind polynome, rationale und trigonometrische Funktionen, Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen, Exponential-, Logarithmus-, Betrags- und Wurzelfunktionen sowie alle daraus durch Grundrechenarten und Kompositionen zusammengesetzte Funktionen.

[117] Devlin, 1997, S. 100

[118] „*Eine Differentialgleichung stellt eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung dar. ... Unter der Lösung einer Differentialgleichung versteht man eine stetige Funktion y(t), die zusammen mit ihrer Ableitung der vorgegebenen Beziehung genügt*.“ Braun, M.: Differentialgleichungen und ihre Anwendungen, 1979, S.1

[119] Zur Berechnung der Flächen- und Volumeninhalte für geometrische Objekte mit gebogenen Kanten oder gekrümmten Seitenflächen entwickelte Eudoxos die sog. Exhaustionsmethode, welche die Fläche beispielsweise eines Parabelbogens durch die einfacher zu berechnenden Flächen eingepaßter Dreiecks- oder Trapezflächen annäherten. Vrgl. Toeplitz, O.: Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, 1972, S. 11ff. Die im 17. Jahrhundert entwickelte Methode der Invisibilen arbeitet mit unendlich vielen, einfach zu berechnenden, eingepaßten Flächen, die ebenfalls einen Näherungswert ergeben wie dies 1635 Cavalieri zeigt. Vrgl. Toeplitz, 1972, S. 50ff

kennzeichnet sind.[120] Anders gesprochen: Die Operationszeichen determinieren qua Reglement den Umgang mit den Zeichen. Der Prototyp einer Struktur ist die Formel, in welcher die Zeichen formal-operativ verwendet werden. Die Umformung einer Formel gemäß den Regeln sowie die Anwendung auf eine Grundmenge geordneter Entitäten macht diese berechenbar. Dabei wird die Formel in den Term einer Funktion überführt, die den Zeichen eines Intervalls der Grundmenge Zeichen zuordnet, sofern alle Zeichen und Operationen definiert sind. Die Differentiation und die Integration bilden Strukturierungen des Umgangs mit Zeichen, welche die Operationen auf Funktionen anwenden, um Informationen über den funktionalen Zusammenhang des Verhaltens von Ausgangsfunktionen in Abhängigkeit von diesen zu gewinnen. Indem die Formeln auf Objektbereiche angewendet werden, lassen sie sich als Interpretationsstrukturen nutzen.

Diese Art der Verwendung zeigt sich eindrucksvoll in der Mathematisierung der Physik, wenn „... *in der Physik ›Theorie‹ mit ›mathematischer Theorie‹ tendenziell bedeutungsgleich* [wird] ... *und zugleich von essentieller methodischer Bedeutung ist*."[121] Die Identifikation gemessener physikalischer Größen mit dem Spektrum der reellen Zahlen erzeugt eine einheitliche Referenzbasis der Zeichen, welche dieselben Strukturen sowohl berechenbar wie meßbar macht. Die Quantifizierung physikalischer Größen führt diese in einen Bereich geordneter Entitäten über, die mit Zeichen notiert werden können. Da diese mit den reellen Zahlen identifiziert werden, welche ebenfalls als geordnete Entitäten erzeugbar sind, ist der Zusammenhang zwischen Messung und Berechnung hergestellt. Dazu müssen die Entitäten syntaktisch disjunkt und differenziert sowie aufgrund einer explizierbaren Ordnung schematisch hantierbar sein.[122] Die Interpretation dieser Entitäten als Zahlen oder gemessene physikalische Größen hängt vom theoretischen Interpretationsrahmen ab. Die Mathematisierung der Physik, angeregt durch Newtons *Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie*, führt zu einer Identifizierung der mathematischen Theorie mit der wahren.[123] Berechenbarkeit wird zu einem pragmatisch motivierten Wahrheitskriterium, das die Prognose des Verhaltens physikalischer Größen erlaubt, welches analog den formalisierten Zeichensystemen als durch Gesetze determiniert angenommen wird. Die Methode der Formalisierung mit unterschiedlichen Strukturierungen des Zeichenumgangs konstituiert den wis-

[120] Der Unterschied zwischen Strukturen und Strukturierungen soll an folgendem Beispiel veranschaulicht werden. Für eine algebraische Strukturierung des Zeichenumgangs ist die Operation der Subtraktion und damit aller, mit dieser Operation gebildeten Strukturen entsprechend definiert. Für eine zahlentheoretisch funktionale Strukturierung des Zeichenumgangs muß die Operation der Subtraktion, wie sie in algebraischen Systemen üblich ist, modifiziert werden. D.h. diese Strukturierung erzeugt andere Strukturen.
[121] Stichweh, R.: Zur Entstehung des modernen Systems wissenschaftlicher Disziplinen: Physik in Deutschland 1740 – 1890, 1984, S. 173
[122] Zwar ist das Symbolschema der reellen Zahlen laut Nelson Goodman ein syntaktisch dichtes System, doch aufgrund des Meßvorgangs werden den an sich kontinuierlichen physikalischen Größen eindeutig Zahlen zugeordnet, deren Ungenauigkeit im Bereich von Fehlertoleranzen festgelegt ist. Meßinstrumente sind Instrumente zur Erzeugung differenzierter Entitäten aus einem Kontinuum. Vrgl. Goodman, 1995, S. 125ff
[123] Vrgl. Böhme, G./van den Daele, W./Krohn, W.: Die neue Wissenschaft der Renaissance, 1977, S. 9f

senschaftlichen Erkenntnisgegenstand.[124] Deutlich zeigt sich dies bei den geometrischen Bildern der Funktionen, die sich als mechanische Bilder interpretieren lassen, indem beispielsweise die Funktion selbst mit dem Weg, die erste Ableitung mit der Geschwindigkeit und die zweite Ableitung mit der Beschleunigung identifiziert wird.[125] Differentialgleichungen beschreiben dann die Gesetzmäßigkeiten in der Entwicklung - Wachstum und Zerfall - dynamischer Systeme, wenn sich der Entwicklungsverlauf als eine Lösungsfunktion bezogen auf die voranschreitende Zeit notieren läßt. So läßt sich beispielsweise begrenztes Wachstum mit der Gleichung $dM/dt = r(k/r - M)$ darstellen, und die Lösung ist die Funktion $M(t) = k/r\,(1 - e^{-rt})$. Der Graph der Funktion wächst anfangs sehr schnell und nähert sich dann dem Grenzwert k/r an, der jedoch nie erreicht wird (Abb. 3). Unbegrenztes Wachstum läßt sich mit der Gleichung $dP/dt = rP$ formulieren und als Funktion $P(t) = Me^{rt}$ lösen (Abb. 4). Das logistische Wachstum wird mit $dP/dt = rP(L - P)$ formuliert, wobei L irgendeine Grenzgröße ist. Die Lösung $P = ML/(M + (L - M)e^{-Lrt})$ ist in Abbildung 5 dargestellt.[126]

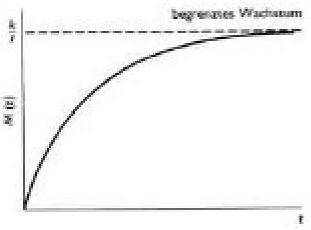

Abb. 3: Begrenztes Wachstum

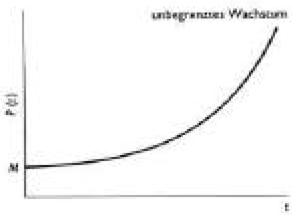

Abb. 4: Unbegrenztes Wachstum

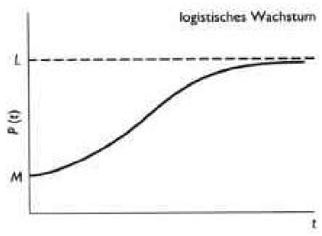

Abb. 5: Logistisches Wachstum

Bereits das geometrische Bild einer Funktion stellt durch die Berechnung eines formalen Terms eine Interpretation dar. Die formale Struktur des Terms generiert durch sukzessive Anwendung auf gegebene Werte, die nach einer festgelegten Ordnung schrittweise voranschreiten, Funktionswerte, deren Dynamik sich graphisch fixiert widerspiegelt, indem die konkreten Wertepaare der Funktion als Punkte in eine Zahlenebene eingetragen werden. Dabei wird ein Wertepaar, das zwei Elemente umfaßt in ein einzelnes, graphisches Zeichen (Punkt) transformiert, das innerhalb eines Koordinatensystems eine zweistellige Relation kodiert und eindeutig durch das Wertepaar notiert ist. Die graphische Interpretation führt visuelle Zeichen (Schriftzeichen) in visuelle Zeichen (graphische Zeichen) über, wobei die strukturellen Eigenschaften erhalten bleiben. Allerdings kodieren graphische Zeichen diese Eigen-

[124] „*Der Gegenstand, der solchen operativen Verfahren unterworfen werden kann, muß dann der Bedingung genügen, als Referenzobjekt der entsprechenden Symbole interpretiert werden zu können*." Krämer, 1988, S. 92

[125] „*Ist die Ableitung einer Funktion für a £ x £ b überall 0, so ist die Funktion eine Konstante. Der Satz ist geometrisch sehr einleuchtend: wenn die Kurve in jedem Punkt genau horizontal gerichtet ist, kann sie nur exakt horizontal fortschreiten, stellt also eine Konstante dar ... noch anschaulicher ist er am mechanischen Bild der Funktion: Ableitung 0 heißt hier die Geschwindigkeit 0, Ruhe. Wenn ein bewegter Punkt in jedem Zeitmoment ruht, dann steht er überhaupt still, sein Ort s ist konstant*." Toeplitz, 1972, S. 94

[126] Die Beispiele wurden entnommen aus: Devlin, 1998, S. 104ff

schaften in einer anderen Art als Schriftzeichen. Die Funktion $f(x) = 2x$ ordnet die Zahlenpaare in voranschreitender Ordnung der natürlichen Zahlen wie folgt an: <1,2>; <2,4>; <3,6>, <4,8> usf. In graphische Zeichen transformiert, stellen diese Zahlenpaare vier Punkte in einer Ebene dar. Die Verbindung der Punkte ist nur erlaubt, wenn die Funktion in dem vorgegebenen Intervall monoton stetig ist, also ohne Sprünge entweder aufsteigt oder absteigt. Da die Steigung nicht immer wie in diesem Beispiel konstant ist ($f'(x) = 2$), müßten theoretisch alle Paare berechnet werden. Dies ist für die reellen Zahlen jedoch in endlicher Zeit nicht durchführbar. Die Differentiation stellt deshalb eine Approximation dar, in welcher sich der Abstand h zwischen zwei Zahlen $h \rightarrow 0$ nähert. Die graphische Umsetzung als eine in einem Intervall durchgängige Kurve abstrahiert diesen Tatbestand. Ein weiterer Unterschied zwischen einer schriftzeichenbasierten und graphischen Interpretation besteht in der Limitierung der Diskretisierung. In endlicher Folge notierte Schriftzeichen sind aus diskreten Zeichen gebildet und bilden wiederum voneinander unterscheidbare, diskrete Zeichen, auch wenn das Symbolschema im Falle der reellen Zeichen syntaktisch dicht ist. Der Erhalt diskreter graphischer Zeichen wie Punkte hängt von der Auflösung der Darstellung ab sowie von dem Faktor, ab wann aufgrund der Dichte und Lage die diskreten Zeichen zu einer Gestalt (graphische Struktur) verschmelzen. Die Übertragung des dynamischen Verhaltens berechenbarer, schriftbasierter Texturen auf graphische Strukturen führt neue Eigenschaften mit sich.

5. Von der Beschreibbarkeit zur Berechenbarkeit

Die Entwicklung von der Formalisierung zur Mechanisierung vollzieht sich in einem grundlegenden Funktionswandel der Schrift, der von der Beschreibbarkeit zur Berechenbarkeit führt. Dabei geht es nicht darum, zwei voneinander unabhängige Funktionen darzustellen, sondern den Zusammenhang zwischen beiden, der sich aus einem Wandel der Verwendungsweise der Schrift ergibt, zu skizzieren. Entscheidend für diesen Wandel ist die Eliminierung des extrasymbolischen Bereichs der Zeichen und die Einführung einer intrasymbolischen Ebene, die den Umgang mit den Zeichen regelt. Dazu ist es nötig, die Verwendung der Zeichen selbst zu symbolisieren (Operationszeichen) und anhand von Regeln zu explizieren. Schrift dient dann nicht mehr der Reproduktion vorgegebener Ordnungen, sondern erlaubt die produktive Erzeugung und Umsetzung beliebiger Ordnungsstrukturen, insofern sich dafür Regeln angeben lassen. Dabei wandeln sich die Zeichensysteme zu prozeßorientierten Strukturen, die sowohl ihre Verwendung als auch die Objekte der Zeichenverwendung (Variablen) anzeigen. Die tatsächliche Ausführung kann zwar im Rahmen der Schriftlichkeit erfolgen, bedarf aber einer handelnden Person. Die Ausführung der Operationen läßt sich jedoch unter bestimmten Bedingungen mechanisieren. Die formal-operative Zeichenverwendung führt nicht nur eine intrasymbolische Ebene im Zeichenumgang ein, sondern kennzeichnet sich dadurch, daß die Zeichen auf sich selbst anwendbar werden. Denn es sind keine extrasymbolischen Objekte oder Sachverhalte auf welche sich die Zeichenverwendung konzentriert, es sind die Symbole selbst, die als Variablen oder Ziffern Gegenstand der Operationen werden. Die Schrift wird hierbei als Produktionssystem, als operative Schrift, verwendet und zeichnet sich durch ihren verfahrensmäßigen bzw. instrumentellen Charakter aus.

Welche Voraussetzungen bringt die Schrift ein, daß diese Entwicklung möglich wird? Die Verschriftung auf Basis der Alphabetisierung schafft eine Technologie, die endlich viele, diskrete graphische Gestalten (Buchstaben) zu linearen Folgen (Worte) zusammenfügt. Dabei notieren in der gesprochenen Sprache die Buchstaben Laute (phonographisches Prinzip) und ihre Ordnung ergibt sich aus der semantisch kodierten Bedeutung. Die Folge der Zeichen {*a*,*b*, *m*, *u*} in der Ordnung W = {*baum*} entspricht einem Wort, dessen semantische Bedeutung aus der konventionellen Zuordnung eines extrasymbolischen Bezugs resultiert. Eine Sprache zum Zwecke der Beschreibung lernen heißt, die gültigen Zeichenfolgen mit den tradierten Bedeutungen zu verknüpfen, wobei sich für die Gültigkeit keine formalen Kriterien angeben lassen. Gültige Zeichenfolgen sind bedeutungsvolle Zeichenfolgen (Ausdrücke).[127] Die Buchstaben selbst sind im Rahmen der natürlichen Sprache nicht bedeutungsvoll, sondern stellen ein syntaktisch disjunktes und differenziertes Symbolschema für die Verschriftung gesprochener Sprache zur Verfügung. Schriftbasierte Zeichen und Zeichenfolgen zu formalisieren bedeutet, ihre Zulässigkeit nicht konventionell aus der semantisch kodierten Bedeutung zu gewinnen, sondern durch die schematische Befolgung expliziter Regeln. Die Schematisierung der Symboloperationen basiert auf einer spezifischen Strukturierung von Zeichensystemen, die regelbasierte Anweisungen in endlichen Texten erfordert, welche schrittweise von Instruktion zu Instruktion leiten.[128] Der Aufforderungscharakter der Anweisungen kann dabei so allgemein formuliert sein, daß diese von einer Maschine ausführbar sind.[129] Im Falle der Mechanisierung müssen die Anweisungen schrittweise in endlich vielen, maschinell ausführbaren Operationen abarbeitbar sein, wobei jeder Schritt regelbasiert in den nächsten übergehen muß.

[127] Semantisch kodierte Ausdrücke unterscheiden sich aufgrund ihres extrasymbolischen Bezugs von den interpretationsfreien Zeichenfolgen. Diese bedeutungsvollen Zeichenfolgen werden in der Semiotik Zeichen genannt und weisen einen, auf der Einteilung von Charles S. Peirce basierenden triadischen Bezug auf. Deshalb ist dieser Zeichenbegriff hier nicht verwendbar.
[128] Dies können umgangssprachliche Rezepte und Algorithmen oder kunstsprachliche Kalküle sein, wobei sich damit auch semantische Ausdrücke schematisch verwenden lassen. D.h. die Formalisierung von Zeichensystemen bedingt über den regelbasierten Zeichenumgang die schematische Ausführung der Regeln, die Schematisierung bedeutet jedoch noch keineswegs eine Formalisierung. Für schriftbasierte Zeichensysteme ist die Relation zwischen Formalisierung und Schematisierung asymmetrisch. Erst die Mechanisierung bedingt eine symmetrische Relation zwischen beiden Strukturierungen des Zeichenumgangs.
[129] Die Eigenschaft der Allgemeinheit fordert, daß der Übergang von Ausführungsschritt zu Ausführungsschritt expliziert ist und daß die Schritte sich voneinander ableiten. Undefinierte Sprünge machen eine Anweisung maschinell unausführbar.

Allgemein gesprochen ist also von schriftbasierten Zeichensystemen die Rede, welche aus einer endlichen Menge diskreter Zeichen bestehen. Schriftbasiert meint, die Entitäten des Systems sind graphisch realisierte Konfigurationen, die syntaktisch disjunkt und differenziert sind und deren Speicherung mit der Präsentation identisch ist. Durch die Kennzeichnung besonderer Zeichen als Operationszeichen lassen sich in den Zeichensystemen Zeichenfolgen bilden, die über die Eigenschaft *Teil einer Folge zu sein* hinaus weitere Eigenschaften anzeigen, welche sich aus den Relationen zwischen den Zeichen – gekennzeichnet als Operationen – ergeben. Solche Zeichenfolgen werden formale Strukturen oder Formeln genannt.[130] Formale Strukturen besitzen die Eigenschaft, im Prinzip berechenbar zu sein, insofern die entsprechenden Operationen definiert, auf einen geordneten Objektbereich anwendbar und die erzeugten Zeichen ebenfalls definiert sind.[131] Die Berechnung stellt eine Form der Interpretation formaler Strukturen dar, indem die Zeichen als berechenbare Zeichen verwendet werden, welche nicht nur syntaktisch disjunkte und differenzierte graphische Konfigurationen sind, sondern semantisch eindeutig geordnete Entitäten symbolisieren, die Werte genannt werden (l = w, f; n = 1, 2, ...). Im Unterschied zu Worten läßt sich die Semantik der Werte formalisieren und mechanisieren. Die Berechnung der Symboloperationen basiert auf einer spezifischen Strukturierung von Zeichensystemen, welche einen funktionalen Zusammenhang zwischen Zeichen oder formalen Strukturen zu Zeichen eines Anwendungsbereiches geordneter Entitäten artikuliert (Funktionen). Die Gestalt des funktionalen Zusammenhangs zeigt sich anhand des Entwicklungsverlaufs der berechneten Werte, dessen Verhalten durch eine abgeleitete Struktur beschreibbar ist. Funktionen sind semiotische Maschinen zur Erzeugung definierter Werte, die unter spezifischen Bedingungen mechanisiert werden können.[132]

Der Weg von der Beschreibbarkeit zur Berechenbarkeit führt von der Formalisierung zur Schematisierung und gegebenenfalls zur Mechanisierung der Zeichenverwendung. Im Laufe dieser Entwicklung erhalten schriftbasierte Zeichen, die in semantisch kodierten Zusammenhängen konventionell festgelegt und damit lesbar sind, den Status beliebiger graphischer Entitäten, die angewandt auf geordnete Objektbereiche, berechenbar werden. Somit lassen sich mit dem Symbolsystem der Schrift sowohl Beschreibungen als auch Berechnungen ausführen. Ein Zusammenhang ist beschreibbar, indem endlich viele Worte zu Sätzen strukturiert zusammengefügt werden, so daß bedeutungsvolle und nachprüfbare Aussagen entstehen. Ein Zusammenhang ist formal darstellbar, wenn die Struktur der Aus-

[130] a + b meint: a steht mit b in Relation der Addition bzw. die Addition ist eine zweistellige Relation, die zwei Zeichen miteinander verknüpft. Die Addition ist eine spezifische Operation, die aus der Ausführung festgelegter Additionsregeln resultiert. a + b ist eine algebraische Struktur oder Formel, da die Addition laut den Regeln Teil einer algebraischen Zeichenverwendung ist.
[131] Nicht jede Formel ist tatsächlich berechenbar. Es sind auch nicht-formale Strukturen denkbar, die berechenbar sind. Allerdings handelt es sich dann um natürlichsprachliche Formulierungen formaler Strukturen.
[132] Partiell rekursive Funktionen und aussagelogische Funktionen sind mechanisierbar.

sage in ein formalisiertes Zeichensystem widerspruchsfrei übertragen und die Zeichenfolgen gemäß regelbasierten Operationen umgeformt werden können. Ein Zusammenhang ist berechenbar, falls die formale Struktur funktionalisierbar ist und auf eine Grundmenge geordneter Entitäten angewandt werden kann.